

Tartalomjegyzék

1. Aritmetika	1
1.1. Elemi számolási szabályok	1
1.1.1. Számok	1
1.1.1.1. Természetes, egész és racionális számok	1
1.1.1.2. Irracionális és transzcendens számok	1
1.1.1.3. Valós számok	2
1.1.2. Bizonyítási módszerek	4
1.1.2.1. Direkt bizonyítás	4
1.1.2.2. Indirekt (ellentmondással történő) bizonyítás	4
1.1.2.3. Teljes indukció	5
1.1.2.4. Konstruktív bizonyítás	5
1.1.2.5. Nemkonstruktív bizonyítás	5
1.1.3. Összegek és szorzatok	6
1.1.3.1. Összegek	6
1.1.3.2. Szorzatok	7
1.1.4. Hatványok, gyökök, logaritmusok	7
1.1.4.1. Hatványok	7
1.1.4.2. Gyökök	8
1.1.4.3. Logaritmusok	9
1.1.4.4. Speciális logaritmusok	9
1.1.5. Algebrai kifejezések	10
1.1.5.1. Definíciók	10
1.1.5.2. Az algebrai kifejezések osztályozása	11
1.1.6. Racionális egész kifejezések	11
1.1.6.1. Előállítás polinomalakban	11
1.1.6.2. Polinom felbontása tényezőkre	11
1.1.6.3. Speciális képletek	11
1.1.6.4. Binomiális tétel	12
1.1.6.5. Két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározása	14
1.1.7. Racionális törtek kifejezések	14
1.1.7.1. Visszavezetés a legegyszerűbb alakra	14
1.1.7.2. A racionális egész rész meghatározása	15
1.1.7.3. Parciális törtekre bontás	15
1.1.7.4. Arányosságok átalakítása	16
1.1.8. Irracionális kifejezések	17
1.2. Véges sorok	17
1.2.1. A véges sor definíciója	17
1.2.2. Számítási sorok	17
1.2.3. Mértani sor	18
1.2.4. Speciális véges sorok	19
1.2.5. Középértékek	19

	1.2.5.1.	Számtani közép	19
	1.2.5.2.	Mértani közép	19
	1.2.5.3.	Harmonikus közép	20
	1.2.5.4.	Négyzetes közép	20
	1.2.5.5.	A középértékek összehasonlítása két pozitív $a \leq b$ mennyiség esetén	20
1.3.		Pénzügyi matematika	20
	1.3.1.	Százalékszámítás	20
	1.3.2.	Kamatoskamat-számítás	21
	1.3.3.	Törlesztésszámítás	22
	1.3.3.1.	Törlesztés	22
	1.3.3.2.	Egyenlő törlesztőrészek	22
	1.3.3.3.	Egyenlő annuitások	23
	1.3.4.	Járadékszámítás	24
	1.3.4.1.	Járadék	24
	1.3.4.2.	Utólagos konstans járadék	24
	1.3.4.3.	Számlaegyenleg n -szeri járadékfizetés után	24
	1.3.5.	Leírások	25
1.4.		Egyenlőtlenségek	28
	1.4.1.	Tiszta egyenlőtlenségek	28
	1.4.1.1.	Definíciók	28
	1.4.1.2.	Az I. és II. típusú egyenlőtlenségek tulajdonságai	28
	1.4.2.	Speciális egyenlőtlenségek	29
	1.4.2.1.	Háromszög-egyenlőtlenség	29
	1.4.2.2.	Egyenlőtlenségek két szám különbségének abszolút értékére	29
	1.4.2.3.	A számtani és a mértani középére vonatkozó egyenlőtlenség	30
	1.4.2.4.	A számtani és a négyzetes középére vonatkozó egyenlőtlenség	30
	1.4.2.5.	Valós számok különféle középértékeire vonatkozó egyenlőtlenségek	30
	1.4.2.6.	Bernoulli-egyenlőtlenség	30
	1.4.2.7.	Binomiális egyenlőtlenség	30
	1.4.2.8.	Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség	30
	1.4.2.9.	Csebisev-egyenlőtlenség	31
	1.4.2.10.	Általánosított Csebisev-egyenlőtlenség	31
	1.4.2.11.	Hölder-egyenlőtlenség	32
	1.4.2.12.	Minkowski-egyenlőtlenség	32
	1.4.3.	Első- és másodfokú egyenlőtlenségek megoldása	32
	1.4.3.1.	Általános rész	32
	1.4.3.2.	Elsőfokú egyenlőtlenségek	33
	1.4.3.3.	Másodfokú egyenlőtlenségek	33
	1.4.3.4.	A másodfokú egyenlőtlenség általános esete	33
1.5.		Komplex számok	34
	1.5.1.	Képzetes és komplex számok	34
	1.5.1.1.	Képzetes egység	34
	1.5.1.2.	Komplex számok	34
	1.5.2.	Geometriai szemléltetés	34
	1.5.2.1.	Előállítás vektoralakban	34
	1.5.2.2.	Komplex számok egyenlősége	35
	1.5.2.3.	Komplex számok trigonometrikus alakja	35
	1.5.2.4.	Komplex szám exponenciális alakja	35
	1.5.2.5.	Konjugált komplex számok	36
	1.5.3.	Számolás komplex számokkal	36
	1.5.3.1.	Összeadás és kivonás	36
	1.5.3.2.	Szorzás	36

	1.5.3.3.	Osztás	37
	1.5.3.4.	A négy alpműveletre vonatkozó általános szabályok	37
	1.5.3.5.	Komplex szám hatványozása	37
	1.5.3.6.	Komplex szám n -edik gyökének meghatározása	38
1.6.		Algebrai és transzcendens egyenletek	38
1.6.1.		Algebrai egyenletek normálalakra hozása	38
	1.6.1.1.	Definíció	38
	1.6.1.2.	n számú algebrai egyenletből álló rendszerek	38
	1.6.1.3.	Hamis gyökök	39
1.6.2.		1.–4. fokú egyenletek	39
	1.6.2.1.	Elsőfokú (lineáris) egyenletek	39
	1.6.2.2.	Másodfokú (kvadrátikus) egyenletek	39
	1.6.2.3.	Harmadfokú egyenletek	40
	1.6.2.4.	Negyedfokú egyenletek	41
	1.6.2.5.	Ötöd- és magasabbfokú egyenletek	42
1.6.3.		n -edfokú egyenletek	42
	1.6.3.1.	Algebrai egyenletek általános tulajdonságai	42
	1.6.3.2.	Valós együtthatójú egyenletek	43
1.6.4.		Transzcendens egyenletek visszavezetése algebrai egyenletekre	45
	1.6.4.1.	Definíció	45
	1.6.4.2.	Exponenciális egyenletek	45
	1.6.4.3.	Logaritmikus egyenletek	45
	1.6.4.4.	Trigonometrikus egyenletek	45
	1.6.4.5.	Egyenletek hiperbolikus függvényekkel	46
2.		Függvények és előállításuk	47
2.1.		A függvény fogalma	47
2.1.1.		A függvény definíciója	47
	2.1.1.1.	Függvény	47
	2.1.1.2.	Valós függvény	47
	2.1.1.3.	Többváltozós függvény	47
	2.1.1.4.	Komplex függvény	47
	2.1.1.5.	További függvények	47
	2.1.1.6.	Funkcionálok	47
	2.1.1.7.	Függvény és leképezés	48
2.1.2.		Módszerek valós függvények értelmezésére	48
	2.1.2.1.	Függvény megadása	48
	2.1.2.2.	Valós függvény analitikus előállítása	49
2.1.3.		Néhány függvényfajta	49
	2.1.3.1.	Monoton függvények	49
	2.1.3.2.	Korlátos függvények	50
	2.1.3.3.	Függvény szélsőértékei	50
	2.1.3.4.	Páros függvények	50
	2.1.3.5.	Páratlan függvények	50
	2.1.3.6.	Előállítás páros és páratlan függvény segítségével	51
	2.1.3.7.	Periodikus függvények	51
	2.1.3.8.	Inverz függvény	51
2.1.4.		Függvény határértéke	52
	2.1.4.1.	Függvény határértékének definíciója	52
	2.1.4.2.	Visszavezetés sorozat határértékére	52
	2.1.4.3.	A Cauchy-féle konvergenciakritérium	53
	2.1.4.4.	Végtelen mint függvény-határérték	53

2.1.4.5.	Függvény bal oldali és jobb oldali határértéke	53
2.1.4.6.	Függvény határértéke a végtelenben	54
2.1.4.7.	Függvények határértékeire vonatkozó tételek	54
2.1.4.8.	Határértékek kiszámítása	55
2.1.4.9.	Függvények nagyságrendje és a Landau-féle szimbólumok	56
2.1.5.	Függvény folytonossága	58
2.1.5.1.	A folytonosság és a szakadási hely fogalma	58
2.1.5.2.	A folytonosság definíciója	58
2.1.5.3.	Gyakran fellépő szakadásfajták	58
2.1.5.4.	Elemi függvények folytonossága és szakadási helyei	59
2.1.5.5.	Folytonos függvények tulajdonságai	60
2.2.	Elemi függvények	61
2.2.1.	Algebrai függvények	61
2.2.1.1.	Racionális egész függvények (polinomok)	61
2.2.1.2.	Racionális törtfüggvények	62
2.2.1.3.	Irracionális függvények	62
2.2.2.	Transzcendens függvények	62
2.2.2.1.	Exponenciális függvények	62
2.2.2.2.	Logaritmusfüggvények	62
2.2.2.3.	Trigonometrikus függvények	62
2.2.2.4.	Inverz trigonometrikus függvények	62
2.2.2.5.	Hiperbolikus függvények	63
2.2.2.6.	Inverz hiperbolikus függvények	63
2.3.	Polinomok	63
2.3.1.	Lineáris függvény	63
2.3.2.	Másodfokú polinom	63
2.3.3.	Harmadfokú polinom	64
2.3.4.	n -edfokú polinom	64
2.3.5.	n -edrendű parabola	65
2.4.	Racionális törtfüggvények	65
2.4.1.	Fordított arányosság	65
2.4.2.	Harmadrendű görbe, I. típus	66
2.4.3.	Harmadrendű görbe, II. típus	66
2.4.4.	Harmadrendű görbe, III. típus	67
2.4.5.	Reciprok hatvány	69
2.5.	Irracionális függvények	70
2.5.1.	Lineáris binom négyzetgyöke	70
2.5.2.	Másodfokú polinom négyzetgyöke	70
2.5.3.	Hatványfüggvény	71
2.6.	Exponenciális és logaritmusfüggvények	72
2.6.1.	Exponenciális függvények	72
2.6.2.	Logaritmusfüggvények	72
2.6.3.	Gauss-féle haranggörbe	72
2.6.4.	Exponenciális összeg	73
2.6.5.	Általánosított Gauss-féle haranggörbe	74
2.6.6.	Hatványfüggvény és exponenciális függvény szorzata	74
2.7.	Trigonometrikus függvények	75
2.7.1.	Elemi tudnivalók	75
2.7.1.1.	Definíció és ábrázolás	75
2.7.1.2.	Értékkészletek és a függvények menete	78
2.7.2.	Trigonometrikus függvényekre vonatkozó további fontos formulák	80
2.7.2.1.	Trigonometrikus függvények közötti összefüggések	80

