

Nem elemi feladatok elemi tárgyalásban

Elméleti matematika

A sorozat kötetei:

Bagyinszky János – György Anna: Diszkrét matematika főiskolásoknak
Bártfai Pál: Az n -dimenziós tér lineáris geometriája
Bolla Marianna – Krámlí András: Statisztikai következtetések elmélete
G. Horváth Ákos – Szirmai Jenő: Nemeuklideszi geometriák modelljei
Járai Antal: Modern alkalmazott analízis
Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
Komornik Vilmos: Valós analízis előadások I–II.
Kostrikin, A. I. – Safarevics, I. R.: Algebra
Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok
Lovász László – Pelikán József – Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika
Praszkolov, Viktor Vasziljevics: Lineáris algebra
Stoyan Gisbert: Numerikus matematika mérnököknek és programozóknak
Tóth János – Simon L. Péter: Differenciálegyenletek
Weeks, Jeffrey R.: A tér alakja

AKIVA MOJSZEJEVICS JAGLOM–
ISZAAK MOJSZEJEVICS JAGLOM

NEM ELEMI FELADATOK ELEMI TÁRGYALÁSBAN

Fordította: Schultz György

Kontrollszerkesztő: Simonovits András



A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.



A fordítás a következő kiadás alapján készült:

А. М. Яглом, И. М. Яглом:

Неэлементарные задачи в элементарном изложении,
Гостехиздат, Москва, 1954

Hungarian translation © Schultz György, Typotex, 2015

Hungarian edition ©Typotex, Budapest, 2015

Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 279 856 1

ISSN 1788-1811

Témakör: *elemi matematika*

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!



Újabb kiadványainkról és akcióinkról

a www.typotex.hu és a facebook.com/typotexkiado
oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

Főszerkesztő: Horváth Balázs

Műszaki szerkesztő: Gerner József

Borítóterv: Szalay Éva

Készült a Multiszolg Bt. nyomdájában

Felelős vezető: Kajtor Bálint

1. fejezet

Tartalomjegyzék

A magyar kiadás szerkesztőjének előszava	7
A szerzők előszavából	10
Használati útmutató a könyvhöz	12
 Feladatok	 15
I. rész. Kombinatorikai és valószínűség-számítási feladatok	17
1. Bevezető feladatok (1–10)	17
2. Számok felbontása tényezők szorzatára és tagok összegére (11–31)	18
3. Kombinatorikai feladatok a sakktáblán (32–40)	22
4. Geometriai tárgyú kombinatorikai feladatok (41–54)	25
5. Feladatok binomiális együtthatókra (55–61)	27
6. Valószínűségi feladatok (62–100)	33
6.1. Véges számú kimenetel esete	35
6.2. Végtelen számú kimenetel esete	43
6.3. A kísérlet lehetséges kimenetelei folytonos halmazt alkotnak	45
 II. rész. Feladatok a matematika különféle területeiről	 53
7. Pontok és egyenesek elhelyezkedése (101–107)	53
8. Még két feladat (a pontok síkbeli elhelyezkedéséről) (108–109)	54
9. Síkbeli pontrácsok (110–112)	55
10. Topológiai feladatok (113–117)	57
11. Reciprokok egy tulajdonsága (118)	60
12. Három feladat konvex sokszögekről (119–121)	61

13. Számsorozatok néhány tulajdonságáról (122–125)	61
14. Tárgyak elhelyezéséről (126)	63
15. Feladatok a nem tízes alapú szám- rendszerekről (127–129)	63
16. A nullától legkevesbé különböző polinomok (130–135)	64
17. Négy képlet a π kiszámítására (136–145)	66
18. Görbevonallú idomok területének kiszámítása (146–154) . . .	69
19. Néhány nevezetes határérték (155–164)	77
20. Néhány feladat a prímszámok elméletéből (165–170)	83
 Megoldások	 89
I. rész. Kombinatorikai és valószínűség-számítási feladatok	91
II. rész. Feladatok a matematika különféle területeiről	315
 Eredmények és útmutatások	 487
I. rész. Kombinatorikai és valószínűség-számítási feladatok	489
II. rész. Feladatok a matematika különféle területeiről	503
Hivatkozások	519

