Besenyei–Komornik–Simon

Parciális differenciálegyenletek

Besenyei Ádám
Komornik Vilmos
Simon László

Parciális differenciálegyenletek

Második, átdolgozott
és bővített kiadás

TYPOTEX

© Besenyei Ádám, Komornik Vilmos, Simon László, Typotex, Budapest, 2019, 2025

Ez a mű a Creative Commons 4.0 Magyarország CC-BY-NC-ND-4.0 licenc feltételeinek megfelelően felhasználható.

A könyv első kiadása a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú, *Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához* című projekt keretében készült.

Szerkesztette: Besenyei Ádám

Lektorálta: Horváth Miklós

ISBN 978 963 493 351 9

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról, akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Balázs Péter
Tördelés: Komornik Vilmos
A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalomjegyzék

Előszó **11**

I. Fejezetek a klasszikus analízisből **13**

1. Topológia $\mathbb{R}^n$-ben **15**
1.1. Hosszúság és távolság 15
1.2. Téglák és gömbök 19
1.3. Nyílt és zárt halmazok 20
1.4. Összefüggőség 22
1.5. Kompakt halmazok 24

2. Lebesgue-integrál **29**
2.1. L^p terek és alaptulajdonságaik 29
2.2. Konvergenciatételek 31
2.3. Fubini-tétel és integráltranszformáció 32
2.4. Paraméteres integrálok 34

3. A $C_0^\infty(\Omega)$ függvénytér **37**
3.1. Folytonosan differenciálható függvények és multiindexek . . 37
3.2. Folytonos függvények tartója 40
3.3. Egységapproximáció 42
3.4. Az egységapproximáció alkalmazásai 44
3.5. Az egységosztás tétele 51

4. A divergenciatétel **53**
4.1. Tartomány peremének simasága 53
4.2. Skalármező felszíni integrálja 59
4.3. Vektormező felületi integrálja 65
4.4. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel 66
4.5. Gradiens, divergencia, rotáció 68

II. Másodrendű lineáris egyenletek 75

5. Parciális differenciálegyenletek alapfogalmai, példák 77
5.1. „PDE" és mellékfeltétel . . . 77
5.1.1. A változás egyenletei . . . 77
5.1.2. Parciális differenciálegyenlet fogalma . . . 78
5.1.3. Parciális differenciálegyenletek főbb típusai . . . 79
5.1.4. Mellékfeltételek, korrekt kitűzésű feladatok . . . 80
5.2. Néhány elemi megoldási módszer . . . 82
5.2.1. Integrálható egyenletek . . . 83
5.2.2. Visszavezetés közönséges differenciálegyenletre . . . 84
5.2.3. Új változók bevezetése . . . 85
5.2.4. Elsőrendű lineáris egyenletek . . . 90
5.2.5. A változók szétválasztása . . . 96
5.3. Feladatok . . . 99

6. A matematikai fizika néhány parciális differenciálegyenlete 103
6.1. „Kimúlt mennyiségek kísértetei" . . . 103
6.2. A hővezetés matematikai leírása . . . 105
6.2.1. Fourier törvénye . . . 105
6.2.2. Hővezetés egy dimenzióban . . . 108
6.2.3. Hővezetés két és magasabb dimenzióban . . . 112
6.2.4. Stacionárius hővezetés . . . 116
6.2.5. A hővezetési egyenlet Einstein-féle levezetése . . . 118
6.3. A hullámmozgás matematikai leírása . . . 120
6.3.1. Az egydimenziós hullámegyenlet . . . 120
6.3.2. Hullámegyenlet két és magasabb dimenzióban . . . 125
6.4. Egyenletek kavalkádja . . . 128
6.4.1. Lineáris egyenletek . . . 128
6.4.2. Nemlineáris egyenletek . . . 131
6.4.3. Egyenletrendszerek . . . 133
6.5. Feladatok . . . 136

7. Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja 143
7.1. Az egyenletek osztályozása . . . 143
7.2. Az egyenletek kanonikus alakja . . . 148
7.2.1. Főrészükben lineáris egyenletek . . . 149
7.2.2. Állandó együtthatós lineáris egyenletek . . . 156
7.3. Feladatok . . . 162

8. A Laplace- és a Poisson-egyenlet 167
8.1. Előkészületek . . . 167
8.1.1. Fizikai háttér . . . 168

8.1.2. Green-formulák 170
8.2. Speciális megoldások 173
8.2.1. Radiális megoldások 173
8.2.2. Alapmegoldás és Newton-potenciál 177
8.3. Klasszikus peremérték-feladatok 182
8.3.1. A klasszikus feladatok kitűzése 183
8.3.2. A megoldás egyértelműsége 185
8.3.3. Dirichlet-elv 188
8.4. Klasszikus sajátérték-feladatok 193
8.4.1. A klasszikus sajátérték-feladatok kitűzése 194
8.4.2. Sajátértékek és a változók szétválasztása 195
8.4.3. Fourier-módszer 201
8.5. Harmonikus függvények 205
8.5.1. Maximum- és minimumelvek 206
8.5.2. A Dirichlet-feladat megoldásának egyértelműsége . . . 212
8.5.3. Harmonikus függvények középérték-tulajdonsága . . . 214
8.5.4. Kapcsolat a komplex differenciálhatósággal 218
8.6. Green-függvény 220
8.6.1. Green harmadik formulája 220
8.6.2. A Green-függvény értelmezése és tulajdonságai 223
8.6.3. Poisson-formula gömbön 227
8.6.4. További példák Green-függvényekre 236
8.7. Feladatok 239

9. A hővezetési egyenlet **249**
9.1. Fizikai motiváció 249
9.2. Speciális megoldások 250
9.2.1. Hasonlósági megoldások 251
9.2.2. Alapmegoldás 254
9.3. Cauchy-feladatok 256
9.3.1. A klasszikus Cauchy-feladatok kitűzése 256
9.3.2. A homogén egyenlet megoldása 257
9.3.3. Duhamel-elv és az inhomogén egyenlet 262
9.3.4. A megoldás egyértelműsége 266
9.3.5. Tyihonov példája 272
9.4. Vegyes feladatok 275
9.4.1. Maximum- és minimumelvek 276
9.4.2. A megoldás egyértelműsége 280
9.4.3. Fourier-módszer 284
9.5. Feladatok 291

10. A hullámegyenlet. Állandó együtthatós hiperbolikus egyenlet 295
10.1. Fizikai motiváció 295
10.2. Az egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat 296
10.2.1. A klasszikus Cauchy-feladat kitűzése 296
10.2.2. A homogén egyenlet megoldása 297
10.2.3. Az inhomogén egyenlet megoldása 299
10.3. Vegyes feladatok 301
10.3.1. Egyértelműség 302
10.3.2. Fourier-módszer 306
10.4. Feladatok 312

III. Disztribúcióelmélet 315

11. Disztribúcióelmélet 317
11.1. Motiváció 317
11.2. A disztribúció fogalma, példák 321
11.2.1. A disztribúció fogalma 321
11.2.2. Példák 323
11.3. Algebrai műveletek, disztribúció tartója 326
11.3.1. Algebrai műveletek 326
11.3.2. Disztribúció tartója 327
11.4. Disztribúció deriváltja 329
11.5. Disztribúciók direkt szorzata 336
11.5.1. A direkt szorzat definíciója 337
11.5.2. Műveleti tulajdonságok 340
11.6. Disztribúciók konvolúciója 341
11.6.1. Függvények konvolúciója 342
11.6.2. Disztribúciók konvolúciója: definíció, példák 344
11.6.3. Műveleti tulajdonságok 349
11.7. Alapmegoldások 352
11.7.1. Példák alapmegoldásra 353
11.8. Feladatok 361

12. Általánosított Cauchy-feladatok hiperbolikus egyenletekre 369
12.1. Az általánosított Cauchy-feladat 370
12.2. A klasszikus Cauchy-feladat 374
12.3. Feladatok 379

13. Általánosított Cauchy-feladatok parabolikus egyenletekre 381
13.1. Az általánosított Cauchy-feladat 381
13.2. A klasszikus Cauchy-feladat 385

13.3. Feladatok 388

14. Fourier-sorok és Fourier-transzformált **389**
14.1. Szemelvények a Fourier-sorok klasszikus elméletéből 389
14.2. Periodikus disztribúciók Fourier-sorai 394
14.3. Tesztfüggvények Fourier-transzformáltja 397
14.4. Temperált disztribúciók Fourier-transzformáltja 402
14.5. A Fourier-transzformált alkalmazásai 406
14.6. Feladatok 408

IV. Szoboljev-terek **409**

15. Szoboljev-terek **411**
15.1. A $H^1(\mathbb{R}^N)$ tér 412
15.2. A $H^1(\Omega)$ terek 417
15.3. A $H_0^1(\Omega)$ tér 424
15.4. A $H^2(\Omega)$ tér 426
15.5. Magasabb rendű Szoboljev-terek 428
15.6. Duális Szoboljev-terek 429
15.7. Feladatok 433

16. Elliptikus problémák **437**
16.1. Dirichlet-feladat I 437
16.2. Dirichlet-feladat II 439
16.3. Neumann-feladat I 441
16.4. Neumann-feladat II 443
16.5. Vegyes peremfeltételű feladatok 444
16.6. Egy negyedrendű probléma 447
16.7. A Laplace-operátor spektráltétele 449
16.8. Feladatok 455

17. Evolúciós problémák **457**
17.1. Hővezetési egyenlet 457
17.2. Hullámegyenlet 462
17.3. Feladatok 468

18. Útmutatások, megoldások **471**
18.1. Az 5. fejezetbeli feladatok megoldásai 471
18.2. A 6. fejezetbeli feladatok megoldásai 490
18.3. A 7. fejezetbeli feladatok megoldásai 507
18.4. A 8. fejezetbeli feladatok megoldásai 528
18.5. A 9. fejezetbeli feladatok megoldásai 576

18.6. A 10. fejezetbeli feladatok megoldásai 587
18.7. A 11. fejezetbeli feladatok megoldásai 604
18.8. A 12. fejezetbeli feladatok megoldásai 636
18.9. A 13. fejezetbeli feladatok megoldásai 641
18.10. A 14. fejezetbeli feladatok megoldásai 645
18.11. A 15. fejezetbeli feladatok megoldásai 646
18.12. A 16. fejezetbeli feladatok megoldásai 654
18.13. A 17. fejezetbeli feladatok megoldásai 658

Idézetek forrásai **661**

Ábrák jegyzéke **667**

Irodalomjegyzék **671**

Tárgymutató **687**

Névmutató **693**

Jelölések **699**

Előszó

A filozófia meg van írva ebben a nagy-nagy könyvben, amely állandóan nyitva áll szemünk előtt (vagyis a világmindenségben), de nem érthetjük, ha nem tanultuk meg azt a nyelvet, nem ismerjük azokat a betűket, amelyeken írva vagyon. A könyv matematikai nyelven vagyon megírva, s betűi háromszögek, körök és más geometriai alakok, amely eszközök nélkül emberileg lehetetlen megérteni a szavát; nélkülük csak hiábavalóan bolyongunk egy sötét labirintusban.

Galileo Galilei (1564–1642)

Meggyőződésem szerint tisztán matematikai konstrukciók által megtalálhatjuk mindazokat a fogalmakat és törvényszerű kapcsolatokat, amelyek a természeti jelenségek megértésének kulcsául szolgálnak.

Albert Einstein (1879–1955)

Az a csoda, hogy a matematika nyelve alkalmas a fizika törvényeinek a megfogalmazására, csodálatos ajándék, amelyet nem értünk és nem is érdemlünk meg.

Wigner Jenő (1902–1995)

Ez a jegyzet a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú, *Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához* című projekt keretében a Typotex Kiadó gondozásában 2014-ben azonos címmel készült oktatási segédanyag átdolgozott és bővített kiadása. Az alapját Simon Lászlónak az Eötvös Loránd Tudományegyetemen több mint 40 éven át matematikus hallgatók generációi számára tartott előadásai képezik. Ezeket az előadásokat hallgatta Komornik Vilmos az 1970-es évek közepén, Besenyei Ádám pedig a 2000-es évek elején. Az előadások anyaga 1983-ban könyv formájában is megjelent

Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek címmel. A 2000-es években a felsőoktatásban végbemenő változások folyamán a parciális differenciálegyenletek oktatása átalakult: egyrészt csökkent az óraszáma, másrészt a tárgy nemcsak a matematikus hallgatók képzésének része, hanem az alkalmazott matematikus, illetve elemző szakirányos hallgatók számára is kötelező, vagy kötelezően választható lett. A parciális differenciálegyenletek különböző szinteken való oktatása szükségessé tette az 1983-ban kiadott könyv jelentős átdolgozását. Célul tűztük ki, hogy a jelen jegyzet minél szélesebb kör számára hasznos segédanyag legyen, a műszaki egyetemek mérnökhallgatóitól kezdve a tudományegyetemek matematikus és fizikus hallgatóságáig. Jegyzetünk ezért több különálló részből épül fel:

- az első részben a fizika három alapegyenletének elemi tárgyalása szerepel, számos kidolgozott példával, amely a kevesebb előismerettel rendelkező hallgatók számára nyújt segítséget;
- a második részben a disztribúcióelmélet alapjait tárgyaljuk és alkalmazzuk az egyenletekhez kapcsolódó problémák megoldására;
- a harmadik részben a Szoboljev-terek elméletét, továbbá az elliptikus és az időfüggő feladatok Szoboljev-térbeli megoldhatóságának kérdéseit tárgyaljuk.

A jegyzet megírása során felhasználtuk Komornik Vilmosnak a Strasbourgi Egyetemen több mint két évtizede évről évre tartott előadásainak tapasztalatait. A jegyzetben számos feladat található, amelyek főleg a Simon László előadásaihoz kapcsolódó gyakorlatok anyagát ölelik fel.

A fenti előszót szerzőtársaim: Besenyei Ádám (1982–2022) és Simon László (1940–2021) írták. Fájdalmas kötelességemnek tettem eleget, amikor barátaim és munkatársaim váratlan elhunyta után egyedül kellett befejeznem az új kiadás szerkesztését. Ebben nélkülözhetetlen segítségemre volt Takács Bálint adjunktus a BME Differenciálegyenletek Tanszékéről. Értékes közreműködését ezúttal is köszönöm. Szintén nagyon köszönöm Lóczi Lajos adjunktus (BME) számos korrekcióját, Fried Katalin docens (ELTE) segítségét a szövegszerkesztési problémák megoldásában, és a Typotex Kiadó munkatársainak a nagyon alapos korrektúrát.

Jegyzetünkben – minden igyekezetünk ellenére – bizonyára jó néhány elírás maradt, ezek jelzését köszönettel veszem a `komornik@math.unistra.fr` címen.

Strasbourg, 2025. szeptember 12.

Komornik Vilmos

I. rész

Fejezetek a klasszikus analízisből

1. fejezet

Topológia $\mathbb{R}^n$-ben

A matematika művészete, hogy különböző dolgoknak ugyanazt a nevet adjuk.

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

A fejezet tartalma. Röviden emlékeztetünk néhány topológiai alapfogalomra és állításra, amelyekre a későbbiekben támaszkodni fogunk.

A parciális differenciálegyenletek tanulmányozásához elengedhetetlen a topológia alapfogalmainak és néhány egyszerű eredményének ismerete. Az alábbiakban ezeket foglaljuk össze röviden. Részletes bevezetés található például a [95] könyvben és a [189] jegyzetben.

1.1. Hosszúság és távolság

1.1. Jelölés. A továbbiakban $\mathbb{R}$ jelöli a valós számok, $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok, $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valós számok és $\mathbb{R}^-$ a negatív valós számok halmazát. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $|x|$ az x szám abszolút értéke.

Az $\mathbb{R}$ halmaz önmagával vett n-szeres Descartes-szorzatát a szokásos módon $\mathbb{R}^n$ jelöli, tehát

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\, j = 1, \dots, n\}\,.$$

Az $\mathbb{R}^n$ tér elemeire gondolhatunk pontokként vagy (az adott pontba mutató hely)vektorokként is, és általában $x \in \mathbb{R}^n$ esetén x_j jelöli az x vektor (vagy pont) j-edik koordinátáját. Ha nem okoz félreértést, akkor a $(0, 0, \dots, 0)$ vektort (az origó helyvektorát) az egyszerűség kedvéért 0-val fogjuk jelölni.

Legyen továbbá

$$\mathbb{R}_+^{n+1} := \left\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\right\},$$

amely egy nyílt féltér, és annak határoló hipersíkja pedig

$$\mathbb{R}_0^{n+1} := \mathbb{R}^n \times \{0\} = \{(x_1, \dots, x_n, 0) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, n\}.$$

Noha a szövegközben kényelmesebb $(x_1, \dots, x_n)$ jelölés nem ezt sugallja, de szinte kivétel nélkül oszlopvektorokként tekintünk $\mathbb{R}^n$ elemeire. Ha bármikor mégsem így lenne, azt külön jelezzük.

Az $\mathbb{R}^n$ teret a szokásos euklideszi skalárszorzattal és az ebből származó normával látjuk el.

1.2. Definíció. Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

- az x és y vektorok *skalárszorzata*:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j;$$

- az x vektor *hossza* (vagy *abszolút értéke*):

$$|x| := \sqrt{\langle x, y \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2};$$

- az x és y pontok *távolsága*:

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

(Ha nem okoz félreértést, akkor a skalárszorzatra a tömörebb írásmód kedvéért gyakran a „$\cdot$” jelölést fogjuk használni.)

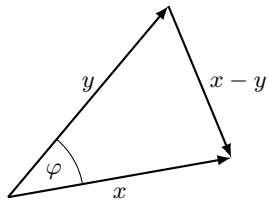
1.3. *Megjegyzés.* A vektorhossz definíciója alapján az $x, y \in \mathbb{R}^n$ pontok távolságának négyzetét a következő módon is kifejthetjük:

$$|x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2. \tag{1.1}$$

Geometriából jól ismert, hogy derékszögű koordináta-rendszerben

$$\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \varphi,$$

ahol φ az x és y vektorok által közbezárt szög, így az (1.1) azonosság valójában nem más, mint a háromszögek koszinusztétele (lásd az 1.1. ábrát).



1.1. ábra. Koszinusztétel

A skalárszorzatra vonatkozóan alapvető fontosságú elemi egyenlőtlenség a következő.

