Csodálatos geometria

G. Horváth Ákos

CSODÁLATOS GEOMETRIA

avagy a kapcsolatteremtés tudománya

TYPOTEX

A könyv megjelenését a Nemzeti Kulturális Alap

és a Magyar Tudományos Akadémia támogatta.

ISBN 978 963 279 783 0

Témakör: *elméleti matematika, geometria*

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kiadványainkról és akcióinkról
a *www.typotex.hu* és a *facebook.com/typotexkiado*
oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
A kötetet gondozta: Gerner József
Borítóterv: Tóth Norbert
Nyomta és kötötte: Séd Nyomda Kft., Szekszárd
Felelős vezető: Katona Szilvia

Tartalomjegyzék

Előszó helyett. . .

Előszó helyett álljanak itt Blaise Pascal örökérvényű gondolatai a geometriáról, az igazságról, az útról, annak kereséséről és az emberi szívről.

⋆ ⋆ ⋆

. . . Kétfajta gondolkodás létezik tehát: az egyik gyorsan és teljes mélységükben felfogja az alaptételekből származó következményeket, ezt nevezhetjük hibátlan gondolkodásnak; a másik egyszerre sok törvényt képes felfogni, anélkül, hogy összezavarná őket, és ez az igazi geometriai gondolkodás. Az egyik az értelem ereje és tévedhetetlensége, a másik az értelem átfogóképessége. Mármost e kettő nagyon jól meglehet egymás nélkül, az emberi szellem ugyanis egyaránt lehet erős és ugyanakkor korlátolt, vagy átfogó, de ugyanakkor gyenge. . . .

⋆ ⋆ ⋆

A magunk lelte magyarázatok általában jobban meggyőznek bennünket, mint azok, amelyek másoknak jutottak eszükbe.

⋆ ⋆ ⋆

Sohasem magukat a dolgokat keressük, hanem a dolgok keresését.

⋆ ⋆ ⋆

Nemcsak eszünkkel ismerjük meg az igazságot, hanem szívünkkel is. Ez utóbbi révén fedezzük fel az alapelveket, s az okoskodás, melynek semmi szerepe sincs benne, hiába igyekszik cáfolni őket. ... Mert az olyan alapelvek ismerete, mint az, hogy van tér idő, *mozgás, számok, oly szilárd, amilyen egy sincsen okoskodásainkkal megszerezhető ismereteink között. ...*

⋆ ⋆ ⋆

Amikor valamely művet írunk, legutoljára tudjuk meg, mivel is kezdjük.

Bevezetés

A geometria születésünk pillanatától végigkíséri életünket, hiszen tárgya a bennünket körülvevő világ. A geometriai törvényszerűségek figyelembevétele nélkül nem alakulhattak volna ki a munka- és közlekedési eszközeink, nem jöhetett volna létre az emberi civilizáció.

Néhány szabályt elsajátítva a gyermek automatikusan, mintegy módszerként használja a geometriát. Tudja, hogy a nagyobb tárgy nem fér a nála kisebb dobozba; ha ügyesen pakolja el holmiját, több fér a fiókba; a háromlábú szék nem billeg, ellentétben a négylábúval, igaz, könnyebb felborulni vele; megtalálja a legrövidebb utat otthona és az iskola között, mert reggelente minél tovább szeretne aludni. Amikor rajzol, a perspektíva szabályait alkalmazza, hogy kétdimenziós képe hűen visszaadja a lerajzolt háromdimenziós tárgyat; elcsodálkozik a sínpár összetartásán, rájön, hogy a nagy dolgok is kicsinek látszanak, ha messze vannak tőlünk. Előbb vagy utóbb felismeri a derékszög és párhuzamosság szerepét, maga is elkezdi alkalmazni, például mikor rendet tesz a szobájában. Tudja, mi a kör, a gömb, a négyzet és a kocka, ezek értelmezésére magától is rátalál. Egyszóval a geometria számára a világ megismerésének módszere.

Nem véletlen tehát, hogy a matematikai megismerés éppen a geometriai vizsgálatokra támaszkodva nőtte ki magát a jelenleg általánosan elfogadott axiomatikus módszerré.