A magyar kiadás szerkesztőjének előszava

Az 1950–60-as években a *Nem elemi feladatok elemi tárgyalása* című kötet orosz kiadásban nagyobbik bátyám két barátjának is megvolt. (Az 1954-es kiadás árlapja 10 rubel 15 kopejkát közöl, és ez az 1961-es pénzreform 1 nulla levágását és az akkori árfolyamot figyelembe véve körülbelül 13 forint lehetett, azaz 4 kg kenyér ára.) Kisebbik bátyám is hamarosan beszerezte e legendás kötetet, és 1962 körül én már abból okosodtam. A szerzők, a két Jaglom, kiváló matematikusok voltak, és a Csencov–Skljarszkij–Jaglom versenyfeladatokat a Typotex is kiadta.

Hosszas keresés után nemrégiben az egyik orosz nyelvű példányt végre sikerült megszereznem, és félve vettem a kezembe: nem csalt-e meg az emlékezetem: valóban olyan jó-e a könyv? Azonnal ellenőriztem magam, és kivételesen nem csalódtam: valóban remekművel állunk szemben. (Ezt alátámaszthatja a Wikipédia információja is, amely szerint a jelen kötet angol fordítását a Holden Day, San Francisco jelentette meg 1964/1967-ben, és a kizárólag klasszikus műveket kiadó Dover is megjelentette 1987-ben.)

A kötet sikeresen elkerüli a középiskolai matematika oktatásában mutatózó két végletet: 1) a szabotossághoz ragaszkodva megáll a görögöknél, 2) a modernséghez ragaszkodva zagyva módon próbálja elmondani az újabb matematikai eredményeket. Nem elemi feladatokról van szó, de elemi tárgyalásban. Sokan azt gondolhatják, hogy ez az egész fából vaskarika. Nem elemi feladatokat nem elemi eszközökkel kell megoldani.

A tagadó választ egy konkrét feladaton keresztül próbálom megvilágítani. Mennyi az $y = 1/x$ alakú hiperbola alatti terület 1 és x között? $F(x)$ -szel jelölve a meghatározandó függvényt, a választ az 1670 körül felfedezett Newton–Leibniz-formula adja: $F(x) = \ln x$, hiszen annak deriváltja $1/x$. Igen, de ezt az eredményt már 1650 előtt ismerte Saint Gregoire (és később Fermat). Hogyan jöhettek rá az ősök erre a fontos eredményre? Másképp, de 50 év távlatából is pontosabban emlékeztem, hogyan találta meg egy harmadik módszerrel, elemi eszközökkel a szerzőpáros a hiperbola alatti területet. Legyen a terület az a és b pozitív valós számok között $G(a, b)$, azaz $F(x) = G(1, x)$. Először beláttatják az Olvasóval, hogy $G(ca, cb) = G(a, b)$, ahol $c > 0$. Ebből már a területfüggvény additivitása miatt következik, hogy $G(1, xy) = G(1, x) + G(x, xy)$, azaz $F(xy) = F(x) + F(y)$. Ekkor már csak a nevezetes (19. századi) Cauchy-féle transzformált függvényegyenletet kell megoldani: $F(x) = \ln x$.

A nagyszerű didaktikai érzékű szerzők azonban az ilyen nehéz feladatok megoldását a II. részre hagyják. Bemelegítésként kombinatorikai és valószínűség-számítási feladatokkal teszik próbára az olvasók képességeit.

Nem könnyűek a próbák, de aki túl jut rajtuk, az nehezebb feladatokat is képes lesz megoldani.