2.7.2.2.	Trigonometrikus függvények szögek összegéhez, ill. különbségéhez tartozó értékei	80
2.7.2.3.	Trigonometrikus függvények szögek többszöröseihez tartozó értékei	81
2.7.2.4.	Trigonometrikus függvények szög feléhez tartozó értékei (félszögtételek)	82
2.7.2.5.	Trigonometrikus függvények két értékének összege, ill. különbsége (addíciós tételek)	82
2.7.2.6.	Trigonometrikus függvények értékeinek szorzata	82
2.7.2.7.	Trigonometrikus függvények hatványai	83
2.7.3.	Rezgések leírása	83
2.7.3.1.	A probléma megfogalmazása	83
2.7.3.2.	Rezgések szuperpozíciója vagy összetétele	84
2.7.3.3.	Rezgések vektordiagramja	84
2.7.3.4.	Rezgések csillapítása	85
2.8.	Ciklometrikus függvények (árkuszfűggvények)	85
2.8.1.	A ciklometrikus függvények definíciója	86
2.8.2.	Visszavezetés a főértékekre	86
2.8.3.	Összefűggések a főértékek között	86
2.8.4.	Képletek ellentett argumentumpárokra	87
2.8.5.	$\arcsin x$ és $\arcsin y$ összege és különbsége	87
2.8.6.	$\arccos x$ és $\arccos y$ összege és különbsége	88
2.8.7.	$\operatorname{arctg} x$ és $\operatorname{arctg} y$ összege és különbsége	88
2.8.8.	Speciális összefűggések az $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ függvényekre	88
2.9.	Hiperbolikus függvények	89
2.9.1.	A hiperbolikus függvények definíciója	89
2.9.2.	A hiperbolikus függvények grafikus előállítása	89
2.9.2.1.	Szinusz hiperbolikus	89
2.9.2.2.	Koszinusz hiperbolikus	89
2.9.2.3.	Tangens hiperbolikus	90
2.9.2.4.	Kotangens hiperbolikus	90
2.9.3.	Hiperbolikus függvényekre vonatkozó fontos képletek	91
2.9.3.1.	Egyező argumentumú hiperbolikus függvények	91
2.9.3.2.	Hiperbolikus függvény előállítása azonos argumentumú másikkal	91
2.9.3.3.	Ellentett argumentumpárokra vonatkozó képletek	91
2.9.3.4.	Hiperbolikus függvények két argumentum összegéhez és különbségéhez tartozó értékei (addíciós tételek)	91
2.9.3.5.	Hiperbolikus függvényeknek az eredeti argumentum kétszeresén felvett értékei	92
2.9.3.6.	Moivre-képlet hiperbolikus függvényekre	92
2.9.3.7.	Hiperbolikus függvényeknek az eredeti argumentum felén felvett értékei	92
2.9.3.8.	Hiperbolikus függvény két helyen felvett értékének összege és különbsége sh-val és/vagy ch-val kifejezve	92
2.9.3.9.	Összefűggés a hiperbolikus és a trigonometrikus függvények között komplex z argumentum esetén	92
2.10.	Áreafűggvények	93
2.10.1.	Definíciók	93
2.10.1.1.	Área szinusz hiperbolikus	93
2.10.1.2.	Área koszinusz hiperbolikus	93
2.10.1.3.	Área tangens hiperbolikus	94
2.10.1.4.	Área kotangens hiperbolikus	94
2.10.2.	Az áreafűggvények előállítása a természetes alapú logaritmussal	94

2.10.3.	Összefüggések a különböző áreafüggvények között	95
2.10.4.	Áreafüggvények két értékének összege és különbsége	95
2.10.5.	Képletek ellentett argumentumpárokra	95
2.11.	Harmadrendű görbék	95
2.11.1.	Neil-parabola	95
2.11.2.	Agnesi-féle kürt (verziera)	96
2.11.3.	Descartes-levél	96
2.11.4.	Cisszoid	97
2.11.5.	Sztrofoid	97
2.12.	Negyedrendű görbék	98
2.12.1.	Nikomedes-féle konchoid	98
2.12.2.	Általános konchoid	99
2.12.3.	Pascal-féle csiga	99
2.12.4.	Kardioid	100
2.12.5.	Cassini-féle görbék	101
2.12.6.	Lemniskáta	102
2.13.	Cikloisok	102
2.13.1.	Közöséges ciklois	102
2.13.2.	Hurkolt és nyújtott cikloisok, más néven trochoidok	103
2.13.3.	Epiciklois	104
2.13.4.	Hipociklois és asztroid	106
2.13.5.	Hurkolt és nyújtott epiciklois és hipociklois	106
2.14.	Spirálok	107
2.14.1.	Archimédeszi spirál	107
2.14.2.	Hiperbolikus spirál	107
2.14.3.	Logaritmikus spirál	108
2.14.4.	A kör evolvensze	108
2.14.5.	Klotoid	109
2.15.	Különféle egyéb görbék	109
2.15.1.	Láncgörbe	109
2.15.2.	Traktrix	110
2.16.	Empirikus görbék meghatározása	110
2.16.1.	A módszer vázlata	110
2.16.1.1.	Függvénygörbék összehasonlítása	110
2.16.1.2.	Rektifikálás	110
2.16.1.3.	A paraméterek meghatározása	111
2.16.2.	A leggyakrabban használt empirikus képletek	111
2.16.2.1.	Hatványfüggvények	111
2.16.2.2.	Exponenciális függvények	112
2.16.2.3.	Másodfokú polinom	113
2.16.2.4.	Lineáris törtfüggvény	113
2.16.2.5.	Másodfokú polinom négyzetgyöke	114
2.16.2.6.	Általánosított Gauss-féle haranggörbe	114
2.16.2.7.	Harmadrendű görbe, II. típus	114
2.16.2.8.	Harmadrendű görbe, III. típus	114
2.16.2.9.	Harmadrendű görbe, I. típus	115
2.16.2.10.	Hatványfüggvény és exponenciális függvény szorzata	115
2.16.2.11.	Exponenciális összeg	116
2.17.	Skálák és függvénypapírok	118
2.17.1.	Skálák	118
2.17.2.	Függvénypapírok	119
2.17.2.1.	Egyszer logaritmikus függvénypapír	119

2.17.2.2.	Kétszer logaritmikus függvénypapír	120
2.17.2.3.	Függvénypapír reciprok skálával	120
2.17.2.4.	Megjegyzés	121
2.18.	Többváltozós függvények	121
2.18.1.	Definíció és előállítás	121
2.18.1.1.	Többváltozós függvények előállítása	121
2.18.1.2.	Többváltozós függvények geometriai ábrázolása	122
2.18.2.	Különböző értelmezési tartományok a síkban	122
2.18.2.1.	Függvény értelmezési tartománya	122
2.18.2.2.	Kétdimenziós tartományok	122
2.18.2.3.	Három- és többdimenziós tartományok	123
2.18.2.4.	Függvényértelmezési módszerek	123
2.18.2.5.	Függvények analitikus előállítási módjai	124
2.18.2.6.	Függvények összefüggése	126
2.18.3.	Határértékek	127
2.18.3.1.	Definíció	127
2.18.3.2.	Egzakt megfogalmazás	128
2.18.3.3.	Általánosítás több változóra	128
2.18.3.4.	Többszörös határértékek	128
2.18.4.	Folytonosság	128
2.18.5.	Folytonos függvények tulajdonságai	129
2.18.5.1.	Bolzano zérushely-tétele	129
2.18.5.2.	Közbülsőérték-tétel	129
2.18.5.3.	Függvény korlátosságáról szóló tétel	129
2.18.5.4.	Weierstrass tétele a legnagyobb és legkisebb függvényérték létezéséről	129
3.	Geometria	130
3.1.	Síkgeometria	130
3.1.1.	Alapfogalmak	130
3.1.1.1.	Pont, egyenes, félegyenes, szakasz	130
3.1.1.2.	Szög	130
3.1.1.3.	Két metsző egyenesnél fellépő szögek	130
3.1.1.4.	Párhuzamosokat metsző egyenesnél fellépő szögpárok	131
3.1.1.5.	Szög kifejezése fokokban és ívmértékben	131
3.1.2.	A körfüggvények és a hiperbolikus függvények geometriai definíciója	132
3.1.2.1.	A kör- vagy trigonometrikus függvények definíciója	132
3.1.2.2.	A hiperbolikus függvények geometriai definíciója	133
3.1.3.	Síkháromszögek	134
3.1.3.1.	Síkháromszögekre vonatkozó állítások	134
3.1.3.2.	Szimmetria	135
3.1.4.	Síknégyszögek	136
3.1.4.1.	Paralelogramma	136
3.1.4.2.	Téglalap és négyzet	137
3.1.4.3.	Rombusz	137
3.1.4.4.	Trapéz	137
3.1.4.5.	Általános négyszög	138
3.1.5.	Síkbeli sokszögek	138
3.1.6.	Síkbeli köralakzatok	139
3.1.6.1.	Kör	139
3.1.6.2.	Körszelet és körcikk	140
3.1.6.3.	Körgyűrű	140

3.2.	Síkbeli trigonometria	141
3.2.1.	Háromszögek adatainak kiszámítása	141
3.2.1.1.	Derékszögű síkháromszögekre vonatkozó számolások	141
3.2.1.2.	Síkháromszögekre vonatkozó számolások	142
3.2.2.	Geodéziai alkalmazások	143
3.2.2.1.	Geodéziai koordináták	143
3.2.2.2.	Szögek a geodéziában	145
3.2.2.3.	Méréstechnikai alkalmazások	147
3.3.	Térgeometria	150
3.3.1.	Egyenesek és síkok a térben	150
3.3.2.	Élek, csúcok, térszögek	151
3.3.3.	Poliéderek	152
3.3.4.	Gömbült felületekkel határolt testek	154
3.4.	Gömbháromszögtan (szférikus trigonometria)	158
3.4.1.	A gömbfelület geometriájának alapfogalmai	158
3.4.1.1.	Görbék, ívek és szögek a gömbön	158
3.4.1.2.	Speciális koordinátarendszerek	160
3.4.1.3.	Gömbkétszög	161
3.4.1.4.	Gömbháromszög	162
3.4.1.5.	Polárgömbháromszög	162
3.4.1.6.	Euler-féle és nem Euler-féle háromszögek	163
3.4.1.7.	Triéder	163
3.4.2.	A gömbháromszögek fő tulajdonságai	163
3.4.2.1.	Általános állítások	163
3.4.2.2.	Alapképletek és alkalmazásai	164
3.4.2.3.	További képletek	167
3.4.3.	Gömbháromszögek megoldása	168
3.4.3.1.	Alapfeladatok, pontossági megfontolások	168
3.4.3.2.	Derékszögű gömbháromszög	168
3.4.3.3.	Ferdeszögű gömbháromszög	170
3.4.3.4.	Gömbfelületi görbék	172
3.5.	Vektoralgebra és analitikus geometria	180
3.5.1.	Vektoralgebra	180
3.5.1.1.	A vektor definíciója, számolási szabályok	180
3.5.1.2.	Skaláris szorzat és vektoriális szorzat	183
3.5.1.3.	Többszörös szorzási kapcsolatok	185
3.5.1.4.	Vektoregyenletek	187
3.5.1.5.	Vektor kovariáns és kontravariáns koordinátái	187
3.5.1.6.	A vektoralgebra geometriai alkalmazásai	189
3.5.2.	A sík analitikus geometriája	189
3.5.2.1.	Alapvető fogalmak és képletek, síkbeli koordinátarendszerek	189
3.5.2.2.	Egyenes	193
3.5.2.3.	Kör	196
3.5.2.4.	Ellipszis	197
3.5.2.5.	Hiperbola	200
3.5.2.6.	Parabola	203
3.5.2.7.	Másodrendű görbék (kúpszeletek)	204
3.5.3.	A tér analitikus geometriája	207
3.5.3.1.	Alapvető tudnivalók, térbeli koordinátarendszerek	207
3.5.3.2.	Térbeli egyenes és sík	214
3.5.3.3.	Másodrendű felületek, az egyenletek normálalakja	220
3.5.3.4.	Másodrendű felületek, általános elmélet	223