1.4. Tétel (Cauchy)**.** *Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$|\langle x, y\rangle| \le |x| \cdot |y|\,,$$

más szóval bármely $x_1, \dots, x_n$ és $y_1, \dots, y_n$ valós szám n-esekre

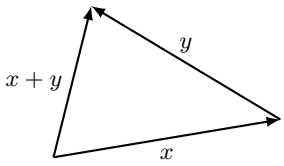
$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}. \tag{1.2}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az x, y vektorok párhuzamosak (beleértve azt az elfajult esetet, amikor valamelyik nullvektor), pontosabban létezik olyan t valós szám, hogy $x = ty$ vagy $y = tx$.

1.5. *Történeti megjegyzés.* A szám n-esekre vonatkozó (1.2) egyenlőtlenséget Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) francia matematikus igazolta 1821-ben a híres École Polytechnique műszaki egyetemen tartott analíziskurzusához írt könyvében. A mű a modern analízis kialakulásának fontos mérföldköve, amelyben Cauchy számos mai fogalom, köztük például a határérték, folytonosság alapjait fektette le. Több mint három évtizeddel később, 1859-ben Viktor Jakovlevics Bunyakovszkij (1804–1889) orosz matematikus az egyenlőtlenségnek integrálható függvényekre vonatkozó változatát írta fel (ezzel kapcsolatban lásd a 2.6. Állítást):

$$\left(\int_a^b |g(x)h(x)|\,dx\right)^2 \le \int_a^b g^2(x)\,dx \cdot \int_a^b h^2(x)\,dx.$$

Bunyakovszkij cikke kevéssé vált ismertté az akkori Nyugat-Európában, így az eredményről nem tudván Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) német matematikus 1885-ben hasonló egyenlőtlenséget igazolt felszíni integrálokról szóló munkájában. A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség számtalan más egyenlőtlenséggel áll szoros kapcsolatban, erről a [182] könyvben lehet olvasni.



1.2. ábra. Háromszög-egyenlőtlenség

Becslések során igen gyakran fogjuk használni a következő egyenlőtlenséget.

1.6. Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)**.** *Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,,$$

más szóval bármely $x_1, \ldots, x_n$ és $y_1, \ldots, y_n$ valós szám n-esekre

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az x, y vektorok egyirányúak (beleértve azt az elfajult esetet, amikor valamelyik nullvektor), pontosabban létezik olyan $t \geq 0$ valós szám, hogy $x = ty$ vagy $y = tx$.

1.7. *Megjegyzés.* A háromszög-egyenlőség elnevezés abból ered, hogy az x, y és $x + y$ vektorok által meghatározott háromszögben az $x + y$ oldal hossza legfeljebb akkora, mint a másik két oldal hosszának összege (lásd az 1.2. ábrát). A háromszög-egyenlőtlenség egy másik, ugyancsak sűrűn alkalmazott (ekvivalens) alakja az alábbi:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|\,.$$

1.8. *Történeti megjegyzés.* A háromszög-egyenlőtlenség speciális esete a $p \geq 1$ esetén fennálló

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

Minkowski-egyenlőtlenségnek, amelyet Hermann Minkowski (1864–1909) német matematikus 1896-ban igazolt geometriai vizsgálódásai során.

1.2. Téglák és gömbök

A valós számegyenes korlátos intervallumainak magasabb dimenziós megfelelői a téglák (lásd az 1.3. (a) ábrát).

1.9. Definíció. Ha $a_j < b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ valós számok, akkor az

$$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$$

halmazt *nyílt téglának*, az

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

halmazt pedig *zárt téglának* hívjuk.

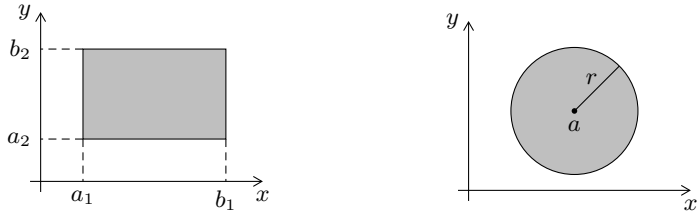
A téglák mellett lényeges szerepet töltenek be $\mathbb{R}^n$-ben a gömbök (lásd az 1.3. (b) ábrát).

1.10. Definíció. Adott $a \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$ esetén $B(a, r)$ jelöli az a középpontú, r sugarú *nyílt gömböt*, $\overline{B(a, r)}$ az a középpontú, r sugarú *zárt gömböt*, valamint $S(a, r)$ a $B(a, r)$ gömb felületét, vagyis

$$\begin{aligned} B(a, r) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}, \\ \overline{B(a, r)} &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}, \\ S(a, r) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}. \end{aligned}$$

1.11. *Megjegyzés.* Könnyű látni, hogy bármely gömbbe írható tégla (azaz a tégla részhalmaza a gömbnek), és le is fedhető téglával (azaz van olyan tégla, amelynek része). Hasonlóan, bármely téglába írható gömb, és le is fedhető gömbbel.

A gömbök segítségével (de az iménti megjegyzés alapján akár téglákkal is) értelmezhetjük a korlátosság fogalmát.



(a) Kétdimenziós tégla (b) Kétdimenziós gömb

1.3. ábra. Tégla és gömb

1.12. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *korlátos*, ha létezik $r > 0$ szám úgy, hogy $H \subset B(0, r)$, azaz a halmaz belefoglalható egy origó középpontú nyílt gömbbe.

1.13. *Megjegyzés.* Valójában a korlátosság előbbi definíciójában nem szükséges megkövetelni, hogy a szóban forgó gömb középpontja az origó legyen, ugyanis ha egy halmaz belefoglalható valamilyen, nem feltétlenül origó középpontú nyílt gömbbe, akkor egy origó középpontúba is. Az is világos, hogy a nyíltság feltételezése sem lényeges.

A téglák és a gömbök mellett meghatározó szerep jut a szakaszoknak és a töröttvonalaknak.

1.14. Definíció. Ha $u, v \in \mathbb{R}^n$, akkor az u és v pontokat összekötő *szakasz*:

$$[u, v] := \{u + t(v - u) : t \in [0, 1]\}.$$

Véges sok egymáshoz csatlakozó szakasz

$$[u_1, u_2] \cup [u_2, u_3] \cup \ldots \cup [u_k, u_{k+1}]$$

unióját *töröttvonalnak* nevezzük.

1.3. Nyílt és zárt halmazok

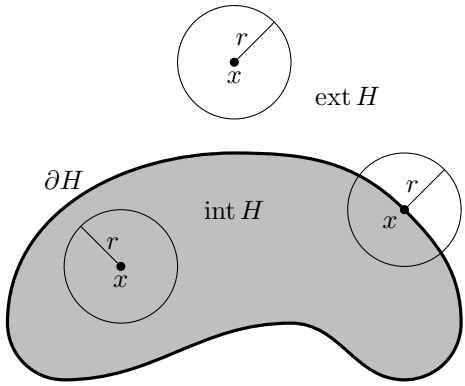
A gömbökre támaszkodva pont és halmaz különféle kapcsolatait írhatjuk le. Kezdjük a környezet fogalmával.

1.15. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^n$ pont egy *környezetén* olyan halmazt értünk, amely tartalmaz x középpontú nyílt gömböt, azaz V környezete x-nek, ha létezik $r > 0$, hogy $B(x, r) \subset V$.

Adott $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz esetén az $\mathbb{R}^n$ tér pontjait három osztályba sorolhatjuk attól függően, hogy környezete-e H vagy $\mathbb{R}^n \setminus H$, vagy pedig egyik sem.

1.16. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor (lásd az 1.4. ábrát)

- az $x \in \mathbb{R}^n$ pont a H-nak *belső pontja*, ha létezik $r > 0$ úgy, hogy $B(x, r) \subset H$;
- az $x \in \mathbb{R}^n$ pont a H-nak *külső pontja*, ha létezik $r > 0$ úgy, hogy $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus H$;
- az $x \in \mathbb{R}^n$ pont a H-nak *határpontja*, ha bármely $r > 0$ esetén teljesül, hogy $B(x, r) \cap H \neq \emptyset$ és $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus H) \neq \emptyset$.



1.4. ábra. Halmaz belső, külső és határpontja

A belső, külső és határpontok segítségével nyerjük egy halmaz belsejét, külsejét, határát, valamint lezártját.

1.17. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz belseje, külseje és határa rendre

$$\begin{aligned} \operatorname{int} H &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ belső pontja } H\text{-nak}\}, \\ \operatorname{ext} H &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ külső pontja } H\text{-nak}\}, \\ \partial H &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ határpontja } H\text{-nak}\}. \end{aligned}$$

A H *lezártja* pedig $\overline{H} := \operatorname{int} H \cup \partial H$.

1.18. *Megjegyzés.* A definícióból világosan látható, hogy egy halmaz belseje, határa és külseje páronként diszjunktak, és uniójuk kiadja az $\mathbb{R}^n$ teret. Szintén könnyen adódik, hogy H külseje megegyezik $\mathbb{R}^n \setminus H$ belsejével, valamint H és $\mathbb{R}^n \setminus H$ határa ugyanaz.

A belső pont fogalmának segítségével egy alapvetően fontos tulajdonság, a nyíltság is bevezethető.

1.19. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *nyíltnak* nevezünk, ha minden pontja belső pont, más szóval bármely $x \in H$ esetén létezik $r > 0$ szám úgy, hogy $B(x, r) \subset H$. Egy halmaz *zárt*, ha $\mathbb{R}^n \setminus H$ nyílt.

1.20. *Megjegyzés.* A definíció alapján könnyedén meggondolható, hogy egy H halmaz pontosan akkor zárt, ha $\partial H \subset H$, azaz H tartalmazza a határpontjait. A zártság egy további ekvivalens átfogalmazása, hogy $\overline{H} = H$, vagyis H megegyezik a lezártjával.

1.21. *Történeti megjegyzés.* A nyílt halmaz elnevezés az iménti definíció értelmében 1899-ben René-Louis Baire (1874–1932) francia matematikus doktori

értekezésében jelent meg először. Ugyanebben a dolgozatában igazolta az ő nevét viselő Baire-féle kategóriatételt. A zárt halmaz fogalmát másfél évtizeddel korábban Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) német matematikus vezette be sorozatok segítségével.

1.22. Példa. Nyilvánvaló, hogy az üres halmaz és $\mathbb{R}^n$ egyszerre nyílt és zárt halmazok. Megmutatható, hogy e két speciális halmazon kívül nincs olyan halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, amely nyílt és zárt is egyben (ez az $\mathbb{R}^n$ tér összefüggőségén múlik, lásd az 1.28. Állítást). Könnyen látható, hogy a nyílt gömbök és nyílt téglák valóban nyíltak, a zárt téglák és zárt gömbök pedig zártak az előbbi definíció értelmében. Végül érdemes felhívni a figyelmet, hogy „egy halmaz nem ajtó": lehet se nem nyílt, se nem zárt, mint például az $[a_1, b_1) \times \ldots \times \times [a_n, b_n)$ alakú téglák.

Közvetlenül a nyílt és zárt halmazok definíciójából nem nehéz igazolni e két tulajdonságnak a metszet és unió halmazműveletekkel való kapcsolatát.

1.23. Állítás. *Akárhány nyílt halmaz uniója nyílt, véges sok nyílt halmaz metszete nyílt. Akárhány zárt halmaz metszete zárt, véges sok zárt halmaz uniója zárt.*

Nem nehéz igazolni a következő állítást.

1.24. Állítás. *Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz esetén* $\operatorname{int} H$ *és* $\operatorname{ext} H$ *nyílt halmazok, továbbá ∂H és $\overline{H}$ zárt halmazok.*

Ha nem $\mathbb{R}^n$ az alaphalmazunk, hanem annak egy Ω részhalmaza, akkor értelmezhetjük relatív nyílt és relatív zárt halmazok fogalmát.

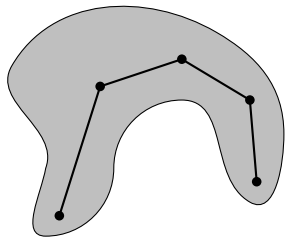
1.25. Definíció. Legyen $H \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a H halmaz *relatív nyílt* Ω-ban, ha létezik $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, amelyre $H = \Omega \cap U$. A H halmazt *relatív zártnak* nevezzük, ha van olyan $V \subset \mathbb{R}^n$ zárt halmaz, amelyre $H = \Omega \cap V$.

1.26. *Megjegyzés.* A definícióból következően $H \subset \Omega$ pontosan akkor relatív zárt Ω-ban, ha $\Omega \setminus H$ relatív nyílt Ω-ban, hiszen $V = \mathbb{R}^n \setminus U$ egymásnak megfeleltethető választás.

1.4. Összefüggőség

Parciális differenciálegyenletek tanulmányozása kapcsán célszerű bevezetni a tartomány fogalmát, ehhez először az összefüggőség fogalmát definiáljuk.

1.27. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *összefüggő*, ha tetszőleges $U, V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok esetén teljesül, hogy ha $H \cap U$ és $H \cap V$ diszjunktak és uniójuk a H, akkor $H \cap U = \emptyset$ vagy $H \cap V = \emptyset$. Más szóval H nem áll elő két diszjunkt, nem üres, relatív nyílt halmaz uniójaként.



1.5. ábra. Összefüggő nyílt halmaz

Az összefüggőség egy ekvivalens megfogalmazását adhatjuk relatív nyílt-zárt halmazok segítségével.

1.28. Állítás. *Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz pontosan akkor összefüggő, ha bármely $G \subset H$ halmazra igaz, hogy ha G egyszerre relatív nyílt és relatív zárt H-ban, akkor $G = \emptyset$ vagy $G = H$.*

Bizonyítás. Egy relatív zárt halmaz komplementere relatív nyílt, így bármely $G \subset H$ részhalmaz pontosan akkor relatív nyílt és relatív zárt is egyszerre, ha G és $H \setminus G$ két diszjunkt relatív nyílt halmaz, amelyek uniója H. Következésképpen H pontosan akkor áll elő két diszjunkt, nem üres, relatív nyílt halmaz uniójaként, ha H-nak van olyan nem üres és nem a H-val megegyező részhalmaza, amely egyszerre relatív nyílt és relatív zárt is H-ban. □

1.29. *Megjegyzés.* Belátható, hogy $\mathbb{R}^n$-ben nyílt halmazokra az összefüggőség ekvivalens az *útszerű összefüggőséggel*, vagyis bármely két pontja összeköthető a halmazban haladó folytonos görbével, sőt, valójában töröttvonallal is (lásd az 1.5. ábrát), ez utóbbi tulajdonság a *töröttvonalszerű összefüggőség.*

A nyíltság feltétele azonban nem hagyható el, ugyanis például az 1.6. ábrán látható

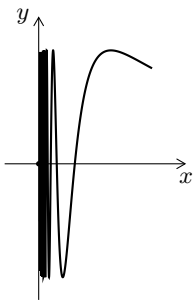
$$H = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

halmaz („a topológus szinuszgörbéje") összefüggő, ám nem útszerűen összefüggő, mert a $(0, 0)$ pont a halmaz semelyik másik pontjával nem köthető össze a halmazban haladó folytonos görbével.

Mint ahogyan az iménti megjegyzésből is kitűnik, az összefüggő nyílt halmazok fontos tulajdonsággal bírnak, ezért ezeket szokás külön névvel is illetni.

1.30. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *tartománynak* nevezünk, ha nem üres, nyílt és összefüggő.

1.31. *Megjegyzés.* Az összefüggőség kapcsán érdemes még röviden szót ejteni az *összefüggőségi komponens* fogalmáról, amely maximális összefüggő rész-



1.6. ábra. A topológus szinuszgörbéje

halmazt jelent. Egy $G \subset H$ részhalmaz maximális összefüggő, ha nem létezik H-ban olyan összefüggő részhalmaz, amely tartalmazza G-t és szigorúan bővebb G-nél; pontosabban, ha bármely, a G halmazt tartalmazó $\tilde{G} \subset H$ összefüggő részhalmaz esetén szükségképpen $\tilde{G} = G$. Nyilvánvaló, hogy egy összefüggő halmaz egyetlen maximális összefüggő részhalmaza önmaga. Belátható, hogy általában az összefüggőségi komponensek az adott halmaz egy partícióját alkotják, azaz a komponensek diszjunktak, és uniójuk kiadja a halmazt. Például $\mathbb{R}$-en a racionális számok halmazának összefüggőségi komponensei az egyes racionális számokból álló egyelemű halmazok.

1.5. Kompakt halmazok

A későbbiekben folytonos függvényekkel kapcsolatban fontos szerephez jutnak a kompakt halmazok.

1.32. Definíció. A $K \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *kompaktnak* nevezzük, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges nyílt fedés, azaz $K \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ esetén, ahol I tetszőleges indexhalmaz és $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ minden $\alpha \in I$ esetén nyílt, létezik véges sok $\alpha_j \in I$ $(j = 1, \dots, k)$, amelyekre $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{\alpha_j}$.

Igazolható, hogy $\mathbb{R}^n$-ben a kompaktság ekvivalens két könnyen ellenőrizhető tulajdonság meglétével.

1.33. Tétel. *A $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Kompakt halmazokkal kapcsolatban szükségünk lesz néhány egyszerűen igazolható állításra. Először emlékeztetünk halmazok távolságának fogalmára.

1.34. Definíció. Legyenek $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^n$ nem üres halmazok. Ekkor a két halmaz *távolsága*

$$\operatorname{dist}(H_1, H_2) := \inf\{|x - y| : x \in H_1, y \in H_2\}.$$

Amennyiben a két halmaz valamelyike egyelemű, például $H_1 = \{x_0\}$, akkor $\operatorname{dist}(H_1, H_2)$ az x_0 pont és a H_2 halmaz távolsága, és ekkor az egyszerűség kedvéért a $\operatorname{dist}(x_0, H_2)$ jelölést használjuk. Ha $H_2 = \{y_0\}$ is teljesül, akkor $\operatorname{dist}(H_1, H_2) = \operatorname{dist}(x_0, y_0) = |x_0 - y_0|$.

A definíció formálisan értelmes akkor is, ha a H_1, H_2 halmazok egyike vagy mindkettő üres: ilyenkor $\operatorname{dist}(H_1, H_2) = \inf \emptyset = +\infty$.

A következő állítás elégséges feltételt ad arra nézve, hogy két halmaz távolsága pozitív legyen.

