# A. függelék

## Ajánlott irodalom az egyes fejezetekhez

Az irodalomjegyzék természetéből adódik, hogy minél hosszabb, annál kevésbé hívja fel egyik vagy másik ott felsorolt könyvre a figyelmet. Ezért úgy gondoltuk, hogy egy rövidre szabott, ámde valódi hivatkozásokat tartalmazó irodalomajánlóval mindenképpen hasznosabb segítséget nyújthatunk a téma iránt érdeklődő olvasónak.

### *Valószínűség-elméletet és sztochasztikus kalkulust tárgyaló könyvek*

- *A first course in probability*, Sheldon Ross, Macmillan (1994. negyedik kiadás, 420 oldal)
- *Probability and random processes*, Geoffrey Grimmett és David Stirzaker, Oxford University Press (1992. második kiadás, 540 oldal)
- *Probability with martingales*, David Williams, Cambridge University Press (1991, 250 oldal)
- *Continuous martingales and Brownian motion*, Daniel Revuz és Mark Yor, Springer (1994. második kiadás, 550 oldal)
- *Diffusions, Markov processes, and martingales: vol. 2. Itô calculus*, Chris Rogers és David Williams, Wiley (1987, 475 oldal)

A fenti könyvek, melyek az első, második és harmadik fejezetben használt valószínűségszámítási alapelveket foglalják össze, a szakmai tartalom és a tárgyalás mélységének nehézségi sorrendjében kerültek felsorolásra (aholis ez utóbbi kettő közel azonos szintű). Ross könyve kiváló bevezetést nyújt az események, a valószínűség, az eloszlás és a várható érték egyszerű (statikus) valószínűségelméleti fogalmaiba. Nagyjából ugyanezt a témakört öleli fel Grimmett és Stirzakerkönyvének első fele, azonban ez kiegészül a véletlen folyamatok egymásra épülő áttekintésével, valamelyest érintve a martingálok valamint a Brown-mozgás témakörét is.

Bár a *Probability with martingales* című könyv foglalkozik az integrálok, a (feltételes) várható értékek valamint a mértékek alapvető matematikájával is, mégis leginkább úgy ajánlanánk, mint a létező legjobb bevezető olvasmányt a martingálok világába. Külön érdekessége, hogy egyik fejezetében egy egyszerű reprezentációs tétel segítségével juthat el az olvasó egészen a Black-Scholes modell diszkrét változatának felírásáig.

Revuz és Yor, valamint Rogers és Williams könyve immár pénzügyi szempontból is részletes lerírását adja a sztochasztikus kalkulusnak. Mindkettőben megtalálható az összes általunk is használt fogalom: a sztochasztikus differenciálegyenletek, az Itô-formula, a Cameron–Martin–Girsanov mértékcsere és a reprezentációs tétel. Mivel a fenti fogalmakat mindkét könyv rendkívüli alapossággall tárgyalja, ezért bártan állítjuk, hogy használatukkal a szükséges alapismeretek birtokában lévő olvasó kiemelkedően hasznos és elmélyült sztochasztikus analízisbeli ismeretekre tehet szert.

### *Pénzügyi könyvek a derivatívokról*

- *Options, futures, and other derivative securities*, Juhn Hull, Prentice-Hall (1993. második kiadás, 490 oldal)
- *Dinamic asset pricing theory*, Darrell Duffie, Princeton University Press (1992, 300 oldal)
- *Option pricing: mathematical models and computation*, Paul Wilmott, Jeff Dewynne és Sam Howison, Oxford Financial Press (1993, 450 oldal)

A Hull-könyv a gyakorló szakemberek kedvelt kézikönyve, mely a számításokat megelőzően körültekintő alapossággal mutatja be a származtatott termékek megannyi fajtáját, csakúgy mint azok piacát. Néhány modellt nagy részletességgel ismertet, gyakorlati alkalmazásukhoz numerikus eljárásokkal is ellátja olvasóját. Rendkívül hasznos segítséget nyújthatnak az egyes fejezetek végén található irodalomjegyzékek.

Duffie sokkal inkább a matematika oldaláról közelít, de mindezt érthető nyelvezetben teszi. Tárgyalja az egyensúlyi árazást valamint az optimális portfólió-kiválasztás elméletét, valamint a miénkhez hasonló megközelítésben ír a folytonos idejű arbitrázs-árazásról. Ez a könyv a matematikai alapokkal rendelkezők számára jó olvasmány.

Az Oxford Financial Press kiadásában megjelent kötet ugyanezt a témát egyszerű differenciálegyenleteken keresztül kísérli meg feldolgozni, feladva a sztochasztikus megközelítést. Ebből következően mindenfajta árazási problémát egy differenciálegyenlet megoldásának problematikájává alakít, melyet semmiképpen sem ajánlanánk olyan ismerkedő olvasóknak, akik a fenti témában nem rendelkeznek mélyebb ismeretekkel.

### *Negyedik fejezet: valós piaci eszközök árazása*

Néhány figyelemre érdemes folyóiratcikk:

- The pricing of options and corporate liabilities, F. Black és M. Scholes, *Journal of Political Economy*, **81** (1973), 637–654.
- Theory of rational option pricing, R. C. Merton, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973), 141–183.
- Foreign currency option values, M. B. Garman és S. W. Kohlhagen, *Journal of International Money and Finance*, **2** (1983), 231–237.
- *Options markets*, J. C. Cox és M. Rubinstein, Prentice-Hall (1985, 500 oldal).
- Two into one, M. Rubinstein, *RISK*, (1991. május), 49. oldal

A Black–Scholes cikk ma már inkább csak pénzügytörténeti jelentőségű, de még mindig bámulatba ejtő látni, hogy honnan indult ki a péénzügy ezen szakterülete, jóllehet a cikk inkább az abban található gondolatok, semmint a szakmai részletei miatt érdekes. A szerzőket legalább annyira foglalkoztatta a kötelezettségekkel rendelkező (úgymint kötvényeket vagy warrantokat kibocsátó) vállalatok részvényeinek értékelése mint az opciók és más származtatott termékek árazása.

Merton a Black–Scholes cikkel közel azonos időben jelentette meg egy annál jóval részletesebb elemzését, melyben kitér az osztalékot fizető részvényekre valamint egy limitáras opcióra is. Garman és Kohlhagen devizákra szóló opciókról ír, míg a Cox–Rubinstein szerzőpáros számos eredménye mellett néhány egzotikus opcióra használható képletet dolgozott ki. Rubinstein *RISK* magazinban megjelent cikke kvantókkal és keresztdeviza (cross-currency) opciókkal foglalkozik.

### *Ötödik fejezet: kamatlábak*

Ami a részvényeknél a Black–Scholes, az a kamatlábaknál a Heath–Jarrow–Morton. Ez a szerzőhármas nem kevesebbet tett, mint hogy megalkotta a lehető leegáltalánosabb Brown-mozgásra épülő kamatláb modellt, mely a határidős kamatlábak alakulásának sztochasztikus folyamatát a szükséges feltételekkel együtt határozza meg. Legyen szó bármilyen kamatláb-modellről, az lényegében mindig egy HJM modellt takar, mindössze a jelöléseiben tér el attól. A cikk elolvasása vagy újbóli átolvasása már csupán ezért is meghálálja magát.

- Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation, David Heath, Robert Jarrow és Andrew Morton, *Econometrica*, **60** (1992), 77–105.

A HJM tanulmány mellett még számos cikk mutat be egy-egy kamatláb-alakulást leíró modellt, melyek közül néhány:

- Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, T. S. Y. Ho és S–B Lee, *Journal of Finance*, **41** (1986), 1011–1029.
- An equilibrium characterization of the term structure, O. A. Vasicek, *Journal of Finance*, **5** (1977), 177–188.
- Pricing interest rate derivative securities, J. Hull és A. White, *The Review of Financial Studies*, **3** (1990), 573–592.
- A theory of the term structure of interest rates, J. C. Cox, J. E. Ingersoll és S. A. Ross, *Econometrica*, **53** (1985), 385–407.
- Bond and option pricing when short rates are lognormal, F. Black és P. Karasinski, *Financial Analysts Journal*, (1991. július–augusztus), 52–59.
- The market model of interest rate dynamics, A. Brace, D. Gatarek és M. Musiela, *UNSW Preprint*, Department of Statistics S95-2.