A fordítás és a szerkesztés során igyekeztünk a lehető legkevésbé változtatni az eredeti szövegen. De a szerzők takarékos C_n^k jelölése helyett a binomiális együtthatónak a magyar és a nemzetközi irodalomban szokásos jelölését alkalmaztuk. Néhány ponton felfrissítettük a szöveget: például céltalan lett volna elhallgatni, hogy az 1954-ben még megoldatlan négyszín-sejtést 1976-ban megoldották. Néhány hiányosságot lábjegyzetben pótolunk: például a 155. feladatnál megjegyeztük, hogy a szerzők által közölt elemi megoldás Fermat-tól származik és Arkhimédész eredeti ötletét követi; vagy a teljesség kedvéért az összes fontosabb szereplő matematikus születési és halálozási évszámát megadtuk. Számos nyilvánvaló elírást javítottunk, a fontosabb esetben e módosításokat lábjegyzetben jelöltük. (Végül is háromféle lábjegyzetet számoztunk folyamatosan: a szerzőkét, a fordítóét és a szerkesztőét.) A mai olvasó, aki már nem használ logaritmustáblát, meg lesz lepve, hogy a számolástól függetlenül is a szerzők mennyi helyen szerepeltették könyvükben a tízes alapú logaritmust, az lg-t. Mai szemmel nézve ez hiba, de nem „javítottuk ki”. A szöveg végén szereplő hivatkozási jegyzékben szereplő orosz források jelenleg Magyarországon elérhetetlenek. Ahol tudtuk, ott közöltük az angol fordításukat.

Kötelességemnek érzem megjegyezni, hogy a fordítás végére érve, 2014 szeptemberében Mezei Istvántól véletlenül megtudtam, hogy az 1968 után a könyv feladatainak zöme más felosztásban többször megjelent magyar nyelvű egyetemi jegyzetben *Elemi matematika IV. és V.* címmel Hortobágyi Isván szerkesztésében. A IV. kötet Bevezetése megemlíti, hogy „a jegyzet I. M. JAGLOM és A. M. JAGLOM *Nyeelementarnije zadaci v elementarnom izlozsenyiji* c. könyvén alapul, amely a Matematikai Kör Könyvtára sorozatban jelent meg (Moszkva, 1956). ... Felhasználtuk Lőrincz István és Zsidó Zoltán mat.-fiz.-ábr. geom. szakos, Bodrogi Görgy és Mezei István mat.-fiz. szakos tanárjelölteknek a fenti könyv egyes részleteiről készített fordításait.” (Mi az 1954-es kiadást használtuk!)

Ha tudtuk volna, hogy e ma már alig fellelhető jegyzet Jaglom–Jaglom könyvének magyar nyersfordítása, akkor engedélyt kértünk volna a közreműködőktől, hogy fordításunknál a korábbi magyar szöveget felhasználhassuk. Így azonban csak az utólagos elismerésre van módunk. Megjegyezzük még, hogy a magyar nyelvű jegyzet helyszűke miatt kihagyta a történeti utalásokat.

Természetes, hogy a könyvben tárgyalt anyag egy része magyarul már korábban hozzáférhető volt, például a számelméleti feladatok egy része Freud–Gyarmati (2000)-ben, az analízis feladatok jelentős része számos más könyv-

ben, például Laczkovich–T. Sós (2005) és (2007)-ben, a valószínűség-számítási feladatok például Rényi (1966)-ban és diszkrét matematikai feladatok például Lovász–Pelikán–Vesztergombi (2010)-ben.

Utoljára, de nem utolsósorban szeretném felhívni az Olvasó figyelmét egy hasonló jellegű, de magasabb szinten íródott műre, a magyarul is kiadott Pólya–Szegő: Válogatott tételek és feladatok az analízis köréből (1922) korszakalkotó műre. Mindkét mű úgy akarja bevezetni az Olvasót a kitűzött témakörbe, hogy gondosan adagolja az információkat.

A körülbelül 510 oldalas könyv először a 170 darab feladatot közli, majd több száz oldalon a részletes megoldásokat, végül a válaszokat és az útmutatásokat. Remélem, az Olvasó tetszését is megnyeri a mű.

Budapest, 2014. október

Simonovits András

A szerzők előszavából

Az elemi matematika válogatott feladatai és tételei a Matematikai szakköri könyvtár első három kötetében kaptak helyet.¹ A munka folyamatában azonban kiderült, hogy a negyediknek szánt kötet jelentősen különbözik az előzőktől, és a fenti cím rosszul illik rá.