Az axiomatika kezdetben egy illúzióval kecsegtetett, nevezetesen, hogy a logika szabályainak alkalmazásával az emberi kíváncsiság maradéktalanul kielégíthető. Ez a tézis a múlt század elején végérvényesen megdőlt. Jelenleg úgy gondoljuk, hogy érdemes axiomatikus alapokon logikailag jól követhető rendszereket kialakítani, azokat tanulmányozni, de ha a rendszer keretein belül felmerülő valamely kérdésre nem kapunk választ, azon sincs mit csodálkozni. Ilyen esetben a rendszert kell megváltoztatunk, az adott kérdést megválaszolni képes új rendszer keretei között kell tovább vizsgálódnunk.

Ezzel a lemondással persze a matematikai megismerés módszere is beáll a sorba, s a legegyszerűbb mintát követi, a gyermek felnőtté válásának folyamatát. Amikor a gyermek kinövi a kiságyat, a szoba lesz az új élettere, majd a lakás egyéb helyiségei, mind-mind más érdekességet tartogatva számára. Majd következik az óvoda, sok-sok új szobával, a közlekedés stb. lehetőségével. Választásainkat az érzelmek irányítják, lehetőleg olyan helyiséget választunk tartózkodási helyünknek, ahol szeretünk lenni. Döntéseink során ugyanakkor meg sem próbáljuk figyelembe venni az összes létező helyiséget, az adottak közül választjuk ki a pillanatnyilag legmegfelelőbbet. A geometria a kapcsolatteremtés legtermészetesebb módszere. A matematika különböző ágai között hoz létre kapcsolatot a szemléltető gondolkodás útján; továbbá a matematika, az elméleti fizika és a kísérleti fizika hármasában a modellalkotás segítségével; majd a matematika és a mérnöktudományok között a tér szerkezetének leírása és ábrázolása útján, végül a matematika és a művészet között a logikai és esztétikai szépség együttes megjelenésének tárgyaként.

Jelen könyv szerzője nem akarja bevezetni olvasóját a geometriába, hiszen úgy gondolja, hogy ezen minden emberi lény átesett a számára fontos mértékben. Nem akarja továbbá megmondani azt sem, hogy mi a geometria, mert úgy gondolja, hogy igazából nem is lehet. És különösképpen nem akarja megmondani azt, hogy mi a fontos és mi a hasznos a geometriában, mert úgy gondolja, hogy ezekre a kérdésekre nem lehet örök érvényű választ adni. Szeretné viszont megőrizni könyvében vezérfonal gyanánt a bennünk rejlő gyermek rácsodálkozási képességét mindarra, ami szép, s arról írni, amit ő maga érdekesnek talált, s oly módon, ahogy az geometriai munkássága során megformálódott benne.

Ha a könyv olvasása az olvasónak örömet okoz, a szerző már elérte célját. Haszonnal forgathatják mindazok, akik geometriát középiskolai, egyetemi szinten tanulnak, vagy csak érdeklődnek a könyvben feldolgozott területek iránt. Javasolható továbbá ez a könyv mindazoknak, akiknek a szellemi élmény örömet okoz.

Szeretném megköszönni mindazt a támogatást, amit a könyv elkészítése, illetve megjelentetése során kaptam. Családomnak a türelmet, tanáraimnak a megalapozott tudást, hallgatóimnak a könyv megírására serkentő inspirációt, kollégáimnak az eszmei és anyagi támogatást. Külön szeretném megköszönni Gerner Józsefnek a megjelenés alatt álló kézirat elhivatott és lelkiismeretes gondozását.

G. Horváth Ákos

Babits Mihály: Bolyai

„Semmiből egy új világot teremtettem."
Bolyai János levele atyjához

Isten elménket bezárta a térbe.
Szegény elménk e térben rab maradt:
a kapzsi villámölyv, a gondolat,
gyémántkorlátját még csak el sem érte.

Én, boldogolván azt a madarat
ki kalitjából legalább kilátott,
a semmiből alkottam új világot,
mint pókhálóból sző kötélt a rab.

Új tövényekkel, túl a szűk egen,
új végtelent nyitottam én eszemnek;
király gyanánt, túl minden képzeten.

Kirabolván kincsét a képtelennek
nevetlek, mint Istennel osztozó,
vén Euklides, rab törvényhozó.

1. fejezet

Abszolút geometria

1.1. Az alapok

A matematikához nem vezet királyi út.