- Which model for the term-structure of interest rates should one use?, L. C. G. Rogers, in *Mathematical Finance* (ed. M. H. A. Davis, D. Duffie, *et al.*), IMA Volume 65, Springer-Verlag, 93–116.

A sorban az utolsó cikk áttekintést nyújt a létező modellekről és azok tulajdonságairól, az ezt megelőző cikkek pedig egy-egy általunk is említett modellt írnak le részletesen.

### *Hatodik fejezet: összetettebb modellek*

- Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Michael Harrison és Stanley Pliska, *Stochastic Processes and their Applications*, **11** (1981), 215–260.
- The fundamental theorem of asset pricing, F. Delbaen és W. Schachermayer, *Mathematische Annalen*, **300** (1994), 463–520.
- The valuation of options for alternative stochastic processes, J. C. Cox és S. A. Ross, *Journal of Financial Economics*, **3** (1976), 145–166.

Harrison és Pliska tette meg a következő lépést azzal, hogy egy általános keretben összekapcsolta az arbitrázs hiányát és a martingál mérték létezését, és hogy a fedezés akkor lehetséges, ha csupán egyetlen ilyen mérték létezik. Az is ennek a cikknek a jelentőségét mutatja, hogy a mai napig ez a pénzügyi matematika egyik meghatározó gondolata.

Delbaen és Schachermayer hasonló alapokon halad, azonban sokkal inkább egy technikai megközelítésben az időben folytonos folyamatok különleges problémáira helyezve a hangsúlyt, beleértve ebbe a nem folytonos folyamatokat is. Cox és Ross a Black–Scholes modellnél általánosabb környezetben mutatja be a származtatott termékek árazását, többek között az osztalékot fizető részvényekre vonatkozóan is.

# B. függelék

## Használt jelölések

A jelöléseket három nagy csoportra bontottuk: kisbetűs (többnyire determinisztikus), nagybetűs (többségében véletlen értéket jelölő), és görög betűs jelölések.

### *Kisbetűs jelölések*

| | |
|---|---|
| $a$ | (valós) paraméter |
| $c$ | konstans; a kötvény néveleges kamatlába |
| $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ | a $\mathbb{Q}$ mérték $\mathbb{P}$ szerinti Radon–Nikodym deriváltja |
| $dt$ | végtelenül rövid időtartam |
| $dW_t$ | a Brown-mozgás növekménye egy végtelenül rövid időtartam alatt |
| $f$ | általános függvény |
| $f_{\mathbb{P}}(x)$ | a $\mathbb{P}$ mértéket leíró sűrűségfüggvény |
| $f(t,T)$ | határidős kamatláb |
| $g$ | általános függvény |
| $g(x,t,T)$ | a $\left(-\log P(t,T)\middle\vert r_t = x\right)$ függvény |
| $i$ | egész szám |
| $j$ | egész szám |
| $k$ | szerződésbeli kötési vagy lehívási árfolyam; egész |
| $n$ | egész szám |
| $n[t]$ | a $t$ időpontig esedékes osztalékfizetések száma |
| $p, p_j$ | valószínűség |
| $q, q_j$ | valószínűség |
| $r$ | konstans kamatláb |
| $r_t$ | sztochasztikus kamatlábalakulás; pillanati kamatláb |
| $s$ | a részvény kiinduló árfolyama; alternatív időváltozó |

| | |
|---|---|
| $s_j$ | egy felvehető árfolyamérték diszkrét áralakulás esetén |
| $t$ | idő(változó) |
| $u$ | külföldi deviza kamatlába; valós változó |
| $x$ | valós változó; a vízszintes tengelyen szereplő változó |
| $x_i(t)$ | a volatilitási felület időfüggő tényezője |
| $y_i(T)$ | a volatilitási felület lejáratfüggő tényezője |

### *Nagybetűs jelölések*

| | |
|---|---|
| $A$ | esemény(halmaz); konstans |
| $A_t$ | a Heath–Jarrow-Morton modell volatilitás-mátrixa |
| $B_i, B_t$ | a bankbetét alakulásának folyamata |
| $B(t,T)$ | egy Ricatti-egyenlet megoldása |
| $C_t$ | devizaárfolyam; kamatszelvényes kötvény árfolyama; ármérce |
| $D_i$ | a stratégia menetközbeni finanszírozási szükséglete |
| $D_t$ | a devizában elhelyezett bankbetét értékalakulása |
| $D(t,T)$ | egy Ricatti-egyenlet megoldása |
| $\mathbb{E}$ | várható érték operátor |
| $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ | $\mathbb{P}$ mérték szerinti várható érték |
| $E_t$ | a portfólió diszkontált értékfolyamata |
| $F$ | határidős árfolyam |
| $F_s(t,T)$ | a $P(t,T)$ kötvény $s$ időpontbeli határidős árfolyama |
| $F_Q$ | kvantó határidős árfolyama |
| $\mathcal{F}_i$ | eszközár-alakulás az $i$-edik lépésig (diszkrét modell) |
| $\mathcal{F}_t$ | a Brown-mozgás $t$ időpontig megtett útja |
| $I_A$ | az $A$ esemény indikátorfüggvénye |
| $I(t)$ | a következő kamatfizetés sorszáma |
| $K$ | az opció lehívási árfolyama |
| $L(T)$ | LIBOR kamatláb |
| $L(t,T)$ | határidős LIBOR kamatláb |
| $M_t$ | martingál folyamat |
| $N_t$ | martingál folyamat |
| $\mathbb{N}$ | a nemnegatív számok halmaza $0, 1, 2, \ldots$ |
| $N(\mu, \sigma^2)$ | normális eloszlású valószínűségi változó $\mu$ várható értékkel és $\sigma^2$ varianciával |
| $P$ | egy származtatott termék hipotetikus diszkrét árfolyama |

B. Használt jelölések

| | |
|---|---|
| $\mathbb{P}$ | valószínűségi mérték |
| $\mathbb{P}_T$ | határidős mérték |
| $P(t,T)$ | kötvényárfolyam |
| $\mathbb{Q}$ | valószínűségi mérték |
| $\mathbb{R}^n$ | az $n$-dimenziós valós vektortér |
| $R(t,T)$ | kötvényhozamgörbe |
| $S_i, S_t$ | a részvényár-alakulás folyamata |
| $\tilde{S}_t$ | egy kereskedhető termék árfolyamalakulása |
| $S_t^1 \dots S_t^n$ | eszközárak alakulását leíró folyamatok |
| $T$ | a származtatott ügylet lejárata illetve lehívási időpontja |
| $T_i$ | kamatfizetési (szelvény-esedékességi) időpontok |
| $U_t$ | a származtatott termék devizában számított értékalakulása |
| $V$ | a származtatott termék értéke |
| $V_t$ | a származtatott termék értékalakulása |
| $V(s,T)$ | az opció Black–Scholes-féle árfolyama |
| $W_n(t)$ | véletlen bolyongási (random walk) folyamat |
| $W_t$ | Brown-mozgás |
| $\tilde{W}_t$ | Brown-mozgás |
| $W_t^1, \dots, W_t^n$ | páronként független Brown-mozgások |
| $X$ | valószínűségi változó; származtatott termék kifizetése |
| $X_i$ | valószínűségi változók egy sorozata |
| $X_t$ | sztochasztikus folyamat |
| $Y_t$ | sztochasztikus folyamat |
| $Y_i(t,T)$ | $y_i$ $[t,T]$ feletti integrálja |
| $Z$ | (normális eloszlású) valószínűségi változó |
| $Z_i, Z_t$ | diszkontált eszközárfolyam-alakulás |
| $Z(t,T)$ | diszkontált kötvényárfolyam |
| $\tilde{Z}_t$ | kereskedhető termék diszkontált árfolyamalakulása |

### *Görög betűs jelölések*

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | valós értékű paraméter |
| $\alpha(t,T)$ | a határidős kamatláb növekedési üteme |
| $\beta(t,T)$ | két változó függvénye (Vasicek modell) |
| $\gamma_t$ | mértékcserélő növekedési ütem; a kockázat piaci ára |
| $\gamma_i(t,T)$ | a Brace–Gatarek–Musiela-modell volatilitási felülete |
| $\delta$ | osztalékhozam; a kötvény kamatfizetéseinek gyakorisága |