1.35. Állítás. *Legyenek $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ nem üres diszjunkt halmazok, amelyek közül az egyik kompakt, a másik pedig zárt. Ekkor* $\operatorname{dist}(K_1, K_2) > 0$*, sőt, a távolság fel is vétetik valamely pontok között, azaz találhatóak olyan $x_1 \in K_1$ és $x_2 \in K_2$ pontok, amelyekre $|x_1 - x_2| = \operatorname{dist}(K_1, K_2)$.*

1.36. *Megjegyzés.* Az előbbi állításban a kompaktság feltétele általában nem hagyható el, ugyanis két nem üres, diszjunkt, zárt halmaz távolsága lehet nulla. Tekintsük például a síkon a

$$K_1 = \{(x, y) : y \leq 0\} \quad \text{és} \quad K_2 = \{(x, y) : y \geq 1/x > 0\}$$

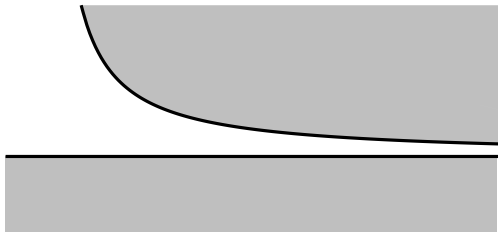
nem korlátos halmazokat (lásd az 1.7. ábrát), amelyek zártak, és könnyen láthatóan $\operatorname{dist}(K_1, K_2) = 0$.

Célszerű bevezetni a halmaz átmérőjének fogalmát is.

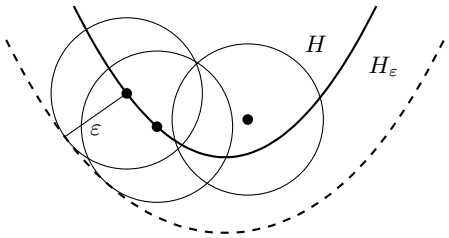
1.37. Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, korlátos halmaz. Ekkor a K halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam} K := \sup\{|x - y| : x, y \in K\}.$$

Az üreshalmaz átmérőjét nullának definiáljuk. (Definiálhatnánk a $\sup \emptyset = -\infty$ egyenlőség alapján $-\infty$-nek is: a könyvbeli alkalmazásokban mindkét definíció azonos eredményekhez vezet.)



1.7. ábra. Nulla távolságú diszjunkt zárt halmazok



1.8. ábra. A H halmaz ε sugarú környezete

1.38. Állítás. *Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, akkor* $\operatorname{diam} K < \infty$. *Amennyiben K nem üres, kompakt halmaz, akkor léteznek $x_0, y_0 \in K$ pontok úgy, hogy* $\operatorname{diam} K = \operatorname{dist}(x_0, y_0)$.

A távolság segítségével halmazok adott sugarú környezeteit is értelmezhetjük.

1.39. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ nem üres halmaz és $\varepsilon > 0$ szám. Ekkor a H halmaz ε *sugarú környezete*

$$H_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, H) < \varepsilon\}.$$

1.40. *Megjegyzés.* A definíció alapján meggondolható, hogy

$$H_\varepsilon = \bigcup_{x \in H} B(x, \varepsilon).$$

Ennek szemléltetése látható az 1.8. ábrán.

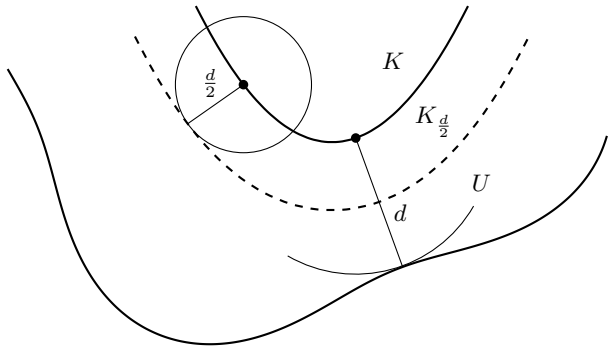
1.41. Állítás. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, korlátos halmaz és $\varepsilon > 0$ szám. Ekkor H_ε korlátos, nyílt halmaz, amelynek lezártja*

$$\overline{H_\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, H) \leq \varepsilon\}.$$

A későbbiekben használni fogjuk az alábbi állítást.

1.42. Állítás. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és K kompakt halmaz úgy, hogy $K \subset U$. Ekkor létezik $V \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, amelyre $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Bizonyítás. Ha $U = \mathbb{R}^n$ vagy $K = \emptyset$, akkor az állítás nyilvánvaló: előbbi esetén $V = \mathbb{R}^n$, utóbbi esetben pedig $V = \emptyset$ megfelelő választás. Az iménti két speciális esettől eltekintve legyen $d := \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)$, amely az 1.35. Állítás szerint pozitív szám, hiszen K nem üres kompakt halmaz, $\mathbb{R}^n \setminus U$ pedig nem üres zárt halmaz, amely diszjunkt K-tól. Ekkor a $V := K_{\frac{d}{2}}$ halmaz,



1.9. ábra. Az 1.42. Állítás bizonyításának szemléltetése

vagyis a K halmaz $d/2$ sugarú nyílt környezete megfelel a kívánalmaknak (lásd az 1.9. ábrát). Valóban, az 1.41. Állításból következően V korlátos és nyílt. Másrészt tetszőleges $x \in \overline{V}$ esetén $\operatorname{dist}(x, K) \leq d/2 < d = \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)$, így szükségképpen $x \in U$, tehát $\overline{V} \subset U$. □

2. fejezet

Lebesgue-integrál

[. . .] valahányszor megpróbáltam részt venni egy matematikai társalgásban, egy Analista így szólt nekem: „Ez nem érdekelheti Önt, mert deriválható függvényekről van szó”, egy Geométer pedig megismételte a saját nyelvén: „Mi olyan felületekkel foglalkozunk, amelyeknek van érintő síkja”.

Henri Léon Lebesgue (1875–1941)

A fejezet tartalma. Összefoglaljuk a Lebesgue-integrál témakörének a parciális differenciálegyenletek tanulmányozásához szükséges alapvető fogalmait és összefüggéseit.

2.1. L^p terek és alaptulajdonságaik

Ismertnek tételezzük fel a Lebesgue-integrál elméletének alapfogalmait és tételeit, részletes magyar nyelvű bevezetés található például a [72, 93, 95, 159, 163, 188] könyvekben, angol nyelven pedig a [12] monográfia teljes mélységében tárgyalja a témakört. Az alábbiakban csak a legszükségesebb összefüggésekre emlékeztetünk a későbbi hivatkozások egyszerűsítésének érdekében.

A fejezetben $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ általában tetszőleges Lebesgue-mérhető halmaz.

2.1. Definíció. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges Lebesgue-mérhető halmazon értelmezett valós értékű, mérhető és p-edrendben ($1 \leq p < \infty$) Lebesgue-értelemben integrálható függvények (pontosabban a majdnem mindenütt [m. m.] egyenlőség által meghatározott ekvivalenciaosztályaik) vektorterét $L^p(\Omega)$-val jelöl-

jük, vagyis[1]

$$L^p(\Omega) := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ mérhető} : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\},$$

amelyen a következő normát vezetjük be:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

A $p = 1$ esetben az f függvényt *Lebesgue-integrálhatónak* vagy röviden *integrálhatónak* nevezzük. A $p = \infty$ esetben pedig

$$L^\infty(\Omega) := \{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ mérhető} : \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty \},$$

ahol

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup} |f| := \inf\{ y \in \mathbb{R} : |f| \le y \text{ m. m. } \Omega\text{-n} \}, \tag{2.2}$$

az f függvény *lényeges szuprémuma.*

2.2. Tétel. *A* (2.1) *és* (2.2) *összefüggések az $L^p(\Omega)$ téren olyan normát definiálnak, amellyel ellátva az $L^p(\Omega)$ tér teljes normált tér, más szóval Banach-tér.*

2.3. *Történeti megjegyzés.* A Lebesgue-féle integrál Henri Léon Lebesgue (1875–1941) francia matematikus nevéhez fűződik, aki 1901-ben egy rövid cikkben írt először az új integrálfogalomról, majd a rákövetkező években a párizsi Collège de France intézményében tartott előadásaiban fejtette ki részletesen az elméletet, amely 1904-ben jelent meg nyomtatott formában.

Az L^p tereket Riesz Frigyes (1880–1956), a funkcionálanalízis egyik megalapítója vezette be egy 1910-es cikkében, amelyben többek között az L^p tér teljességét is igazolta. A $p = 2$ speciális esetben a négyzetesen integrálható függvények terének teljességét 3 évvel korábban Ernst Sigismund Fischer (1875–1954) német matematikus és Riesz egymástól függetlenül már belátta (mindkét cikk ugyanabban a folyóiratban jelent meg), ezért erre szokás Riesz–Fischer-tételként hivatkozni.

Riesz Frigyesnek a Szőkefalvi-Nagy Bélával közösen írt [159] monográfiája a mai napig a téma alapművének számít, amely egyúttal a Lebesgue-integrál egyik legelegánsabb felépítését is tartalmazza. A témakör történetét illetően Riesz [157, 158] cikkeit ajánljuk az érdeklődők számára.

Gyakran szükségünk lesz az úgynevezett lokálisan integrálható függvények terére is.

[1] A szokásos dx, dt jelölést gyakran elhagyjuk, kivéve, ha nem világos a kontextusból, hogy melyik változó szerint integrálunk.

2.4. Definíció. Az $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény *p-edrendben lokálisan integrálható* az Ω-n, ha minden $K \subset \Omega$ kompakt halmazt véve $f|_K \in L^p(K)$. Az Ω halmazon p-edrendben lokálisan integrálható függvények vektorterét $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ jelöli. A $p = 1$ esetben nyerjük a lokálisan integrálható függvények terét, $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$-t.

Az L^p terekkel kapcsolatban az alábbiakban felidézünk néhány fontos és a későbbi fejezetekben gyakran alkalmazott összefüggést. Egy nevezetes egyenlőtlenséggel kezdjük, amelyhez célszerű bevezetnünk a konjugált kitevők fogalmát.

2.5. Definíció. Az $1 < p < \infty$ és $1 < q < \infty$ számokat *konjugált kitevőknek* hívjuk, ha $1/p + 1/q = 1$. Az 1 konjugált kitevője definíció szerint legyen ∞, és fordítva.

2.6. Állítás (Hölder-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $f \in L^p(\Omega)$ és $g \in L^q(\Omega)$, ahol p és q konjugált kitevők. Ekkor $fg \in L^1(\Omega)$ és*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha fg állandó előjelű m.m., és ha létezik olyan $t \ge 0$ valós szám, hogy $|f|^p = t|g|^q$ vagy $|g|^q = t|f|^p$ m.m. A speciális $p = q = 2$ esetben a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség elnevezés használatos leginkább.

2.7. *Történeti megjegyzés.* A Hölder-egyenlőtlenség diszkrét (tehát függvények helyett szám n-esekre vonatkozó) változata a következő:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

ami $p = q = 2$ esetén a Cauchy-egyenlőtlenség (lásd az 1.4. Tételt). A Hölder-egyenlőtlenséget, pontosabban a mai modern változattal egyenértékű diszkrét és folytonos alakját Leonard James Rogers (1862–1933) brit matematikus bizonyította 1888-ban. Rogers eredményére hivatkozva Otto Ludwig Hölder (1859–1937) más módszerekkel igazolta és általánosította az egyenlőtlenséget. Rogers és Hölder eredményeit részletesen tárgyalja a [119] cikk.

2.2. Konvergenciatételek

Az L^p terekbeli függvénysorozatok különféle konvergenciájával kapcsolatban három alapvető eredményt elevenítünk fel.

2.8. Lemma (Riesz)**.** *Ha (u_j) Cauchy-sorozat az $L^p(\Omega)$ térben valamely $1 \le$ $\le p \le \infty$ esetén, akkor létezik m.m. konvergens részsorozata.*

2.9. Tétel (Monoton konvergencia tétele)**.** *Tegyük fel, hogy az* $f_j\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *mérhető függvényekre* $0 \le f_j \le f_{j+1}$ *m. m.* Ω*-n minden* $j = 1, 2, \dots$ *esetén. Ekkor*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f_j,$$

ahol az integrálok értékeinek $+\infty$*-t is megengedünk.*

2.10. Tétel (Lebesgue)**.** *Tegyük fel, hogy az* $f_j\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *mérhető függvényekre* $f_j \to f$ *m. m.* Ω*-n, továbbá létezik* $g \in L^1(\Omega)$*, amelyre* $|f_j| \le g$ *m. m.* Ω*-n minden* $j = 1, 2, \dots$ *esetén (más szóval* g *integrálható majoráns). Ekkor* $f_j \to f$ *az* $L^1(\Omega)$ *normája szerint is.*

2.11. *Megjegyzés.* A 2.8. Lemmát Riesz Frigyes (1880–1956) az L^p terek teljességét is tartalmazó cikkében látta be és alkalmazta. A monoton konvergencia tételét Beppo Levi (1875–1961) olasz matematikus bizonyította 1906-ban, ezért szokás Beppo Levi tételeként is hivatkozni rá. A Lebesgue-féle konvergenciatételt Henri Léon Lebesgue (1875–1941) 1908-ban bizonyította, és a benne szereplő majoráns függvényre utalva szokás Lebesgue-féle majorált (vagy dominált) konvergencia tételének is hívni.

Az integrál differenciálhatóságához szorosan kapcsolódó alapvető eredmény a következő.

2.12. Tétel (Lebesgue-pontok tétele)**.** *Legyen* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$*. Ekkor m. m.* $x \in \mathbb{R}^n$ *esetén*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x),$$

sőt

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0, \tag{2.3}$$

ahol $\lambda(B(x,r))$ *a* $B(x,r)$ *gömb Lebesgue-mértékét jelöli. Azokat a pontokat, ahol a* (2.3) *összefüggés teljesül,* Lebesgue-pontoknak *nevezzük. A tétel értelmében tehát* $\mathbb{R}^n$ *m. m. pontja Lebesgue-pont az* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *függvényre nézve.*

2.3. Fubini-tétel és integráltranszformáció

Szorzattereken vett integrálok esetén kulcsfontosságú az alábbi tétel.

2.13. Tétel (Fubini–Tonelli)**.** *Legyenek* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ *és* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ *tetszőleges mérhető halmazok, valamint* $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény. Tegyük fel, hogy az*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f|\,,$$

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}|f(x,y)|\,dy\right)dx,$$
$$\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|f(x,y)|\,dx\right)dy$$

integrálok legalább egyike létezik és véges. Ekkor f integrálható az $\Omega_1\times\Omega_2$ halmazon, továbbá m. m. $x\in\Omega_1$ esetén az $y\mapsto f(x,y)$ függvény integrálható Ω_2-n, m. m. $y\in\Omega_2$ esetén az $x\mapsto f(x,y)$ függvény integrálható Ω_1-en és

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}f=\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Új változók bevezetésekor az *integráltranszformáció tétele* alapján módosul egy adott integrál felírása.

2.14. Tétel (Integráltranszformáció)**.** *Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá $g\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, injektív függvény. Ekkor a $g(\Omega)$ halmaz Lebesgue-mérhető, és tetszőleges $f\colon g(\Omega)\to\mathbb{R}$ mérhető függvény esetén*

$$\int_{g(\Omega)}f=\int_{\Omega}f\circ g\,|\det g'|\,,$$

abban az értelemben, hogy az egyik oldal pontosan akkor létezik, amikor a másik, és ilyenkor egyenlőek. A jobb oldalon

$$g'=\begin{bmatrix}\partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & \dots & \partial_n g_1\\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 & \dots & \partial_n g_2\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \partial_1 g_n & \partial_2 g_n & \dots & \partial_n g_n\end{bmatrix}$$

a g függvény $n\times n$-es méretű Jacobi-mátrixa (deriváltmátrixa) és $\det g'$ *a Jacobi-determináns.*

A Fubini–Tonelli-tétel egyik alkalmazásaként – akár n dimenziós polárkoordinátákra áttéréssel (lásd [10]) vagy anélkül – kiszámolható az n dimenziós gömb térfogata (a gömbfelület felszínét illetően lásd a 4.13. Állítást).

2.15. Állítás. *Az n dimenziós $B(x,r)$ gömb térfogata (Lebesgue-mértéke):*

$$V(B(x,r))=\begin{cases}\dfrac{\pi^k}{k!}r^{2k}, & \text{ha } n=2k,\\[2ex] \dfrac{2^{2k+1}k!\,\pi^k}{(2k+1)!}r^{2k+1}, & \text{ha } n=2k+1.\end{cases}$$

2.16. *Megjegyzés.* A 2.15. Állítás segítségével a (2.3) összefüggés a következő alakban is írható:

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

A szakasz lezárásaként egy nevezetes integrálra emlékeztetünk, amely a hővezetés matematikai vizsgálata során fog felbukkanni.

2.17. Állítás. *Ha $n \geq 1$ egész szám, akkor*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx = (\sqrt{\pi})^n.$$

2.4. Paraméteres integrálok

A paraméteres integrálok folytonosságával és differenciálhatóságával kapcsolatos állítások fontos eszközként kerülnek elő a parciális differenciálegyenletek tanulmányozása során.

2.18. Tétel (Paraméteres integrál folytonossága)**.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető halmaz, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, továbbá $f\colon H \times I \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $t \in I$ esetén az $x \mapsto f(t,x)$ függvény mérhető, és m.m. $x \in H$ esetén a $t \mapsto f(x,t)$ függvény folytonos I-n, valamint létezik $h \in L^1(H)$ függvény úgy, hogy $|f| \leq h$ a $H \times I$ halmazon. Ekkor az*

$$F(t) := \int_H f(x,t)\, dx$$

hozzárendeléssel értelmezett $F\colon I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az I intervallumon.

2.19. Tétel (Paraméteres integrál differenciálhatósága)**.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető halmaz, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, továbbá $f\colon H \times I \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre m. m. $x \in H$ esetén a $t \mapsto f(x,t)$ és $t \mapsto \partial_2 f(x,t)$ függvények folytonosak I-n, és minden $t \in I$ esetén az $x \mapsto f(x,t)$ és $x \mapsto \partial_2 f(x,t)$ függvények mérhetők, valamint létezik $h \in L^1(H)$ függvény úgy, hogy $|f| \leq h$ és $|\partial_2 f| \leq h$ a $H \times I$ halmazon. Ekkor az*

$$F(t) := \int_H f(x,t)\, dx$$

hozzárendeléssel értelmezett $F\colon I \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható az I intervallumon, és

$$F'(t) = \int_H \partial_2 f(x,t)\, dx.$$

Ha nemcsak az integrandus, de az integrálás határai is függnek a paramétertől, akkor többek között az alábbi tétel érvényes.