Eukleidész

Az alapokról nehéz bármi újat mondani. Monográfiák tucatjaiban olvashatunk az axiomatikus vizsgálatok történetéről, a legfontosabb személyiségek munkásságáról, eredményeikről, az eredmények értelmezéseiről és az értelmezések kritikáiról. Számos könyv és tanulmány foglalkozik a filozófiai és módszertani következményekkel is, tehát mindezekről írni felesleges. A szépség, amit egy szisztematikus felépítés rejt, és az öröm, amit annak készítése okoz, továbbá látni, ahogy lépésről lépésre helyükre kerülnek a dolgok – mindez nem mindennapi élmény. Ahogy az első találkozásról mondja Ady Endre „Vajjon milyennek láttál?" című versében:

Minden vagyok, amit vártál
Minden vagyok, amit nem sejtsz
Minden vagyok, mi lehetnék.

Ebben a fejezetben ezt az élményt próbáljuk tolmácsolni. Alapfogalmakat, alaprelációkat definiálunk, ezekre vonatkozóan alaptételeket, axiómákat rögzítünk bizonyítás nélkül. Újabb definíciók kimondása után ezekre vonatkozó állításokat fogalmazunk meg, melyeket már bizonyítunk is. Nem törekszünk precíz felépítésre, de szeretnénk áttekinteni a geometriai fogalmak megjelenésének pontos helyét. Axiómarendszerünk alapvetően a Hilbert-féle axiómarendszer, de a könnyebb haladás érdekében a szükségesnél erősebb axiómákat is megfogalmazunk.

1.1.1. Illeszkedés

A világ megismerésének, a létezők csoportosításának kulcskérdése az összetartozó dolgok összetartozásának felismerése. A matematikában általában az *eleme* reláció bevezetése a szokásos megoldás, ez azonban aszimmetriát sugall, így a geometriai összetartozást a szimmetrikusabbnak tűnő illeszkedés fogalma alapján építjük fel.

Alapfogalmak: pont, egyenes, sík	**Alapreláció:** illeszkedés

Egy pont illeszkedik egy egyenesre vagy egy síkra. Egy egyenes illeszkedik egy síkra, ha pontjai illeszkednek rá.

I1. Axióma. *Két (különböző) pont egyértelműen meghatároz egy egyenest.*

I2. Axióma. *Három nem egy egyenesre illeszkedő pont egyértelműen meghatároz egy síkot.*

I3. Axióma. *Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes összes pontja illeszkedik rá.*

I4. Axióma. *Van négy, nem egy síkra illeszkedő pont.*

I5. Axióma. *Ha két síknak van egy közös pontja, akkor van egy további közös pontjuk is.*

Az első két axióma jellemzi az egyenes egyenesszerűségét, illetve a sík síkszerűségét, a harmadik összekapcsolja az egyenes és sík fogalmát, a negyedik és ötödik pontosan három dimenzióra rögzíti terünk méretét.

Egy egyenesre, illetve egy síkra illeszkedő pontok esetében használhatjuk a *kollineáris,* illetve *komplanáris pontok* kifejezéseket is.

1.1.2. Rendezés

A világegyetem térben és időben létezik. Az időbeli létezés alapján természetes képünk van a lineáris rendezés fogalmáról. Beszélhetünk korábban, egy időben vagy később megtörtént eseményekről. Ezeket minden nyelv meg tudja különböztetni egymástól. Természetes vágyunk, hogy a sorrendiség fogalmát a térbeli, egy időben létező objektumok fogalmára is kiterjesszük, és azok között rendet, sorrendet teremtsünk. A rendezés gondolata elvezet számos komoly probléma felvetéséhez és megoldásához, továbbá új geometriai alapobjektumok bevezetéséhez. Így jelentősen hozzájárul a tér fizikai megismeréséhez is.

1.1.2.1. Az abszolút geometriák rendezése a „között" fogalma alapján

Alapreláció: „közte van"

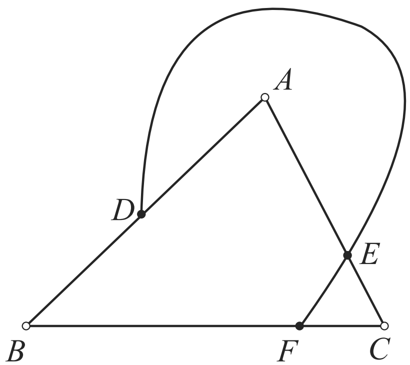
Jelölése: (ACB), ami tehát azt is jelenti, hogy a három pont kollineáris, és a C pont az egyenes két, A és B pontja között van.

