Torkel Franzén

# GÖDEL NEMTELJESSÉGI TÉTELEI

## ÉRTELMEZÉSEK ÉS FÉLREÉRTÉSEK

TYPOTEX

# TARTALOM

# ELŐSZÓ

Mi lehet a mentség egy újabb könyvre, amely Gödel nemteljességi tételeit a művelt nagyközönség számára kívánja megvilágítani? A következő: nincs olyan könyv, amely a tételt nem csupán matematikai – többek között a bizonyításelméleti – szempontból mutatja be, de sorra veszi azt a meglehetősen sokféle álláspontot is, amelyeket a tételek matematikán kívüli jelentőségével kapcsolatban fogalmaztak meg.

A könyv jelentős részben azon alapul, hogy sokat olvastam és kommentáltam a Gödel tételeivel kapcsolatos megjegyzéseket. Amikor internetes forrásaimat megneveztem, az URL-eket nem adtam meg, ezek ugyanis gyakran eltűnnek. Amennyiben a szóban forgó passzusok még fellelhetők az interneten, egy kereső segítségével az Olvasó könnyen megtalálhatja őket.

Jó néhány esetben azoknak a megjegyzéseknek, amelyeket az internet alapján (alkalmanként kissé szerkesztett változatban) idézek, nem adtam meg a forrását. Ezek gyakran előforduló, sokak által képviselt nézeteket és érveket reprezentálnak.

Amikor köszönetet mondok azoknak, akik a könyv megírásában segítettek, azokkal kell kezdenem, akik az interneten közzétették Gödel tételeivel kapcsolatos véleményüket, és akik nélkül ez a könyv valószínűleg nem is jelent volna meg. Sokat segítettek továbbá Andrew Boucher, Damjan Bojadziev, Alex Blum, Jeff Dalton, Solomon Feferman, John Harrison, Jeffrey Ketland, Panu Raatikainen és Charles Silver megjegyzései. Nagyban támaszkodhattam a Luleåi Egyetem által biztosított forrásokra is, ezért szintén köszönetet mondok.

A mindezek után is megmaradt nemteljesség és inkonzisztencia miatti felelősséget elhárítom: elvégre Gödel bebizonyította, hogy bármely, a nemteljességi tételekről szóló könyv vagy nemteljes, vagy inkonzisztens. De talán mégsem ez a helyzet. Igaz, hogy a könyv egyes részei a matematikai bizonyításokhoz és definíciókhoz nem szokott Olvasó számára nehezen követhetőek, mégis úgy vélem: könyvem a matematikai logikában nem járatos Olvasót is felvértezi azokkal az ismeretekkel, amelyek alapján maga is megítélheti a nemteljességi tételekkel kapcsolatban levont következtetéseket, és megértheti, hogy a tételek milyen matematikai és filozófiai távlatokat nyitottak meg.

# 1. FEJEZET

# BEVEZETÉS

## 1.1. A nemteljességi tétel

Kevés tétele van a tiszta matematikának, amely a matematikán kívül is komoly ismertségnek örvend. A legutóbbi időkben például a „nagy Fermat-sejtés” került a nagyközönség érdeklődésének homlokterébe Andrew Wiles bizonyításának köszönhetően, de a nem matematikusok közül sokan ki tudják mondani Pitagorasz tételét is, amely a derékszögű háromszögek oldalai között fennálló összefüggésről szól, és amelyről immár egy dal is született (az előadó Danny Kaye, a zenét Saul Chaplin szerezte, a szöveget John Mercer írta). Meglehetősen nyugodtan kijelenthető azonban, hogy nem-matematikus körökben egyetlen matematikai tételt sem övez komolyabb érdeklődés, mint Gödel 1931-ben megjelent nemteljességi tételét. Az utóbbi évtizedek hatástörténete jól nyomon követhető az interneten, ahol a viták minden lehetséges témára kiterjednek, és ahol Gödel tétele lépten-nyomon szóba kerül. Ilyen hivatkozásokkal nem csupán logikai, matematikai, számítástudományi vagy filozófiai vitákban találkozunk – ahol számíthatunk is arra, hogy megjelennek –, de akkor is, amikor a tárgy a politika, a vallás, az ateizmus, a költészet, az evolúció, a hip-hop vagy éppenséggel a randizás. Az érdeklődés nem korlátozódik az internetre. A nemteljességi tételre könyvek és cikkek sokaságában hivatkoznak nem csupán matematikusok, logikusok és filozófusok, de teológusok, fizikusok, kritikusok, fényképészek, építészek és még sokan mások; a tétel inspiráció forrása a költészetben és a zenében is.