3.6.	Differenciálgeometria	224
3.6.1.	Síkgörbék	225
3.6.1.1.	Lehetőségek síkgörbék definiálására	225
3.6.1.2.	Görbék lokális alkotóelemei	225
3.6.1.3.	Görbék kitüntetett pontjai, aszimptoták	231
3.6.1.4.	Görbék általános vizsgálata egyenletük alapján	235
3.6.1.5.	Evoluták és evolvenssek	236
3.6.1.6.	Görbeseregek burkolói	237
3.6.2.	Térgörbék	238
3.6.2.1.	Térgörbék definiálására alkalmas lehetőségek	238
3.6.2.2.	Kísérő triéder	238
3.6.2.3.	Görbület és torzió	240
3.6.3.	Felületek	243
3.6.3.1.	Felület definiálására alkalmas lehetőségek	243
3.6.3.2.	Érintősík és felületi normális	244
3.6.3.3.	Felületi vonalelem	246
3.6.3.4.	Felület görbülete	247
3.6.3.5.	Vonalfelületek és lefejthető felületek	250
3.6.3.6.	Felület geodetikus vonalai	250
4.	Lineáris algebra	251
4.1.	Mátrixok	251
4.1.1.	A mátrix fogalma	251
4.1.2.	Kvadratikus mátrixok	252
4.1.3.	Vektorok	253
4.1.4.	Mátrixműveletek	253
4.1.5.	Mátrixműveletek szabályai	257
4.1.6.	Vektor- és mátrixnorma	258
4.1.6.1.	Vektornormák	258
4.1.6.2.	Mátrixnormák	258
4.2.	Determinánsok	259
4.2.1.	Definíciók	259
4.2.1.1.	Determinánsok	259
4.2.1.2.	Aldeterminánsok	259
4.2.2.	Determinánsok számítási szabályai	259
4.2.3.	Determinánsok kiszámítása	260
4.3.	Tenzorok	261
4.3.1.	Koordinátarendszerek transzformációja	261
4.3.2.	Tenzorok megadása derékszögű koordinátákkal	262
4.3.3.	Speciális tulajdonságú tenzorok	264
4.3.3.1.	Másodrendű tenzorok	264
4.3.3.2.	Invariáns tenzorok	264
4.3.4.	Tenzorok görbevonali koordinátarendszerekben	265
4.3.4.1.	Kovariáns és kontravariáns bázisvektorok	265
4.3.4.2.	Elsőrendű tenzorok kovariáns és kontravariáns koordinátái	266
4.3.4.3.	Kovariáns, kontravariáns és vegyes koordinátái a másodrendű tenzoroknak	266
4.3.4.4.	Számítási szabályok	268
4.3.5.	Pszudotenzorok	268
4.3.5.1.	Ponttükrözés a koordinátarendszer kezdőpontjára	268
4.3.5.2.	Pszudotenzor fogalmának a bevezetése	269
4.4.	Lineáris egyenletrendszerek	270

4.4.1.	Lineáris rendszerek, elemcsere-eljárás	270
4.4.1.1.	Lineáris rendszerek	270
4.4.1.2.	Elemcsere-eljárás	270
4.4.1.3.	Lineáris függőség	271
4.4.1.4.	Mátrix invertálása	271
4.4.2.	Lineáris egyenletrendszerek megoldása	272
4.4.2.1.	Definíció és megoldhatóság	272
4.4.2.2.	Az elemcsere-eljárás alkalmazása	273
4.4.2.3.	Cramer-szabály	274
4.4.2.4.	Gauss-féle algoritmus	275
4.4.3.	Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek	276
4.4.3.1.	Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek és lineárisnégyzetes közép problémák	276
4.4.3.2.	A legkisebb négyzetek feladatának numerikus megoldása	277
4.5.	Mátrixok sajátérték-feladata	277
4.5.1.	Általános sajátérték-probléma	277
4.5.2.	Speciális sajátérték-probléma	277
4.5.2.1.	Karakterisztikus polinom	277
4.5.2.2.	Valós szimmetrikus mátrixok, hasonlósági transzformáció	279
4.5.2.3.	Kvadratikus alakok főtengeletranszformációja	280
4.5.2.4.	Útmutatás a sajátértékek numerikus meghatározásához	281
4.5.3.	Szinguláris értékek szerinti felbontás	281
5.	Algebra és diszkrét matematika	283
5.1.	Logika	283
5.1.1.	Ítéletkalkulus	283
5.1.2.	A predikátumkalkulus kifejezései	286
5.2.	Halmazelmélet	287
5.2.1.	A halmaz fogalma, különleges halmazok	287
5.2.2.	Műveletek halmazokkal	288
5.2.3.	Relációk és leképezések	291
5.2.4.	Ekvivalencia és rendezési relációk	293
5.2.5.	Halmazok számossága	295
5.3.	Klasszikus algebrai struktúrák	295
5.3.1.	Műveletek	295
5.3.2.	Félcsoportok	295
5.3.3.	Csoportok	296
5.3.3.1.	Definíció és alapvető tulajdonságok	296
5.3.3.2.	Részcsoportok és direkt szorzatok	297
5.3.3.3.	Csoportok közötti leképezések	299
5.3.3.4.	Lie-csoportok	303
5.3.3.5.	Lie-algebrák.	306
5.3.3.6.	Félegyszerű Lie-csoportok leképezése	308
5.3.4.	Csoportok alkalmazásai	311
5.3.4.1.	Szimmetria műveletek, szimmetria elemek	311
5.3.4.2.	Szimmetria csoportok	312
5.3.4.3.	Molekulák szimmetria műveletei	312
5.3.4.4.	A krisztallográfia szimmetria csoportjai	313
5.3.4.5.	A kvantummechanika szimmetria csoportjai	316
5.3.4.6.	Részecskefizikai alkalmazások	316
5.3.4.7.	További fizikai alkalmazási példák	319
5.3.5.	Gyűrűk és testek	320

	5.3.5.1.	Definíciók	320
	5.3.5.2.	Részgyűrűk, ideálok	320
	5.3.5.3.	Homomorfizmusok, izomorfizmusok, homomorfia tétel	321
5.3.6.		Vektorterek	321
	5.3.6.1.	Definíció	321
	5.3.6.2.	Lineáris függőség	322
	5.3.6.3.	Lineáris leképezések	322
	5.3.6.4.	Alterek, dimenziótétel	322
	5.3.6.5.	Euklideszi vektorterek, euklideszi norma	323
	5.3.6.6.	Lineáris operátorok vektorterekben	324
5.4.		Elemi számelmélet	324
	5.4.1.	Oszthatóság	324
		5.4.1.1. Oszthatóság és alapvető oszthatósági szabályok	324
		5.4.1.2. Prímszámok	325
		5.4.1.3. Oszthatósági kritériumok	326
		5.4.1.4. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös	327
		5.4.1.5. Fibonacci-számok	329
	5.4.2.	Lineáris Diophantoszi egyenletek	329
	5.4.3.	Kongruenciák és maradékosztályok	331
	5.4.4.	Fermat, Euler és Wilson tétele	335
	5.4.5.	Kódok	336
5.5.		Kriptológia	338
	5.5.1.	A kriptológia feladata	338
	5.5.2.	Titkosítási rendszerek	338
	5.5.3.	Matematikai megfogalmazás	338
	5.5.4.	Titkosítási rendszerek biztonsága	339
		5.5.4.1. A klasszikus kriptológia módszerei	339
		5.5.4.2. Cserével végzett titkosítás	340
		5.5.4.3. A Vigenere-kód	340
		5.5.4.4. Mátrix helyettesítések	340
	5.5.5.	A klasszikus kriptóanalízis módszerei	341
		5.5.5.1. Statisztikus analízis	341
		5.5.5.2. A Kasiski–Friedman-próba	341
	5.5.6.	One-Time-Tape	342
	5.5.7.	Nyilvános kulcsú eljárások	342
		5.5.7.1. Diffie és Hellman koncepciója	342
		5.5.7.2. Egyirányú függvények	343
		5.5.7.3. RSA eljárás	343
	5.5.8.	DES algoritmus (Data Encryption Standard)	343
	5.5.9.	IDEA algoritmus (International Data Encryption Algorithm)	344
5.6.		Univerzális algebra	344
	5.6.1.	Definíció	344
	5.6.2.	Kongruencia relációk, faktoralgebrák	345
	5.6.3.	Homomorfizmusok	345
	5.6.4.	Homomorfia tétel	345
	5.6.5.	Varietasok	345
	5.6.6.	Kijelentésalgebrák, szabad algebrák	346
5.7.		Boole-algebrák és kapcsolási algebrák	346
	5.7.1.	Definíció	346
	5.7.2.	A dualitási elv	347
	5.7.3.	Véges Boole-algebrák	347
	5.7.4.	Boole-algebra mint rendezés	348

5.7.5.	Boole-függvények, Boole-kifejezések	348
5.7.6.	Normálformák	349
5.7.7.	Kapcsolások algebrája	350
5.8.	Gráfelméleti algoritmusok	351
5.8.1.	Alapfogalmak és jelölések	351
5.8.2.	Irányítatlan gráfok bejárása	354
5.8.2.1.	Élsorozatok	354
5.8.2.2.	Euler-utak	356
5.8.2.3.	Hamilton-körök	357
5.8.3.	Fák és favázak	358
5.8.3.1.	Fák	358
5.8.3.2.	Feszítő fa	359
5.8.4.	Párosítások	360
5.8.5.	Síkgráfok	361
5.8.6.	Pályák irányított gráfokban	361
5.8.7.	Szállítási hálózatok	363
5.9.	Fuzzy logika	364
5.9.1.	A fuzzy logika alapja	364
5.9.1.1.	A fuzzy halmazok értelmezése	364
5.9.1.2.	Tagsági függvények	365
5.9.1.3.	Fuzzy halmazok	368
5.9.2.	Fuzzy halmazműveletek	369
5.9.2.1.	Általános fuzzy halmazműveletek	369
5.9.2.2.	A gyakorlatban használt fuzzy halmazműveletek	370
5.9.2.3.	Aggregációs vagy kompenzáló operátorok	371
5.9.2.4.	Kiterjesztési szabály	373
5.9.2.5.	Fuzzy komplementfüggvény	373
5.9.3.	Fuzzy relációk	373
5.9.3.1.	Fuzzy relációk folalma	373
5.9.3.2.	Fuzzy szorzatreláció $R \circ S$	375
5.9.4.	Fuzzy következtető rendszerek	376
5.9.5.	Kiértékelési (defuzzyfikációs) módszerek	378
5.9.6.	Tudásalapú fuzzy rendszerek	378
5.9.6.1.	A Mamdani-módszer	379
5.9.6.2.	A Sugeno-módszer	379
5.9.6.3.	Alkalmazási példák	380
5.9.6.4.	Tudásalapú interpolációs rendszer	381
6.	Differenciálszámítás	384
6.1.	Egyváltozós függvények differenciálása	384
6.1.1.	Differenciálhányados	384
6.1.2.	Egyváltozós függvényekre vonatkozó differenciálási szabályok	385
6.1.2.1.	Elemi függvények deriválása	385
6.1.2.2.	A differenciálás alapszabályai	385
6.1.3.	Magasabb rendű deriváltak	391
6.1.3.1.	A magasabb rendű derivált definíciója	391
6.1.3.2.	Egyszerűbb függvények magasabb rendű deriváltjai	391
6.1.3.3.	A Leibniz-formula	391
6.1.3.4.	Paraméteres alakban adott függvények magasabb rendű deriváltjai	392
6.1.3.5.	Inverz függvények magasabb rendű deriváltjai	393
6.1.4.	A differenciálszámítás legfontosabb tételei	393
6.1.4.1.	Monotonitási feltételek	393