## B. Használt jelölések

| | |
|---|---|
| $\delta t$ | végtelenül rövid időtartam |
| $\delta s_i, \delta n_i$ | ágak terebélyessége (szélessége) |
| $\Delta S_i, \Delta V_i$ | $S_i$, $V_i$, stb. értékének változása $\delta t$ idő elteltével |
| $\zeta_t$ | mértékcserélő folyamat |
| $\theta$ | valós értékű változó |
| $\theta_t$ | determinisztikus driftfüggvény |
| $\lambda$ | valós paraméter |
| $\mu$ | a részvényárfolyam konstans növekedési üteme |
| $\mu_t$ | a részvényárfolyam változó növekedési üteme |
| $\nu$ | a részvényárfolyam növekedési ütemét megadó folyamat |
| $\pi_i$ | útvalószínűség |
| $\Pi_i$ | portfólió |
| $\rho$ | korrelációs együttható |
| $\bar{\rho}$ | ortogonális komplementer $\sqrt{1-\rho^2}$ |
| $\rho_t$ | volatilitás-folyamat |
| $\sigma$ | konstans részvényvolatilitás |
| $\sigma_1, \sigma_2$ | eszközök volatilitásai |
| $\sigma_t$ | a változó részvényvolatilitás folyamata |
| $\sigma(t, T)$ | a határidős kamatláb volatilitási felülete |
| $\sigma_i(t, T)$ | a határidős kamatláb volatilitási felülete több tényezőre |
| $\bar{\sigma}$ | időszaki volatilitás |
| $\Sigma_t$ | volatilitás mátrix |
| $\Sigma(t, T)$ | kötvényárfolyamok volatilitása |
| $\tau$ | időhorizont; lejárati időpont; megállási idő |
| $\phi_t, \tilde{\phi}_t$ | részvénytartási stratégia; a reprezentációs tételbeli integrandus |
| $\Phi$ | a normális eloszlás eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \mathbb{P}(N(0,1) \leqslant x)$ |
| $\psi_t$ | a bankbetét nagyságát leíró stratégia |
| $\omega$ | a piac egy lehetséges alakulása |

# C. függelék

## Feladatok megoldásai

2.1 A határidős pozíció (lejáratkori) értéke a részvényárfolyam és a kötési árfolyam különbsége. Amennyiben a folyamat a 2. állapotban ér véget, úgy a részvény $s_2$ árfolyamot vesz fel, és így a pozícióérték $f(2) = s_2 - k$ lesz. A másik lehetséges állapot hasonlóképpen értékelhető. Mivel már korábban felírtuk, hogy $q = (s_1 \exp(r\delta t) - s_2) / (s_3 - s_2)$, ebből

$$V = \exp(-r\delta t)((1-q)(s_2 - k) + q(s_3 - k)) =$$
$$= \exp(-r\delta t)\left(s_2 \frac{s_3 - s_1 e^{r\delta t}}{s_3 - s_2} + s_3 \frac{s_1 e^{r\delta t} - s_2}{s_3 - s_2} - k\right).$$

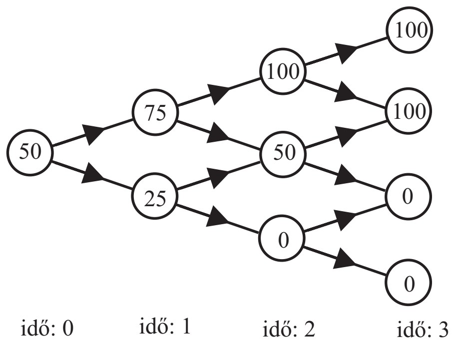
Ez éppen egyenlő $e^{-r\delta t}(s_1 e^{r\delta t} - k)$-val, illetve tovább egyszerűsítve $V = s_1 - ke^{-r\delta t}$. Tehát egyetlen olyan kötési árfolyam létezik, melyre a nyitó határidős pozícióérték nulla, ez a $k = s_1 \exp(r\delta t)$.

2.2 Az első esetben a részvény árfolyamának kezdeti növekedését követhetjük nyomon, melyhez az árfolyam értékeit valamint a fedezeti portfólió összetételét a C.1. táblázatban találjuk, az opció érté-

**C.1. táblázat.** Opcióérték és portfólió-összetétel alakulás ITM esetben

| Időpont $i$ | Utolsó lépés | Részvény-árfolyam $S_i$ | Opció értéke $V_i$ | Részvény-pozció $\phi_i$ | Betét-nagyság $\psi_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | – | 100 | 50 | – | – |
| 1 | fel | 120 | 75 | 1,25 | −75 |
| 2 | fel | 140 | 100 | 1,25 | −75 |
| 3 | le | 120 | 100 | 0,00 | 100 |

kével feltöltött fa a C.1. ábrán látható. A C.2. táblázatban a másik eset figyelhető meg.




**C.1. ábra.** A bináris opció értékalakulása

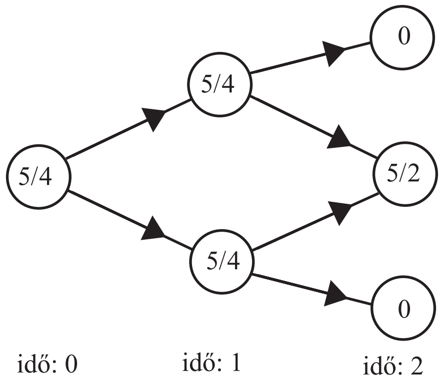
**C.2. táblázat.** Opcióérték és portfólió-összetétel alakulás OTM esetben

| Időpont $i$ | Utolsó lépés | Részvény-árfolyam $S_i$ | Opció értéke $V_i$ | Részvény-pozció $\phi_i$ | Betét-nagyság $\psi_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | – | 100 | 50 | – | – |
| 1 | le | 80 | 25 | 1,25 | $-75$ |
| 2 | fel | 100 | 50 | 1,25 | $-75$ |
| 3 | le | 80 | 0 | 2,50 | $-200$ |

Az opció nulladik időpontbeli árfolyama 50. A $\phi$ fedezeti paramétert szintén ábrázolhatjuk egy kétlépéses fán, mely megadja, hogy a következő tartási periódusban mekkora részvénymennyiséggel rendelkezzünk. A fát a C.2. ábrán láthatjuk.

2.3 A C.3. táblázatban látható számítások igazolják, hogy $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2|\mathcal{F}_i)$ egyenlő $S_i$-vel. Vagyis $S_i$ folyamat $\mathbb{Q}$ mérték szerinti martingál tulajdonsága egyenesen következik a toronyszabály utáni megjegyzésekből.

3.1 Nem. A folyamat növekménye (és így a feltételes eloszlása is) eltér a szükségestől. Az $X_{s+t} - X_s$ időszaki növekmény normális eloszlású, de $t$ helyett $t - 2s(\sqrt{1 + t/s} - 1)$ nagyságú varianciával,




**C.2. ábra.** A delta-fedezeti paraméter alakulása

**C.3. táblázat.** Feltételes várható érték az egyes filtrációkra

| A keresett érték | Filtráció | Várható érték |
|---|---|---|
| $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2 \mid \mathcal{F}_0)$ | $\{1\}$ | $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot 180+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot 80+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 72\ldots$ $+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 36=80$ |
| $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2 \mid \mathcal{F}_1)$ | $\{1,3\}$ | $\frac{2}{5}\cdot 180+\frac{3}{5}\cdot 80=120$ |
| | $\{1,2\}$ | $\frac{2}{3}\cdot 72+\frac{1}{3}\cdot 36=60$ |
| $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2 \mid \mathcal{F}_2)$ | $\{1,3,7\}$ | 180 |
| | $\{1,3,6\}$ | 80 |
| | $\{1,2,5\}$ | 72 |
| | $\{1,2,4\}$ | 36 |

valamint a növekmény láthatóan a folyamat aktuális $X_s$ állapotától sem független.

3.2 Igen. Az $X_{s+t} - X_s$ növekmény egy $N(0, t\rho^2)$ eloszlású valamint egy ettől független $N(0, t(1-\rho^2))$ eloszlású valószínűségi változó összege, mely pontosan $N(0, t)$ eloszlást eredményez. A folyamat növekménye láthatóan független mindkét filtrációtól, $(W_u : u \leqslant s)$-től és $\tilde{W}_u : u \leqslant s)$-től egyaránt, vagyis az $(X_u : u \leqslant s)$ filtrációtól úgyszintén független kell hogy legyen.