R1. Axióma. *Ha (ACB), akkor (BCA).*

R2. Axióma. *Az egyenes három pontja közül pontosan egy van a másik kettő között.*

R3. Axióma. *Az egyenes A, B pontpárjához található olyan C pont is, amire (ABC) teljesül.*

R4. Axióma (Pasch)**.** *Legyen A, B, C három nem egy egyenesre illeszkedő pont, e pedig egy egyenes, amelynek valamely D pontjára (ADB) teljesül. Ha C nem illeszkedik e-re, akkor találunk olyan E pontot e-n, amire (AEC) vagy (BEC) egyike fennáll.*

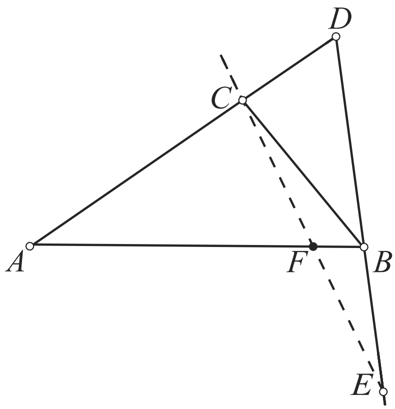


1.1. ábra. Miért nincs három belül metszett oldal?

Az első három axióma az egyenes pontjainak rendezéséről szól, de nem garantálja azt, hogy végtelen sok pontja van az egyenesnek. (Vessük össze az ötpontú rendezett egyenes modelljével.) Viszont értelmezhető az A, B végpontok által meghatározott *nyílt szakasz,* mint az egyenes azon C pontjainak halmaza, melyekre (ACB) áll fenn. Nem tudjuk azonban, hogy van-e pontja minden szakasznak. A Pasch-axióma alapján azonban értelmezhető a *félegyenes, félsík* és *töröttvonal* fogalma, beszélhetünk *szögvonalakról,* és *egyszerű zárt töröttvonalról.* Értelmezhető továbbá a konvexitás is. Mindezek tulajdonságairól azonban lényegében semmit sem tudunk. Az axiómacsoport „erős” axiómája a már említett Pasch-axióma, amely már a sík pontjait segít rendezni. A következő egyszerű állítások minden további vizsgálat alapját képezik.

1.1.1. Lemma. *A Pasch-axióma kimondásában szereplő* (AEC) *és* (BFC) *relációk közül pontosan az egyik teljesül. Tehát, ha* (ADB) *fennáll, akkor* (AEC) *és* (BFC) *nem teljesülhet egyszerre.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy mindkét reláció igaz. Tegyük fel továbbá, hogy (DEF) teljesül. Tekintsük a B, D, F nem kollineáris ponthármast és az AC egyenest. Mivel feltételeink szerint (BDA) és (DEF) fennállnak, az AC illetve BF egyenesekre nézve a Pasch-axióma (BCF) teljesülését követeli meg. Ez pedig ellentmond (BFC)-nek. □



1.2. ábra. Minden szakasznak van pontja!

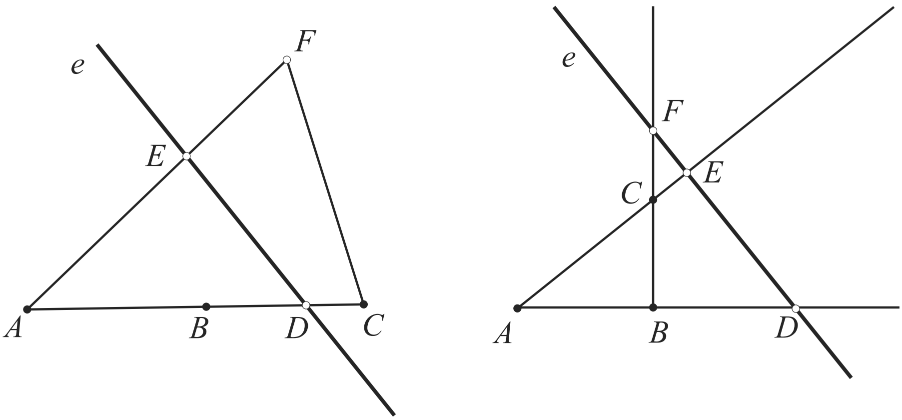
1.1.1. Tétel. *A szakasznak van pontja.*