A könyvtár első köteteitől ez a könyv alapvetően a feladatok témakörében tér el. Ha az első kötetek rendszerint a feladatok témájában az elemi matematikára korlátozódnak, amelyet a középiskolában tanítanak (szám-tan, algebra, mértan), akkor a jelen könyv zöme olyan matematikai területekhez tartozik, amelyeket csak felsőfokú képzésben tanítanak: valószínűség-számítás, projektív geometria, topológia, integrálszámítás, számelmélet. Ezeket az elemi matematika válogatott feladatainak és tételeinek nevezni nagyon erőltetett lett volna. Ugyanakkor egyik szereplő feladat megoldása sem követel meg olyan ismereteket, amelyek a középiskolás matematika kereteit meghaladnák (kivéve néhány rövid magyarázatot, amelyeket a könyv a megfelelő feladatok előtt külön megad). Emellett a feladatoknak mind a megfogalmazása, mind a megoldása teljesen elemi. Másképp fogalmazva: a kiválogatott feladatok zöme a magasabb (nem elemi) matematika elemi kérdésköreibe tartozik, ezt vettük figyelembe a címadásnál is.

A könyv célja, hogy megismertesse az olvasót matematikai tények, eszmék és módszerek egész sorával. A feladatgyűjtemény formát azért választottuk, hogy a teljes anyagon ösztönözzük az aktív és önálló munkát.

A könyv olvasása előtt szükséges megismerni a könyvhöz írt *Használati útmutatót*. A könyv matematika iránt lelkesedő felsőbb osztályos iskolások, alsóbb évfolyamos főiskolai és egyetemi hallgatók, a matematikát oktatók és általában a tudomány összes kedvelője számára készült; felhasználható az iskolai és egyetemi (főiskolai) matematikai körök munkájában.

A könyv két részének célja közös, és a két rész ugyanannak az olvasóközönségnek szól, de eltérő jellegű. Az első, a Kombinatorikai és valószínűség-számítási feladatok című rész 100 feladatot tartalmaz, amelyek bár a feladatok megfogalmazásában és a megoldások módszerében lényegesen különböznek, azonos kérdést vetnek fel. E feladatok a matematika egy viszonylag szűk, a középiskolás tananyagban csak csekély mértékben szereplő ágához, a kombinatorikához tartoznak. Az első rész feladatai többnyire nem különösebben bonyolultak és közel állnak az iskolai feladatokhoz; kivételt képeznek az utolsó ciklus feladatai, amelyek valószínűségek kiszámítását tűzik ki. Ezek közt számos igen nehéz feladat szerepel.

¹E kötetek magyarul is megjelentek. A szerkesztő megjegyzése.

A második, a Feladatok a matematika különböző területeiről című rész igen változatos tartalmú. Az itt összegyűjtött feladatok főleg a felsőbb matematika tárgykörébe tartoznak – elsősorban ez indokolja a könyv címét. Azt, hogy a matematika mely ágához tartoznak az egyes feladatok, valamint az adott ág részletesebb megismerését lehetővé tevő kiegészítő irodalmat a ciklusok elején lévő rövid bevezetés tartalmazza. A második rész feladatciklusai többnyire nem kapcsolódnak egymáshoz. Az első részben a szerzők igyekeztek többé-kevésbé teljes képet adni a kombinatorika elemi módszereiről, a második rész, jellege miatt, nem tarthat igényt ilyen teljességre.

Számos feladat a modern tudományban fontos szerepet játszó klasszikus tételek bizonyítását tűzi ki; így pl. a 132. és 166. feladat állításai a kiváló orosz matematikus, P. L. Csebisev legmélyrehatóbb eredményei közé tartoznak. Más feladatok matematikai folyóiratokból, néha azok legfrissebb számaiból származnak. Egyes feladatokat a Moszkvai Állami Egyetem iskolai matematikai körének foglalkozásain és a moszkvai iskolások matematikai olimpiáin tűzték ki (a matematikai olimpiákon kitűzött feladatok sorszáma a használati útmutató végén szerepel).