3.3 Azt feltettük, hogy $S_T$ normális eloszlású $\mu T$ várható értékkel és $\sigma^2 T$ varianciával. Ebből adódóan ez pontosan olyan valószínűséggel vesz fel negatív értéket, mint amekkora valószínűséggel egy standard normális $N(0,1)$ valószínűségi változó kisebb mint $-\mu\sqrt{T}/\sigma$. Ennek valószínűsége mindig pozitív.

3.4 $dX_t = \exp(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}\exp(W_t)\,dt = X_t\,dW_t + \frac{1}{2}X_t\,dt$.

3.5 $X_t = X_0\exp(\sigma W_t + \int_0^t \mu_s\,ds - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$.

3.6 A feladat útmutatása alapján az egyes folyamatok: $dB_t = \beta_t\,dt$ valamint $dX_t = \sigma_t\,dW_t + \mu_t\,dt$. Ekkor

$$d(B_t X_t) = \tfrac{1}{2}d((B_t + X_t)^2 - B_t^2 - X_t^2),$$

ami az Itô-formula alapján egyenlő

$$(B_t + X_t)(dB_t + dX_t) + \tfrac{1}{2}\sigma_t^2\,dt - B_t\,dB_t - X_t\,dX_t - \tfrac{1}{2}\sigma_t^2\,dt.$$

Ezt egyszerűsítve éppen a bizonyítandó eredményt kapjuk. A bizonyítás a folyamatszorzat differenciálalakját felírva egyetlen lépésben elvégezhető lett volna.

3.7 A képlet $t = 2$ esetén definíció szerint teljesül. A $t = 1$ időpont fenti állapotában $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ értéke $q_1 q_2 / p_1 p_2$-vel egyenlő $\mathbb{P}$ szerinti $p_2$ valószínűséggel, valamint $q_1\bar{q}_2 / p_1\bar{p}_2$ értéket vesz fel $\mathbb{P}$ szerinti $\bar{p}_2$ valószínűséggel. A (feltételes) várható értéke így $q_1 q_2 / p_1 + q_1\bar{q}_2 / p_1$. Ezzel megkaptuk $\zeta_1$ értékét a fenti állapotra. A lenti állapotban felvett értéke hasonlóképpen számítható.

A $t = 0$ időpontban $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(1) = 1$. Ezzel a szükséges $\zeta_0$ értéket is megkaptuk.

3.8 Az állítást minden $s \leqslant t$-nek eleget tevő $s$ és $t$ értékre, továbbá minden lehetséges $X_t$-re be kell látnunk. Vegyük észre, hogy az $s = 0$ eset egyenesen következik abból az eredményből, hogy $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X)$, valamint $\zeta_t$ éppen $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ $t$ időpontbeli értéke. Az $s = t$ eset szintén triviális, hiszen ekkor az egyenlőség mindkét oldala $X_t$-vel lesz egyenlő. Így egyedül az $s = 1$, $t = 2$ esetet kell megvizsgálnunk négy fajta $X_2$ kifizetésre.

Tekintsük azt az esetet, melyben $X_2$ egy olyan bináris opció, ami kizárólag akkor teljesít egységnyi kifizetést, ha az árfolyam mindkétszer növekedett. Amennyiben az első lépés lefele történt, akkor az egyenlőség mindkét oldala nulla, hiszen $X_2$ és $\zeta_2 X_2$ értéke egyaránt zéró. Ha az első lépés felfelé történt, akkor az egyenlőség bal oldala

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_2|\mathcal{F}_1) = q_2(1) + \bar{q}_2(0) = q_2.$$

A jobb oldalon pedig

$$\zeta_1^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_2 X_2|\mathcal{F}_1) = \frac{p_1}{q_1}\left(p_2\left(\frac{q_1 q_2}{p_1 p_2}1\right) + \bar{p}_2(0)\right) = q_2.$$

Hasonlóképpen ellenőrizhetők a fel-le, a le-fel, valamint a le-le lépéskombinációkra egységnyi kifizetést teljesítő bináris $X_2$ kifizetések. Ezzel az ellenőrzést elvégeztük.

3.9 A (ii) és a (ii)' feltételek ekvivalenciája a normális eloszlás felismeréséből egyértelműen adódik. Éppígy teljesül (iii) és (iii)' egyezősége, ha figyelembe vesszük, hogy (iii)' jobb oldala független az $\mathcal{F}_t$ filtrációtól.

Szintén megfigyelhetjük, hogy valójában (ii)' éppen (iii)' egy speciális esete, amikor $s = 0$. Így tehát elegendő (iii)'-at bebizonyítani. A bal oldalon

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta(W_{t+s} - W_s + \gamma t))|\mathcal{F}_s)\\ &= \zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_{t+s}\exp(\theta(W_{t+s} - W_s + \gamma t))|\mathcal{F}_s).\end{aligned}$$

Itt, $\zeta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)$. A $\mathbb{P}$ szerinti $W$ Brown-mozgás (iii) tulajdonsága alapján $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 T)\exp(-\gamma(W_T - W_t))$, ahol $W_T - W_t$ normális $N(0, T-t)$ eloszlású és $\mathcal{F}_t$-től független, ebből egyenesen következik, hogy $\zeta_t = \exp(-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 T)\exp(\frac{1}{2}\gamma^2(T - t))$, mely éppen

$$\zeta_t = \exp(-\gamma W_t - \tfrac{1}{2}\gamma^2 t).$$

Vagyis (iii)' baloldala

$$\exp(\theta\gamma t - \tfrac{1}{2}\gamma^2 t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big(\exp((\theta-\gamma)(W_{t+s} - W_s))\Big|\mathcal{F}_s\Big).$$

Ismételten felhasználva azt, hogy $W_{t+s} - W_s$ normális $N(0, t)$ eloszlású és $\mathcal{F}_s$-től független, a fenti kifejezésben a várható érték egyenlő $\exp(\frac{1}{2}(\theta-\gamma)^2 t)$-vel, melyből a teljes kifejezés értéke a bizonyítani kívánt $\exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)$.

3.10 Ha $\gamma = 0$, akkor $X_t = W_t$, melynek martingál tulajdonságát a (2) példában beláttuk. Azonban $\gamma$ nullától különböző értékei mellett

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) + \gamma t = W_s + \gamma t = X_s + \gamma(t-s).$$

Amennyiben $\gamma$ értéke nullától különbözne, úgy $X$ folyamat nem lehetne martingál, hiszen a fenti $\gamma(t-s)$ tag bennmaradna.

3.11 A $\sigma$ függvény korlátos, és így létezik olyan $K$ konstans, melyre $|\sigma(t,\omega)| \leqslant K$ teljesül minden $t \leqslant T$ értékre, és minden $\Omega$-beli $\omega$-ra. Ekkor $\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2\,ds)$ értékére $\exp(\frac{1}{2}K^2T)$ felső korlátot ad minden $\omega$ mellett, vagyis annak a várható érték szintén felülről korlátos kell legyen. A martingálok tulajdonsága alapján az $X$ lokális martingál valódi martingál is egyben.

3.12 A $V_t = W_t^2 - t$ folyamat differenciál-egyenletének felírásához válasszuk azt szét egy $W_t^2$ és egy $-t$ tagra. Az első tagra alkalmazzuk az Itô-formulát az $f(x) = x^2$ és $X_t = W_t$ helyettesítések mellett. Tehát

$$d(f(W_t)) = f'(W_t)\,dW_t + \tfrac{1}{2}f''(W_t)\,dt = 2W_t\,dW_t + dt.$$

Mivel $d(-t) = -dt$, ezért $dV_t = 2W_t\,dW_t$. Az is belátható, hogy $V_t$ folyamat valódi martingál, hiszen $X$ értékét $\int_0^T W_t^2\,dt)^{\frac{1}{2}}$-nek választva elegendő $\mathbb{E}(X) < \infty$ teljesülését megmutatni. Ezt a következőképpen tesszük meg:

$$(\mathbb{E}(X))^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2) = \int_0^T \mathbb{E}(W_t^2)\,dt = \tfrac{1}{2}T^2.$$

3.13 Jelölje $Z_t$ logaritmusát $L_t$, vagyis legyen $L_t = \sigma W_t + (\mu - r)t$, és így $dL_t = \sigma\,dW_t + (\mu - r)\,dt$. A megoldás az Itô-formula alkalmazásával kapható meg.