Bizonyítás: Tekintsük az AB pontpár által meghatározott szakaszt. Illeszkedési axiómáink szerint van olyan C pont, mely nem illeszkedik az AB egyenesre. Az AC egyenesen fel tudunk venni egy D-vel jelölt pontot, melyre (ACD) teljesül. D nem lehet B, így a BD egyenesen is találunk egy E pontot, melyre (DBE) teljesül. Az EC egyenesre és az A, D, B nem kollineáris ponthármasra alkalmazva Pasch axiómáját, olyan F pont létezése adódik, melyre (AFB) teljesül. □

1.1.1. Következmény. *A szakasznak és így az egyenesnek is végtelen sok pontja van. Valóban, egymásba skatulyázott szakaszokkal újabb és újabb pontok szerkeszthetők, melyek az előző nyílt szakaszoknak pontjai.*

További alapvető fogalom a *félsík* fogalma. Ennek bevezetésére is lehetőségünk nyílik. Egy sík egy adott egyenesére nem illeszkedő két pontját az egyenesre nézve *ekvivalensnek* nevezzük, ha az általuk meghatározott zárt szakasz nem tartalmaz az egyenesre illeszkedő pontot. Definíció szerint minden pont ekvivalens magával.

1.1.2. Lemma. *Két pontnak egy adott e egyenesre vonatkozó ekvivalenciája ekvivalenciareláció, melynek két osztálya van.*



1.3. ábra. Az egyenesre vonatkozó ekvivalencia tranzitív

Bizonyítás: Mivel a reflexivitás és a szimmetria nyilvánvaló, csak a reláció tranzitivitását kell belátnunk. Legyen először A, B, C nem kollineáris ponthármas. Ha A ekvivalens B-vel, és B ekvivalens C-vel, akkor A ekvivalens C-vel is, hiszen ellenkező esetben e-nek lenne olyan D pontja, amelyre (ADC) állna fenn, és ez ellentmondana Pasch axiómájának. Ha pedig a három pont egy egyenesre illeszkedik, tekintsünk először egy E pontot, amely e-nek egy D-től különböző pontja, és vegyünk fel egy F pontot, melyre (AEF) teljesül. Az A, F, C nem kollineáris ponthármasra és e-re alkalmazva a Pasch-axiómát, a $D \in e$, $(ADC), (AEF)$ feltételekből adódik, hogy C és F ekvivalensek. Ha most B és F ekvivalensek lennének, akkor a nem kollineáris eset miatt A és F is ekvivalens pontpár lenne, ez F választása miatt nem lehetséges, így B és F nem ekvivalensek. Ekkor viszont megint a Pasch-axióma, valamint C és F ekvivalenciája miatt B és C nem ekvivalensek. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Legalább két osztály létezik, mert egy e-re nem illeszkedő pontot összekötve egy e-re illeszkedő ponttal, az **R3.** axióma alapján találunk a ponttal nem ekvivalens pontot. Másrészt, ha lenne három osztály, ezekből választva egy-egy A, B, C pontot, nem kollineáris pontokhoz kéne jutnunk az 1. illeszkedési axióma szerint (az egyenesen levő pontok definíciónk szerint vizsgálatunkból ki vannak zárva). Ekkor viszont e és A, B, C egy a Pasch-axiómának ellentmondó konfigurációhoz vezetne, ami szintén lehetetlen. Evvel utolsó állításunkat is beláttuk. □

A fent kapott ekvivalenciaosztályokat az egyenes által meghatározott *nyílt félsíkoknak* nevezzük. Ha a meghatározó egyenest is a félsíkhoz vesszük, *zárt félsíkról* beszélünk. *Félegyenes* (nyílt vagy zárt) egy egyenes egy őt nem tartalmazó félsíkhoz tartozó része.

Bevezethető a szögtartomány, szögvonal, töröttvonal, sokszög, sokszögtartomány fogalma, mert igazolható a síkbeli egyszerű zárt töröttvonalra kimondott Jordan-tétel. Eszerint a sík egy egyszerű zárt töröttvonala a síkot két tartományra bontja, és ezek egyike nem tartalmaz félegyenest. Ez utóbbi a darabot, a töröttvonal mint sokszögvonal által meghatározott sokszögtartománynak nevezzük.

Jegyezzük meg továbbá, hogy az 1.1.2. lemma bizonyításával analóg bizonyítás azt is mutatja, hogy adott szakasz pontjai által mint végpontok által definiált szakasz pontjai az eredeti szakasznak is pontjai.