6.1.4.2.	Fermat tétele	393
6.1.4.3.	Rolle tétele	394
6.1.4.4.	A differenciálszámítás középértéktétele	394
6.1.4.5.	Az egyváltozós függvényekre vonatkozó Taylor-tétel	395
6.1.4.6.	A differenciálszámítás középértéktételének általánosítása	395
6.1.5.	A szélsőértékek és inflexiós pontok meghatározása	395
6.1.5.1.	Maximum és minimum	395
6.1.5.2.	Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele	396
6.1.5.3.	Differenciálható, $y = f(x)$ explicit alakban adott függvény lokális szélsőértékei	396
6.1.5.4.	Abszolút (globális) szélsőértékek meghatározása	397
6.1.5.5.	Implicit alakban adott függvény szélsőértékeinek meghatározása	397
6.2.	Többváltozós függvények differenciálása	398
6.2.1.	Parciális deriváltak	398
6.2.1.1.	Függvény parciális deriváltja	398
6.2.1.2.	Geometriai jelentés két változó esetén	398
6.2.1.3.	A differenciál fogalma	398
6.2.1.4.	A differenciál főbb tulajdonságai	399
6.2.1.5.	Parciális differenciál	399
6.2.2.	Teljes differenciál és magasabb rendű differenciálok	400
6.2.2.1.	Többváltozós függvény teljes differenciáljának fogalma	400
6.2.2.2.	Magasabb rendű deriváltak és differenciálok	401
6.2.3.	Többváltozós függvények differenciálási szabályai	401
6.2.3.1.	Összetett függvények differenciálása	401
6.2.3.2.	Implicit függvények differenciálása	402
6.2.4.	Változók helyettesítése differenciálkifejezésekben és koordinátatranszformációknál	403
6.2.4.1.	Egyváltozós függvény	403
6.2.4.2.	Kétváltozós függvények	404
6.2.5.	Többváltozós függvények szélsőértékei	405
6.2.5.1.	Definíció	405
6.2.5.2.	Geometriai jelentés	406
6.2.5.3.	Kétváltozós függvény szélsőértékeinek meghatározása	406
6.2.5.4.	Szélsőérték meghatározása n -változós függvény esetén	406
6.2.5.5.	Feladatok közelítő megoldása	407
6.2.5.6.	Feltételes szélsőérték meghatározása	407
7.	Végtelen sorok	409
7.1.	Számsorozatok	409
7.1.1.	Számsorozatok tulajdonságai	409
7.1.1.1.	Számsorozatok, alapfogalmak	409
7.1.1.2.	Monoton számsorozatok	409
7.1.1.3.	Korlátos sorozatok	409
7.1.2.	Számsorozat határértéke	410
7.2.	Konstans tagú sorok	411
7.2.1.	Általános konvergencia-tételek	411
7.2.1.1.	Végtelen sorok konvergenciája és divergenciája	411
7.2.1.2.	Sorok konvergenciájára vonatkozó tételek	411
7.2.2.	Pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergencia-kritériumok	412
7.2.2.1.	Összehasonlító kritérium	412
7.2.2.2.	d'Alembert-féle hányadoskritérium	412
7.2.2.3.	A Cauchy-féle gyökkritérium	413

	7.2.2.4. Cauchy-féle integrálkritérium	414
7.2.3.	Abszolút és feltételes konvergencia	414
	7.2.3.1. Definíció	414
	7.2.3.2. Abszolút konvergens sorok tulajdonságai	414
	7.2.3.3. Alternáló sorok	415
7.2.4.	Néhány speciális sor	415
	7.2.4.1. Néhány konstans tagú sor összege	415
	7.2.4.2. Bernoulli- és Euler-féle számok	417
7.2.5.	A maradéktag becslése	418
	7.2.5.1. Becslés majoráns segítségével	418
	7.2.5.2. Alternáló konvergens sorok	419
	7.2.5.3. Speciális sorok	419
7.3.	Függvénysorok	419
	7.3.1. Definíciók	419
	7.3.2. Egyenletes konvergencia	419
	7.3.2.1. Definíció, Weierstrass-féle kritérium	419
	7.3.2.2. Egyenletesen konvergens sorok tulajdonságai	420
	7.3.3. Hatványsorok	421
	7.3.3.1. Definíció, konvergencia	421
	7.3.3.2. Műveletek hatványsorokkal	421
	7.3.3.3. Taylor-sorfejtés, MacLaurin-sor	422
	7.3.4. Közelítő formulák	424
	7.3.5. Aszimptotikus hatványsorok	425
	7.3.5.1. Aszimptotikus egyenlőség	425
	7.3.5.2. Aszimptotikus hatványsorok	426
7.4.	Fourier-sorok	427
	7.4.1. Trigonometrikus összeg és Fourier-sor	427
	7.4.1.1. Alapfogalmak	427
	7.4.1.2. A Fourier-sorok legfontosabb tulajdonságai	428
	7.4.2. Szimmetrikus függvények együtthatóinak meghatározása	428
	7.4.2.1. Különböző szimmetriák	428
	7.4.2.2. A Fourier-sorfejtés formulái	430
	7.4.3. Az együtthatók meghatározása numerikus módszerekkel	430
	7.4.4. Fourier-sor és Fourier-integrál	431
	7.4.5. Útmutató a Fourier-sorfejtések táblázatához	431
8.	Integrálszámítás	433
8.1.	Határozatlan integrál	433
	8.1.1. Primitív függvény vagy integrál (antiderivált)	433
	8.1.1.1. Határozatlan integrál (antiderivált)	434
	8.1.1.2. Elemi függvények integrálja	434
	8.1.2. Integrálási szabályok	434
	8.1.3. Racionális függvények integrálása	437
	8.1.3.1. Racionális egész függvények (polinomok) integrálja	437
	8.1.3.2. Racionális törtfüggvények integrálása	437
	8.1.3.3. A parciális törtekre való bontás négy esete	438
	8.1.4. Irracionális függvények integrálása	441
	8.1.4.1. Racionális függvény integrálására visszavezető helyettesítés	441
	8.1.4.2. Az integrál átalakítása trigonometrikus és hiperbolikus függvények racionális kifejezéseinek integráljává	441
	8.1.4.3. Binomiális integrandus integrálása	441
	8.1.4.4. Elliptikus integrál	443

8.1.5.	Trigonometrikus függvények integrálása	444
8.1.5.1.	Helyettesítés	444
8.1.5.2.	Egyszerűsített módszerek	445
8.1.6.	További transzcendens függvények integrálása	446
8.1.6.1.	Exponenciális függvényt tartalmazó integrálok	446
8.1.6.2.	Hiperbolikus függvények integrálása	446
8.1.6.3.	A parciális integrálás alkalmazása	446
8.1.6.4.	Transzcendens függvények integrálása	447
8.2.	Határozott integrál	447
8.2.1.	Alapfogalmak, szabályok és tételek	447
8.2.1.1.	A határozott integrál fogalma	447
8.2.1.2.	A határozott integrál jellemzői	448
8.2.1.3.	Az integrációs határokra vonatkozó további tételek	450
8.2.1.4.	A határozott integrál kiszámítása	451
8.2.2.	A határozott integrál alkalmazása	454
8.2.2.1.	A határozott integrál alkalmazásának általános elve	454
8.2.2.2.	Geometriai alkalmazások	455
8.2.2.3.	Mechanikai és fizikai alkalmazások	458
8.2.3.	Improprius integrálok, Stieltjes- és Lebesgue-integrálok	460
8.2.3.1.	Az integrálfogalom általánosításai	460
8.2.3.2.	Végtelen integrációs határokkal rendelkező integrálok	461
8.2.3.3.	Nemkorlátos függvény integrálása	464
8.2.4.	Paraméteres integrál	466
8.2.4.1.	A paraméteres integrál definíciója	466
8.2.4.2.	Differenciálás az integráljel mögött	466
8.2.4.3.	Integrálás az integráljelen belül	467
8.2.5.	Integrálás sorbafejtéssel, speciális nem elemi függvények	467
8.3.	Vonalintegrál	470
8.3.1.	1. típusú vonalintegrál	470
8.3.1.1.	Definíciók	470
8.3.1.2.	Egzisztenciátétel	471
8.3.1.3.	1. típusú vonalintegrálok kiszámítása	471
8.3.1.4.	Az 1. típusú vonalintegrál alkalmazása	472
8.3.2.	2. típusú vonalintegrál	472
8.3.3.	Általános típusú vonalintegrálok	475
8.3.4.	A vonalintegrálnak az integrációs úttól való függetlensége	476
8.4.	Többszörös integrálok	479
8.4.1.	Kettős integrál	479
8.4.1.1.	A kettős integrál fogalma	479
8.4.1.2.	A kettős integrál kiszámítása	480
8.4.1.3.	Kettős integrálok alkalmazása	483
8.4.2.	Hármas integrál	483
8.4.2.1.	A hármas integrál fogalma	483
8.4.2.2.	A hármas integrál kiszámítása	485
8.4.2.3.	A hármas integrálok alkalmazása	488
8.5.	Felületi integrál	488
8.5.1.	1. típusú felületi integrál	488
8.5.1.1.	1. típusú felületi integrál fogalma	488
8.5.1.2.	Az 1. típusú felületi integrál kiszámítása	490
8.5.1.3.	Az 1. típusú felületi integrál alkalmazásai	491
8.5.2.	2. típusú felületi integrál	492
8.5.2.1.	A 2. típusú felületi integrál fogalma	492

8.5.2.2.	2. típusú felületi integrálok kiszámítása	493
8.5.2.3.	A felületi integrál egy alkalmazása	495
9.	Differenciálegyenletek	496
9.1.	Közönséges differenciálegyenletek	496
9.1.1.	Elsőrendű differenciálegyenletek	496
9.1.1.1.	Megoldások létezése, iránymező	496
9.1.1.2.	Elemi úton integrálható differenciálegyenletek	497
9.1.1.3.	Implicit differenciálegyenletek	501
9.1.1.4.	Szinguláris integrálok és szinguláris pontok	502
9.1.1.5.	Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldási módszerei	505
9.1.2.	Magasabb rendű differenciálegyenletek, differenciálegyenlet-rendszerek	506
9.1.2.1.	Alapvető fogalmak	506
9.1.2.2.	A rendszám csökkentése	508
9.1.2.3.	n -edrendű lineáris differenciálegyenletek	509
9.1.2.4.	Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldása	511
9.1.2.5.	Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek	513
9.1.2.6.	Másodrendű lineáris differenciálegyenletek	516
9.1.3.	Peremérték-feladatok	523
9.1.3.1.	A probléma megfogalmazása	523
9.1.3.2.	A sajátértékek és sajátfüggvények főbb tulajdonságai	524
9.1.3.3.	A sajátfüggvények szerinti sorfejtés	524
9.2.	Parciális differenciálegyenletek	525
9.2.1.	Elsőrendű parciális differenciálegyenletek	525
9.2.1.1.	Elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenletek	525
9.2.1.2.	Elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletek	527
9.2.2.	Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek	530
9.2.2.1.	Két független változójú másodrendű differenciálegyenletek osztályozása és tulajdonságai	530
9.2.2.2.	Több, mint két független változót tartalmazó másodrendű differenciálegyenletek osztályozása és tulajdonságai	532
9.2.2.3.	Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek megoldásának módszerei	533
9.2.3.	A természet- és műszaki tudományok differenciálegyenletei	543
9.2.3.1.	A probléma felvetése és a peremfeltételek	543
9.2.3.2.	A hullámegyenlet	544
9.2.3.3.	Hővezetés egyenlete és a diffúziós egyenlet homogén közegben	546
9.2.3.4.	A Poisson-egyenlet	546
9.2.3.5.	A Schrödinger-egyenlet és a kvantummechanika alapjai	547
9.2.4.	Nemlineáris parciális differenciálegyenletek, szolitonok	555
9.2.4.1.	A probléma elméleti fizikai megközelítése	555
9.2.4.2.	A Korteweg de Vries-egyenlet	556
9.2.4.3.	Nemlineáris Schrödinger-egyenlet	557
9.2.4.4.	A szinusz–Gordon-egyenlet	558
9.2.4.5.	További szolitonmegoldással rendelkező nemlineáris evolúciós egyenletek	559
10.	Variációszámítás	561
10.1.	A feladat kitűzése	561
10.2.	Klasszikus feladatok	562
10.2.1.	Izoperimetrikus probléma	562
10.2.2.	A brachisztochron-probléma	562