3.14 Ha az integrálon belül bevezetünk egy új $v = -(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T)/\sigma\sqrt{T}$ változót, akkor így $V_0$ értékét a

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}\left(se^{-\sigma\sqrt{T}v - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - ke^{-rT}\right)e^{-\frac{1}{2}v^2}\,dv$$

formában kapjuk meg, ahol $a$ konstans $(\log\frac{s}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)/\sigma\sqrt{T}$ értékű. Ezt követően alakítsuk át az $\exp(-\sigma\sqrt{T}v - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}v^2)$ kifejezét az $(\exp(\frac{1}{2}(v + \sigma\sqrt{T})^2)$ alakra, mely a következőt adja:

$$V_0 = \frac{s}{\sqrt{s\pi}}\int_{-\infty}^{a+\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}v^2}\,dv - \frac{ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}v^2}\,dv.$$

Ennek megoldása

$$V_0 = s\Phi(a + \sigma\sqrt{T}) - ke^{-rT}\Phi(a),$$

mely éppen a kívánt eredményt adja.

3.15 Annyit mindenképpen feltételeznünk kellett, hogy bármi is legyen a növekedési ütem, az egy konstans érték. Ez abból adódik, hogy a három lépésből álló átalakítást egyelőre még csak konstans driftre tudjuk elvégezni. A későbbiekben (a 6.1 fejezetrészben) ezt általánosítjuk majd, viszont pillanatnyilag még akkor is konstans növekedési ütemre van szükségünk, ha annak tényleges értéke valójában nem is számít.

3.16 Egyszerűen alkalmazzuk a Black–Scholes képletet az $s = \$10, k = \$12, \mu = 0,15, \sigma = 0,2, r = 0,05$ és $T = 1$ paraméterek mellett. Az opció értékére 0,325 dollárt kapunk.

3.17 Ha $S_T > \$10$, akkor $X$ kifizetése 1 dollár, nulla különben. $T$ értéke természetesen 1. A származtatott termékek árazási képletével ez

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X) = e^{-rT}\mathbb{Q}(S_T > \$10) = e^{-rT}\Phi\left(\frac{rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

A számítást elvégezve eredményül 0,532 dollár adódik.

4.1 (i) Diszkontáljuk az eszköz árfolyamalakulását, $Z_t = B_t^{-1}X_t = \exp(2\sigma d\tilde{W}_t + (r + \sigma^2)t)$. Ennek SDE-e $dZ_t = Z_t(2\sigma d\tilde{W}_t + (r + \sigma^2)dt)$, melyből nem tűthethető el a trendkomponens. Ebből következően $Z_t$ nem lehet $\mathbb{Q}$ szerinti martingál, és így $X_t$ nem kereskedhető.

(ii) Ebben az esetben a diszkontált eszközár a következőképpen alakul: $Z_t = B_t^{-1}X_t = \exp(-\alpha\sigma\tilde{W}_t - \alpha r t)$. Adva azt, hogy $\alpha r = \frac{1}{2}(\alpha\sigma)^2$, $Z_t$ SDE-e $dZ_t = Z_t(-\alpha\sigma d\tilde{W}_t)$, mely egy $\mathbb{Q}$ szerinti martingál. Ebből adódóan $X_t$ kereskedhető.

4.2 Cseréljünk ki minden $dW_i(t)$ tagot egy $d\tilde{W}_i(t) - \gamma_i(t)$ tagra, majd helyettesítsük be azokat $dY_t$ és $dZ_t$ SDE-ibe, melyekből így láthatóan eltűnik a trendkomponens.

4.3 A fontra kiszámított példától csupán annyiban tér el ez a mostani, hogy ebben fordított devizaárjegyzéssel találkozhatunk. Korábban font/dollár formában jegyeztük a deviza árfolyamát (tehát a külföldi valuta értékét fejeztük ki hazai valutában), most azonban egy dollár/jen valutaárfolyamot figyelhetünk meg (vagyis a hazai valuta értékét fejezzük ki a külföldi valuta függvényében). Így tehát $C_t$ helyett $C_t^{-1}$-t kell használnunk, bár ezzel csupán a korreláció előjele fog megváltozni. Vagyis a határidős árfolyam $F_0 = \exp(\rho\sigma_1\sigma_2)F$, és nem a korábbi $\exp(-\rho\sigma_1\sigma_2)F$, ahol $F$ a hazai valutában számított határidős árfolyam, tehát $F = e^{uT}S_0$. Mivel a devizaárfolyamok jegyzése többnyire a nagyobb árfolyamot adó formában történik, ebből adódóan $\rho$ előjele mindig attól függ, hogy a konkrét esetben milyen pénznemeket vizsgálunk.

# D. függelék

## Kislexikon

**1 valószínűségű esemény** olyan esemény, ami 100%-os valószínűséggel bekövetkezik. Ennek ellenére nem azonos a biztos esemény fogalmával, mint ahogy egy normális eloszlású valószínűségi változó felvehet zéró értéket, ám 100% annak a valószínűsége, hogy nem fogja

**adaptált** egy olyan folyamat elnevezése, melynek értéke csak az alapfolyamat(ok) korábbi alakulásának és jelenlegi állapotának függvénye, és így jövőbeli alakulása nem jelezhető előre.

**alaptermék** egy hagyományos befektetési eszköz, úgymint a részvény, a kötvény vagy a deviza

**állapot** a fának egy olyan pontja, melybe ágak futnak illetve ahonnan ágak indulnak

**amerikai vételi opció** vételi opció, mely a lejárat napjáig bezárólag bármikor lehívható

**arbitrázs** kockázatmentes nyereséget biztosító egyszeri ügylet vagy ügyletek egy sorozata

**arbitrázsár** egy befektetési eszköznek az a kitüntetett árfolyama, mely kizárja mindenfajta arbitrázslehetőség létezését

**arbitrázsmentesség** olyan piaci állapot, ami egyetlen szereplőnek sem teszi lehetővé a kockázatmentes profitszerzést

**ármérce** egy olyan befektetési eszköz, melynek értékalakulása viszonyítási alapként szolgál a többi eszköz értékeléséhez. Ezt a feladatot legtöbbször a *bankbetét* látja el.

**átlag** mintaelemek számtani átlaga

**átlag** szinonim kifejezés a *várható értékre*

**átlaghoz visszahúzó** egy folyamat azon tulajdonsága, mely biztosítja, hogy értéke egy hosszú távú trend körül alakuljon

**autoregresszív** folyamat, mely rendelkezik a *középértékhez való visszahúzás* tulajdonságával

**azonos eloszlásból származó** olyan valószínűségi változók, melyek valószínűségeloszlása megegyezik

**bankbetét** bármikor hozzáférhető betét, mely mindenkor az aktuális pillanati kamatláb ütemében növekszik

**betétérték-folyamat** a *bankbetét* értékalakulásának folyamata, ahol a mindenkori pillanati kamatlábnak megfelelő kamat folyamatosan jóváírásra és (újra)tőkésítésre kerül

**bináris opció** olyan derivatív termék, mely egyedül egy esemény bekövetkezésekor teljesít meghatározott kifizetést, kifizetése minden más esetben nulla

**binomiális fa** szemléletesen egy olyan fa, mely minden egyes lépésben két irányba ágazik tovább

**binomiális folyamat** binomiális fán ábrázolható folyamat

**binomiális reprezentációs tétel** a *martingál reprezentációs tétel* binomiális fákra alkalmazható, diszkrét változata

**Black–Scholes** részvénypiaci modell analitikus opcióárazási képlettel

**Brown-mozgás** véletlen bolyongási folyamat folytonos határátmenetben, egyben a legegyszerűbb sztochasztikus folyamat. Zéró növekedési ütemű és egységnyi volatilitású martingál folyamat, mely a Newton kalkulussal nem differenciálható (vagy: nem Newton-differenciálható)

**Cameron–Martin–Girsanov tétel** kimondja, hogy az ekvivalens mértékcsere azonos a Brown-mozgás növekedési ütemének megváltozásával