A könyv első részét A. M. Jaglom, a második részt a két szerző együtt állította össze; a végső szerkesztés a két szerző közös munkája. Egyes feladatokat V. G. Boltjanszkij, E. B. Dinkin, M. I. Grajev, V. G. Kamenomoszt-szkaja, N. I. Korobov, Ja. A. Szmorogyinszkij, V. A. Uszpenszkij, és N. N. Csencov közölt a szerzőkkel; az utóbbi, valamint G. M. Andelson-Velszkij és M. M. Bongard részt vettek egyes feladatok megoldásának kidolgozásában. A Gosztehizdat matematikai szerkesztőségének munkatársai, A. Z. Rivkin és V. A. Szolodkov számos megjegyzésükkel elősegítették a könyv jobbá tételét. A szerzők hálásak mindazoknak, akik valamilyen formában elősegítették a könyv létrejöttét.

A. M. Jaglom

I. M. Jaglom

Használati útmutató a könyvhöz

A könyv tartalmazza a feladatok szövegét, a feladatok megoldását és a végeredményeket a megoldásokhoz vezető útbaigazítással kiegészítve. A legtöbb feladat esetében javasoljuk az Olvasónak, kísérelje meg önálló megoldásként. A feladat megoldása ellenőrzéseként javasoljuk a könyvben szereplő végeredménnyel való összehasonlítást; ha az eredmények eltérőek, kísérletet kell tenni a hiba megtalálására; ha az eredmények azonosak, hasznos a megtalált megoldást összehasonlítani a könyvben megadottal. Ha nem sikerül önállóan megtalálni a megoldást, meg kell nézni a könyv végén található útmutatót (vagy a végeredményt, ami szintén segíthet a helyes megoldás megtalálásában). Ha ez sem segít, meg kell ismerkedni a könyvben szereplő megoldással. Szem előtt kell tartani, még a feladat sikertelen megoldási kísérlete is hasznos: lehetővé teszi, hogy elmélyedjünk a felvetett probléma lényegében, és jobban megértsük a könyvben közölt megoldást.

A könyv használatának fentebb leírt módja azonban nem minden feladatra javasolható. A könyv sok nehéz feladatot tartalmaz, ezt a nehézség növekvő sorrendjében egy, kettő, vagy három csillag jelzi. A két vagy három csillaggal jelzett feladatok gyakran a legkiválóbb matematikusok kiemelkedő eredményei (ilyen a 132. és a 166. feladat); aligha lehet arra számítani, hogy ezeket a feladatokat az olvasó teljesen önállóan megoldja. Ezért a nehezebb feladatok esetében tanácsolható a könyv végén található útmutatás előzetes megismerése; még ebben az esetben is a megoldás megtalálása általában igen nehéz lesz.

A könyvvel (különösen annak második részével) nem kell feltétlenül feladatgyűjteményként foglalkozni, lehet úgy tekinteni, mint matematikai tételek gyűjteményét, amelyek többnyire bonyolultabbak, mint azok, amelyek Steinhauz (1983) kitűnő könyvében találhatók, de attól eltérően részletes megoldásokkal ellátott feladatok formájában szerepelnek. A könyv ilyen jellegű használatakor a megoldást a feladat megismerése után azonnal elemezni kell. A könyv egyes részei úgy íródtak, hogy azokat legcélszerűbb ilyen módon olvasni (ilyen a második rész 18–20. ciklusa, az első rész 51–52. és 81–82. feladata, valamint a legtöbb három csillaggal megjelölt feladat; kisebb mértékben az első rész 6.1. és 6.3. ciklusa vagy a második rész 16. ciklusa).