2.20. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f\colon I \times I$ folytonos függvény, amelyre $\partial_2 f$ létezik és folytonos I-n. Ekkor tetszőleges rögzített $a \in I$ esetén az*

$$F(t) := \int_a^t f(x,t)\,dx$$

hozzárendeléssel értelmezett $F\colon I \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható az I intervallumon, és

$$F'(t) = f(t,t) + \int_a^t \partial_2 f(x,t)\,dx.$$

2.21. *Megjegyzés.* A paraméteres integrálok differenciálásáról szóló fenti tételek természetes módon általánosíthatók $t \in \mathbb{R}^n$ paraméter esetére is.

3. fejezet

A $C_0^\infty(\Omega)$ függvénytér

Rémülettel és borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs deriváltjuk!

Charles Hermite (1822–1901) 1893-ban Thomas Joannes Stieltjesnek (1856–1894) írott sorai

A fejezet tartalma. A folytonosan differenciálható (más szóval *sima*) függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak áttekintése után bevezetjük az általánosított függvények elméletében kiemelkedő szerepet játszó, akárhányszor differenciálható, kompakt tartójú függvények osztályát. Ezt követően e függvényosztály egy kitüntetett tulajdonságú családjával, az úgynevezett *egységapproximációval* foglalkozunk. A fejezet lezárásaként pedig az *egységosztás* tételét ismertetjük.

3.1. Folytonosan differenciálható függvények és multiindexek

Ebben a fejezetben a feltételek egyszerűsítésének érdekében a következő megállapodással élünk.

3.1. Megállapodás. A továbbiakban, ha másképp nem jelezzük, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ tetszőleges nem üres nyílt halmazt jelöl.

3.2. Definíció. Az Ω-n értelmezett k-szor $(0 \leq k \leq \infty)$ folytonosan differenciálható valós értékű függvények osztályát $C^k(\Omega)$-val jelöljük (más szóval $C^k(\Omega)$ olyan függvények osztálya, amelyeknek az összes, legfeljebb k-adrendű

parciális derivált függvényei léteznek és folytonosak Ω-n). A függvények közötti szokásos összeadással és valós számmal való szorzással $C^k(\Omega)$ vektortér. Ha $k = 0$, akkor megállapodás szerint az Ω-n folytonos függvények vektorterét nyerjük, amelyet az egyszerűség kedvéért $C(\Omega)$-val jelölünk ($C^0(\Omega)$ helyett). Ha pedig $k = \infty$, akkor kapjuk a $C^\infty(\Omega)$ teret, vagyis az Ω-n értelmezett akárhányszor (folytonosan) differenciálható valós függvények terét, azaz $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$.

Az előbbiekben bevezetett függvényterek az Ω lezárásán is értelmezhetők.

3.3. Definíció. Jelölje $C(\overline{\Omega})$ az $\overline{\Omega}$ halmazon értelmezett valós értékű folytonos függvények vektorterét. Ekkor $C^k(\overline{\Omega})$ $(0 \le k \le \infty)$ azon $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ függvények vektortere ($\mathbb{R}$ felett), amelyekre $f \in C^k(\Omega)$, továbbá az összes, legfeljebb k-adrendű parciális derivált függvénynek létezik folytonos kiterjesztése $\overline{\Omega}$-ra.

3.4. Jelölés. Parciális deriváltakra többnyire a hagyományos $\partial_1, \partial_2, \dots$ jeleket fogjuk használni, azonban bizonyos változók esetében, ha ez nem okoz félreértést, akkor a $\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_{x_j}$ stb. jelölésekre térünk át, olykor pedig a $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}$ stb. jeleket is alkalmazzuk. Ismeretes, hogy k-szor folytonosan differenciálható függvények esetében a legfeljebb k-ad rendű parciális deriválások sorrendje a Young-tétel szerint felcserélhető.

3.5. *Történeti megjegyzés.* A $\frac{\partial u}{\partial x}$ jelölést Adrien-Marie Legendre (1752–1833) francia matematikus vezette be 1786-ban, azonban csak azt követően kezdett igazán széles körben elterjedni, hogy Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) német matematikus 1841-ben a később róla elnevezett Jacobi-mátrixról és Jacobi-determinánsról szóló munkájában használta. A ∂ jel nem tévesztendő össze a δ görög betűvel. Előbbi egy „görbe" d betű, amely a közönséges deriváltra Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) nyomán meghonosodott $\frac{du}{dx}$ jelölés (lásd a 3.12. Megjegyzést) módosítása parciális deriváltakra.

3.6. Definíció. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazán értelmezett és $\mathbb{R}^k$-ba képező $f = (f_1, \dots, f_k)$ függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, azaz mindegyik f_j koordinátafüggvénye differenciálható a-ban. Ekkor az f függvény a pontbeli *Jacobi-mátrixa* (vagy *deriváltmátrixa*)

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_k(a) & \partial_2 f_k(a) & \dots & \partial_n f_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}.$$

Speciálisan, valós értékű differenciálható függvény deriváltja a

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$$

sorvektor, amelyet szokás *deriváltvektornak* vagy *gradiensnek* hívni, és utóbbi miatt a grad f jelölés is használatos (lásd még a 4.5. szakaszt is).

Magasabb rendű parciális deriváltak tömörebb írásmódja érdekében célszerű megismerkednünk a Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002) francia matematikus által bevezetett úgynevezett *multiindexes* jelölésmóddal.

3.7. Definíció. Egy α *multiindexen* egy nemnegatív α_j egész számokból álló vektort értünk, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, ahol n valamilyen pozitív egész szám. A multiindex *abszolút értéke* $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Amikor a deriválások sorrendje felcserélhető (például folytonosan differenciálható függvények esetében), multiindex segítségével formálisan értelmezhetjük a ∂^α parciális deriválás operátorát.

3.8. Definíció. Legyen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multiindex. Ekkor $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ valós értékű függvény esetén $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, azaz $\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f$. Speciálisan az $\alpha = (0, \ldots, 0)$ esetben $\partial^\alpha f = f$.

A többváltozós Leibniz-szabály kapcsán (lásd a 3.11. Állítást) szükségünk lesz multiindexek összegének, rendezésének és faktoriálisának fogalmára.

3.9. Definíció (Multindexek összege, rendezése)**.** Legyen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ és $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ két multiindex. Ekkor $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$. Azt mondjuk, hogy $\alpha \geq \beta$, ha minden $0 \leq j \leq n$ esetén $\alpha_j \geq \beta_j$. Ebben az esetben értelmezhetjük az $\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ multiindexet.

3.10. Definíció (Multiindex faktoriálisa)**.** Legyen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multiindex. Ekkor $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.

Két függvény szorzatának deriváltjait a következő általános *Leibniz-szabály* segítségével számolhatjuk, amelyet teljes indukcióval könnyen igazolhatunk.

3.11. Állítás (Leibniz-szabály)**.** *Legyenek $f, g \in C^k(\Omega)$ valós értékű függvények és legyen α multiindex, amelyre $|\alpha| \leq k$. Ekkor*

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g),$$

ahol $\binom{\alpha}{\beta} := \dfrac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}$.

3.12. *Történeti megjegyzés.* Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) német filozófus és tudós, a differenciál- és integrálszámítás egyik megalapítója egy 1675. november 11-én kelt kéziratában vezette be a dx jelölést. Az x-re diszkrét értékeket felvevő függvényként tekintett, és ezen értékek különbségeit képezte, éppen ezért a d betű a differencia (különbség) szóból származik. Ugyanebben a kéziratban azt a kérdést tette fel, hogy vajon $d(xy)$ megegyezik-e

$(dx)(dy)$-nal? Példaképpen az $x = cz + d$ és $y = z^2 + bz$ függvényeket választotta, és felírta a $(dx)(dy)$ kifejezést. Majd a felfedezés lázában számolás nélkül kijelentette, hogy $d(xy)$ kiszámolásakor ugyanezt az eredményt fogjuk kapni. A kézirat nem sokkal későbbi részében azonban már arról írt, hogy téves volt a $d(xy) = (dx)(dy)$ kijelentés. A helyes szabályt 10 napra rá fogalmazta meg: $d(xy) = (dx)y + x(dy)$. Érdekességképpen megjegyezzük, hogy az $\int$ jelet Leibniz ugyanebben az időszakban, 1675. október 29-én vezette be.

A többváltozós differenciálási szabályok közül érdemes még az összetett függvény deriválási szabályát, azaz a láncszabályt is felelevenítenünk, mert számtalanszor fogjuk alkalmazni.

3.13. Tétel (Láncszabály)**.** *Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ valamely részhalmazán értelmezett és $\mathbb{R}^k$-ba képező $f = (f_1, \dots, f_k)$, továbbá az $\mathbb{R}^m$ egy részhalmazán értelmezett és $\mathbb{R}^n$-be képező $g = (g_1, \dots, g_n)$ függvényeket. Tegyük fel, hogy g differenciálható az $a \in \mathbb{R}^m$ pontban, és f differenciálható a $g(a) \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor az $\mathbb{R}^m$ egy részhalmazán értelmezett és $\mathbb{R}^k$-ba képező $f \circ g$ összetett függvény differenciálható az a pontban, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

ahol mindkét oldalon a megfelelő méretű Jacobi-mátrixok állnak, és közöttük a mátrixszorzás művelete érvényes. Speciálisan $k = 1$ esetén az $F := f \circ g$ függvény parciális deriváltjaira fennáll, hogy $j = 1, \dots, m$ esetén

$$\partial_j F(a) = \partial_1 f(g(a))\partial_j g_1(a) + \partial_2 f(g(a))\partial_j g_2(a) + \ldots + \partial_n f(g(a))\partial_j g_n(a).$$

3.14. *Megjegyzés.* A láncszabály parciális deriváltakra vonatkozó speciális esete könnyebben megjegyezhető, ha a következő írásmódot használjuk. Tegyük fel, hogy az f függvény változói $(y_1, \dots, y_n)$, a g függvény változói pedig $(x_1, \dots, x_m)$. Ekkor megfelelő feltételek mellett az $F = f \circ g$ függvényre

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, m).$$

3.15. *Történeti megjegyzés.* A láncszabály (szemléltető célzatú) megnevezés az 1920-as években német nyelvterületen bukkant fel *Kettenregel* formában, és ezután került át egyéb nyelvekre.

3.2. Folytonos függvények tartója

Folytonos függvényekkel kapcsolatban fontos szerepet tölt be a tartó fogalma.

3.16. Definíció. Legyen $f \in C(\Omega)$, ekkor f *tartóját* (angol nyelven *support*) a következőképpen értelmezzük:

$$\operatorname{supp} f := \Omega \setminus \{x \in \Omega : \text{létezik } U_x \subset \Omega \text{ környezete } x\text{-nek, hogy } f|_{U_x} = 0\}.$$

3.17. *Megjegyzés.* Világos, hogy az

$$\{x \in \Omega : \text{létezik } U_x \subset \Omega \text{ környezete } x\text{-nek, hogy } f|_{U_x} = 0\} \tag{3.1}$$

halmaz nyílt, méghozzá a legbővebb nyílt halmaz, amelyen $f = 0$. Következésképpen $\operatorname{supp} f$ relatív zárt halmaz az Ω-ban (hiszen a (3.1) nyílt halmaz zárt komplementerének és Ω-nak a metszete), továbbá $f = 0$ az $\Omega \setminus \operatorname{supp} f$ halmazon. Vigyázzunk azonban, mert f a tartóján is felveheti a 0 értéket, például a valós $f(x) = x$ függvény tartója $\mathbb{R}$, de $f(0) = 0$. Nem nehéz viszont belátni, hogy

$$\operatorname{supp} f = \Omega \cap \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

A tartó fogalmát tetszőleges $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvényre is értelmezhetjük, ebben az esetben a (3.1) halmazban az $f = 0$ egyenlőséget U_x-en csak majdnem mindenütt követeljük meg.

3.18. Definíció. Legyen $0 \leq k \leq \infty$, ekkor $C_0^k(\Omega)$ jelöli az olyan $f \in C^k(\Omega)$ függvények vektorterét, amelyekre $\operatorname{supp} f$ kompakt (vagyis az 1.33. Tétel alapján korlátos és zárt) halmaz $\mathbb{R}^n$-ben. A $k = 0$ esetben $C_0^0(\Omega)$ helyett gyakran a tömörebb $C_0(\Omega)$ jelölést fogjuk használni.

Mivel egy függvény a tartóján kívül azonosan 0, ezért egy kompakt tartójú függvény egy kompakt halmazon kívül azonosan 0. Valójában ez már elegendő is ahhoz, hogy egy függvény tartója kompakt halmaz legyen, és a különféle okoskodásokban általában sokkal kényelmesebb ezt az ekvivalens tulajdonságot igazolni.

3.19. Állítás. *Legyen $f \in C(\Omega)$. Ekkor f pontosan akkor kompakt tartójú, ha van olyan $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, hogy $f = 0$ az $\Omega \setminus K$ halmazon.*

Bizonyítás. Csak az nem nyilvánvaló, hogy ha $f = 0$ az $\Omega \setminus K$ halmazon, ahol $K \subset \Omega$ kompakt, akkor $\operatorname{supp} f$ kompakt. Használjuk fel, hogy az 1.33. Tétel alapján K korlátos és zárt. Ekkor $\Omega \setminus K = (\mathbb{R}^n \setminus K) \cap \Omega$ két nyílt halmaz metszete lévén nyílt (lásd az 1.23. Állítást), és mivel ezen a halmazon $f = 0$, ezért $\operatorname{supp} f \subset K$, tehát $\operatorname{supp} f$ korlátos. Másrészt pedig $\operatorname{supp} f$ előáll mint a K zárt halmaznak és a (3.1) nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-beli zárt komplementerének a metszete, tehát $\operatorname{supp} f$ maga is zárt (felhasználva, hogy zárt halmazok metszete zárt). □

A $C_0(\Omega)$ tér és az $L^p(\Omega)$ terek egy fontos kapcsolatáról szól a következő tétel.

3.20. Tétel. *Tegyük fel, hogy $1 \leq p < \infty$, ekkor a $C_0(\Omega)$ tér az $L^p(\Omega)$ tér sűrű részhalmaza.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható például a [93, 175] könyvekben, az alábbiakban csupán az ötletet villantjuk fel. Mivel az $L^p(\Omega)$ térben sűrűn vannak a $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ alakú egyszerű függvények, ahol χ_{A_j} az A_j mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, azaz $\chi_{A_j}(x) = 1$, ha $x \in A_j$ és $\chi_{A_j}(x) = 0$ különben. Emiatt elegendő tehát a karakterisztikus függvényeket $C_0(\Omega)$-beliekkel közelíteni $L^p(\Omega)$ normában. Ismeretes (az n dimenziós Lebesgue-mérték regularitási tulajdonságaiból), hogy ha A tetszőleges mérhető halmaz, akkor létezik olyan K kompakt és U nyílt halmaz, amelyre $K \subset A \subset U \subset \Omega$, és az $U \setminus K$ halmaz mértéke tetszőlegesen kicsi. Ekkor az

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \Omega \setminus U)}{\operatorname{dist}(x, \Omega \setminus U) + \operatorname{dist}(x, K)}$$

képlet olyan $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt definiál, amelyre $0 \le f \le 1$, továbbá $f = 1$ a K halmazon és $\operatorname{supp} f \subset U$ (később, a 3.31. Állításban ettől eltérő módon konstruálunk ugyanilyen tulajdonságú f függvényt). Ennélfogva

$$\int_\Omega |f(x) - \chi_A(x)|^p \, dx \le \lambda(U \setminus K),$$

ami U és K megfelelő választásával tetszőlegesen kicsivé tehető. □

3.21. *Megjegyzés.* A 3.20. Tétel $p = \infty$ esetén nem igaz, hiszen $L^\infty(\Omega)$-ban a konstans 1 függvénytől minden kompakt tartójú függvény legalább 1 távolságra van, mert minden ilyen függvény felveszi a 0 értéket a tartóján kívül.

3.3. Egységapproximáció

Ahogy a bevezetőben említettük, a végtelen sokszor differenciálható, kompakt tartójú függvények lényeges segédeszközként kerülnek elő a parciális differenciálegyenletek elméletében. Rögtön felmerül a kérdés, hogyan adhatunk meg konkrét (nem azonosan 0) $C_0^\infty(\Omega)$-beli függvényeket? A következő nevezetes példa lényegében Cauchy-tól származik ([25, 38. fejezet]), aki megmutatta, hogy egy $C^\infty(\mathbb{R})$-beli függvényt nem mindig állít elő a Taylor-sora.

3.22. Példa. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ és tekintsük a következő hozzárendeléssel értelmezett $\eta_{a,r}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$\eta_{a,r}(x) := \begin{cases} \exp(-1/(r^2 - |x-a|^2)), & \text{ha } |x| < r, \\ 0, & \text{ha } |x| \ge r. \end{cases} \tag{3.2}$$

Vegyük észre, hogy $\eta_{a,r} = h \circ g$, ahol $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amelyre

$$h(t) := \begin{cases} \exp(-1/t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \end{cases}$$

továbbá $g(x) = r^2 - |x-a|^2$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Nyilvánvalóan $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, és nem nehéz belátni, hogy $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ (lásd alább), tehát a kompozíciójukra $\eta_{a,r} \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ezenkívül világos, hogy $\operatorname{supp}\eta_r = \overline{B(0,r)}$, így $\eta_{a,r} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Végül még jegyezzük meg azt is, hogy $\eta_{a,r} \geq 0$.

Minthogy $h = 0$ $(-\infty,0)$-ban és $h \in C^\infty(0,+\infty)$, a $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tulajdonság igazolásához elegendő megmutatni, hogy $t \to 0+$ esetén a $h^{(n)}(t)$ és $h^{(n)}(t)/t$ függvények minden $n \geq 0$-ra nullához tartanak. Teljes indukcióval látható, hogy alkalmas P_n polinomokkal $h^{(n)}(t) = P_n(1/t)\exp(-1/t)$ minden $t > 0$ esetén, és innen a kívánt relációk az $s = 1/t$ helyettesítéssel következnek abból, hogy az exponenciális függvény minden polinomnál gyorsabban tart végtelenhez, ha $s \to +\infty$.