**derivatív termék** olyan befektetési eszköz, melynek értéke más eszközök árfolyamától függő. Lásd még *feltételes követelés*

**devizapiac** a nemzeti fizetőeszközök cseréjének piaci rendszere

**differencia-egyenlet** a differenciálegyenlet diszkrét megfelelője. Ilyet kapunk például azon $(x_n)$ értékek meghatározásával, melyek kielégítik a következőt:

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = d$$

**diffúzió** egy olyan sztochasztikus folyamat, mely egy SDE megoldását adja

**diszkontálás** egy jövőbeli kifizetés arányos csökkentése, kifejezve ezzel a különböző időpontban esedékes pénzek eltérő értékét

**diszkontkötvény** egyetlen jövőbeli időpontban fizetést ígérő kötvény, amellyel a lejáratot megelőzően névérték alatti árfolyamon kereskednek

**diszkrét** elkülönülő, egyedi értékek; mint például az $\mathbb{N}$ (a természetes számok halmaza), vagy a $\{0, \delta t, 2\delta t, \dots\}$ halmaz

**Doléans-féle exponenciális** egy $M_t$-vel jelölt lokális martingál folyamatra ez a $dX_t = X_t\, dM_t$ SDE megoldása, mely egy újabb lokális martingál, $X_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\int_0^t (dM_s)^2)$

**drift** a sztochasztikus folyamatban szereplő $dt$ tag együtthatója (a trend)

**egzotikus származtatott ügyletek** frissen bevezetett származtatott termékek, melyek rövid időn belül szabványossá válnak vagy nyom nélkül eltűnnek

**egyszerű részvény** értékpapír, mely egy vállalatban szerzett részesedést testesít meg

**egytényezős modell** olyan piaci modell, mely véletlen jellegét egyetlen Brown-mozgástól kapja

**ekvivalens martingál mérték (EMM)** lásd *martingál mérték*

**eloszlás** egy valószínűségi változó által felvehető minden lehetséges érték és a hozzájuk tartozó valószínűségek együttese

**eloszlásfüggvény** egy valószínűségi változó (kumulált) $F$ eloszlásfüggvénye annak az $F(x)$-szel jelölt valószínűségét adja meg bármely $x$-re, hogy a valószínűségi változó értéke nem nagyobb, mint $x$. A függvény (gyengén) monoton növekvő, értéke 0-tól 1-hez tartó. Amennyiben $F$ differenciálható, úgy deriváltja a sűrűségfüggvényt adja.

**előrelátható** minden folytonos, de legalábbis balról folytonos és jobboldali határértékkel rendelkező sztochasztikus folyamat, továbbá minden ilyen folyamat határértéke előrelátható

**értékpapír** egy papír, mely kötelezettségvállalást, kötelmet rögzít

**eszköz** kereskedett termék, ügylet

**európai vételi opció** vételi opció, ahol a lehívásról szóló döntést kizárólag a lejáratkor lehet meghozni. Vesd össze: *amerikai vételi opció*

**exponenciális Brown-mozgás** olyan folyamat, melynek exponenciálisa egy növekedési ütemmel rendelkező Brown-mozgás

**exponenciális martingál** egy martingál folyamat *Doléans-féle exponenciálisa*, mely maga is egy (lokális) martingál

**fa** csomópontok ágakkal összekötött ábrája, melyben nem található önmagába visszatérő hurok vagy visszafelé vezető ág

**fedezés** egy pozíció piaci mozgásokból származó kockázatokkal szembeni védettségének megteremtése

**feltételes eloszlás** egy valószínűségi változó eloszlása ismert $\mathcal{F}$ információk alapján, így például a $\mathbb{P}(x \leqslant x|\mathcal{F})$ eloszlás

**feltételes követelés** olyan követelés, melynek pontos nagysága csak a piaci eszközök kifizetésig bekövetkezett árfolyammozgásainak ismeretében határozható meg

**feltételes várható érték** várható érték számítás valamely esemény vagy eseménysorozat ismeretében. Így például a három érmefeldobásból a fejek várható értéke 2, feltéve, hogy az első dobás fej volt, miközben a feltétel nélküli várható értéknek 1,5 adódik. Jelölése $\mathbb{E}(\cdot, \mathcal{F}_t)$, mely a folyamat $t$-beli állapotában rendelkezésre álló információ alapján képezi a várható értéket

**filtráció** egy folyamatra értelmezett $(\mathcal{F}_t)_{t\leqslant 0}$ eseménysor, ahol $\mathcal{F}_t$ a folyamat $t$ időpontig felvett értékeit (bejárt útját) tartalmazza

**fix kamatláb** a szerződés teljes időtartamára rögzített, konstans kamatláb

**folyamat** valószínűségi változók időben lejátszódó sorozata

**folytonos(an számított) kamatozás** a kamat nem évente vagy havonta, hanem folyamatosan jóváírásra kerül, így a betét értéke exponenciális ütemben nő

**folytonos-idejű folyamat** folyamat, melynek egyik független változója az a valós számok felett értelmezett idősík, mely végtelenül kicsiny időszeletekre osztható

**folytonosság** egy függvény vagy folyamat azon tulajdonsága, hogy értékét a paraméterek vagy a független változók végtelenül kicsiny megváltoztatására csupán kevéssé változtatja

**fraktál** olyan geometriai alakzat, mely részleteiben is a teljes alakzattal megegyező formát ölt. Az egyenes vonal egydimenziós fraktál, míg egy Brown-mozgás által kirajzolt útvonal dimenziószáma 1,5

**függetlenség** annak leírása, hogy a kérdéses valószínűségi változók nincsenek egymással kapcsolatban, nem befolyásolják egymást

**FX** a *devizapiac* angol rövidítése (foreign exchange)

**Gauss-folyamat** olyan folyamat, melynek minden peremeloszlása normális eloszlású, illetve minden többdimenziós peremeloszlása egy többdimenziós normális eloszlás

**határidős ár** árfolyam, melyen egy eszköz jövőbeli adásvétele történik

**határidős kamatláb** határidős hitelügylet ára vagy az a pillanatnyi kamatláb, ami mellett a határidős szerződést megkötik

**határidős ügylet (forward)** valamely termék meghatározott áron (határidős áron) történő jövőbeli eladásáról vagy vételéről szóló megállapodás

**Heath–Jarrow–Morton (HJM) modell** kamatlábpiacot leíró pénzügyi modell

**hitelezési kockázat kizárása** az az elméleti feltevés, hogy a kötvény kibocsátója biztosan eleget tesz fizetési kötelezettségének

**hosszú (pozíció)** valamely termék pozitív mennyiségének tartása

**hozam** egy kötvény teljes futamidejére számított átlagos kamatszint

**hozamgörbe** a kötvényhozamokat a lejáratok függvényében ábrázoló görbe

**időszaki variancia** az eszközárfolyam logaritmusának adott időszak alatti varianciája, képletben $Var(\log(S_T / S_0))$

**időszaki volatilitás** egy eszköz valamely időszak alatti volatilitásának effektív (és évesített) értéke. Négyzete éppen az időszaki variancia osztva az időszak hosszával:

$$\bar{\sigma}^2 = Var(\log(S_T / S_0)) / T$$

**IID** az Independent, Identically Distributed (független, azonos eloszlásból származó, FAE) angol kifejezés rövid alakja

**indikátorfüggvény** halmazrelációs függvény, melynek értéke 1, ha az argumentumban megadott érték a halmazon belül fekszik, illetve 0, ha azon kívül

**indukció** bizonyítási módszer, mely lépések egymásra épülő érvelésével bizonyítja az állítást

**Itô-formula** az ún. láncszabály sztochasztikus megfelelője, mely egy folyamatformában adott transzformált sztochasztikus folyamat driftjét és voltilitását adja meg az alapfolyamat driftjének és volatilitásának, valamint a transzformáló függvény deriváltjainak ismeretében. Ha $X_t$ volatilitása $\sigma_t$ és driftje $\mu_t$, akkor az $Y_t = f(X_t)$ folyamat volatilitása $f'(X_t)\sigma_t$ és driftje $f'(X_t)\mu_t + \frac{1}{2}f''(t)\sigma_t^2$

