Rózsa Pál:
Bevezetés a mátrixelméletbe

EGERVÁRY JENŐ
emlékének ajánlom e könyvet
halálának ötvenedik évfordulója alkalmából

Alkalmazott matematika

A sorozat kötetei:

Kóczy T. László – Tikk Domonkos: Fuzzy rendszerek (2000)
Elliott, J. R. – Kopp, P. E.: Pénzpiacok matematikája (2000)
Michelberger – Szeidl – Várlaki: Alkalmazott folyamatstatisztika
és idősor-analízis (2000)
Gömöri András: Információ és interakció (2001)
Baxter, M. – Rennie, A.: Pénzügyi kalkulus (2002)
Karsai János: Impulzív jelenségek modelljei (2002)
Simonovits András: Nyugdíjrendszerek: Tények és modellek (2002)
Medvegyev Péter: Sztochasztikus analízis (2004)
Szirtes Tamás: Alkalmazott dimenzióanalízis (2006)
Vizvári Béla: Egészértékű programozás (2006)
Vizvári Béla: Operációkutatási modellek (2009)

Rózsa Pál

BEVEZETÉS A MÁTRIXELMÉLETBE

TYPOTEX
Budapest, 2009

ISBN 978 963 279 028 2
ISSN 1586-4413

Témakör: *alkalmazott matematika*

Kedves Olvasó!
Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a *TypoKlub*ba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a *www.typotex.hu* címen érhet el. Honlapunkon megismerkedhet kínálatunkkal is, egyes könyveinknél pedig új fejezeteket, bibliográfiát, hivatkozásokat találhat, illetve az esetlegesen előforduló hibák jegyzékét is letöltheti.
Észrevételeiket a *velemeny@typotex.hu* e-mail címen várjuk.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa
A könyvet gondozta: Oláh Judit
Borítóterv: Tóth Norbert
Terjedelem: 33,3 (A/5 ív)

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

A természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van, és ez a nyelv: a matematika.
(G. Galilei: Párbeszédek a két legnagyobb világrendszerről, a ptolemaiosziról és a kopernikusziról)

E könyv előzményének tekinthető „Lineáris algebra és alkalmazásai” című könyvem, amely 1973-ban és 1975-ben a Műszaki Könyvkiadó, majd átdolgozás után 1991-ben a Tankönyvkiadó gondozásában jelent meg. A könyv címének megváltoztatásával egyrészt arra utalok, hogy ez a kiadás a lineáris algebrának a korábbinál szűkebb területére korlátozódik, másrészt a címében is kifejezésre szeretném juttatni azt a törekvésemet, hogy olyan könyvet adjak az Olvasó kezébe, amelynek segítségével az elméleti ismeretek megalapozása mellett kellő rutint szerezhet a mátrixokkal való számítások elvégzésében is. Ezért néhány fejezetet, amelyek alkalmazására a tapasztalat szerint kisebb az igény, elhagytam, és ugyancsak kihagytam a lineáris algebra numerikus módszereivel foglalkozó önálló fejezetet. Ennek anyagát részben beépítettem a korábbi fejezetekbe, illetve úgy ítéltem meg, hogy az óriásira duzzadt anyag már nem olvasztható egybe az alapozó fejezetekkel. Helyette inkább megnöveltem a kidolgozott példák számát, amelyek hozzásegítik az Olvasót az anyag jobb megértéséhez.

A könyv négy fejezetre tagolódik. Az első fejezet a mátrixalgebra elemeit tartalmazza és egyúttal itt ismerkedhet meg az Olvasó olyan speciális tulajdonságú, ún. strukturált mátrixokkal, amelyek az alkalmazások számos területén előfordulnak. A fejezetet a mátrixalgebra legfontosabb alkalmazási területe, a lineáris egyenletrendszerek elmélete és megoldása zárja. A második fejezet a lineáris algebra alapjaival foglalkozik, amely azt az elméleti hátteret szolgáltatja, amelybe a mátrixelmélet beágyazható. Ez a fejezet tartalmazza a sajátérték-feladatot és a lineáris transzformációk elméletét. A harmadik fejezet a mátrixfüggvények definíciójával és előállításával foglalkozik. Ennek keretében tárgyalja a mátrixok felosztását diagonalizálható és nemdiagonalizálható mátrixok osztályára és ennek kapcsán a Jordan-féle normálalakra való transzformálásukat. Itt kapott helyet mátrixok szinguláris értékeinek az értelmezése és szinguláris értékek szerinti felbontásuk. Végül a mátrixfüggvények legfontosabb alkalmazási területe, a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek elmélete és megoldása zárja a fejezetet. A negyedik fejezet a mátrixelmélet egy speciális területével, nemnegatív elemű mátrixokkal foglalkozik, ezen belül sztochasztikus mátrixokkal és ezek alkalmazásával bolyongási feladatok megoldására. A fejezet végén egy speciális bolyongási feladattal kapcsolatos Sylvester–Kac-mátrix sajátérték-feladatának generátorfüggvény segítségével nyerhető megoldása található.