A fenti (3.2) függvényből kiindulva egy sereg $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-beli függvényt adhatunk meg.

3.23. Példa. Legyen $\eta_{0,1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a (3.2) hozzárendeléssel $a = 0$, $r =$ $= 1$ mellett nyert függvény, és válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor az $\eta_\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény értelmezése legyen $\eta_\varepsilon(x) := \eta_{0,1}(\frac{x}{\varepsilon})/C_\varepsilon$, ahol $C_\varepsilon := \varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{0,1}$. Foglaljuk össze az így kapott η_ε függvények néhány fontos tulajdonságát:

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \eta_\varepsilon \geq 0, \quad \operatorname{supp}\eta_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1. \tag{3.3}$$

Mivel $\eta_\varepsilon = 0$ a $B(0,\varepsilon)$ gömbön kívül, ezért $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1$ mellett $\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon =$ $= 1$ ugyancsak igaz. Az η_ε függvényeket az origó környezetéből az a pont környezetébe eltolva, a kapott függvényekre a (3.3) tulajdonságok $B(0,\varepsilon)$ helyett a $B(a,\varepsilon)$ gömbön teljesülnek.

3.24. Definíció (Egységapproximáció)**.** A (3.3) tulajdonságokkal rendelkező függvénycsaládról azt mondjuk, hogy (nemnegatív) *egységapproximációt* generálnak.

3.25. *Megjegyzés.* A (3.3) tulajdonságokból következően $\lim_{\varepsilon\to 0+} \eta_\varepsilon(x) = 0$, ha $x \neq 0$, továbbá $\lim_{\varepsilon\to 0+} \eta_\varepsilon(0) = \infty$, de ez utóbbi konvergencia az $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon =$ $= 1$ összefüggés által bizonyos értelemben kontrollálva van (lásd a (3.1. ábrát). Az egységapproximációt értelmezhetnénk a nemnegativitás feltételezése és a tartók konkrét magadása nélkül is (az irodalomban ez gyakori), mi azonban az egyszerűség kedvéért csak a 3.23. Példában bevezetett egységapproximációt használjuk majd.

3.4. Az egységapproximáció alkalmazásai

A most következő szakaszban az egységapproximáció két alkalmazását mutatjuk be. Először belátjuk, hogy $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban, ahol $1 \le p < \infty$. Ehhez a következő tételt igazoljuk.

3.26. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\Omega)$, továbbá $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és értelmezzük az $f_\varepsilon \colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt a következő hozzárendeléssel:*

$$f_\varepsilon(x) := \int_\Omega f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \quad (x \in \Omega), \tag{3.4}$$

ahol az η_ε függvények a 3.23. Példának megfelelően egységapproximációt generálnak. Ekkor az alábbiak teljesülnek:

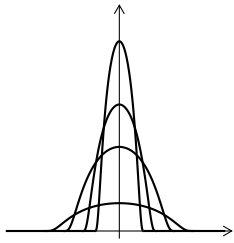
a) *minden $\varepsilon > 0$ esetén f_ε értelmes és $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, továbbá ha $f = 0$ m.m. az Ω egy kompakt részhalmazán kívül, akkor minden elég kis ε esetén $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$;*

b) *ha $\varepsilon \to 0+$, akkor $f_\varepsilon \to f$ m.m. az Ω halmazon;*

c) *ha $f \in C(\Omega)$, akkor $f_\varepsilon \to f$ lokálisan egyenletesen Ω-n (azaz egyenletesen az Ω halmaz bármely kompakt részhalmazán);*

d) *ha $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ahol $1 \le p < \infty$, akkor minden $K \subset \Omega$ kompakt halmazra $\varepsilon \to 0+$ esetén $f_\varepsilon|_K \to f|_K$ az $L^p(K)$ tér normája szerint.*

Bizonyítás. a) Mivel f integrálható Ω-n és $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ korlátos (hiszen kompakt tartójú folytonos függvény), ezért f_ε értelmes. A végtelen sokszor való differenciálhatóság a paraméteres integrálok differenciálásáról szóló 2.19. Tételből következik, ugyanis az $x \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ függvény végtelen sokszor folytonosan differenciálható Ω-n, az f függvény pedig $L^1(\Omega)$-beli. Vegyük észre, hogy mivel az $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ függvény a $B(x,\varepsilon)$ gömbön kívül 0, ezért f_ε definíciójában Ω helyett elég az $\Omega \cap B(x,\varepsilon)$ halmazon integrálni. Ezt az észrevételt a későbbiekben többször is használjuk majd.



3.1. ábra. Az η_ε függvények

Tegyük fel most, hogy $f = 0$ m.m. az $\Omega \setminus K$ halmazon, ahol $K \subset \Omega$ kompakt. Ekkor f_ε definíciójában elegendő a $K \cap B(x,\varepsilon)$ halmazon integrálni:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{K\cap B(x,\varepsilon)} f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy. \tag{3.5}$$

Legyen $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, és tekintsük a K halmaz ε sugarú környezetének lezártját: $\overline{K_\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K) \le \varepsilon\}$. Ekkor $\overline{K_\varepsilon}$ kompakt halmaz, amely az ε választása miatt Ω-nak részhalmaza (lásd a 3.2. ábrát). Megmutatjuk, hogy bármely $x \in \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon}$ mellett $f_\varepsilon(x) = 0$, következésképpen $f_\varepsilon = 0$ a $\overline{K_\varepsilon} \subset \Omega$ kompakt halmazon kívül. Valóban, $x \in \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon}$ esetén $\operatorname{dist}(x,K) > \varepsilon$, ezért K és $B(x,\varepsilon)$ diszjunkt halmazok, tehát (3.5) jobb oldala 0-val egyenlő.

b) A Lebesgue-pontok tételéből következően (lásd a 2.12. Tételt és a 2.16. Megjegyzést) m.m. $x \in \Omega$ pontra

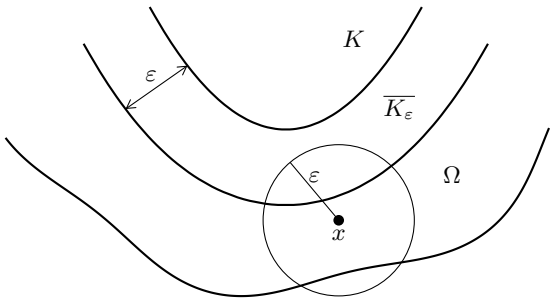
$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0. \tag{3.6}$$

Rögzítsünk egy, a fenti tulajdonsággal rendelkező $x \in \Omega$ pontot. Mivel az η_ε függvényekre $\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon = 1$ teljesül, ezért $\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$ is érvényes, így

$$f(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} f(x)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

Másrészt $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ esetén $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$, ezért

$$f_\varepsilon(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy.$$



3.2. ábra. Ha $x \notin \overline{K_\varepsilon}$, akkor K és $\overline{B(x,\varepsilon)}$ diszjunktak

Ekkor az η_ε függvényeknek a 3.22. Példában tárgyalt tulajdonságainak és a (3.6) konvergenciának a felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(x)-f(x)| &= \left|\int_{B(x,\varepsilon)} (f(y)-f(x))\eta_\varepsilon(x-y)\right| dy \\ &\le \frac{\text{const}}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)-f(x)|\eta_{0,1}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\ &\le \frac{\text{const}}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)-f(x)|\,dy \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0.\end{aligned}$$

c) Tegyük fel, hogy $f\in C(\Omega)$, és legyen $K\subset\Omega$ kompakt halmaz. Az előző rész mintájára elég kis ε esetén

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(x)-f(x)| &= \left|\int_{B(x,\varepsilon)} (f(y)-f(x))\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\right| \\ &\le \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)-f(x)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Mivel $f\in C(\Omega)$, ezért f egyenletesen folytonos a K kompakt halmazon, tehát adott $\nu>0$ számhoz létezik $\delta>0$ úgy, hogy $|x-y|<\delta$ $(x,y\in K)$ esetén $|f(x)-f(y)|<\nu$. Ekkor (3.7) folytán minden $\varepsilon\le\delta$, $x\in K$ esetén

$$|f_\varepsilon(x)-f(x)| \le \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)-f(x)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \le \nu\int_{B(x,\varepsilon)}\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \nu.$$

Ez azt jelenti, hogy $f_\varepsilon\to f$ egyenletesen a K halmazon.

d) Tegyük fel, hogy $f\in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ $(1\le p<\infty)$, és legyen $K\subset\Omega$ tetszőleges kompakt halmaz, amelyre $K\subset\Omega$. Először megmutatjuk, hogy

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(K)} \le \|f\|_{L^p(K)}. \tag{3.8}$$

(Itt és a továbbiakban is a megfelelő halmazra leszűkített függvények normáját tekintjük, de ezt az egyszerűség kedvéért nem jelöljük.) Ez $p=1$ esetén a Fubini-tételből (2.13. Tétel) egyszerűen következik, ugyanis ha $\varepsilon>0$ elég kicsi, akkor

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon\|_{L^1(K)} &= \int_K \left|\int_\Omega f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\right| dx \\ &\le \int_K\int_\Omega |f(y)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,dx \\ &= \int_K |f(y)|\left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\,dx\right) dy\end{aligned}$$

$$= \int_K |f(y)|\,dy = \|f\|_{L^1(K)}.$$

A $p > 1$ esetben pedig a Hölder-egyenlőtlenség (2.6. Állítás) és a Fubini-tétel alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(x)| &\le \int_\Omega |f(y)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \\ &= \int_\Omega |f(y)|\eta_\varepsilon^{1/p}(x-y)\cdot\eta_\varepsilon^{1/q}(x-y)\,dy \\ &\le \left(\int_\Omega |f(y)|^p\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1/p}\cdot\left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)|\,dy\right)^{1/q},\end{aligned}$$

ahol $1/p + 1/q = 1$. Ebből $\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$ felhasználásával

$$\begin{aligned}\int_K |f_\varepsilon(x)|^p\,dx &\le \int_K\left(\int_\Omega |f(y)|^p\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\right)\,dx \\ &= \int_K |f(y)|^p\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,dx \\ &= \int_K |f(y)|^p\end{aligned}$$

adódik, vagyis $\|f_\varepsilon\|^p_{L^p(K)} \le \|f\|^p_{L^p(K)}$.

Most emlékeztetünk arra a tényre (lásd a 3.20. Tételt), hogy $1 \le p < \infty$ esetén $L^p(\Omega)$-ban sűrű $C(\Omega)$ (sőt valójában $C_0(\Omega)$ is), ebből következően bármely $\nu > 0$ esetén létezik $g \in C(\Omega)$ függvény, amelyre

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \nu. \tag{3.9}$$

Képezzük a (g_ε) függvényeket g segítségével a (3.4) integrál mintájára. Ekkor a bizonyítás b) része alapján $g_\varepsilon \to g$ egyenletesen K-n, így a

$$\|g_\varepsilon - g\|^p_{L^p(K)} = \int_K |g_\varepsilon - g|^p \le \sup_K |g_\varepsilon - g|\cdot\int_K 1$$

becslésből kifolyólag $g_\varepsilon \to g$ az $L^p(K)$ tér normája szerint is teljesül. Már csak annyi van hátra, hogy a szokásos „$\varepsilon/3$ módszert” alkalmazzuk, azaz

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(K)} &= \|(f_\varepsilon - g_\varepsilon) + (g_\varepsilon - g) + (g - f)\|_{L^p(K)} \\ &\le \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p(K)} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p(K)} + \|g - f\|_{L^p(K)}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldalán (3.9) és $K \subset \Omega$ miatt $\|f - g\|_{L^p(K)} \le$ $\le \|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \nu$, továbbá az $L^p(K)$-beli $g_\varepsilon \to g$ konvergencia folytán $\|g_\varepsilon - g\|_{L^p(K)} < \nu$, ha ε elég kicsi. Végül pedig a (3.8) becslés szerint

$$\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p(K)} = \|(f-g)_\varepsilon\|_{L^p(K)} \le \|f - g\|_{L^p(K)} < \nu.$$

Ebből következően (3.10) jobb oldala kisebb, mint 3ν, ha ε elég kicsi. Mivel $\nu > 0$ tetszőleges volt, ezért szükségképpen $f_\varepsilon \to f$ az $L^p(K)$ tér normája szerint. □

3.27. *Megjegyzés.* A 3.26. Tétel a) részének bizonyításában azt is igazoltuk, hogy ha $f = 0$ m.m. a $K \subset \Omega$ halmazon kívül, akkor $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n\Omega)$ esetén $f_\varepsilon = 0$ m.m. a $\overline{K_\varepsilon} \subset \Omega$ kompakt halmazon kívül.

Ha a tétel c) és d) részében is élünk azzal a feltételezéssel, hogy $f = 0$ m.m. az $\Omega \setminus K$ halmazon, ahol $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, akkor a megfogalmazott konvergenciák az egész Ω halmazon érvényesek. Valóban, elég kis μ számot rögzítve minden $0 < \varepsilon < \mu$ esetén $f_\varepsilon = 0$ m.m. az $\Omega \setminus \overline{K_\mu}$ halmazon, tehát itt $f_\varepsilon \to f$ automatikusan teljesül. A $\overline{K_\mu}$ kompakt halmazon pedig a c) és d) részek biztosítják a megfelelő értelemben vett $f_\varepsilon \to f$ konvergenciát.

3.28. Következmény. *Legyen $1 \le p < \infty$. Ekkor a $C_0^\infty(\Omega)$ tér az $L^p(\Omega)$ tér sűrű részhalmaza.*

Bizonyítás. Legyen $f \in L^p(\Omega)$ adott. Tekintsük az

$$\Omega^\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \delta\} \cap B(0, 1/\delta)$$

halmazokat (lásd 3.3. ábra), amelyek elég kis δ esetén nem üresek (ha $\Omega = \mathbb{R}^n$, akkor az Ω^δ halmaz legyen $B(0,1/\delta)$). Jelölje χ_δ az Ω_δ halmaz karakterisztikus függvényét, azaz $\chi_\delta(x) = 1$, ha $x \in \Omega_\delta$ és $\chi_\delta(x) = 0$ egyébként. Ekkor $f\chi_\delta \to f$ m.m. az Ω halmazon, midőn $\delta \to 0+$. Világos, hogy $|f\chi_\delta| \le |f|$, így a Lebesgue-tétel alapján $\delta \to 0+$ esetén $f\chi_\delta \to f$ az $L^p(\Omega)$ tér normája szerint. Ennek megfelelően válasszunk olyan $\delta > 0$ számot, amelyre

$$\|f\chi_\delta - f\|_{L^p(\Omega)} < \nu,$$

ahol $\nu > 0$ tetszőleges rögzített szám. Mivel a $g := f\chi_\delta$ függvény 0 a $\overline{B(0,1/\delta)}$ kompakt halmazon kívül, ezért a 3.26. Tételnek megfelelően értelmezett g_ε függvényekre $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, és a 3.27. Megjegyzés második részéből kifolyólag $g_\varepsilon \to g$ az $L^p(\Omega)$ tér normája szerint, midőn $\varepsilon \to 0+$. Ennélfogva elég kis ε esetén

$$\|g_\varepsilon - g\|_{L^p(\Omega)} < \nu,$$

és így

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} < 2\nu,$$

ahol $\nu > 0$ bármilyen kicsiny lehet. Ez azt jelenti, hogy f tetszőleges pontossággal közelíthető $C_0^\infty(\Omega)$-beli függvényekkel. □

3.29. *Megjegyzés.* A (3.4) integrált a konvolúció műveletének segítségével egyszerűbb alakban írhatjuk (ha az f függvényt az $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ halmazon 0-ként kiterjesztve tekintjük):

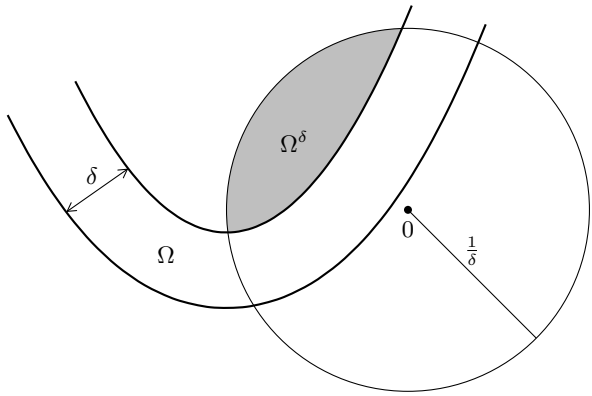
$$f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon.$$

(A függvények körében vett konvolúcióval és annak a disztribúciókra történő általánosításával a 11.6.2. szakaszban foglalkozunk részletesen.) Így a 3.26. Tétel alapján talán érthetőbbé válik, hogy honnan származik az egységapproximáció elnevezés. Az η_ε függvények segítségével elkészített $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$ függvényekre $f_\varepsilon \to f$ a megfelelő terekben, tehát olyan, mintha az η_ε függvények a konvolúció műveletének egységelemét approximálnák. Valójában ez az egységelem a Dirac-delta, amely nem függvény, hanem disztribúció. Ezzel a disztribúciókról szóló 11. fejezetben részletesen foglalkozunk.

3.30. *Történeti megjegyzés.* A konvolúcióval történő regularizáció Edmund Landau (1877–1938) 1908-az nevezetes [100] cikkével vette kezdetét, amelyben egyszerű bizonyítást adott Weierstrass polinomapproximációs tételére. Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy az angol nyelvű szakirodalomban az egységapproximáció neve *mollifier*. A mollify ige jelentése csillapít, enyhít, amely a 3.26. Tétel alapján ugyancsak logikus elnevezés, mert az f_ε sima függvények az f nem feltétlenül sima függvény közelítései, tehát „kisimítják" az f függvény esetleges töréseit, szakadásait.

Meglepő módon azonban nem emiatt kapták az angol nyelvű irodalomban a mollifier nevet. Az elnevezést Kurt Otto Friedrichs (1901–1982) német születésű, később Amerikába kivándorolt matematikus vezette be egy 1944-es cikkében (lásd [56]). Friedrichs nem kedvelte a Lebesgue-elméletet, ahogy fogalmazott, „a Lebesgue-elméletben majdnem mindenütt azt kell írni, hogy majdnem mindenütt". Az egységapproximáció segítségével, mint láttuk, integrálható függvényeket sima függvényekkel approximálhatunk, ezáltal gyakran megkerülhető a majdnem mindenütt esetenkénti kényelmetlensége.