**kalkulus** általában egyfajta számítási metodikát jelöl, mely többnyire változók végtelenül kicsiny megváltozásának hatását vizsgálja. A *Newton-féle kalkulus* a hagyományos ”sima” folyamatok vizsgálatára alkalmazható, míg a Brown-mozgás vizsgálatához egy ettől eltérő, *sztochasztikus kalkulusra* van szükség [a *calculus* latin szó, korábban az abakusz golyócskáit nevezték így]

**kamatcsere-opció** arra szóló jog, hogy valamely jövőbeli időpontban beléphessünk egy kamatcsere-ügyletbe

**kamatcsere-ügylet** olyan megállapodás, melyben rögzített kamatok fizetésének egy meghatározott sorozatára vállalunk kötelezettséget és ezért változó nagyságú, a mindenkori kamatlábaktól függő kamatfizetések sorozatára válunk jogosulttá, illetve fordítva

**kamatláb** százalékos érték, melyből a kamat abszolút nagysága számítható

**kamatlábak lejárati szerkezete (hozamgörbe)** a hitelek (kölcsönzött pénzek) kamatlába és futamideje közötti összefüggés

**kamatlábak piaca** a *pénz időértékét* meghatározó piac

**kamatlábküszöb (floor)** olyan szerződés, mely az egyik felet az előre meghatározott kamatláb és az aktuális kamatlábak szintje közötti különbségre teszi jogosulttá, amennyiben ez pozitív. Egy kamatlábküszöb szerződés képes megvédeni a hitelnyújtót attól, hogy a lebegő kamatlábak túlságosan alacsony szintre zuhanjanak. Lásd még: *kamatláb plafon*

**kamatlábplafon-megállapodás (cap)** olyan szerződés, mely időszakonkénti kifizetésekhez juttatja tulajdonosát egy előre meghatározott kamatláb és az aktuális kamatláb különbségének megfelelő összegben, amennyiben ez a különbség pozitív. A kamatlábplafon szerződés a hitelfelvevőnek nyújt védelmet a lebegő kamatlábak túlságosan magasra emelkedésével szemben

**kamatszelvény** a kötvény rendszeres időszakonként teljesített kifizetése

**kereskedési stratégia** egy portfólió kialakításának és fenntartásának szabályait rögzítő elvek, melyre a piac időközbeni alakulása is hatással van (illetve lehet)

**kereskedhető** olyan eszköz, mely a piacon ténylegesen elérhető, de legalábbis előállítható kereskedett eszközök egy alkalmas portfóliójával

**kifizetés** esedékes pénzkövetelés

**kockázat piaci ára** az a mérték, mely a kockázatos befektetések után elvárt többlethozam standardizált kifejezésére alkalmas

**kockázatmentes** negatív szcenáriók bekövetkezési valószínűsége nulla

**kockázatsemleges mérték** a *martingál mérték*

**Kolmogorov-féle nagy számok törvényének erős formája** csak a bizonyos feltételek mellett érvényes eredmény, mely szerint *n* darab IID valószínűségi változó átlaga az eloszlásának várható értékét közelíti

**korreláció** két valószínűségi változó közötti lineáris összefüggőség mérőszáma. Amennyiben az egyik változó növekedése esetén a másik változó ugyancsak nő, akkor a köztük fennálló korreláció pozitív, míg ha az egyik változó növekedését a másik csökkenései kísérik, akkor a korreláció negatív. A $-1$ és $+1$ szélső értékek függvényszerű lineáris kapcsolatot jeleznek, a nulla érték a két változó függetlenségét. A korreláció a valószínűségi változók *kovarianciája* osztva a varianciák szorzatának négyzetgyökével

**kovariancia** két valószínűségi változó közötti kapcsolat mérőszáma, melynek értéke zérus a változók függetlensége esetén (azonban *fordítva is* igaz: például független, normális eloszlású változók esetén értéke nulla). Két változó kovarianciája a szorzatuk várható értékének és a várható értékük szorzatának különbségével egyenlő

**kötvény** olyan kamatot fizető befektetési eszköz (értékpapír), mely meghatározott időközönként kamatfizetést és / vagy lejáratkor egyösszegű tőketörlesztést biztosít

**kötvényre szóló opció** kötvények egy későbbi időpontbeli vételére vagy eladására jogosító opció

**követelés** olyan kifizetés, ami szerződés alapján, egy jövőbeli időpontban esedékes

**központi határeloszlás tétele** statisztikai eredmény, mely azt állítja, hogy független, azonos eloszlásból származó valószínűségi változók összege aszimptotikusan tart a normális eloszláshoz

**küszöbelem** ugyanolyan eleme egy kamatlábküszöb-szerződésnek, mint a plafonelem a kamatlábplafon-szerződésnek

**kvantó** eltérő devizákra vonatkozó szerződés, olyan derivatív termék, mely az alaptermékétől eltérő pénznemben teljesít kifizetést

**lebegő kamatláb** a szerződés időtartama alatt a piaci kamatlábbal együtt változó kamatláb

**lebegő kamatozás** egy lebegő kamatozású szerződésből származó időszakonkénti pénzáramlás

**lehívási árfolyam, kötési árfolyam** árfolyam, melyen az adott eszköz eladható / megvásárolható a származtatott ügylet keretében

**lehívási árfolyam** lásd *kötési árfolyam*

**lehívási időpont, lejárat** előre meghatározott időpont, melyben az opció lehívására vonatkozó döntés meghozható

**lejárat** annak időpontja, amikor a kötvény tőketörlesztése esedékessé válik, illetve általánosabban az az időpont, melyben bármely követelés kifizetést teljesít

**LIBOR** Londoni Bankközi Hitelkamatláb (London Inter-Bank Offer Rate). Néhány eltérő devizanemre és lejáratra meghatározott kamatláb gyűjtőneve

**log-drift** egy $X_t$ sztochasztikus folyamatra ez a $\log X_t$ folyamat növekedési üteme (driftje)

**lognormális eloszlás** annak a valószínűségi változónak az eloszlása, melynek a logaritmusa normális eloszlású

**log-volatilitás** egy $X_t$ folyamatra ez a $\log X_t$ folyamat volatilitása, vagy ami ezzel azonos, a $dX_t\,/\,X_t$ folyamat volatilitása

**lokális martingál** trendkomponens nélküli sztochasztikus folyamat, melyről azonban nem állítható teljes bizonyossággal, hogy martingál is egyben

**Markov-folyamat** folyamat, melynek jövőbeli alakulása független a folyamat múltbeli alakulásától, egyedül a jelenlegi állapotának függvénye

**martingál mérték** mérték, melyre az adott folyamat martingál

**martingál reprezentációs tétel** állítása szerint bármely martingál előállítható egy előrelátható folyamat integrálja és egy másik martingál folyamat összegeként

**martingál** folyamat, melynek a jelenlegi filtráció alapján számolt bármely jövőbeli várható értéke megegyezik annak aktuális értékével. Vagyis $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)$ egyenlő $M_s$-sel minden $t$-nél korábbi $s$-re

**mérték** valószínűségek halmaza a lehetséges kimenetek halmazához rendelve, mely megadja az egyes kimenetek bekövetkezési valószínűségét

**mértékcsere** azonos sztochasztikus folyamat eltérő valószínűségi mérték melletti vizsgálata, amikor az egyes események bekövetkezési valószínűsége megváltozik

**mértékek ekvivalenciája** egy $\mathbb{P}$ és $\mathbb{Q}$ mérték akkor ekvivalens, ha zéró valószínűségű eseményeik megegyeznek

**nagy számok törvényének gyenge formája** azt állítja, hogy $n$ számú IID valószínűségi változó átlaga egyre kisebb valószínűséggel tér el az eloszlás várható értékétől, ahogy $n$ növekszik

**névérték** a kötvény címletértéke, mely lejáratkor kerül visszafizetésre

**Newton-féle függvény** egy olyan függvény, mely kellően sima (egyszerű) ahhoz, hogy képezhető legyen annak hagyományos (Newton-féle) deriváltja

**Newton-féle kalkulus** klasszikus differenciálási és integrálási kalkulus, mely a sima vagy differenciálható függvényekkel foglalkozik

**normális eloszlás eloszlásfüggvénye** egy normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, tehát a $\Phi(x) = \mathbb{P}(N(0,1) \leqslant x)$ függvény