A könyv egy egységes szemléletű és felépítésű bevezetést kíván nyújtani a mátrixelméletbe, amely tartalmában és módszereiben figyelembe veszi a tárgyalt anyag műszaki és természettudományokban való alkalmazásának az igényét. Az anyag felépítésében központi helyet foglalnak el a diádok és a projektorok. Mátrixok minimális diadikus előállításával vezeti be a rang fogalmát, és ezen keresztül jut a lineáris egyenletrendszerek elméletéhez. Projektorok minimális diadikus előállítása automatikusan biortogonális vektorrendszert szolgáltat, és ez vezet a mátrixok spektrálfelbontásához. Mátrixok függvényének értelmezésével és előállításával mutat utat a mátrixok osztályozásához és lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre való alkalmazásához. Itt felismerhető az Egerváry-iskola által megteremtett módszer, amely ma már hagyományosnak tekinthető a hazai mátrixelméleti kutatásokban. A könyv ebben eltér a legtöbb külföldi szakirodalomban követett – klasszikusnak mondható – iránytól. A bizonyítások során, amikor csak lehet, konstruktív módszerek szerepelnek, ezzel lehetővé válik, hogy egyúttal a megoldási módszereket is megismerje az Olvasó. Példa erre a Jordan-féle normálalak bevezetése, vagy a Kronecker-polinomok spektrálfelbontása. A 103 kidolgozott példa megválasztásánál fontos szempont volt, hogy a legkülönbözőbb alkalmazási területeken előforduló típusok forduljanak elő. Sok esetben a vizsgált rendszer szabályos tulajdonságai strukturált mátrixokra vezetnek. Ilyenek pl. a tridiagonális és a ciklikus mátrixok, perturbált mátrixok, vagy a kommutatív blokkokból álló hipermátrixok. Ezek invertálása, illetve spektrálfelbontásuk előállítása során számos ötletet ismerhet meg az Olvasó és ezzel egyúttal rutint szerezhet bonyolultabb feladatok megoldásához.

A könyv elsősorban egyetemi és főiskolai hallgatóknak, doktoranduszoknak, tudományos kutatóknak és azoknak az érdeklődőknek kíván bepillantást nyújtani a mátrixok világába, akiknek korábbi tanulmányaik során erre nem volt alkalmuk, vagy fel kívánják frissíteni régebben szerzett ismereteiket. Véleményem szerint eredményesen forgathatják a könyvet azok a matematikusok, fizikusok, mérnökök, informatikusok és közgazdászok, akik munkájuk során olyan matematikai kérdésekkel találkozhatnak, amelyek kapcsolatba hozhatók mátrixelméleti problémákkal. Az anyag összeállítása és felépítése során az volt a cél, hogy szinte a nulláról kiindulva fokozatosan ismerkedjék meg az Olvasó a fogalmakkal és tételekkel, és ezek bizonyítása során elsajátítsa azt a gondolkodásmódot, amely elősegíti az újabb szakirodalom megértését, esetenként pedig új problémák felvetését és azok megoldását. Az anyag megértéséhez az Olvasónak szüksége van egy minimális ismeretre a matematika egyéb területeiről, így az analízisből ismernie kell függvények hatványsorba fejtését, algebrából a determináns fogalmát, az algebra alaptételét és a polinomok elméletének alapjait, a komplex számok algebráját és a lineáris differenciálegyenletek elemeit. A negyedik fejezetben szereplő sztochasztikus mátrixok tárgyalásánál jó, ha tisztában van a valószínűségszámítás alapfogalmaival és ismeri a komplex változós függvényekre vonatkozó reziduum-tételt.

A könyv formai szerkezetének kialakításában a matematikai irodalomban szokásos módszer követhető nyomon, amely az alapvető ismereteket „definíció – tétel – bizonyítás” hármas tagolásban közli; a bizonyítás végét a $\blacksquare$ jel, a példák végét pedig három csillag, $* * *$ jelzi. Az egyes fogalmakat a könnyebb megkülönböztethetőségük céljából egymástól eltérő betűtípusok jelölik, így

a mátrixokat félkövér, álló nagybetűk: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ...

az oszlop- és sorvektorokat félkövér, álló kisbetűk: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ...

az absztrakt lineáris tér vektorait félkövér, dőlt kisbetűk: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ...

a geometriai tér vektorait félkövér, groteszk kisbetűk: $\mathbf{\mathsf{a}}$, $\mathbf{\mathsf{b}}$, ...

a lineáris tér transzformációit groteszk nagybetűk A, B, ...

Remélhetőleg ezek a formai megoldások megnövelik az anyag áttekinthetőségét.

Ezen a helyen szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik kritikai észrevételeikkel és megjegyzéseikkel segítettek kijavítani a könyv korábbi kiadásaiban található hibákat. Mindenekelőtt Lee Annának, a könyv korábbi lektorának szeretném megköszönni gondos munkáját és értékes észrevételeit, amelyekkel sokat segített a könyv szerkezetének javításában és számos következetlenség kiküszöbölésében. Köszönet illeti volt tanítványaimat, akik 40 év alatt aktív jelenlétükkel, az előadásra való reagálásukkal segítettek az anyag didaktikai felépítésének formálásában – nem is beszélve arról a segítségről, amelyet a konkrét hibák összegyűjtésével nyújtottak. Nagy segítségemre volt Stubnya Gusztávné, elsősorban a példák kiválasztásával és megoldásukkal. Külön köszönet illeti Erő Zsuzsát az anyag gondos nyomdai előkészítéséért, dr. Tegze Juditot az ábrák precíz elkészítéséért, Oláh Juditot, aki az előző kiadáshoz hasonlóan elvállalta a könyv szerkesztését és számos hasznos tanácsával hozzájárult az egységes szerkezet kialakításához. Végül köszönetemet fejezem ki a Typotex Könyvkiadó valamennyi munkatársának, elsősorban Votisky Zsuzsának, lelkiismeretes munkájukért és támogatásukért, amellyel lehetővé tették a könyv megjelenését.