10.3.	Egydimenziós variációs problémák	563
10.3.1.	A variációs számítás legegyszerűbb feladattípusa, extrémálisok	563
10.3.2.	A variációs számítás Euler-féle differenciálegyenlete	563
10.3.3.	Variációs problémák mellékfeltételekkel	565
10.3.4.	Magasabbrendű variációs problémák	566
10.3.5.	Több függvényre vonatkozó variációs problémák	567
10.3.6.	Paraméteres variációs problémák	567
10.4.	Többdimenziós variációs problémák	568
10.4.1.	A legegyszerűbb variációs probléma	568
10.4.2.	Általánosabb variációs problémák	569
10.5.	Variációs problémák numerikus megoldása	570
10.6.	Kiegészítés	571
10.6.1.	Első és második variáció	571
10.6.2.	Fizikai alkalmazások	571
11.	Lineáris integrálegyenletek	572
11.1.	Bevezetés és osztályozás	572
11.2.	Másodfajú Fredholm-féle integrálegyenletek	573
11.2.1.	Elfajuló magú integrálegyenletek	573
11.2.2.	A sorozatos megközelítés (szukcesszív approximáció) módszere, Neumann-sor	576
11.2.3.	Fredholm-féle megoldási módszer, Fredholm tételei	579
11.2.3.1.	Fredholm-féle megoldási módszer	579
11.2.3.2.	Fredholm tételei	581
11.2.4.	Numerikus módszerek a Fredholm-féle másodfajú integrálegyenletek megoldására	582
11.2.4.1.	Az integrál approximációja	582
11.2.4.2.	Mag-approximáció	584
11.2.4.3.	Kollokációs módszer	586
11.3.	Fredholm-féle elsőfajú integrálegyenletek	587
11.3.1.	Elfajuló magú integrálegyenletek	587
11.3.2.	Fogalmak, analízisbeli segédeszközök	588
11.3.3.	Az integrálegyenlet visszavezetése lineáris egyenletrendszerre	590
11.3.4.	Az elsőfajú homogén integrálegyenlet megoldása	592
11.3.5.	Megadott maghoz két speciális ortonormált rendszer meghatározása	593
11.3.6.	Iterációs módszer	594
11.4.	Volterra-féle integrálegyenletek	595
11.4.1.	Elméleti alapok	595
11.4.2.	Megoldás differenciálással	596
11.4.3.	Volterra-féle másodfajú integrálegyenletek megoldása Neumann-sorral	597
11.4.4.	Konvolúció típusú Volterra-féle integrálegyenletek	598
11.4.5.	Volterra-féle másodfajú integrálegyenletek numerikus tárgyalása	599
11.5.	Szinguláris integrálegyenletek	600
11.5.1.	Abel-féle integrálegyenlet	600
11.5.2.	Szinguláris integrálegyenletek Cauchy-típusú magokkal	602
11.5.2.1.	A feladat megfogalmazása	602
11.5.2.2.	A megoldás létezése	602
11.5.2.3.	A Cauchy-féle integrál tulajdonságai	603
11.5.2.4.	Hilbert-féle peremérték-feladat	603
11.5.2.5.	A Hilbert-féle peremérték-feladat megoldása	603
11.5.2.6.	A karakterisztikus integrálegyenlet megoldása	604

12. Funkcionálanalízis	606
12.1. Vektorterek	606
12.1.1. A vektortér fogalma	606
12.1.2. Lineáris és affin alterek	607
12.1.3. Lineárisan független elemek	609
12.1.4. Konvex részhalmazok és konvex burok	610
12.1.4.1. Konvex halmazok	610
12.1.4.2. Kúpok	610
12.1.5. Lineáris operátorok és funkcionálok	610
12.1.5.1. Leképezések	610
12.1.5.2. Homomorfizmus és endomorfizmus	611
12.1.5.3. Izomorf vektorterek	611
12.1.6. Valós vektorterek komplexifikálása	611
12.1.7. Rendezett vektorterek	612
12.1.7.1. Kúpok és részbenrendezés	612
12.1.7.2. Rendezésre nézve korlátos halmazok	613
12.1.7.3. Pozitív operátorok	613
12.1.7.4. Vektorhálók	613
12.2. Metrikus terek	615
12.2.1. A metrikus tér fogalma	615
12.2.1.1. Gömbök és környezetek	616
12.2.1.2. Sorozatok konvergenciája metrikus térben	617
12.2.1.3. Zárt halmazok és lezárás	617
12.2.1.4. Sűrű részhalmazok és szeparábilis metrikus terek	618
12.2.2. Teljes metrikus terek	618
12.2.2.1. Cauchy-sorozatok	618
12.2.2.2. Teljes metrikus tér	619
12.2.2.3. Néhány alapvető tétel teljes metrikus terekben	619
12.2.2.4. A kontrakcióelv néhány alkalmazása	620
12.2.2.5. Metrikus tér teljessé tétele	624
12.2.3. Folytonos operátorok	625
12.3. Normált terek	626
12.3.1. A normált tér fogalma	626
12.3.1.1. A normált tér axiómái	626
12.3.1.2. A normált terek néhány tulajdonsága	628
12.3.2. Banach-terek	629
12.3.2.1. Sorok normált terekben	629
12.3.2.2. A fontosabb Banach-terek	629
12.3.2.3. Szoboljev-terek	630
12.3.3. Rendezett normált terek	631
12.3.4. Normált algebrák	631
12.4. Hilbert-terek	632
12.4.1. A Hilbert-tér fogalma	632
12.4.1.1. Skalárszorzat	632
12.4.1.2. Unitér terek és néhány tulajdonságuk	633
12.4.1.3. Hilbert-tér	633
12.4.2. Ortogonalitás	634
12.4.2.1. Az ortogonalitás tulajdonságai	634
12.4.2.2. Ortogonális rendszerek	634
12.4.3. Fourier-sorok a Hilbert-térben	635
12.4.3.1. Legjobb megközelítés	635
12.4.3.2. Parseval-egyenlőség, Riesz–Fischer-tétel	636

12.4.4.	Bázis létezése. Izomorf Hilbert-terek	636
12.5.	Folytonos lineáris operátorok és funkcionálok	637
12.5.1.	Lineáris operátorok korlátossága, normája és folytonossága	637
12.5.1.1.	Lineáris operátorok korlátossága és normája	637
12.5.1.2.	A folytonos lineáris operátorok tere	637
12.5.1.3.	Operátorsorozatok konvergenciája	638
12.5.2.	Folytonos lineáris operátorok Banach-terekben	638
12.5.3.	A lineáris operátorok spektrálméletének elemei	641
12.5.3.1.	Operátor rezolvenshalmaza és rezolvense	641
12.5.3.2.	Operátor spektruma	641
12.5.4.	Folytonos lineáris funkcionálok	642
12.5.4.1.	Definíció	642
12.5.4.2.	Folytonos lineáris funkcionálok a Hilbert-téren, Riesz Frigyes tétele	644
12.5.4.3.	Folytonos lineáris funkcionálok L^p -ben	644
12.5.5.	Lineáris funkcionálok kiterjesztése	645
12.5.6.	Konvex halmazok elválasztása (szétválasztása)	645
12.5.7.	Biduális tér és reflexív terek	646
12.6.	Adjungált operátorok normált terekben	648
12.6.1.	Korlátos operátor adjungáltja	648
12.6.2.	Nem korlátos operátor adjungáltja	649
12.6.3.	Önadjungált operátorok	649
12.6.3.1.	Pozitív definit operátorok	649
12.6.3.2.	Projektorok a Hilbert-térben	650
12.7.	Kompakt halmazok és kompakt operátorok	650
12.7.1.	Normált terek kompakt részhalmazai	650
12.7.2.	Kompakt operátorok	650
12.7.2.1.	A kompakt operátor fogalma	650
12.7.2.2.	Kompakt lineáris operátorok tulajdonságai	650
12.7.2.3.	Elemek gyenge konvergenciája	651
12.7.3.	Fredholm-féle alternatíva	651
12.7.4.	Kompakt lineáris operátorok a Hilbert-térben	652
12.7.5.	Kompakt önadjungált operátorok a Hilbert-téren	652
12.8.	Nemlineáris operátorok	652
12.8.1.	Példák nemlineáris operátorra	652
12.8.2.	Nemlineáris operátorok differenciálhatósága	653
12.8.3.	Newton-módszer	654
12.8.4.	Schauder-féle fixpont-elv	654
12.8.5.	Leray–Schauder-elmélet	655
12.8.6.	Pozitív, nemlineáris operátorok	655
12.8.7.	Monoton operátorok Banach-terekben	656
12.9.	Mérték és Lebesgue-integrál	656
12.9.1.	σ -algebrák és mértékek	656
12.9.2.	Mérhető függvények	658
12.9.2.1.	Mérhető függvény	658
12.9.2.2.	A mérhető függvények osztályának tulajdonságai	658
12.9.3.	Integrálás	658
12.9.3.1.	Az integrál definíciója	658
12.9.3.2.	Az integrál néhány tulajdonsága	659
12.9.3.3.	Konvergenciatételek	660
12.9.4.	L^p -terek	660
12.9.5.	Disztribúciók	661
12.9.5.1.	A parciális integrálás képlete	661

12.9.5.2.	Általánosított derivált	662
12.9.5.3.	Disztribúció	662
12.9.5.4.	Disztribúció deriváltja	662
13.	Vektoranalízis és térelmélet	664
13.1.	A térelmélet alapfogalmai	664
13.1.1.	Egyparaméteres vektor-skalárfüggvény	664
13.1.1.1.	Definíciók	664
13.1.1.2.	Vektorfüggvény differenciálhányadosa	664
13.1.1.3.	Vektorfüggvények differenciálási szabályai	664
13.1.1.4.	Vektorfüggvények Taylor-sorfejtése	665
13.1.2.	Skalármezők	665
13.1.2.1.	Skalármező vagy skalár pontfüggvény	665
13.1.2.2.	Fontosabb skalármezők	665
13.1.2.3.	Skalármezők megadása a koordináták függvényeként	666
13.1.2.4.	Szintfelületek és szintvonalak	666
13.1.3.	Vektormezők	666
13.1.3.1.	Vektormező vagy vektoriális, azaz vektorértékű pontfüggvény	666
13.1.3.2.	Fontosabb vektormezők	667
13.1.3.3.	A vektormezők megadása a koordináták függvényeként	668
13.1.3.4.	Áttérés egyik térbeli koordinátarendszerről egy másikra egy $\vec{V}(\vec{r})$ vektormező megadásában	669
13.1.3.5.	Erővonalak	671
13.2.	Térbeli differenciálszámítás	671
13.2.1.	Íránymenti és térfogati differenciálhányados (derivált)	671
13.2.1.1.	Skalármező iránymenti differenciálhányadosa	671
13.2.1.2.	Vektormező iránymenti differenciálhányadosa	672
13.2.1.3.	Térfogati vagy térbeli differenciálhányados	673
13.2.2.	Skalármező gradiense	673
13.2.2.1.	Gradiens definíciója	673
13.2.2.2.	Gradiens és iránymenti differenciálhányados	673
13.2.2.3.	Gradiens és térfogati differenciálhányados	674
13.2.2.4.	A gradiens további tulajdonságai	674
13.2.2.5.	Skalármező gradiense különböző koordinátarendszerekben	674
13.2.2.6.	Műveleti és számítási szabályok	674
13.2.3.	Vektorgradiens	675
13.2.4.	Vektormező divergenciája	675
13.2.4.1.	A divergencia definíciója	675
13.2.4.2.	Divergencia megadása különböző koordinátarendszerekben	676
13.2.4.3.	A divergencia műveleti szabályai	676
13.2.4.4.	Centrális mező divergenciája	676
13.2.5.	Vektormező rotációja	676
13.2.5.1.	Rotáció definíciója	676
13.2.5.2.	Rotáció a különböző koordinátarendszerekben	677
13.2.5.3.	A rotáció kiszámítási szabályai	678
13.2.5.4.	Potenciális mező rotációja	678
13.2.6.	Nablaoperátor, Laplace-operátor	678
13.2.6.1.	Nablaoperátor	678
13.2.6.2.	A nablaoperátorra vonatkozó számítási szabályok	679
13.2.6.3.	Vektorgradiens	679
13.2.6.4.	A nablaoperátor kétszeres alkalmazása	679
13.2.6.5.	Laplace-operátor	680