Peter D. Lax (1926–2025) magyar származású Amerikában élő matematikus szerint Friedrichs cikke a parciális differenciálegyenletek elméletének



3.3. ábra. Az Ω^δ halmaz

egyik kiemelkedő jelentőségű munkája, lásd a [124] könyvet. Ebben a műben ismerhetjük meg Laxtól a mollifier szó eredetét. Friedrichs kollégája volt Donald Alexander Flanders (1900–1958) amerikai matematikus, akivel szívesen beszélgetett az angol nyelvről, és meg is kérdezte tőle, hogyan nevezze el ezeket a függvényeket. Flanderst kollégái tréfásan Mollnak szólították Daniel Defoe regényének hőse, Moll Flanders után. Flanders azt javasolta, hogy „róla" nevezze el a szóban forgó függvénycsaládot. Friedrichsnek tetszett az ötlet, és így lett mollifier a függvények neve. Egyébként nem Friedrichs volt az első, aki ilyen típusú függvényeket használt, már 1938-ban Szergej Szoboljev a később róla elnevezett Szoboljev-térbeli beágyazási tételekről szóló cikkében (lásd [179]) előfordult az egységapproximáció.

Az egységapproximáció egy másik alkalmazásaként egy szemléletesen világos állítást látunk be, amelyet az egységosztás tételének bizonyításában fogunk felhasználni.

3.31. Állítás. *Legyen $K \subset \Omega$ kompakt halmaz. Ekkor létezik olyan $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ függvény, amelyre $0 \le \varphi \le 1$, továbbá $\varphi = 1$ a K kompakt halmaz egy környezetében.*

Bizonyítás. Legyen $d := \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, amely az 1.35. Állítás szerint pozitív (esetleg végtelen), hiszen K kompakt, $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ pedig zárt (esetleg üres), és a két halmaz diszjunk egymástól. Rögzítsünk most egy tetszőleges $0 < \varepsilon < d/3$ számot. Ekkor $\overline{K_{3\varepsilon}} \subset \Omega$ (lásd a 3.4. ábrát), és tekintsük az

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \overline{K_{2\varepsilon}}, \\ 0, & \text{ha } x \in \Omega \setminus \overline{K_{2\varepsilon}} \end{cases}$$

függvényt. A 3.26. Tételnek megfelelően elkészített $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ függvényre a 3.27. Megjegyzés alapján teljesül, hogy $f_\varepsilon = 0$ a $\overline{K_{3\varepsilon}} \subset \Omega$ kompakt halmazon kívül. Megmutatjuk, hogy f_ε rendelkezik az állításban megfogalmazott tulajdonságokkal.Valóban, ε választása miatt $x \in \overline{K_\varepsilon}$ esetén $B(x, \varepsilon) \subset \overline{K_{2\varepsilon}}$, és így f értelmezéséből adódóan

$$f_\varepsilon(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{B(x,\varepsilon)} 1 \cdot \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1,$$

tehát $f_\varepsilon = 1$ a $\overline{K_\varepsilon}$ halmazon. Végezetül még gondoljuk meg, hogy $0 \le f \le 1$ és $\eta_\varepsilon \ge 0$ folytán

$$0 \le f_\varepsilon(x) \le \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1.$$

Mindezek alapján $\varphi := f_\varepsilon$ megfelel a kívánalmaknak. □

3.5. Az egységosztás tétele

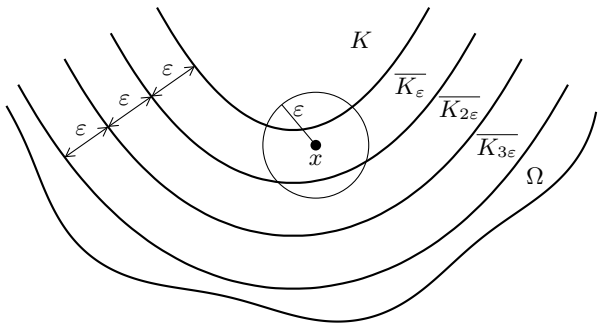
Az egységapproximáció mellett a parciális differenciálegyenletek elméletének egy másik igen fontos szerepet betöltő eszköze az úgynevezett egységosztás tétele. Ennek segítségével lokálisan teljesülő tulajdonságokból tudunk következtetni globális tulajdonságokra.

3.32. Tétel (Egységosztás tétele)**.** *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, továbbá $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \dots, m)$ nyílt halmazok, amelyekre $K \subset \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$. Ekkor léteznek $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ $(j = 1, \dots, m)$ függvények úgy, hogy $\sum_{j=1}^m \varphi_j = 1$ a K halmaz egy környezetében.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy léteznek G_j $(j = 1, \dots, m)$ korlátos nyílt halmazok, amelyekre $\overline{G_j} \subset \Omega_j$ és $K \subset \bigcup_{j=1}^m G_j$ teljesül. Első lépésben a $K \setminus \bigcup_{j=2}^m \Omega_j$ kompakt és Ω_1 nyílt halmazhoz az 1.42. Állítás szerint található olyan G_1 nyílt halmaz, hogy $K \setminus \bigcup_{j=2}^m \Omega_j \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset \Omega_1$. Második lépésben a $G_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ halmazok közül Ω_2-höz választjuk meg a G_2 nyílt halmazt, amelyre $K \setminus (\bigcup_{j=3}^m \Omega_j \cup G_1) \subset G_2$ és $\overline{G_2} \subset \Omega_2$. Ezt az eljárást folytatva megkapjuk a kívánt G_j $(j = 1, \dots, m)$ halmazokat.

Most alkalmazzuk a 3.31. Tételt a $\overline{G_j} \subset \Omega_j$ halmazokra, így nyerjük a $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ $(j = 1, \dots, m)$ függvényeket, amelyekre $\psi_j = 1$ a $\overline{G_j}$ halmaz egy környezetében. Definiáljuk ekkor a φ_j $(j = 1, \dots, m)$ függvényeket a következőképpen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \psi_1, \\
\varphi_2 &:= \psi_2(1 - \psi_1), \\
&\vdots \\
\varphi_m &:= \psi_m(1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \cdot \ldots \cdot (1 - \psi_{m-1}).
\end{aligned}$$



3.4. ábra. A 3.31. Állítás bizonyításának szemléltetése

Nyilvánvalóan $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, továbbá vegyük észre, hogy $\psi_j = 1 - (1 - \psi_j)$ miatt

$$\varphi_j = (1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdot\ldots\cdot(1-\psi_{j-1}) - (1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdot\ldots\cdot(1-\psi_j).$$

Ebből következően $\sum_{j=1}^m \varphi_j$ egy teleszkopikus összeg, ezért

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdot\ldots\cdot(1-\psi_m),$$

ahol a jobb oldal 1-gyel egyenlő az $\bigcup_{j=1}^m G_j$ nyílt halmazon (amely tartalmazza K-t). Valóban, $x \in \bigcup_{j=1}^m G_j$ esetén $x \in G_k$ valamilyen k-ra, és ekkor a ψ_k függvény definíciójából adódóan $\psi_k(x) = 1$, tehát

$$(1-\psi_1(x))(1-\psi_2(x))\ldots(1-\psi_m(x)) = 0. \qquad \square$$

3.33. *Megjegyzés.* Az egységosztás tétele valójában sokkal általánosabban is igaz. Az $\mathbb{R}^n$ téren az erősebb tételt úgy fogalmazhatjuk, hogy az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz U_α ($\alpha \in I$, ahol I tetszőleges indexhalmaz) nyílt halmazokkal való fedéséhez léteznek φ_α ($\alpha \in I$) függvények úgy, hogy a következők teljesülnek:

(i) minden $\alpha \in I$ esetén $\varphi_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \varphi_\alpha \le 1$;

(ii) minden $\alpha \in I$ esetén létezik $\beta \in I$ úgy, hogy $\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\beta$;

(iii) a (φ_α) függvényrendszer lokálisan véges, azaz minden $K \subset \Omega$ kompakt halmazra véges sok φ_α függvény kivételével $\varphi_\alpha = 0$ a K halmazon;

(iv) minden $x \in \Omega$ esetén $\sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha(x) = 1$ (amely a (iii) feltétel miatt valójában csak véges összeg).

A (φ_α) függvényrendszert az (U_α) fedésnek *alárendelt egységosztásnak* nevezzük. Az általános egységosztás tételének bizonyítása egyszerű módon visszavezethető kompakt Ω esetére, részletesen lásd például az [1] könyvben.

4. fejezet

A divergenciatétel

Érdekes, hogy néhány évvel ezelőtt ugyanezt a kérdést tette fel ugyanebben a teremben egy matematikus, akit úgy hívtak, hogy . . . Lebesgue.

Jean Leray (1906–1998)

A fejezet tartalma. Értelmezzük tartományok peremének különféle simasági tulajdonságait, majd skalármező felszíni integrálját és vektormező felületi integrálját értelmezzük. Ezután kimondjuk az alapvető fontosságú Gauss–Osztrogradszkij-tételt, és ehhez kapcsolódóan pedig emlékeztetünk a gradiens, divergencia és rotáció fogalmaira.

4.1. Tartomány peremének simasága

Korlátos tartományokon végbemenő folyamatok matematikai leírásához mindenekelőtt célszerű megfogalmaznunk, hogy mit értünk egy tartomány peremének simaságán. Szemléletesen arról van szó, hogy egy tartomány pereme k-szor folytonosan differenciálható felület, ha bármely pontjának van olyan környezete, hogy abban egy alkalmas koordináta-rendszert választva a környezetbeli peremdarab előáll mint egy k-szor folytonosan differenciálható függvény grafikonja, a tartomány belsejének a környezetbe eső része pedig ennek a grafikonnak az egyik oldalán helyezkedik el. A későbbiekben sorra kerülő tételekben az egyszer folytonosan differenciálható perem általában elegendő lenne, ám ezzel például a téglákat kizárnánk az alkalmazások köréből. Ezen megfontolás által vezérelve bevezetjük a folytonos peremnél speciálisabb, de a folytonosan differenciálhatónál általánosabb Lipschitz-folytonos perem fogalmát. Ehhez először felelevenítjük a Lipschitz-folytonosság jelentését.

4.1. Definíció. A nem üres $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény *Lipschitz-folytonos*, ha van olyan $L > 0$ valós szám, amelyre minden $x, y \in H$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

teljesül. Egy ilyen L számot szokás a függvény *Lipschitz-konstansának* nevezni.

4.2. *Történeti megjegyzés.* A Lipschitz-féle feltétel Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903) német matematikusnak a Fourier-sorok konvergenciájával foglalkozó, 1864-ben írt cikkében bukkant fel először. Később, 1868-ban erre a feltételre támaszkodva, Augustin Louis Cauchy (1789–1857) folytonos differenciálhatósági feltevésénél valamivel enyhébb keretek között igazolta közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatainak egyértelmű megoldhatóságát. Ennek tiszteletére szokás ezt az egzisztencia- és unicitási tételt Cauchy–Lipschitz-tételként emlegetni. Megjegyezzük, hogy Lipschitz mindkét cikkében az általánosabb $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|^{\alpha}$ függvénytulajdonság is megjelent (ahol $0 < \alpha \leq 1$ valós szám). Ez utóbbi feltétel később Otto Ludwig Hölder (1859–1937) német matematikusnak a Newton-potenciál (lásd a 8.2.2. alszakaszt) differenciálhatósághoz kapcsolódó munkáiban fontos szerephez jutott, ezért Hölder-folytonosság néven vált ismertté. Lipschitz nem ismerte Cauchy 1824-es munkáját, az ugyanis csak 1981-ben (!) jelent meg nyomtatásban. Ezt megelőzően csak egy tanítványa pontatlan jegyzetein keresztül ismerték; lásd A. P. Youschkevitch, *Sur les origines de la „méthode de Cauchy–Lipschitz" dans la théorie des équations différentielles ordinaires*, Revue d'histoire des sciences, tome 34, No. 3-4, 1981, 209–215.

A Lipschitz-folytonos függvények egy kulcsfontosságú tulajdonságát igazolta Hans Adolph Rademacher (1892–1969) német matematikus 1919-ben.

4.3. Tétel (Rademacher)**.** *Ha $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos függvény az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon, akkor majdnem mindenütt differenciálható.*

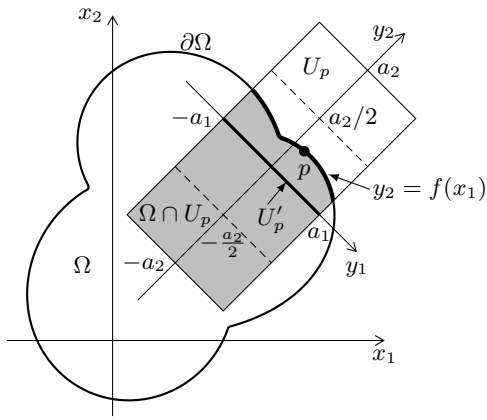
E rövid előkészület után rátérünk tartományok simasági tulajdonságainak értelmezésére a [66] könyvet követve.

4.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ korlátos tartomány Lipschitz-tartomány (vagy hogy a tartomány $\partial\Omega$ *pereme Lipschitz-folytonos* $n-1$ *dimenziós (hiper)felület*), ha bármely $p \in \partial\Omega$ pontnak létezik olyan U_p környezete és $y_1, \ldots, y_n$ új Descartes-koordináták, hogy (lásd a 4.1. ábrát)

a) az új koordinátákban U_p egy tégla:

$$U_p = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\},$$

ahol a_j $(j = 1, \ldots, n)$ alkalmas pozitív számok;



4.1. ábra. Lipschitz-tartomány két dimenzióban

b) található olyan Lipschitz-folytonos f függvény, amely az

$$U'_p = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : -a_j < y_j < a_j, 1 \le j \le n-1\}$$

halmazon van értelmezve oly módon, hogy

$$|f(y_1, \dots, y_{n-1})| \le a_n/2 \text{ minden } (y_1, \dots, y_{n-1}) \in U'_p \text{ esetén,}$$

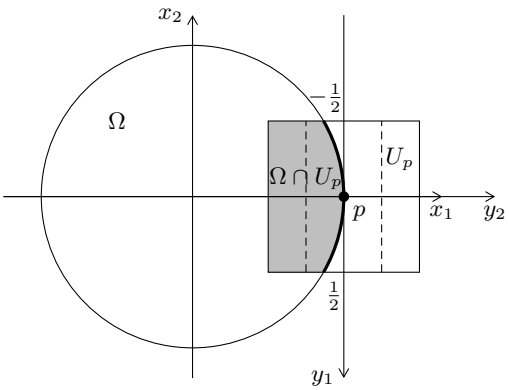
továbbá

$$\Omega \cap U_p = \{(y_1, \dots, y_n) \in U_p : y_n < f(y_1, \dots, y_{n-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap U_p = \{(y_1, \dots, y_n) \in U_p : y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1})\}.$$

A Lipschitz-folytonosság feltételét k-szor ($0 \le k \le \infty$) folytonosan differenciálható simaságra cserélve a C^k *tartomány* vagy *k-szor folytonosan differenciálható peremű tartomány* fogalmát nyerjük.

4.5. *Megjegyzés.* A különféle simasági tulajdonságok definícióiban a szakirodalom nem egységes. Némileg eltérő értelmezés található többek között az [1, 175] könyvekben; előbbiben az $\mathbb{R}^n$-be beágyazott sokaságok, utóbbiban a lokálisan téglaszerű tartományok játsszák a fő szerepet. Folytonosan differenciálható esetben (az implicitfüggvény-tétel miatt) az előforduló definíciók rendszerint egymással ekvivalensek, gyengébb simaság esetén azonban akadhatnak különbségek.

Az első látásra talán kissé bonyolultnak tűnő definíciót érdemes két konkrét példán megvilágítanunk: a kör és a négyzet két dimenzióban.



4.2. ábra. A körlap mint sima peremű tartomány

4.6. Példa. Legyen

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

az origó középpontú nyílt egységkörlap a síkon, és válasszuk a $p = (1, 0)$ perempontját. Tekintsük ekkor például az

$$U_p = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x_1 < \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} < x_2 < \frac{1}{2}\right\}$$

környezetet, amely a koordinátata-rendszer 90°-kal való elforgatása és p-be történő eltolása után (lásd a 4.2. ábrát) egy téglaként fogható fel. A transzformáció formálisan az

$$\begin{cases} y_1 = x_2, \\ y_2 = x_1 - 1 \end{cases}$$

új Descartes-koordináták bevezetését jelenti, ezáltal

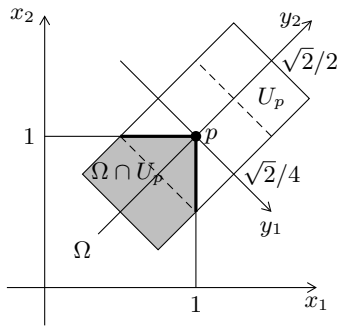
$$U_p = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} < y_1 < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < y_2 < \frac{1}{2}\right\},$$

tehát a 4.4. Definíció a) részének kívánalma $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ mellett megvalósul. Ekkor

$$U_p' = \left\{y_1 \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < y_1 < \frac{1}{2}\right\}.$$

Mivel az eredeti koordináta-rendszerben

$$\Omega \cap U_p = \left\{(x_1, x_2) \in U_p : x_1 < \sqrt{1 - x_2^2}\right\},$$



4.3. ábra. A négyzetlap mint Lipschitz-tartomány

$$\partial\Omega \cap U_p = \left\{ (x_1, x_2) \in U_p : x_1 = \sqrt{1 - x_2^2} \right\},$$

ezért az $f\colon U_p' \to \mathbb{R}$, $f(y_1) = \sqrt{1 - y_1^2} - 1$ akárhányszor differenciálható függvény választásával az új koordinátákban fennáll

$$\Omega \cap U_p = \{(y_1, y_2) \in U_p : y_2 < f(y_1)\},$$
$$\partial\Omega \cap U_p = \{(y_1, y_2) \in U_p : y_2 = f(y_1)\},$$

sőt ezenfelül $y_2 \in U_p'$ esetén

$$-\frac{a_2}{2} = -\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \le f(y_2) \le 0 < \frac{1}{4} = \frac{a_2}{2}$$

is teljesül. Hasonló módon láthatjuk, hogy Ω többi perempontja szintén kielégíti a C^∞ simaságra kirótt feltételeket, ezért Ω egy C^∞ peremű tartomány.