A könyv első része egyszerűbb a másodiknál, ezért a középiskolás Olvasónak érdemes a könyvet az első résszel kezdenie. Javasolt továbbá az első rész feladatait a könyvben szereplő sorrendben megoldani, követve a ciklusok sorrendjét (esetleg kihagyva azokat a ciklusokat, amelyek az Olvasó számára kevésbé érdekesnek tűnnek). Természetesen nem feltétlenül szüksé-

ges egy ciklus összes feladatát megoldani, mielőtt áttérnénk a következőre. Az első rész utolsó ciklusában van néhány feladat, amelyek megoldása a második részben szereplő feladatokban megfogalmazott tételekre támaszkodik; az összes ilyen feladat háromcsillagos, és a hozzájuk tartozó útbaigazítás utal a megoldásukhoz felhasználandó eredményekre. A könyv első része felhasználható a kombinatorikával és valószínűség-számítási alkalmazásaival foglalkozó iskolai és egyetemi vagy főiskolai szakkörök munkájában. Ennek során hasznos lehet a könyvben hivatkozásként szereplő kiegészítő irodalom. A szakkörök számára a következő munkarend javasolható: a könnyebb feladatokat a szakkör tagjai önállóan oldhatják meg, a nehezebbek pedig elméletinek tekinthetők: elemzésük a könyv alapján történik és a szakkör összejövetelein kerül előadásra.

A könyv második részének felépítése az elsőétől eltér. Az egyes ciklusokban kevesebb feladat van (néha csak egy); az egyes ciklusok a legtöbb esetben egymástól függetlenek. Még egyes ciklusokon belül is a feladatok általában függetlenek egymástól; csak a 16–20. ciklusokban támaszkodik a feladatok megoldása az előző feladatok eredményeire. A második rész számos feladata (pl. a 102–103., 105–107., 109., 111–112., 115–116., 117., 118., 122., 123–124., 128–129., 130–135., 142–145.) képezheti egyetemi és főiskolai szakköri előadás tárgyát; gyakorlott vezető képes ezeket a feladatokat iskolai szakkör munkájában is felhasználni. A szakkör munkájában hasznos lesz az egyes feladatciklusok elején megadott kiegészítő irodalom.

Kitüntetett jelleggel bír a második rész utolsó három feladatciklusa. Ezek egymással szorosan összefüggenek: a 18. ciklus néhány feladatának megoldása épít a 19. ciklus feladatainak eredményeire (az összes ilyen feladatot egy csillag jelöli); a 19. ciklus összes feladata a 18. ciklusban kifejlesztett geometriai módszerek alkalmazásával oldható meg; a 20. ciklus feladatainak megoldása gyakran a két előző ciklus feladatainak eredményére támaszkodik. Következésképpen a 18–20. ciklusok egy egységet alkotnak. E ciklusok nagy és fontos elméleti anyagot tartalmaznak, és a könyv egyik legnehezebb részét alkotják; elemzésük speciális matematikai szakkör munkája lehet.

A moszkvai matematikai olimpiákon kitűzött feladatok feladatszámai

Az olimpiákat két fordulóban szokták megrendezni: az első válogató jellegű, a második a tulajdonképpeni verseny:

Kezdő olimpia	I. forduló	II. forduló	Haladó olimpia	I. forduló	II. forduló
VI (1940)	–	14, 33a	I. (1935)	–	4, 25
VIII (1945)	–	60a	II. (1936)	–	15
IX (1946)	–	102	III. (1937)	–	45
X (1947)	18	–	IV. (1938)	1	11a, 43
XIII (1950)	–	52a	V. (1939)	–	43a ²
			VI. (1940)	2	13
			VIII. (1945)	–	60b
			IX. (1946)	–	103b
			X. (1947)	47a	108a, 113
			XI. (1948)	–	24
			XII. (1949)	–	88a
			XIII. (1950)	–	101

²5 gömbre

Feladatok

I. rész. Kombinatorikai és valószínűség-számítási feladatok

Az ebben a részben közölt feladatokat a kérdésfeltevés egyesíti: szinte minden kérdés arra keresi a választ: mennyi, vagy hányféleképp? Ezeket a feladatokat gyakran *kombinatorikainak* nevezzük.

1. Bevezető feladatok (1–10)

1. A térben adott 4 pont, amelyek nem fekszenek egy síkon. Hány olyan síkot lehet fektetni, amely e pontoktól egyenlő távolságra fekszik?

2. Adva van a térben 5 nem egy síkon és nem egy gömbfelületen lévő pont. Hány, az adott 5 ponttól egyenlő távolságra lévő sík vagy gömb van?