13.2.7.	A térbeli differenciálszámítás áttekintése	681
13.2.7.1.	Vektoranalitikus kifejezések a derékszögű, henger- és gömbi koordinátarendszerben	681
13.2.7.2.	A differenciáloperátorokra vonatkozó fő összefüggések és eredmények	681
13.2.7.3.	Differenciáloperátorok számítási szabályai	682
13.3.	Vektormezők integrálása	682
13.3.1.	Vonalintegrál és potenciál a vektormezőben	682
13.3.1.1.	Vonalintegrál vektormezőben	682
13.3.1.2.	A vonalintegrál mechanikai jelentése	684
13.3.1.3.	A vonalintegrál tulajdonságai	684
13.3.1.4.	A vonalintegrál, mint másodfajú általános típusú vonalintegrál	684
13.3.1.5.	Vektormező körintegrálja	684
13.3.1.6.	Konzervatív vagy potenciálos mező	684
13.3.2.	Felületi integrál	685
13.3.2.1.	Síkbeli felületdarab vektora	685
13.3.2.2.	Felületi integrál kiszámítása	686
13.3.2.3.	Felületi integrál és mezők fluxusa	687
13.3.2.4.	II. típusú felületi integrál kiszámítása derékszögű koordinátarendszerben	687
13.3.3.	Integráltételek	688
13.3.3.1.	Gauss integráltétele és integrálformulája	688
13.3.3.2.	Stokes integráltétele	688
13.3.3.3.	Green integráltételei	689
13.4.	Mezőszámítások	690
13.4.1.	Tiszta forrásmező	690
13.4.2.	Tiszta vagy forrásmentes örvénymező	690
13.4.3.	Pontszerű források vektormezői	691
13.4.3.1.	Ponttöltés Coulomb-mezeje	691
13.4.3.2.	Pontszerű tömeg gravitációs tere	691
13.4.4.	Mezők szuperpozíciója	691
13.4.4.1.	Diszkrét forráseloszlás	691
13.4.4.2.	Folytonos forráseloszlás	692
13.4.4.3.	Összefoglalás	692
13.5.	A térelmélet differenciálegyenletei	692
13.5.1.	Laplace-differenciálegyenlet	692
13.5.2.	Poisson-differenciálegyenlet	693
14.	Komplex függvénytan	694
14.1.	Egyváltozós komplex függvény	694
14.1.1.	Folytonosság, differenciálhatóság	694
14.1.1.1.	A komplex változós függvény definíciója	694
14.1.1.2.	Komplex változós függvény határértéke	694
14.1.1.3.	Komplex változós függvény folytonossága	694
14.1.1.4.	Komplex változós függvény differenciálhatósága	694
14.1.2.	Analitikus függvények	695
14.1.2.1.	Az analitikus függvény definíciója	695
14.1.2.2.	Példák analitikus függvényekre	695
14.1.2.3.	Analitikus függvények tulajdonságai	696
14.1.2.4.	Szinguláris pontok	697
14.1.3.	Konform leképezések	697
14.1.3.1.	A konform leképezés fogalma és tulajdonságai	697
14.1.3.2.	A legegyszerűbb konform leképezések	698

14.1.3.3.	A Schwarz-féle tükrözési elv	707
14.1.3.4.	Komplex potenciál	707
14.1.3.5.	A szuperpozíció elve	709
14.1.3.6.	A komplex számsík tetszőleges leképezése	711
14.2.	Integrálás a komplex síkon	711
14.2.1.	Határozott és határozatlan integrál	711
14.2.1.1.	A komplex integrál definíciója	711
14.2.1.2.	Komplex integrálok tulajdonságai és kiszámítási módja	712
14.2.2.	Cauchy-féle integráltétel, a komplex függvénytan alaptétele	714
14.2.2.1.	Cauchy-féle integráltétel egyszeresen összefüggő tartományokra	714
14.2.2.2.	Cauchy integráltétele többszörösen összefüggő tartományokra	714
14.2.3.	A Cauchy-féle integrálformulák	715
14.2.3.1.	Analitikus függvény egy tartomány belsejében	715
14.2.3.2.	Analitikus függvény egy tartományon kívül	715
14.3.	Analitikus függvények hatványsorba való fejtése	716
14.3.1.	Komplex tagú sorok konvergenciája	716
14.3.1.1.	Komplex tagú sorozatok konvergenciája	716
14.3.1.2.	Komplex tagú végtelen sor konvergenciája	716
14.3.1.3.	Komplex tagú hatványsorok	716
14.3.2.	Taylor-sorok	717
14.3.3.	Az analitikus folytatás elve	718
14.3.4.	Laurent-sorfejtés	718
14.3.5.	Izolált szinguláris pontok és a reziduomtétel	719
14.3.5.1.	Izolált szinguláris pontok	719
14.3.5.2.	Meromorf függvények	719
14.3.5.3.	Elliptikus függvények	719
14.3.5.4.	Reziduum	720
14.3.5.5.	Reziduomtétel	720
14.4.	Valós integrálok meghatározása komplex integrálokkal	721
14.4.1.	A Cauchy-féle integrálformulák alkalmazása	721
14.4.2.	A reziduomtétel alkalmazása	721
14.4.3.	A Jordan-lemma alkalmazásai	722
14.4.3.1.	Jordan-lemma	722
14.4.3.2.	Példák a Jordan-lemma alkalmazására	722
14.5.	Algebrai és elemi transzcendens függvények	724
14.5.1.	Algebrai függvények	724
14.5.2.	Elemi transzcendens függvények	725
14.5.3.	Görbék egyenlete komplex alakban	727
14.6.	Elliptikus függvények	730
14.6.1.	Az elliptikus integrálokkal való összefüggés	730
14.6.2.	Jacobi-féle függvények	731
14.6.3.	Thétafüggvények	732
14.6.4.	Weierstrass-féle függvények	733
15.	Integráltranszformációk	735
15.1.	Az integráltranszformáció fogalma	735
15.1.1.	Az integráltranszformációk általános definíciója	735
15.1.2.	Speciális integráltranszformációk	735
15.1.3.	Inverz transzformációk	735
15.1.4.	Az integráltranszformációk linearitása	735
15.1.5.	Többváltozós függvények integráltranszformációi	737
15.1.6.	Az integráltranszformációk alkalmazásai	737

15.2.	Laplace-transzformáció	738
15.2.1.	A Laplace-transzformáció tulajdonságai	738
15.2.1.1.	Laplace-transzformált, eredeti tartomány és képtartomány	738
15.2.1.2.	Laplace-transzformációval kapcsolatos számolási szabályok	739
15.2.1.3.	Speciális függvények képfüggvényei	742
15.2.1.4.	A Dirac-féle δ -függvény és a disztribúciók	745
15.2.2.	Visszatranszformálás az eredeti tartományba	746
15.2.2.1.	Visszatranszformálás táblázatok segítségével	746
15.2.2.2.	Résztörtekre bontás	747
15.2.2.3.	Sorfejtések	747
15.2.2.4.	Inverz integrál	749
15.2.3.	Differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformáció segítségével	749
15.2.3.1.	Állandó együtthatójú közönséges differenciálegyenletek	750
15.2.3.2.	Változó együtthatójú közönséges differenciálegyenletek	751
15.2.3.3.	Parciális differenciálegyenletek	751
15.3.	Fourier-transzformáció	753
15.3.1.	A Fourier-transzformáció tulajdonságai	753
15.3.1.1.	Fourier-integrál	753
15.3.1.2.	Fourier-transzformáció és inverz transzformáció	754
15.3.1.3.	A Fourier-transzformációra vonatkozó számolási szabályok	756
15.3.1.4.	Speciális függvények képfüggvényei	759
15.3.2.	Differenciálegyenletek megoldása Fourier-transzformáció segítségével	760
15.3.2.1.	Közönséges differenciálegyenletek	760
15.3.2.2.	Parciális differenciálegyenletek	761
15.4.	Z-transzformáció	762
15.4.1.	A Z-transzformáció tulajdonságai	763
15.4.1.1.	Diszkrét függvények	763
15.4.1.2.	A Z-transzformáció definíciója	763
15.4.1.3.	Számolási szabályok	764
15.4.1.4.	Kapcsolat a Laplace-transzformációval	765
15.4.1.5.	A Z-transzformáció invertálása	766
15.4.2.	A Z-transzformáció alkalmazásai	767
15.4.2.1.	Lineáris differenciaegyenletek általános megoldása	767
15.4.2.2.	Másodrendű differenciaegyenletek (kezdetiérték-feladat)	768
15.4.2.3.	Másodrendű differenciaegyenletek (peremérték-feladat)	769
15.5.	Wavelet-transzformáció („hullámocska”-transzformáció)	770
15.5.1.	Jelek	770
15.5.2.	Wavelet-ek	770
15.5.3.	Wavelet-transzformáció	771
15.5.4.	Diszkrét wavelet-transzformáció	772
15.5.4.1.	Gyors wavelet-transzformáció	772
15.5.4.2.	Diszkrét Haar-wavelet transzformáció	772
15.5.5.	Gábor-transzformáció	773
15.6.	Walsh-függvények	773
15.6.1.	Lépcsősfüggvények	773
15.6.2.	Walsh-rendszerek	773
16.	Valószínűségszámítás és matematikai statisztika	775
16.1.	Kombinatorika	775
16.1.1.	Permutációk	775
16.1.2.	Kombinációk	775
16.1.3.	Variációk	776

16.1.4.	A kombinatorikai képletek összefoglalása	777
16.2.	Valószínűségszámítás	777
16.2.1.	Események, gyakoriságok és valószínűségek	777
16.2.1.1.	Események	777
16.2.1.2.	Gyakoriságok és valószínűségek	778
16.2.1.3.	Feltételes valószínűség, Bayes tétele	780
16.2.2.	Valószínűségi változók, eloszlásfüggvény	781
16.2.2.1.	Valószínűségi változó	781
16.2.2.2.	Eloszlásfüggvény	781
16.2.2.3.	Várható érték, szórás, Csebisev-egyenlőtlenség	783
16.2.2.4.	Többdimenziós valószínűségi változók	784
16.2.3.	Diszkrét eloszlások	784
16.2.3.1.	Binomiális eloszlás	785
16.2.3.2.	Hipergeometrikus eloszlás	785
16.2.3.3.	Poisson-eloszlás	786
16.2.4.	Folytonos eloszlások	787
16.2.4.1.	Normális eloszlás	787
16.2.4.2.	Standard normális eloszlás, Gauss-hibafüggvény	788
16.2.4.3.	Logaritmikus normális eloszlás	789
16.2.4.4.	Exponenciális eloszlás	790
16.2.4.5.	Weibull-eloszlás	790
16.2.4.6.	χ^2 -eloszlás	791
16.2.4.7.	Fisher-eloszlás	792
16.2.4.8.	Student-eloszlás	793
16.2.5.	A nagy számok törvényei, határértéktételek	793
16.3.	Matematikai statisztika	794
16.3.1.	Mintafüggvények	794
16.3.1.1.	Alapsokaság, minta, véletlen vektor	794
16.3.1.2.	Mintafüggvények, jellemzők	795
16.3.2.	Leíró statisztika	797
16.3.2.1.	Adott mérési eredmények statisztikai kiértékelése	797
16.3.2.2.	Statisztikai paraméterek	798
16.3.3.	Statisztikai próbák	799
16.3.3.1.	Normális eloszlásra vonatkozó próbák	799
16.3.3.2.	A mintaközepok eloszlása	800
16.3.3.3.	Megbízhatósági (konfidencia-) intervallum a sokaság várható értékére	801
16.3.3.4.	Megbízhatósági intervallum a sokaság szórásnégyzetére	802
16.3.3.5.	Hipotézisvizsgálat	803
16.3.4.	Korreláció és regresszió	803
16.3.4.1.	Kétváltozós lineáris korreláció	804
16.3.4.2.	Kétváltozós lineáris regresszió	805
16.3.4.3.	Többdimenziós regresszió	806
16.3.5.	Monte-Carlo módszerek	807
16.3.5.1.	Szimuláció	807
16.3.5.2.	Véletlen számok	807
16.3.5.3.	Példa Monte-Carlo szimulációra	808
16.3.5.4.	A Monte-Carlo módszerek alkalmazása a numerikus matematikában	809
16.3.5.5.	A Monte-Carlo módszerek további alkalmazásai	811
16.4.	A mérési hibák elmélete	811
16.4.1.	Mérési hibák és azok eloszlása	812
16.4.1.1.	A mérési hibák osztályozása kvalitatív ismérvek alapján	812