Amikor a nemteljességi tételekre a formális logika területén kívülről hivatkoznak, akkor sok esetben nyilvánvaló értelmetlenségek születnek, amelyek többnyire vaskos félreértésen vagy szabad asszociációk valamiféle sorozatán alapulnak. (Ez a helyzet például a következő állítás esetében: „Gödel nemteljességi tétele bizonyítja, hogy nem lehet igazolni az objektív valóság létezését". Vagy amikor valaki azt mondja: „Gödel nemteljességi tétele szerint minden információ csak hiányos és önreferenciális lehet." Vagy éppenséggel ebben: „A létezést és a tudatot azonosítva Gödel tétele az evolúcióra is alkalmazható.") Alan Sokal és Jean Richmond a posztmodernizmust tárgyaló könyvükben[1] például leszögezik: „Gödel tétele a félreértelmezések és intellektuális merényletek kimeríthetetlen forrása", és ezt Regis Debray, Michel Serres és mások írásaiból vett példákkal támasztják alá. De a Gödel-tétel által inspirált nem matematikai érvelések és gondolatok között sok olyan is akad, amely mentes a

[1]Magyarul is olvasható: *Intellektuális imposztorok,* Typotex, több kiadás, ford. Kutrovátz Gábor.

posztmodern túlkapásoktól, és amely természetes módon merül fel sokakban, akik a tételekről elmélkednek. Ilyenek például a következők: „vannak igazságok, amelyeket a logika és a matematika nem tud bizonyítani”, vagy „semmi sem tudható biztosan”, vagy „az emberi elme olyasmire is képes, amire egy számítógép nem”.

A Gödel-tételről szóló szakirodalomhoz való jelen hozzájárulás célja, hogy a tétel tartalmának és érvényességi körének bemutatásával a logikában járatlan olvasó számára is lehetővé tegye, hogy józan és megalapozott véleményt alkothasson a tételre hivatkozó gondolatmenetekről. Ennek érdekében számos ilyen gondolatot sorra veszünk majd, hogy azonosítani tudjuk a bennük megjelenő félreértéseket és tévedéseket, és hogy megvilágíthassuk a filozófiai problémákat. A név nélkül megjelenő érvek és megjegyzések forrása az internet.

Gödel nemteljességi tétele – a tétel bizonyításával egyetemben – egy osztrák tudományos szaklapban jelent meg 1931-ben. A német nyelvű cikk címe magyarra fordítva: „A Principia Mathematica és hasonló rendszerek formálisan eldönthetetlen állításairól I.” (Gödel tervezett egy II. részt is, de végül nem írta meg.) A *Principia Mathematica* (a továbbiakban PM) Bertrand Russell és Alfred North Whitehead háromkötetes, 1910 és 1913 között megjelent monumentális műve, amelyben a szerzők a matematika olyan logikai megalapozását adják meg – egy áttekinthetőnek és nyilvánvalónak távolról sem tekinthető axiómarendszer és a hozzá kapcsolódó következtetési szabályok formájában –, amelynek keretei között az akkori matematika minden eredménye formalizálható és bizonyítható. Gödel a cikkben két tételt bizonyított, az egyik „az első nemteljességi tétel”, a másik „a második nemteljességi tétel” néven vált ismertté. (A „Gödel nemteljességi tétele” fordulat a továbbiakban vagy a kettőt együtt, vagy valamelyiket jelöli.) Az első nemteljességi tétel szerint ha a PM rendszer kielégíti a Gödel által $\omega$-konzisztenciának (omega-konzisztencia) nevezett feltételt, akkor *nem teljes,* ami annyit tesz: létezik olyan, a rendszer nyelvén felírható állítás, amely a rendszerben nem bizonyítható és nem is cáfolható. Az ilyen állítást *eldönthetetlen* állításnak nevezzük. A második nemteljességi tétel szerint amennyiben egy rendszer *konzisztens* – azaz nincs olyan, a rendszer nyelvén felírható állítás, amely a rendszerben egyaránt bizonyítható és cáfolható –, úgy a rendszer konzisztenciája magában a rendszerben nem bizonyítható.