1.1.2.2. Az elliptikus sík rendezése az elválasztás fogalma alapján

Amint azt a későbbiekben látni fogjuk, az abszolút síkon vannak nem metsző egyenesek. Ha olyan geometriát szeretnénk felépíteni, melyben minden egyenespár metsző, a rendezés fogalmát kell újragondolni. Szemléletesen világos, hogy az euklideszi síkból kiindulva definiálható egy őt tartalmazó „bővebb sík” – a *valós projektív sík* – melyben már bármely két egyenes metszi egymást. Olyan rendezési módszert kell bevezetni, melyből alkalmas specializálással az abszolút geometriák „közte van” fogalma a megkövetelt tulajdonságaival együtt adódik.

Alapreláció: „elválasztás”

Az elválasztás jelölése: $(ACBD)$, ami azt jelenti, hogy a négy pont kollineáris, és az A, B pontokat a C, D pontok elválasztják.

ER1. Axióma. *Ha* $(ACBD)$*, akkor* $(BCAD)$ *és* $(CBDA)$.

ER2. Axióma. *Az egyenes négy pontjából pontosan egyféleképpen alkotható két pontpár úgy, hogy azok elválasszák egymást.*

ER3. Axióma. *Az egyenes tetszőleges* A, B, D *ponthármasához található olyan* C *pont az egyenesen, amelyre* $(ABCD)$ *teljesül.*

ER4. Axióma (Pasch)**.** *Legyen A, B, C három nem egy egyenesre illeszkedő pont, e és f pedig két egyenes, melyeknek $D \in e$, illetve $D' \in f$ pontjaira $(ADBD')$ teljesül. Ha C nem illeszkedik e-re és f-re sem, akkor találunk olyan E pontot e-n és E' pontot f-en, amelyekre $(AECE')$, $(BECE')$ egyike fennáll.*

Vegyük észre, hogy ha ideális egyenesként rögzítünk egy egyenest a fenti axiómákat kielégítő elliptikus síkon, és olyan pontnégyesekre alkalmazzuk az elválasztás fogalmát és axiómáit, melyeknek egyik eleme ezen egyenesre esik, éppen visszakaphatjuk a „közte van” fogalmát és tulajdonságait.

Valóban, legyen az ideális egyenes f. Ha valamely e egyenes f-hez illeszkedő pontja D, akkor további A, B, C pontjaira pontosan akkor teljesüljön (ABC), ha eredetileg $(ABCD)$ állt fenn. Mivel az első elválasztásra vonatkozó axióma alapján feltehető, hogy D az utolsó pontja a felsorolásnak egy rögzített pontnégyes esetén, a „között” szimmetriája triviális. A második axióma szerint D az A, B, C pontok közül pontosan eggyel alkotja a maradék kettőt elválasztó pontpárt, így a „között” második rendezési axiómája szintén teljesül. Ha az egyenes két pontja A, B az f-en levő pontja pedig D, a harmadik axióma éppen a „között” harmadik axiómáját adja. Végül a negyedik axióma a Pasch-axiómát adja, ha f-et ideális egyenesnek választjuk.

1.1.3. Egybevágóság

A világegyetem tetszőleges két létező objektuma nem tekinthető azonosnak. Ez a „kettő” szó alapvető jelentése. Egy véges axiómarendszer által leírt struktúra ezt sohasem teljesíti. A geometrián belül az egybevágóság fogalma hivatott eldönteni, hogy két objektum azonosnak tekinthető-e vagy sem. Érdekes felismerni, hogy milyen keveset kell elhinnünk ahhoz, hogy lényegében tetszőleges objektumpárról eldönthessük az azonosság kérdését. A szimmetria kedvéért a szakaszok és a szögtartományok fogalmát párhuzamosan axiomatizáljuk. Ez nyilvánvalóan szükségtelen bővítéshez vezet, ahogy ezt a nagy elődök munkáiból láthatjuk.

Alapreláció: „szakaszok és szögek egybevágósága”

Ha $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ két szakasz, az egybevágóságukat $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ jelöli.

E1. Axióma (Felmérési axióma)**.** *Bármely egyenes bármely pontjából a pont által meghatározott mindkét félegyenesére felmérhető egy-egy, az adott szakasszal egybevágó szakasz.*

E2. Axióma. *Az egybevágóság ekvivalenciareláció.*