16.4.1.2.	A mérési hiba sűrűségfüggvénye	812
16.4.1.3.	A mérési hibák osztályozása kvantitatív ismérvek esetén	814
16.4.1.4.	A mért eredmények megadása hibahatárokkal	816
16.4.1.5.	Azonos pontosságú direkt mérések hibaszámítása	817
16.4.1.6.	Különböző pontosságú direkt mérések hibaszámítása	817
16.4.2.	Hibaterjedés és hibaelemzés	818
16.4.2.1.	Gauss hibaterjedési törvénye	818
16.4.2.2.	Hibaelemzés	820
17.	Dinamikai rendszerek és káosz	821
17.1.	Közönséges differenciálegyenletek és leképezések	821
17.1.1.	Dinamikai rendszerek	821
17.1.1.1.	Alapfogalmak	821
17.1.1.2.	Invariáns halmazok	823
17.1.2.	A közönséges differenciálegyenletek kvalitatív elmélete	824
17.1.2.1.	A folyam létezése és a fázistér szerkezete	824
17.1.2.2.	Lineáris differenciálegyenletek	826
17.1.2.3.	Stabilitáselemzés	827
17.1.2.4.	Invariáns sokaságok	831
17.1.2.5.	Poincaré-leképezés	834
17.1.2.6.	Differenciálegyenletek topologikus ekvivalenciája	835
17.1.3.	Diszkrét dinamikai rendszerek	836
17.1.3.1.	Stacionárius pontok, periodikus pályák és határhalmazok	836
17.1.3.2.	Invariáns sokaságok	836
17.1.3.3.	Topologikusan konjugált diszkrét rendszerek	837
17.1.4.	Strukturális stabilitás (robosztusság)	838
17.1.4.1.	Strukturálisan stabilis differenciálegyenlet	838
17.1.4.2.	Strukturálisan stabilis diszkrét rendszerek	839
17.1.4.3.	Tipikus tulajdonságok	839
17.2.	Az attraktorok kvantitatív leírása	840
17.2.1.	Valószínűségi mértékek az attraktorokon	840
17.2.1.1.	Invariáns mérték	840
17.2.1.2.	Az ergodelmélet elemei	841
17.2.2.	Entrópiák	843
17.2.2.1.	Topologikus entrópia	843
17.2.2.2.	Metrikus entrópia	844
17.2.3.	Ljapunov-kitevők	844
17.2.4.	Dimenziók	846
17.2.4.1.	Metrikus dimenziók	846
17.2.4.2.	Invariáns mértékkel definiált dimenziók	848
17.2.4.3.	Lokális Hausdorff-dimenzió Douady és Oesterlé nyomán	851
17.2.4.4.	Példák attraktorokra	851
17.2.5.	Különös attraktorok és káosz	853
17.2.6.	Káosz egydimenziós leképezéseknél	854
17.3.	Bifurkációelmélet és a káoszhoz vezető átmenetek	854
17.3.1.	Bifurkációk Morse–Smale-rendszerekben	854
17.3.1.1.	Lokális bifurkációk stacionárius pontok közelében	854
17.3.1.2.	Lokális bifurkációk periodikus pálya közelében	860
17.3.1.3.	Globális bifurkációk	863
17.3.2.	Káoszhoz vezető átmenetek	864
17.3.2.1.	Perióduskettőzések kaszkádja	864
17.3.2.2.	Intermittencia	865

17.3.2.3.	Globális homoklinikus bifurkációk	865
17.3.2.4.	A tórusz felbomlása	867
18.	Optimalizálás	871
18.1.	Lineáris programozás	871
18.1.1.	Problémafelvetés és geometriai ábrázolás	871
18.1.1.1.	A lineáris programozási feladat alakjai	871
18.1.1.2.	Egy példa és grafikus megoldása	872
18.1.2.	A lineáris programozás alapfogalmai, normálalak	873
18.1.2.1.	Csúcs és bázis	873
18.1.2.2.	A lineáris programozási feladat normálalakja	875
18.1.3.	Szimplex módszer	876
18.1.3.1.	Szimplex tábla	876
18.1.3.2.	Átmenet egy másik szimplex táblára	876
18.1.3.3.	Egy kezdő szimplex tábla meghatározása	878
18.1.3.4.	Módosított szimplex módszer	879
18.1.3.5.	Dualitás a lineáris optimalizálásban	880
18.1.4.	Speciális lineáris optimalizálási feladatok	881
18.1.4.1.	Szállítási feladat	881
18.1.4.2.	Hozzárendelési feladat	884
18.1.4.3.	Elosztási feladat	884
18.1.4.4.	Utazó ügynök problémája	884
18.1.4.5.	Sorbarendezési feladat	885
18.2.	Nemlineáris programozás	885
18.2.1.	Problémafelvetés és elméleti alapok	885
18.2.1.1.	Problémafelvetés	885
18.2.1.2.	Optimalitási feltételek	885
18.2.1.3.	Dualitás az optimalizálásban	886
18.2.2.	Speciális nemlineáris optimalizálási feladatok	887
18.2.2.1.	Konvex optimalizálás	887
18.2.2.2.	Kvadratikus optimalizálás	887
18.2.3.	Megoldási módszerek kvadratikus optimalizálási feladatokra	888
18.2.3.1.	Wolfe-eljárás	888
18.2.3.2.	Hildreth–d’Esopo-eljárás	890
18.2.4.	Numerikus keresési eljárások	891
18.2.4.1.	Egydimenziós keresés	891
18.2.4.2.	Minimumkeresés n -dimenziós euklideszi vektortérben	891
18.2.5.	Eljárás feltétel nélküli feladatokra	892
18.2.5.1.	A legmeredekebb csökkenő irányú eljárás (gradiens módszer)	892
18.2.5.2.	A Newton-módszer alkalmazása	892
18.2.5.3.	A konjugált gradiensek módszere	893
18.2.5.4.	Davidon, Fletcher és Powell módszere (DFP)	893
18.2.6.	Gradiens módszer egyenlőtlenségfeltételes feladatokra	894
18.2.6.1.	Megengedett irányok módszere	894
18.2.6.2.	A vetített gradiensek módszere	896
18.2.7.	Büntető- és korlátozó módszerek	898
18.2.7.1.	Büntető eljárás	898
18.2.7.2.	Korlátozási eljárás	899
18.2.8.	Metszősíkok módszere	900
18.3.	Diszkrét dinamikus optimalizálás	900
18.3.1.	Diszkrét dinamikus optimalizálás	900
18.3.1.1.	n -lépcsős döntési folyamatok	901

18.3.1.2.	Dinamikus optimalizálási feladatok	901
18.3.2.	Példák diszkrét döntési modellekre	901
18.3.2.1.	Bevásárlási feladat	901
18.3.2.2.	Hátizsák-feladat	902
18.3.3.	Bellmann-féle funkcionálegyenletek	902
18.3.3.1.	A költségfüggvény tulajdonságai	902
18.3.3.2.	A funkcionálegyenletek megfogalmazása	903
18.3.4.	Bellmann-féle optimalitási kritérium	903
18.3.5.	Bellmann-féle funkcionálegyenlet-módszer	903
18.3.5.1.	A minimális költség meghatározása	903
18.3.5.2.	Az optimális stratégia meghatározása	904
18.3.6.	Példák funkcionálegyenlet-módszer alkalmazására	904
18.3.6.1.	Optimális vásárlási stratégia	904
18.3.6.2.	Hátizsák-feladat	905
19.	Numerikus módszerek	907
19.1.	Egyismeretlenes nemlineáris egyenlet numerikus megoldása	907
19.1.1.	Iterációs eljárások	907
19.1.1.1.	Szukcesszív approximáció	907
19.1.1.2.	Newton-eljárás	908
19.1.1.3.	Regula falsi	909
19.1.2.	Polinomegyenletek megoldása	910
19.1.2.1.	Horner-elrendezés	910
19.1.2.2.	A gyökök elhelyezkedése	911
19.1.2.3.	Numerikus eljárások	912
19.2.	Egyenletrendszerek numerikus megoldása	913
19.2.1.	Lineáris egyenletrendszerek	913
19.2.1.1.	Mátrix háromszög-faktorizációja	913
19.2.1.2.	Cholesky-eljárás szimmetrikus mátrixokra	915
19.2.1.3.	Ortogonalizálási eljárások	916
19.2.1.4.	Iteráció teljes- és egyenkénti lépésekkel	918
19.2.2.	Nemlineáris egyenletrendszerek	919
19.2.2.1.	Általános iterációs eljárás	919
19.2.2.2.	Newton-eljárás	920
19.2.2.3.	Gauss–Newton-eljárás differenciálás nélkül	920
19.3.	Numerikus integrálás	921
19.3.1.	Általános kvadratúraformula	921
19.3.2.	Interpolációs kvadratúrák	921
19.3.2.1.	Téglányösszeg	922
19.3.2.2.	Trapézformula	922
19.3.2.3.	Hermite-féle trapézformula	922
19.3.2.4.	Simpson-formula	923
19.3.3.	Gauss-típusú kvadratúraformulák	923
19.3.3.1.	Gauss-kvadratúra formulák	923
19.3.3.2.	Lobatto-féle kvadratúraformulák	924
19.3.4.	Romberg-eljárás	924
19.3.4.1.	A Romberg-eljárás algoritmus	924
19.3.4.2.	Extrapoláció elve	925
19.4.	Közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldása	926
19.4.1.	Kezdetiérték-feladatok	926
19.4.1.1.	Euler-féle poligonvonal-eljárás	926
19.4.1.2.	4-edrendű Runge–Kutta-eljárás	927