Az $\omega$-konzisztencia a konzisztenciánál erősebb tulajdonság, és technikai jellegű – ellentétben a konzisztenciával, amely könnyen érthető fogalom. J. Barkley Rosser amerikai logikus azonban 1936-ban bebizonyította, hogy Gödel első nemteljességi tétele élesíthető: a következtetéshez, miszerint a rendszer nem teljes, elegendő a konzisztencia feltevése is.

Tételeit Gödel valójában nem a PM-re, hanem egy azzal rokon, általa P-nek nevezett rendszerre vonatkozóan bizonyította be. Nyilvánvaló volt azonban, hogy a gondolatmenet a PM-re is alkalmazható, ahogy számos más matematikai axiómarendszerre is. Manapság a nemteljességi tételt gyakran olyan állításként fogalmazzák meg, amely tetszőleges formális rendszerre érvényes – amennyiben abban az elemi aritmetika egy része formalizálható, és néhány alapvető aritmetikai törvény bizonyítható. A tétel szerint ha egy ilyen rendszer konzisztens, akkor nem teljes, és konzisztenciája nem bizonyítható magán a rendszeren belül.

Gödel dolgozatának gondolatmenete akkoriban a matematikusok és a logikusok számára merőben új volt, a bizonyítás megértése jeles matematikusok számára is komoly kihívást jelentett (így például Ernst Zermelónak, az axiomatikus halmazelmélet atyjának is nehézségeket okozott). Napjainkra a tárgy és annak megértése is eljutott addig a pontig, hogy már egyáltalán nem tekintjük bonyolultnak, ez megesik más szellemi teljesítménnyel is. A módszer a logika bevett eszköztárának részévé vált, a bizonyítások egyszerűbbek és áttekinthetőbbek lettek. A részletek megértése természetesen megköveteli a formális logika módszereinek és fogalmainak ismeretét. Ebben a könyvben abból indulunk ki, hogy az Olvasó nem rendelkezik az általános iskolai matematikán túlmutató ismeretekkel – meggyőződésünk ugyanis, hogy Gödel tétele a formális logika beható tanulmányozása nélkül is megközelíthető, és hogy a tétel valós vagy vélt alkalmazásai is megérthetők a technikai részletek nélkül is.

Arról persze megoszlanak a vélemények, hogy miben áll a nemteljességi tételek világos, informális megértése. Ezt mutatja a következő példa:

> *Gödel nemteljességi tétele intuitív módon a matematikai megközelítés és a bizonyítás nélkül is megérthető: a nemteljességi tétel könnyen felismerhető formában a zen buddhizmusban is megjelenik.*

A nemteljességi tétel formális rendszerekről, konzisztenciáról és teljességről szól. A „konzisztens”, „teljes” és „rendszer” fogalmakat a logika nem csupán szakkifejezésekként, de olyan értelemben használja, amely sok tekintetben különbözik a természetes nyelvben való használatuktól. Nem meglepő, hogy Gödel tétele oly sok – a teljesség, a konzisztencia vagy a rendszer valamely informális fogalmához kötődő – gondolatban megjelenik. Amint a 4. fejezetben részletesebben bemutatjuk, az efféle asszociációknak általában nincs sok közük a nemteljességi tételek valódi tartalmához. A tétel intuitív megértésével, amelyhez esetleg a zen buddhizmus tanulmányozása révén juthatunk el, ebben a könyvben egyáltalán nem foglalkozunk.

## 1.2. Gödel élete és műve

Gödelt néha mint német, máskor mint osztrák, cseh vagy amerikai tudóst emlegetik. Bizonyos értelemben mindegyik helyénvaló. Gödel anyanyelve és kulturális háttere is német volt, de a morvaországi Brünnben (cseh neve Brno) született 1906-ban, egy jómódú családban. Akkoriban Morvaország az Osztrák-Magyar Monarchia része volt, az első világháború után azonban a monarchia felbomlott, Gödel pedig Brünn népes német közösségének tagjaként, az újonnan létrejött Csehszlovákia állampolgáraként nőtt fel. 1929-ben lett osztrák állampolgár, amikor már doktori disszertációján dolgozott Bécsben. 1938-ban, miután a náci Németország elfoglalta Ausztriát, hivatalosan Gödel is német állampolgár lett. Bár nem volt zsidó, a politika pedig egyáltalán nem érdekelte, a hatalom szemében gyanús volt, hogy gyakran megfordult zsidó és liberális körökben. Nem tudott könnyen egyetemi állást szerezni, és egyszer előfordult az is, hogy az