**normális eloszlás** $\mu$ várható érték és $\sigma^2$ variancia paraméterekkel ellátott folytonos eloszlás, amit az $N(\mu, \sigma^2)$ módon jelölünk. Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

**a normális eloszlás kumulált integrálja** lásd *normális eloszlás eloszlásfüggvénye*

**ODE** a hagyományos differenciálegyenlet rövidített megnevezése

**opció** olyan szerződés, mely szerint jogunk keletkezik (de nem kötelezettségünk) egy jövőbeli időpontban valamit megtenni

**Ornstein–Uhlenbeck (O–U) folyamat** egy átlaghoz visszahúzó sztochasztikus folyamat, melynek SDE-e:

$$dX_t = \sigma\, dW_t + (\theta - \alpha X_t)\, dt$$

**osztalék** *osztalékfizető részvények* után rendszeres időközönként kapott, változó nagyságú kifizetés (melynek nagysága természetesen nulla is lehet)

**osztalékfizető részvény** részvény, mely a mindenkori osztalék arányos részére is jogosít

**OTC piac** az abban résztvevők közvetlen megállapodásaival működő piac, hivatalos szervezeti felépítés nélkül

**önfinanszírozó** olyan stratégia, melynek követéséhez nincs szükség menetközbeni pénzbefektetésére, de menet közben pénz sem vehető ki abból

**PDE** a parciális differenciálegyenlet rövidítése

**pénz időértéke** a most és a később rendelkezésre álló pénzek közötti értékkülönbség, mely a *diszkontálásban* fejeződik ki

**pénznem** egy ország vagy országcsoport hivatalos pénzügyi elszámolási egysége

**peremeloszlás** egy $X$ folyamat $t$ időpontbeli peremeloszlása az $X_t$ valószínűségi változó eloszlását jelenti. A peremeloszlások megegyezése még nem zárja ki két folyamat különbözőségét

**piac** az árakra vonatkozó információk cseréjének színhelye. Többnyire elektronikus formában működik

**piacalakulás** folyamat(ok) addigi útját leíró eseményhalmaz

**piacvezető** az angolszász típusú tőzsdéken a specialista vagy piacvezető egy olyan, a tőzsde megbízásából tevékenykedő személy, aki részben árjegyzői, részben pedig ügynöki és kereskedői tevékenységet végez.

**pillanati kamatláb** egy végtelenül rövid időszakra felvett hitel után fizetendő kamatláb

**plafonelem** a kamatlábplafon-ügylet elemi, tetszőleges időpontban esedékes kifizetése

**Poisson-folyamat** nem folytonos típusú véletlen folyamat

**portfólió** különböző befektetési eszközök összessége

**pozíció (felvett)** egy befektetési eszközből tartott mennyiség, mely lehet pozitív (hosszú pozíció) vagy negatív (rövid pozíció)

**put-call paritás** az a piaci szükségszerűség, hogy azonos kötési árfolyamú vételi és eladási opciók árának különbsége éppen a határidős pozíció értékét adja ki

**Radon–Nikodym derivált** valamely mérték egy eltérő mértékre vonatkozó Radon–Nikodym deriváltja az egyes utak különböző mértékek melletti bekövetkezési valószínűségeinek hányadosa

**reáleszköz, áru** nem pénzügyi, de kereskedett eszköz, mint például az arany, a nyersolaj vagy a fagyasztott narancskoncentrátum

**rekombináns fa (összeölelkező fa)** olyan fa, melynél ágak egymástól eltérő sorozatai is vezethetnek ugyanabba az állapotba

**replikáló stratégia** olyan portfóliót definiáló *önfinanszírozó* kereskedési stratégia, melynek lejáratkori értéke megegyezik a kifizetéssel

**részvény** lehet egyszerű vagy osztalékfizető részvény

**részvénypiac** a részvénykereskedés helyszíne

**rövid kamatláb (short rate)** lásd *pillanati kamatláb*

**rövid pozíció** olyan pozíció, mely negatív vagyis kölcsönzött mennyiség tartását jelenti

**SDE** a sztochasztikus differenciálegyenlet rövidítése

**stacioner eloszlás** egy folyamat eloszlásának az a tulajdonsága, hogy az idő múlásával is állandó marad

**sűrűségfüggvény** az $f$ sűrűségfüggvény a folytonos valószínűségi változó valószínűségeloszlás-függvényének deriváltja (feltéve, hogy ez létezik). Szemléletesen $f(x)\,dx$ annak a valószínűsége, hogy $X$ az $[x, x + dx]$ intervallumba esik. Az $f$ függvény sehol nem negatív, integrálja 1, és (többek között) várható érték számításra is alkalmazható, a következőképpen:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

**szemimartingál** folyamat, mely felbontható egy lokális martingálra és egy véges variációjú drift tagra

**szerződés** kettő vagy több abban részt vevő fél között létrejött jogilag érvényes megállapodás

**szórás** a variancia négyzetgyöke

**szorzatra vonatkozó szabály** szabály, mely megadja két sztochasztikus folyamat szorzatának sztochasztikus differenciál-egyenletét

**sztochasztikus folyamat** folytonos folyamat, mely szétválasztható egy Brown-mozgás tagra és egy drift tagra

**sztochasztikus kalkulus** véletlen folyamatokra használt *kalkulus*, így például olyanokra is, melyek Brown-mozgást tartalmaznak

**sztochasztikus** a véletlenszerűség szinonimája

**Taylor-sorfejtés** egy Newton-féle $f$ függvény $x$-hez közeli környezetében felvett értékeinek közelítése a függvény valamint a deriváltjainak $x$-ben felvett értéke alapján, mely szerint

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + \tfrac{1}{6}h^3 f'''(x) \ldots$$

**teljes piac** olyan piaci, ahol minden piacon szereplő termék szintetikusan is előállítható

**toronyszabály** azt állítja, hogy $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s)$ minden $s < t$-re fennáll

**többtényezős** egy olyan piaci modell, melynek alakulását egynél több Brown-mozgás írja le

**tőzsdei határidős ügylet** egy tőzsdén kereskedett határidős (futures) ügylet

**tranzakciós költség** befektetési eszközök piaci kereskedésével kapcsolatban felmerülő költségek összefoglaló elnevezése

**trendkomponens nélküli** zéró növekedési ütemű folyamat

**útvalószínűség** annak a valószínűsége, hogy a folyamat a fa egy meghatározott útját fogja követni. Értéke az egyes elágazásoknál vett valószínűségek szorzatával egyenlő

**valószínűség** egy esemény bekövetkezésének esélye

**valószínűségi változó transzformáltjának várható értéke** tétel, mely kimondja, hogy ha $X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f$, akkor $h(X)$ várható értéke

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$

**valószínűségi változó** a változó felvehető értékeinek valamely realizációja

**vanília** egy termék legegyszerűbb változatának elnevezése

**várható érték** egy valószínűségi változó esetében az a középérték, melyhez végtelen sok realizáció átlaga tart. Diszkrét és folytonos ($f$ sűrűségfüggvénnyel leírható) valószínűségi változóra ez a következőképpen írható fel:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n), \quad \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

**variancia** egy valószínűségi változó bizonytalanságának mérőszáma. Képletben a valószínűségi változó négyzetének várható értéke mínusz a várható érték négyzete, vagy ami ezzel azonos, a valószínűségi változó felvehető értékeinek azok átlagától vett eltérésnégyzeteinek várható értéke

**véletlen bolyongás (random walk)** diszkrét, független lépések összegéből felépülő Markov-folyamat. Egy egyszerű, $\mathbb{N}$ értékkészletű szimmetrikus véletlen bolyongás minden lépésben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 1-gyel növekszik, illetve $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 1-gyel csökken

**vételi opció** egy befektetési eszköz jövőbeli időpontban / időpontig történő megvásárlásának joga, ahol a jövőbeli vételár szerződéskötéskor rögzítésre kerül

**volatilitás** egy folyamat ”szaggatottságának” mérőszáma, pontosabban egy sztochasztikus folyamat Brown-tagjának együtthatója

**Wiener-folyamat** a *Brown-mozgás* szinonim elnevezése

**zaj** a *volatilitás* szinonim kifejezése

**zérókupon-kötvény** olyan kötvény, mely egészen a lejáratáig semmiféle kifizetést nem teljesít