19.4.1.3.	Többlépéses eljárások	928
19.4.1.4.	Prediktor–korrektor-módszerek	928
19.4.1.5.	Konvergencia, konzisztencia, stabilitás	929
19.4.2.	Peremérték-feladatok	930
19.4.2.1.	Differenciamódszerek	930
19.4.2.2.	Próbafüggvény-módszer	931
19.4.2.3.	Célmódszerek	932
19.5.	Parciális differenciálegyenletek közelítő integrálása	933
19.5.1.	Differenciamódszer	933
19.5.2.	Próbafüggvény-módszer	935
19.5.3.	Végeselem-módszer (FEM)	936
19.6.	Approximáció, kiegyenlítő számítás, harmonikus analízis	939
19.6.1.	Polinom-interpoláció	939
19.6.1.1.	Newton-féle interpolációs formula	939
19.6.1.2.	Lagrange-féle interpoláció	939
19.6.1.3.	Aitken–Neville-interpoláció	941
19.6.2.	Középben vett approximáció	942
19.6.2.1.	Folytonos feladat, normálegyenletek	942
19.6.2.2.	Diszkrét feladat, normálegyenletek, Householder-módszer	943
19.6.2.3.	Többdimenziós feladatok	944
19.6.2.4.	Nemlineáris négyzetesközép-feladatok	945
19.6.3.	Csebisev-approximáció	946
19.6.3.1.	A feladat kitűzése és az alternálási tétel	946
19.6.3.2.	A Csebisev-polinomok tulajdonságai	946
19.6.3.3.	Remes-algoritmus	948
19.6.3.4.	Diszkrét Csebisev-approximáció és optimalizálás	948
19.6.4.	Harmonikus analízis	949
19.6.4.1.	A trigonometrikus interpoláció képletei	949
19.6.4.2.	Gyors Fourier-transzformáció (FFT)	950
19.7.	Görbék és felületek ábrázolása spline-ok segítségével	954
19.7.1.	Harmadfokú spline-ok	954
19.7.1.1.	Interpolációs spline-ok	954
19.7.1.2.	Kiegyenlítő spline-ok	955
19.7.2.	Kétdimenziós harmadfokú spline-ok	955
19.7.2.1.	A kétdimenziós harmadfokú spline-ok tulajdonságai	955
19.7.2.2.	Kétdimenziós harmadfokú interpolációs spline-ok	956
19.7.2.3.	Kétdimenziós harmadfokú kiegyenlítő spline	957
19.7.3.	Görbék és felületek Bernstein–Bézier-ábrázolása	957
19.7.3.1.	A B–B-görbeábrázolás elve	958
19.7.3.2.	B–B felületábrázolás	958
19.8.	Számítógépek használata	959
19.8.1.	Belső jelábrázolás	959
19.8.1.1.	Számrendszerek	959
19.8.1.2.	Belső számábrázolás	960
19.8.2.	Gépi számításoknál fellépő numerikus hibák	962
19.8.2.1.	Bevezetés, hibatípusok	962
19.8.2.2.	Normalizált tizedestörtek és kerekítés	962
19.8.2.3.	Numerikus számítások pontossága	963
19.8.3.	Numerikus módszereket tartalmazó programkönyvtárak	967
19.8.3.1.	NAG-könyvtárak	967
19.8.3.2.	IMSL-könyvtár	968
19.8.3.3.	FORTRAN SSL II	968

19.8.3.4.	Aacheni könyvtár	968
19.8.4.	Számítógép-algebrai rendszerek alkalmazása	969
19.8.4.1.	Mathematica	969
19.8.4.2.	Maple	972
20.	Matematikai programcsomagok	976
20.1.	Bevezetés	976
20.1.1.	A matematikai programcsomagok rövid jellemzése	976
20.1.2.	Bevezető példák a legfontosabb alkalmazási területekről	976
20.1.2.1.	Képletkezelés	976
20.1.2.2.	Numerikus számítások	977
20.1.2.3.	Grafikus ábrázolások	978
20.1.2.4.	Programozás a számítógépes környezetben	978
20.1.3.	A matematikai programcsomagok felépítése és használata	978
20.1.3.1.	Alapvető szerkezeti elemek	978
20.2.	Mathematica	980
20.2.1.	Alapvető szerkezeti elemek	980
20.2.2.	Számábrázolás a Mathematicá-ban	981
20.2.2.1.	A számok alaptípusai a Mathematicá-ban	981
20.2.2.2.	Speciális számok	981
20.2.2.3.	Számok ábrázolása és konvertálása	981
20.2.3.	A fontos operátorok	982
20.2.4.	Listák	983
20.2.4.1.	Fogalom és jelentés	983
20.2.4.2.	Többszintű listák	984
20.2.4.3.	Műveletek listákkal	984
20.2.4.4.	Speciális listák	984
20.2.5.	Vektorok és mátrixok mint listák	985
20.2.5.1.	Mátrixlisták létrehozása	985
20.2.5.2.	Műveletek mátrixokkal és vektorokkal	986
20.2.6.	Függvények	987
20.2.6.1.	Alapfüggvények	987
20.2.6.2.	Speciális függvények	987
20.2.6.3.	Tiszta függvények	987
20.2.7.	Mintázat	988
20.2.8.	Függvényműveletek	989
20.2.9.	Programozás	990
20.2.10.	Kiegészítések a szintaxishoz, információk, üzenetek	991
20.2.10.1.	Kontextusok, attribútumok	991
20.2.10.2.	Információk	992
20.2.10.3.	Üzenetek	992
20.3.	Maple	992
20.3.1.	Alapvető szerkezeti elemek	992
20.3.1.1.	Típusok és objektumok	992
20.3.1.2.	Bevitel és kivitel	993
20.3.2.	Számábrázolás a Maple-ben	995
20.3.2.1.	A számok alaptípusai a Maple-ben	995
20.3.2.2.	Speciális számok	995
20.3.2.3.	Számok ábrázolása és konvertálása	995
20.3.3.	Fontos operátorok a Maple-ben	998
20.3.4.	Algebrai kifejezések	999
20.3.5.	Sorozatok és listák	999

20.3.6.	Táblázat- és tömbstruktúrák, vektorok és mátrixok	1000
20.3.6.1.	Táblázat- és tömbstruktúrák	1000
20.3.6.2.	Egydimenziós tömbök	1001
20.3.6.3.	Kétdimenziós tömbök	1001
20.3.6.4.	Vektorokra és mátrixokra vonatkozó speciális utasítások	1002
20.3.7.	Függvények és operátorok	1002
20.3.7.1.	Függvények	1002
20.3.7.2.	Operátorok	1003
20.3.7.3.	Differenciáloperátorok	1004
20.3.7.4.	A map utasítás	1004
20.3.8.	Programozás a Maple-ben	1004
20.3.9.	Kiegészítések a szintaxishoz, információk és segítség	1005
20.3.9.1.	A Maple-könyvtár használata	1005
20.3.9.2.	Környezeti változók	1005
20.3.9.3.	Információk és segítség	1005
20.4.	A matematikai programcsomagok alkalmazása	1006
20.4.1.	Algebrai kifejezések kezelése	1006
20.4.1.1.	Mathematica	1006
20.4.1.2.	Maple	1008
20.4.2.	Egyenletek és egyenletrendszerek megoldása	1012
20.4.2.1.	Mathematica	1012
20.4.2.2.	Maple	1014
20.4.3.	A lineáris algebra elemei	1016
20.4.3.1.	Mathematica	1016
20.4.3.2.	Maple	1018
20.4.4.	Differenciál- és integrálszámítás	1020
20.4.4.1.	Mathematica	1020
20.4.4.2.	Maple	1023
20.5.	Számítógépes grafika	1026
20.5.1.	Grafika a Mathematicá-val	1026
20.5.1.1.	A grafika alapjai	1026
20.5.1.2.	Grafikus elemek	1027
20.5.1.3.	Grafikus opciók	1028
20.5.1.4.	A grafikus ábrázolás szintaxisa	1028
20.5.1.5.	Kétdimenziós görbék	1031
20.5.1.6.	Görbék paraméteres ábrázolása	1032
20.5.1.7.	Felületek és térgörbék ábrázolása	1033
20.5.2.	Grafika a Maple-vel	1035
20.5.2.1.	Kétdimenziós grafika	1035
20.5.2.2.	Háromdimenziós grafika	1038
21.	Táblázatok	1040
21.1.	Gyakran előforduló állandók	1040
21.2.	Fizikai állandók	1040
21.3.	Néhány függvény hatványsora	1042
21.4.	Fourier-sorfejtés	1047
21.5.	Határozatlan integrál	1050
21.5.1.	Racionális függvények integrálása	1050
21.5.1.1.	Az $ax + b$ kifejezést tartalmazó integrálok	1050
21.5.1.2.	Az $ax^2 + bx + c$ kifejezést tartalmazó integrálok	1052
21.5.1.3.	Az $a^2 \pm x^2$ kifejezést tartalmazó integrálok	1053
21.5.1.4.	Az $a^3 \pm x^3$ kifejezést tartalmazó integrálok	1055

21.5.1.5.	Az $a^4 + x^4$ kifejezést tartalmazó integrálok	1056
21.5.1.6.	Az $a^4 - x^4$ kifejezést tartalmazó integrálok	1056
21.5.1.7.	Néhány tört parciális törtekre bontása	1056
21.5.2.	Irracionális függvények integráljai	1057
21.5.2.1.	A \sqrt{x} és $a^2 \pm b^2x$ kifejezéseket tartalmazó integrálok	1057
21.5.2.2.	Egyéb, a \sqrt{x} kifejezést tartalmazó integrálok	1057
21.5.2.3.	A $\sqrt{ax + b}$ kifejezést tartalmazó integrálok	1058
21.5.2.4.	A $\sqrt{ax + b}$ és $\sqrt{fx + g}$ kifejezéseket tartalmazó integrálok	1059
21.5.2.5.	A $\sqrt{a^2 - x^2}$ kifejezést tartalmazó integrálok	1060
21.5.2.6.	A $\sqrt{x^2 + a^2}$ kifejezést tartalmazó integrálok	1061
21.5.2.7.	A $\sqrt{x^2 - a^2}$ kifejezést tartalmazó integrálok	1063
21.5.2.8.	A $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ kifejezést tartalmazó integrálok	1065
21.5.2.9.	Egyéb irracionális kifejezéseket tartalmazó integrálok	1067
21.5.2.10.	Rekurzív formulák a binomiális differenciál integráljának kiszámításához	1067
21.5.3.	Trigonometrikus függvények integráljai	1068
21.5.3.1.	Színuszfüggvényt tartalmazó integrálok	1068
21.5.3.2.	A koszínuszfüggvényt tartalmazó integrálok	1070
21.5.3.3.	A szinusz- és koszínuszfüggvényeket tartalmazó integrálok	1072
21.5.3.4.	A tangensfüggvényt tartalmazó integrálok	1076
21.5.3.5.	A kotangensfüggvényt tartalmazó integrálok	1076
21.5.4.	Egyéb transzcendens függvények integráljai	1077
21.5.4.1.	A hiperbolikus függvények integráljai	1077
21.5.4.2.	Exponenciális függvények integráljai	1078
21.5.4.3.	Logaritmusfüggvények integráljai	1079
21.5.4.4.	A trigonometrikus függvények inverzeinek integráljai	1081
21.5.4.5.	A hiperbolikus függvények inverzeinek integráljai	1082
21.6.	Határozott integrál	1083
21.6.1.	Trigonometrikus függvények határozott integráljai	1083
21.6.2.	Exponenciális függvények határozott integráljai	1085
21.6.3.	Logaritmikus függvények határozott integráljai	1086
21.6.4.	Algebrai függvények határozott integráljai	1087
21.7.	Elliptikus integrál	1088
21.7.1.	Elsőfajú elliptikus integrál $F(\varphi, k)$, $k = \sin \alpha$	1088
21.7.2.	Másodfajú elliptikus integrál $E(\varphi, k)$, $k = \sin \alpha$	1088
21.7.3.	Teljes elliptikus integrál, $k = \sin \alpha$	1089
21.8.	Gamma-függvény	1090
21.9.	Bessel-függvények (hengerfüggvények)	1091
21.10.	Legendre-polinomok (gömbfüggvények)	1093
21.11.	Laplace-transzformáció	1094
21.12.	Fourier-transzformáció	1100
21.12.1.	Fourier-koszínusz-transzformáció	1100
21.12.2.	Fourier-színusz-transzformáció	1106
21.12.3.	Exponenciális Fourier-transzformáció	1112
21.13.	Z-transzformáció	1113
21.14.	Poisson-eloszlás	1116
21.15.	Standard normális eloszlás	1118
21.15.1.	Standard normális eloszlás, ahol $0,00 \leq x \leq 1,99$	1118
21.15.2.	Standard normális eloszlás, ahol $2,00 \leq x \leq 3,90$	1119
21.16.	χ^2 -eloszlás	1120
21.17.	Fisher-féle F -eloszlás	1121

XXXIV *Tartalomjegyzék*

21.18. Student-féle t -eloszlás	1123
21.19. Véletlen számok	1124
Tárgymutató	1125