Retkes Zoltán
Okleveles matematikus
Hungary

Tel: +36-709457895
E-mail: tigris35711@gmail.com

December 07, 2010.

Typotex Kiadó
Votisky Zsuzsa
Felelős kiadó

Kedves Votisky Zsuzsa

A 'KÖNYV' kedvenc könyveim közé tartozván, újra és újra elöveszem és minden alkalommal valami új felfedezni valót tartogat számomra, így gyönyörködtet. A 'Bizonyítások a könyvből' is kedvenceim egyike. Összesen ennyi okot elegendőnek érzek ahhoz, hogy felhívjam figyelmüket a következő apró - ámde zavart keltő - szakmai hibára - bízván benne, hogy a következő kiadásban már javítva fog szerepelni - a 20-dik fejezetben.

A 138-dik oldalon a következő szerepel a lap alján: 'A (7) egyenlet bal oldala páros függvény (azaz $f(z) = f(-z)$), tehát páratlan $n \geq 3$-ra $B_n = 0$ kell, hogy legyen, míg $B_1 = -\frac{1}{2}$ a (6) felírásban a $\frac{\pi}{2}$ tagnak felel meg.'

Észrevételeim ezzel kapcsolatban:

Az $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ függvény sem nem páros, sem nem páratlan. Ez egyszerűen ellenőrizhető, hiszen

$$f(-z) = \frac{-z}{e^{-z} - 1} = \frac{-z}{\frac{1}{e^z} - 1} = \frac{-ze^z}{1 - e^z} = e^z \frac{z}{e^z - 1} = e^z f(z) \neq \pm f(z)$$

Vagyis $f(z)$ nem létező szimmetriájából nem lehet levezetni a Bernoulli számokra a $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$ állítást.

A korrekt bizonyítás gondolatmenete a következő:
Megmutatjuk, hogy a

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1} - 1 + \frac{z}{2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

függvény páros, amiből valóban $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$ következik, ugyanis a páros függvények sorfejtésében a páratlan indexű együtthatók kinullázódnak. $g(z)$ párosságának bizonyítása a definíció alapján aránylag egyszerű számolással például a következőképpen kapható meg:

$$g(-z) = \frac{-z}{e^{-z} - 1} - 1 - \frac{z}{2} = \frac{-z}{\frac{1}{e^z} - 1} - 1 - \frac{z}{2} = \frac{ze^z}{e^z - 1} - 1 - \frac{z}{2} =$$

$$= \frac{z(e^z - 1) + z}{e^z - 1} - 1 - \frac{z}{2} = z + \frac{z}{e^z - 1} - 1 - \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1} - 1 + \frac{z}{2} = g(z)$$

Tisztelettel és további
szép munkákat, valamint
Kellemes Ünnepeket kívánva

Retkes Zoltán