4.7. Példa. Egy másik példaként tekintsük az

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$$

nyílt egységnégyzetet a síkon és annak $p = (1, 1)$ perempontját. Legyen ekkor

$$U_p = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1 + x_2 < 3, -\frac{1}{2} < x_1 - x_2 < \frac{1}{2} \right\},$$

amely a koordináta-rendszer 45°-kal való elforgatása, majd a p pontba való eltolása után (lásd a 4.3. ábrát) az új

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2 - 2) \end{cases}$$

Descartes-koordináták bevezetésével tégla alakot ölt:

$$U_p = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\sqrt{2}}{4} < y_1 < \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\},$$

vagyis a 4.4. Definíció a) részének kívánalma $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ és $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ választással teljesül. Ekkor

$$U_p' = \left\{ y_1 \in \mathbb{R} : -\frac{\sqrt{2}}{4} < y_1 < \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy az $f\colon U_p' \to \mathbb{R}$, $f(y_1) = -|y_1|$ szakaszonként lineáris, tehát Lipschitz-folytonos függvény választásával

$$\Omega \cap U_p = \{(y_1, y_2) \in U_p : y_2 < f(y_1)\},$$
$$\partial\Omega \cap U_p = \{(y_1, y_2) \in U_p : y_2 = f(y_1)\},$$

továbbá

$$-\frac{a_2}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \le f(y_1) \le 0 < \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{a_2}{2},$$

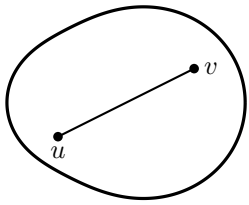
így a p perempont kielégíti a Lipschitz-simaság feltételét. Hasonlóan igazolható, hogy Ω többi perempontjára is fennállnak a Lipschitz-simaság által megkövetelt tulajdonságok, ennek következtében Ω egy Lipschitz-tartomány. Ezenkívül meggondolható, hogy Ω a C^1 simaság feltételeit viszont már nem teljesíti, vagyis nem C^1 tartomány.

Lipschitz-tartományok egy fontos osztályát alkotják a konvex halmazok.

4.8. Definíció. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *konvex*, ha bármely $u, v \in \Omega$ esetén az u és v pontokat összekötő

$$[u, v] = \{u + t(v - u) : t \in [0, 1]\}$$

szakasz az Ω halmazban fekszik (lásd a 4.4. ábrát).



4.4. ábra. Konvex halmaz

Igazolható (lásd [66]) az alábbi tétel.

4.9. Tétel. *Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és konvex tartomány, akkor a pereme Lipschitz-folytonos.*

Korlátos Lipschitz-tartományok esetében (többek között Rademacher tétele miatt) a perem majdnem minden pontjában értelmezhető az érintő hipersík (például mint függvénygrafikon érintősíkja) és az erre merőleges, a tartományból kifelé mutató, egység hosszúságú normálvektor (lásd a 4.5. ábrát).

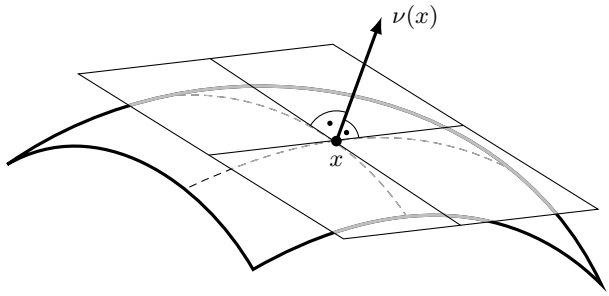
4.10. Definíció. Ha az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-folytonos peremű korlátos tartomány x perempontjában létezik érintősík, akkor ennek a síknak a tartományból kifelé mutató, egység hosszú normálvektorát a perem *külső normálisának* nevezzük és $\nu(x)$-szel jelöljük.

A perem simasági tulajdonságaival felvértezve készen állunk a peremen vett integrálok fogalmainak áttekintésére. Kétféle integrált szemléltetünk: a peremen értelmezett skalár (azaz szám) értékű függvény felszíni integrálját, valamint vektor értékű függvény felületi integrálját.

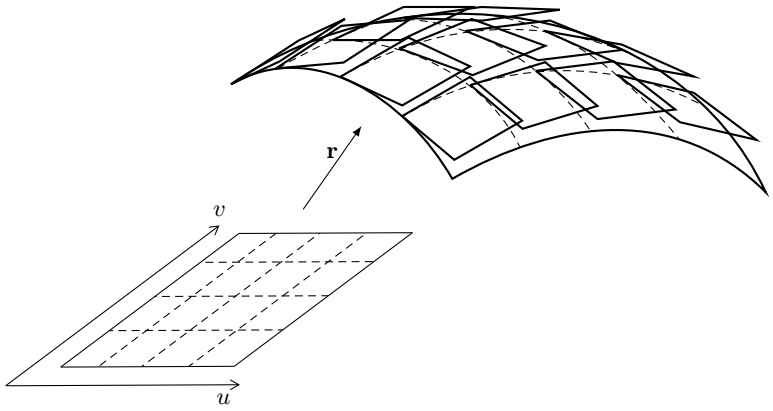
4.11. Elnevezés. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nem üres halmaz. Ekkor egy $\Omega \to \mathbb{R}$ típusú (tehát szám értékű) függvényt *skalármezőnek*, egy $\Omega \to \mathbb{R}^n$ típusú (tehát vektor értékű) függvényt vektormezőnek hívunk. Olykor, a vektorértékűség hangsúlyozása érdekében a vektormezőket félkövér betűkkel fogjuk jelölni.

4.2. Skalármező felszíni integrálja

Skalármező felszíni integráljára vezető talán legkézenfekvőbb probléma a tömeg kiszámítása sűrűségfüggvény segítségével. Képzeljük el, hogy az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$



4.5. ábra. Külső normális



4.6. ábra. Érintő paralelogrammák

korlátos Lipschitz-tartomány $\partial\Omega$ pereme egy elhanyagolható vastagságú lemezfelület, amelynek tömegsűrűség-függvénye $\varrho\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Szemléletesen arról van szó, hogy a felület bármely $x \in \partial\Omega$ pontja körüli kicsiny felületdarab tömege az adott pontbeli sűrűség és a felületdarab felszínének szorzata. Az egész felület tömegét (legalábbis annak egy közelítését) tehát úgy kaphatjuk meg, hogy a felületet kicsiny felületdarabokra osztva az egyes darabok tömegét összegezzük. Ha ϱ tömegsűrűség helyett töltéssűrűséget jelöl, akkor az iménti okoskodással a felületen lévő össztöltést kapjuk meg. A gondolatmenet jól láthatóan a felszín fogalmára épít, amely valójában egy integrál segítségével értelmezhető. A témakör szabatos felépítése differenciálgeometriai és mértékelméleti megfontolásokat igényel, amelyek részletezése meghaladja könyvünk kereteit (egy tömör összefoglalás található például a [175] könyvben; a precíz tárgyalást illetően a [203, 204] jegyzeteket ajánljuk). Hogy mégis megfelelő képünk legyen a felszíni integrál fogalmáról, egy speciális esetben nagy vonalakban, a pontos definíciókat mellőzve vázoljuk a háttérben rejlő gondolatokat, mert a későbbi alkalmazások szempontjából lényegesebbnek érezzük a fogalom szemléltetését, mint az aprólékos kidolgozását.

Tegyük fel, hogy az $S \subset \mathbb{R}^3$ felület az $\mathbf{r}\colon [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to S$ m. m. differenciálható, bijektív paraméterezéssel adható meg, ahol $T = [a_1, b_1] \times$ $\times\, [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ tégla, amely az úgynevezett paramétertartomány. Ez azt jelenti, hogy a T paramétertartomány $\mathbf{r}$ általi képe az S felület. (Vegyük észre, hogy Lipschitz-tartományok esetében a felület bármely pontja körüli kis felületdarab alkalmas koordináta-rendszerben előáll mint egy téglán értelmezett f Lipschitz-folytonos függvény grafikonja, így ekkor például $\mathbf{r}(u, v) =$

$= (u, v, f(u, v))$ a felületdarab egy paraméterezését adja.) Tekintsük az $[a_1, b_1]$ és $[a_2, b_2]$ intervallumok tetszőleges

$$a_1 = u_0 < u_1 < \cdots < u_m = b_1$$

és

$$a_2 = v_0 < v_1 < \cdots < v_k = b_2$$

felosztásait; ezek a T tégla $T_{ij} := [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1; j = 0, 1, \ldots, k-1)$ kis téglákból álló téglaszerű felosztását adják. Az $u = u_i$ és $v = v_j$ egyenesek T-be eső szakaszainak képei a felületen az úgynevezett paramétervonalak, amelyek a felületet vonalnégyszögekre osztják. A T_{ij} tégla $\mathbf{r}$ szerinti képeként adódó felületi vonalnégyszöget közelítsük az $\mathbf{r}(u_i, v_j)$ ponton áthaladó paramétervonalak $\partial_1\mathbf{r}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i)$ és $\partial_2\mathbf{r}(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j)$ érintővektorai által kifeszített P_{ij} érintő paralelogrammával. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az (u_i, v_j) pontban az $\mathbf{r}$ függvényt az

$$\ell(u, v) = \mathbf{r}(u_i, v_j) + \partial_1\mathbf{r}(u_i, v_j)(u - u_i) + \partial_2\mathbf{r}(u_i, v_j)(v - v_j)$$

elsőrendű Taylor-polinomjával közelítjük, és vesszük a T_{ij} kis tégla ℓ általi képét, mintha „mozaikszerűen kicsempéznénk" a felületet (lásd a 4.6. ábrát). Ha $\lambda(P_{ij})$ jelöli a P_{ij} paralelogramma területét (kétdimenziós Lebesgue-mértékét), akkor az S felület felszínének egy közelítése az érintő paralelogrammák területösszege:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda(P_{ij}).$$

Ismeretes, hogy két vektor által kifeszített paralelogramma területe éppen a két vektor vektoriális szorzatának hossza, így

$$\begin{aligned}\lambda(P_{ij}) &= |(\partial_1\mathbf{r}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i)) \times (\partial_2\mathbf{r}(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j))| = \\ &= |\partial_1\mathbf{r}(u_i, v_j) \times \partial_2\mathbf{r}(u_i, v_j)|\,(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j),\end{aligned}$$

ahol $(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)$ éppen a T_{ij} tégla területe. A felszín egy közelítése:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} |\partial_1\mathbf{r}(u_i, v_j) \times \partial_2\mathbf{r}(u_i, v_j)|\,\lambda(T_{ij}),$$

ami nem más, mint az

$$\int_T |\partial_1\mathbf{r}(u, v) \times \partial_2\mathbf{r}(u, v)|\,du\,dv$$

integrál egy közelítőösszege. Kézenfekvő tehát az S felület felszínét (felszíni mértékét) az iménti integrállal definiálni (feltéve, hogy létezik). Rögtön

érdemes megemlítenünk, hogy ha a szóban forgó felület egy f megfelelően sima függvény grafikonja, akkor az $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ paraméterezést választva

$$\partial_1\mathbf{r}(x,y) = (1,0,\partial_1 f(x,y)) \quad \text{és} \quad \partial_2\mathbf{r}(x,y) = (0,1,\partial_2 f(x,y)),$$

így

$$\partial_1\mathbf{r} \times \partial_2\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \partial_1 f \\ 0 & 1 & \partial_2 f \end{vmatrix} = (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1),$$

ennélfogva a felszínre

$$\int_T \sqrt{1 + (\partial_1 f(x,y))^2 + (\partial_2 f(x,y))^2}\, dx\, dy \tag{4.1}$$

adódik.

A felszíni integrál értelmezésekor hasonlóan járhatunk el. A szakasz elején vázolt okoskodást úgy célszerű módosítani, hogy a felületnek a paramétervonalak által meghatározott vonalnégyszögekre való felosztását tekintjük, majd e négyszögeket az érintő paralelogrammákkal közelítjük. Ekkor egy kicsiny felületdarab tömege körülbelül $\varrho(\mathbf{r}(u_i,v_j))\lambda(P_{ij})$ (itt a sűrűségfüggvény értékét akár egy $\mathbf{r}(\xi_i,\eta_j)$ pontban is vehetnénk, ahol $(\xi_i,\eta_j) \in T_{ij}$ tetszőleges), vagyis az össztömeg közelítőleg

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1} \varrho(\mathbf{r}(u_i,v_j))\, |\partial_1\mathbf{r}(u_i,v_j) \times \partial_2\mathbf{r}(u_i,v_j)|\, \lambda(T_{ij}),$$

ami éppen az

$$\int_T \varrho(\mathbf{r}(u,v))\, |\partial_1\mathbf{r}(u,v) \times \partial_2\mathbf{r}(u,v)|\, du\, dv$$

integrál egy közelítő összege. Joggal értelmezhetjük ez utóbbi integrált a felület tömegeként.

Általában, ha az $\mathbf{r}\colon T \to S$ m. m. differenciálható, bijektív paraméterezés által meghatározott $S \subset \mathbb{R}^3$ felületen (ahol $T \subset \mathbb{R}^2$ tetszőleges mérhető, korlátos, zárt paramétertartomány) adott egy $f\colon S \to \mathbb{R}$ skalármező, akkor az f függvénynek a szóban forgó S felületen vett felszíni integrálját az

$$\int_T f(\mathbf{r}(u,v))\, |\partial_1\mathbf{r}(u,v) \times \partial_2\mathbf{r}(u,v)|\, du\, dv$$

képlettel értelmezhetjük, amelynek közelítő összegei:

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\mathbf{r}(u_i,v_j))\, |\partial_1\mathbf{r}(u_i,v_j) \times \partial_2\mathbf{r}(u_i,v_j)|\, \lambda(T_{ij}).$$

Amennyiben az S kompakt felület minden pontja körül csak lokálisan paraméterezhető a kívánt módon, akkor a felszín értelmezése az egységosztás tételének alkalmazásával történhet, amelynek segítségével a lokális paraméterezésekből származó integrálokból előállítható a felszíni integrál (a technikai részleteket illetően lásd például a [175] könyvet).

Háromnál magasabb dimenzióban a felszíni integrál analóg módon definiálható, érintő paralelogramma helyett a paraméterezés parciális deriváltvektorai által kifeszített megfelelő dimenziós paralelepipedon térfogata vehető, amely egy determináns segítségével írható fel (lásd [204, 175]).

Két dimenzióban a felület valójában egy $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ görbének tekinthető. Ilyenkor a felületi integrál a függvény ívhossz szerinti vonalintegrálját adja, ugyanis a megfelelő összegek az alábbi alakot öltik:

$$\sum_{i=0}^{m-1} f(\gamma(t_i))\,|\gamma'(t_i)|\,(t_{i+1}-t_i),$$

ami jól láthatóan

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

ívhossz szerinti vonalintegrálnak egy közelítő összege.

4.12. Jelölés. A továbbiakban egy $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ skalár értékű függvénynek az $\Omega \subset \mathbb{R}$ korlátos Lipschitz-tartomány $\partial\Omega$ peremén vett felszíni integrálját $\int_{\partial\Omega} f\,d\sigma$ (vagy ha a változót is hangsúlyozni szeretnénk, akkor $\int_{\partial\Omega} f(x)\,d\sigma_x$) jelöli, ahol σ utal a felszíni mértékre.

A felszín fogalmának ismeretében nem nehéz kiszámolni (legalábbis két és három dimenzióban) az r sugarú gömbfelület felszínét. Ezzel kapcsolatban bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt (lásd [10]).

4.13. Állítás. *Jelölje ω_n az egység sugarú és origó középpontú n dimenziós $B(0,1)$ gömb felületének felszínét, ahol $n \geq 2$. Ekkor az $S(x,r)$ gömbfelület felszíne $A(S(x,r)) = \omega_n r^{n-1}$, ahol*

$$\omega_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}, & \text{ha } n = 2k, \\ \dfrac{2^{2k+1}k!\,\pi^k}{(2k)!}, & \text{ha } n = 2k+1. \end{cases}$$

4.14. *Megjegyzés.* A 2.15. Állítás figyelembevételével valójában arról van szó, hogy a $B(x,r)$ gömb térfogata éppen $\omega_n r^n/n$, a gömbfelület felszíne pedig

éppen ennek r szerinti deriváltja. Érdekességképpen megemlítjük, hogy $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, ahol Γ a gamma-függvény:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt.$$

A gömbfelületi felszíni integrál kapcsán segítségünkre lesz még az angol nyelvű szakirodalomban *co-area formulának* nevezett összefüggés.

4.15. Állítás. *Legyen $f \in L^1(B(x_0,R))$, ahol $x_0 \in \mathbb{R}^n$ és $0 \le R \le \infty$ tetszőlegesek. Ekkor a $B(x_0,r)$ gömbön vett (térfogati) integrál az $S(x_0,r)$ gömbfelületen (a felszíni mérték szerint) vett felszíni integrál segítségével így írható:*

$$\int_{B(x_0,R)} f(x)\,dx = \int_0^R \left(\int_{S(x_0,r)} f(x)\,d\sigma_x \right) dr.$$

4.16. *Megjegyzés.* Az iménti állítás valójában egy sokkal általánosabb co-area formula speciális esete. Az előbbiekben kimondott alak n dimenziós polárkoordináták bevezetésével a Fubini-tételre vezethető vissza. Érdemes észrevennünk, hogy a co-area formulában $f = 1$ szereposztással

$$\int_{B(x_0,R)} 1\,dx = \int_0^R \left(\int_{S(x_0,r)} 1\,d\sigma_x \right) dr = \int_0^R \omega_n r^{n-1}\,dr = \frac{\omega_n R^n}{n}$$

adódik, vagyis az R sugarú n dimenziós gömb térfogata $\omega_n R^n/n$.

A co-area formula egy másik fontos alkalmazása az $|x|^\alpha$ függvények integrálhatóságával kapcsolatos. Egyváltozós analízisből jól ismert, hogy az $f(x) := |x|^\alpha$ $(x \in \mathbb{R}, x \ne 0)$ függvény a 0 pont környezetében pontosan akkor integrálható, ha $\alpha > -1$, a végtelen környezetében pedig pontosan akkor, ha $\alpha < -1$. Ezen összefüggéseknek az n dimenziós változata a következőképpen szól.