[Az M pont és az O középpontú Σ gömb *távolsága* az MA és az MB két szakasz közül a rövidebb, ahol az A és B pontok az MO egyenes és a Σ gömb metszéspontjai.]³

3. Hány gömb érinti egy adott T tetraéder összes lapját?

4. Hat adott színnel hányféleképpen lehet a kocka lapjait színezni, ha egy-egy laphoz csak egy szín használható és két kocka színezése akkor különböző, ha forgatással nem hozhatók egymással fedésbe?

5. 30 munkásból hányféleképpen alakítható 3 brigád, amelyek mindegyike 10 főből áll?

6. Egy cukrászdában 11 különféle sütemény van. Hányféleképpen választható 6 egyforma vagy különböző sütemény?

7. Egy 11 tagból álló bizottság páncélszekrényben őrzött anyagon dolgozik. Hány zár kell a páncélszekrényre és hány kulcsot kell kapnia a bizottság

³Tekintsük azokat a szakaszokat, amelyek az M pontot a Σ gömbfelület valamelyik pontjával összekötik. Belátható, hogy közülük az MA és az MB rövidebbje a legrövidebb.

egy-egy tagjának ahhoz, hogy a páncélszekrényt csak akkor lehessen kinyitni, ha a bizottság tagjainak több mint fele jelen van?

8. Egy kör mentén 1-től 1000-ig sorjában felírjuk a számokat. Majd az elsővel kezdve minden 15-ödiket áthúzzuk (tehát az 1, 16, 31, ..., stb. számokat). A következő fordulóban a már áthúzott számokat is tekintetbe vesszük. Az eljárást addig folytatjuk, amíg csak a már csak a korábban áthúzott számokat húznánk át újra. Hány szám marad áthúzatlanul?

9. A számokat felírjuk sorrendben 1-től 10 000 000 000-ig. Közülük mely számokból lesz több, amelyek felírásában az 1 számjegy szerepel, vagy amelyek felírásában az 1 számjegy nem szerepel?

10. Az összes számot felírjuk 1-től 222 222 222-ig. E számok felírásában hányszor fog előfordulni a 0 számjegy?

2. Számok felbontása tényezők szorzatára és tagok összegére (11–31)

A következő feladatok közül egyesek megoldása során hasznosak bizonyulnak a következő jelölések.

Az $[x]$ jel, (olvasva "egész rész x ") a legnagyobb x -nél nem nagyobb egész számot jelöli. Így pl. $[1,5] = 1$, $[10,85] = 10$, $[5] = 5$, $[-8,2] = -9$ stb. (a továbbiakban az $[x]$ jelet csak pozitív x -ekre fogjuk alkalmazni).

Az (x) jel (olvasva "az x -hez legközelebb álló egész") az x -hez legközelebb álló egész számot jelöli. Így pl.

$$(5,4) = 5, (8,73) = 9, (6) = 6, (-2,8) = -3 \text{ stb.}$$

A (x) szám $[x]$ -szel vagy $[x] + 1$ -gyel lesz egyenlő attól függően, hogy az $x - [x]$ különbség kisebb vagy nagyobb egykettőnél. Abban az esetben, ha $x - [x] = 0,5$, megállapodás szerint az $(x) = [x]$ egyenlőséget fogadjuk el (a továbbiakban a (x) jelet csak olyan esetekben fogjuk használni, ha $x - [x] \neq 0,5$, így nem merülhet fel kétség, hogy az (x) -et $[x]$ -szel vagy $[x] + 1$ -gyel tekintsük egyenlőnek).

A további feladatok megfogalmazásában az n szám mindig pozitív egészet jelent.

11. a) Hány 1000-nél kisebb egész szám van, amely nem osztható sem 5-tel, sem 7-tel?

b) Hány szám van ezek közül, amely nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

12.* 56 700 000-hez hány nála kisebb relatív prímszám létezik?

13. Hány 10 000-nél kisebb pozitív egész szám létezik, amelyre a $2^x - x^2$ kifejezés nem osztható 7-tel?