4.17. Állítás. *Legyen $f(x) := |x|^\alpha$, ahol $x \in \mathbb{R}^n, x \ne 0$. Ekkor $f|_{B(0,1)} \in L^1(B(0,1))$ pontosan abban az esetben, ha $\alpha > -n$, és $f|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B(0,1))$ pontosan akkor, ha $\alpha < -n$.*

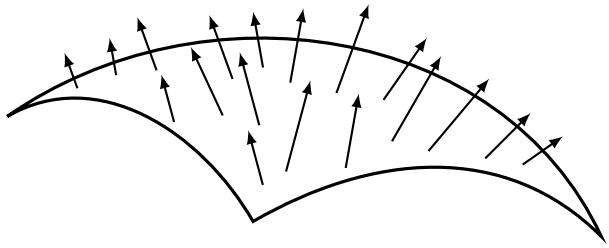
Bizonyítás. A co-area formula alapján

$$\int_{B(0,1)} |x|^\alpha\,dx = \int_0^1 \int_{S(0,1)} |x|^\alpha\,d\sigma_x\,dr,$$

ahol az r sugarú gömbfelületen $|x|^\alpha = r^\alpha$ konstansfüggvény, ezért

$$\int_{B(0,1)} |x|^\alpha\,dx = \int_0^1 \omega_n r^\alpha \int_{S(0,1)} 1\,d\sigma_x\,dr = \omega_n \int_0^1 r^{n-1+\alpha}\,dr,$$

ami pontosan akkor véges, ha $n - 1 + \alpha > -1$, vagyis $\alpha > -n$. Az állítás másik fele hasonlóan adódik. □



4.7. ábra. Felületi vektormező

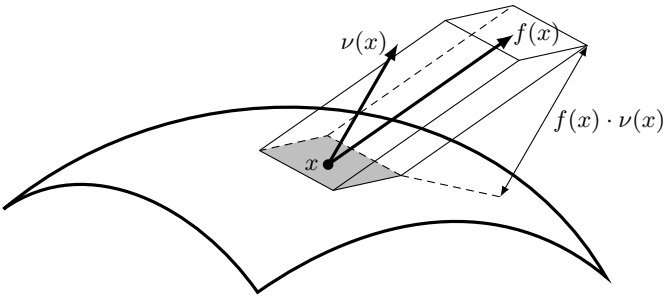
4.3. Vektormező felületi integrálja

Az előbbi szakasszal ellentétben most egy $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ vektormező integrálját szeretnénk értelmezni egy korlátos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-tartomány $\partial\Omega$ határfelülete mentén (lásd a 4.7. ábrát). Ennek fizikai motivációjául képzeljük el, hogy az f vektormező egy áramlás sebességvektorait adja meg: gondolhatunk például hő- vagy folyadékáramlásra, azzal a feltételezéssel, hogy egy adott pontban az áramlási sebesség független az időtől. Határozzuk meg ekkor az időegység alatt a tartományból a felületen kiáramló anyagmenyiséget. Legyen x az Ω tartomány peremének egy tetszőleges pontja, és tekintsünk körülötte egy piciny felületdarabot, amelyet jó közelítéssel egy érintő paralelogrammának vehetünk. Ekkor időegység alatt ezen a piciny felületdarabon kiáramló anyagmennyiség egy hasábot tölt ki (lásd a 4.8. ábrát), amelynek magassága az $f(x)$ sebességvektornak a felületre merőleges, tehát a $\nu(x)$ normális egységvektorral párhuzamos komponensének nagysága, ami éppen $f(x)$ és $\nu(x)$ skalárszorzata (negatív érték esetében befelé haladó áramlásról van szó). A hasáb (előjeles) térfogata tehát a paralelogramma területének és az $f(x) \cdot \nu(x)$ skalárszorzatnak a szorzata. Ha ezt a felület kicsiny érintő paralelogrammáira összegezzük, akkor körülbelül megkapjuk az áthaladó anyagmennyiséget. Az előző szakaszban tárgyaltak alapján világos, hogy a kapott összeg az $f \cdot \nu$ skalármező felszíni integráljának közelítő összege. Ez motiválja azt, hogy az f vektormezőnek a $\partial\Omega$ felület menti integrálját az

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, d\sigma$$

integrállal értelmezzük, ahol ν a felületi normális. A felületi integrálra a szakirodalomban többféle jelölés használatos, például

$$\int_{\partial\Omega} f \, d\mathbf{S} \quad \text{vagy} \quad \int_{\partial\Omega} f \, d\mathbf{A},$$



4.8. ábra. Kifelé áramlás az x pontban

ahol a **S** és **A** betűk az angol nyelvű surface (felület) és area (terület, felszín) szavakra utalnak, a félkövér írásmód pedig a normálvektorra.

A fizikában vektormező felületi integrálját *fluxusnak* is szokás hívni (a fluxus latin eredetű szó jelentése: áramlás).

4.4. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel

A korlátos tartományon vett térfogati integrál és a peremen vett felszíni integrál között teremt kapcsolatot az alapvető fontosságú divergenciatétel vagy más néven Gauss–Osztrogradszkij-tétel. Bizonyítás nélkül közöljük ennek skalár változatát (egy vázlatos bizonyítást adunk később a 15.19. Állításban, és egy teljes bizonyítás található a [175]könyvben).

4.18. Tétel (skalár Gauss–Osztrogradszkij-tétel)**.** *Tegyük fel, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány és $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Ekkor bármely $j = 1, \dots, n$ esetén*

$$\int_\Omega \partial_j f = \int_{\partial\Omega} f \nu_j \, d\sigma,$$

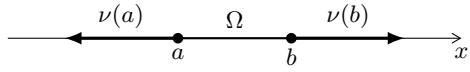
ahol ν_j a $\partial\Omega$ perem kifelé mutató ν normális egységvektorának j-edik koordinátája, továbbá $d\sigma$ jelöli a $\partial\Omega$ peremen vett felszíni mérték szerinti integrálást.

4.19. *Megjegyzés.* Mindenképpen érdemes egy pillantást vetni arra, hogy az egydimenziós esetben milyen alakot ölt a Gauss–Osztrogradszkij-tétel. Ekkor $\Omega = (a, b)$, így formálisan az a pontban a külső normális $\nu(a) = -1$, a b pontban pedig $\nu(b) = 1$ (lásd a 4.9. ábrát), ezért ismét formálisan

$$\int_{\partial\Omega} f \, d\sigma = \nu(a)f(a) + \nu(b)f(b) = f(b) - f(a).$$

A tétel tehát az

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$$



4.9. ábra. Külső normális egy dimenzióban

alakra egyszerűsödik, ami nem más, mint a klasszikus Newton–Leibniz-tétel.

Megemlítjük, hogy a skalár változat az f függvényre nézve a következő gyengébb feltevések mellett is igaz: $f \in C^1(\Omega)$ és $\partial_j f \in L^1(\Omega)$. A bizonyítás alapgondolata az, hogy $\varepsilon > 0$ esetén az

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \varepsilon\}$$

tartomány lezártján $\partial_j f$ folytonosan differenciálható, ezért alkalmazható rá a szigorúbb simasági feltételekkel megfogalmazott Gauss–Osztrogradszkij-tétel, és innen $\varepsilon \to 0+$ határátmenettel (többek között a Lebesgue-tételre támaszkodva) adódik az Ω tartományra az általánosabb simasági feltételek melletti érvényes eset.

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel skalár változatát egy $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ vektormező differenciálható koordináta-függvényeire külön-külön alkalmazva és az így adódó egyenlőségeket összegezve kapjuk, hogy

$$\int_\Omega (\partial_1 f_1 + \ldots + \partial_n f_n) = \int_{\partial\Omega} (f_1\nu_1 + \ldots + f_n\nu_n)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, d\sigma.$$

A $\partial_1 f_1 + \ldots + \partial_n f_n$ mennyiség pedig az adott vektormező egy fontos tulajdonságát hordozza magában (ezt a 4.5. szakaszban részletesebben megvizsgáljuk), ezért külön elnevezést szokás bevezetni rá.

4.20. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektormező, amelynek koordináta-függvényei differenciálhatók. Ekkor az f vektormező $x \in \Omega$ pontbeli *divergenciája*

$$\operatorname{div} f(x) := \partial_1 f_1(x) + \partial_2 f_2(x) + \ldots + \partial_n f_n(x).$$

A divergencia segítségével megfogalmazhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tétel vektor változatát, más néven a *divergenciatételt.*

4.21. Tétel (vektor Gauss–Osztrogradszkij-tétel)**.** *Tegyük fel, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány és $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, amelyre $f_j \in C^1(\overline{\Omega})$ minden $j = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor*

$$\int_\Omega \operatorname{div} f = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, d\sigma,$$

ahol ν a $\partial\Omega$ perem kifelé mutató normális egységvektora, továbbá $d\sigma$ jelöli a $\partial\Omega$ peremen vett felszíni mérték szerinti integrálást.

4.22. *Megjegyzés.* Láttuk, hogy a vektor változat a skalár alak következménye, de mindez fordítva is igaz: a vektor változatot a $(0,\dots,0,f,0,\dots,0)$ vektormezőre (ahol a j-edik kivételével mindegyik koordináta-függvény azonosan 0) alkalmazva éppen a skalár változat adódik. A tétel bizonyítása tégla esetében viszonylag egyszerű, a kétdimenziós hővezetési egyenlet kapcsán tulajdonképpen látni is fogjuk (lásd a 6.4. Megjegyzést.) Az általános eset némileg komplikáltabb, például a tartomány poliéderekkel (két dimenzióban sokszögekkel) való közelítésével történhet.

Megjegyezzük, hogy a vektor változat az f vektormezőre vonatkozóan a következő általánosabb feltételek mellett is érvényes: $f_j \in C^1(\Omega)$ minden j-re és $\operatorname{div} f \in L^1(\Omega)$. Ennek igazolása hasonlóan történhet, mint a skalár változat esetében, lásd a 4.19. Megjegyzést.

4.23. *Történeti megjegyzés.* Térfogati integráloknak felszíni integrállá történő átírása legalább a 18. századig nyúlik vissza. Például Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) olasz–francia matematikus egy 1761-es cikkében hármas integrálokat alakított át kettős integrálokká. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel skalár változatának a mai modern formájával lényegében egyenértékű alakját Carl Friedrich Gauss (1777–1855) írta fel elsőként 1813-ban a mágnességgel kapcsolatos munkájában. A vektor változatot 1826 februárjában Mihail Vasziljevics Osztrogradszkij (1801–1862) ukrán matematikus és fizikus a Párizsi Akadémián a hővezetés matematikáját tárgyaló előadásában mutatta be, de írásban csak 1828-ban jelent meg. Ugyanebben az évben Siméon Denis Poisson (1781–1840) francia matematikus egy rugalmasságtani cikkében, valamint Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861) francia matematikus (akitől a determinánsokra vonatkozó Sarrus-szabály is származik) egy, a testek folyadékban való úszásáról szóló cikkében is felbukkant a tétel. Végül mindenképpen meg kell említenünk George Green (1793–1841) angol matematikus és fizikus nevét is, akinek az elektromosságról és mágnességről szóló alapvető fontosságú művében a Gauss–Osztrogradszkij-tétellel lényegében ekvivalens Green-formulákat bizonyította. Ezekkel a 8.1.2. szakaszban foglalkozunk részletesen. A Gauss–Osztrogradszkij-tétellel kapcsolatos további történeti érdekességek a [89] cikkben olvashatók.

4.5. Gradiens, divergencia, rotáció

Ebben a szakaszban kicsit szemügyre vesszük, hogy mit fejez ki a Gauss–Osztrogradszkij-tétel vektor változata. Ahogy azt a 4.3. szakaszban szemléltettük, az $\int_{\partial\Omega} f\cdot\nu\, d\sigma$ felszíni integrál fizikai jelentése a fluxus: a határfelületen időegység alatt kiáramló anyagmennyiség. A fluxust természetesen az Ω bár-

mely x pontja körüli piciny ε sugarú $B(x,\varepsilon)$ gömb felületén is felírhatjuk, és tekinthetjük a

$$\frac{\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f\cdot\nu\,d\sigma}{\lambda(B(x,\varepsilon))}$$

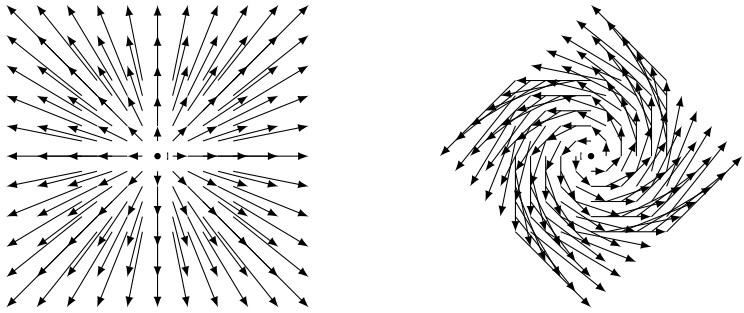
hányadost (egységnyi térfogatra eső átlagos fluxus), ahol $\lambda(B(x,\varepsilon))$ a gömb térfogatát jelöli. Kis ε esetén (pontosabban $\varepsilon\to 0+$ mellett) az előbbi hányadosra tekinthetünk úgy, mint az x pontbeli fluxussűrűségre, vagyis az adott pontbeli kiáramlás sűrűségére, más szóval forrássűrűségre. Ha ugyanis ez az érték pozitív, akkor szemléletesen az adott pont forrásként viselkedik, negatív érték esetén nyelőként.

Használjuk most fel a Gauss–Osztrogradszkij-tételt, így

$$\frac{\int_{\partial B(x,\varepsilon} f\cdot\nu\,d\sigma}{\lambda(B(x,\varepsilon))}=\frac{\int_{B(x,\varepsilon)}\operatorname{div} f}{\lambda(B(x,\varepsilon))}.$$

Vegyük észre, hogy kis ε esetén a jobb oldal, más szóval a divergencia gömbi integrálátlaga közelítőleg éppen az x pontbeli divergenciát adja (szabatosan az $\varepsilon\to 0+$ esetet kellene tekinteni). Azt kaptuk tehát, hogy a divergencia fizikailag a forrássűrűség. Ez rögtön megmagyarázza az elnevezést is, hiszen a divergencia szó jelentése széttartás, eltávolodás. A 4.10. ábra két síkbeli vektormezőt szemléltet: az egyik az $f(x,y)=(x,y)$ vektormező, amelyre minden pontban $\operatorname{div} f=2$, a másik az $f(x,y)=(-y,x)$ vektormező, amelyre mindenütt $\operatorname{div} f=0$. Megjegyezzük, hogy ha $\operatorname{div} f=0$, akkor a vektormezőt *divergenciamentesnek* vagy forrásmentesnek, az áramló anyagot (például folyadékot) pedig *összenyomhatatlannak* szokás nevezni.

4.24. *Történeti megjegyzés.* A gradiens szó, amelynek latin jelentése lépő, haladó, a 20. század elején kezdett fokozatosan fel-felbukkanni a vektoranalí-



(a) $f(x,y)=(x,y)$, $\operatorname{div} f=2$ (b) $f(x,y)=(-y,x)$, $\operatorname{div} f=0$

4.10. ábra. Vektormezők divergenciája

zisben. A divergencia szót először William Kingdon Clifford (1845–1879) angol matematikus használta 1878-ban *Elements of Dynamic* című művében. A divergencia éppen az ellentettje volt annak a mennyiségnek, amelyet James Clerk Maxwell (1831–1879) skót fizikus egy vektormező konvergenciájának nevezett (a konvergencia szó jelentése: összetartás), és 1871-ben vezetett be, majd 1873-ban az *Értekezés az elektromosságról és mágnességről* című alapvető jelentőségű művében a Maxwell-egyenletek kapcsán alkalmazta. Később a Maxwell-egyenletek egyszerűsítésekor Oliver Heaviside (1850–1925) angol matematikus a divergencia fogalmát kezdte használni.

A skalár- és vektormezőkre vonatkozó különféle differenciáloperátorokkal való számolás formalizálása érdekében kifejezetten hasznosnak bizonyul bevezetni az úgynevezett *nabla* (formális) vektort:

$$\nabla := (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n).$$

Ennek segítségével egy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalármező deriváltja (deriváltvektora), más szóval *gradiense* így írható:

$$\operatorname{grad} f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) = \nabla f.$$

Másrészt egy $f = (f_1, \dots, f_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektormező divergenciája pedig (formálisan) az alábbi alakot ölti:

$$\operatorname{div} f = \partial_1 f_1 + \ldots + f_n = \nabla \cdot f,$$

ahol a pont a skalárszorzást jelöli. (A nabla vektorra többnyire sorvektorként tekintünk, de olykor-olykor előfordulhat, hogy a jelölések egyszerűsítése érdekében kissé következetlenül oszlopvektorként gondolunk rá – ezt minden esetben jelezni fogjuk.)

4.25. *Történeti megjegyzés.* A ∇ szimbólumot, pontosabban annak elforgatott $\rhd$ változatát Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) ír matematikus és fizikus használta először, 1837-ben. A jelölést a ∇ alakban Peter Guthrie Tait (1831–1901) skót fizikus a kvaterniókról szóló 1867-es munkájában használta, és az ő hatására terjedt el széles körben. A nabla szó héberül hárfát jelent, és az elnevezés arra utal, hogy a ∇ jel nagyon hasonlít egy hárfa alakjához. Ezt a kissé humoros megnevezést William Robertson Smith (1846–1894) skót lelkész, tanító és enciklopédaszerző javasolta Tait számára. Az angol szakirodalomban egyébként használatos még a *del* operátor elnevezés is, amely a görög delta betűre utal, ezzel kifejezve azt, hogy a nabla egy feje tetejére állított Δ betűre hasonlít.

A gradiens kapcsán célszerű az iránymenti derivált előállítására is emlékeztetnünk.

4.26. Jelölés. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható skalármezőnek a $v \in \mathbb{R}^n$ egység hosszú vektor irányában vett iránymenti deriváltját $\partial_v f$ jelöli. Különösen fontos szerep fog jutni a $\partial\Omega$ felületen a ν külső normálvektora irányában vett iránymenti deriváltnak, amelyet az iméntieknek megfelelően $\partial_\nu f$ jelöl.

Könnyen igazolható az alábbi állítás.

4.27. Tétel. *Ha $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ differenciálható skalármező $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, és $v \in \mathbb{R}^n$ egység hosszú vektor, akkor*

$$\partial_v f = \operatorname{grad} f \cdot v.$$

A nabla vektorra visszatérve, kissé pongyolán úgy fogalmazhatunk, hogy a nabla skalármezővel „találkozva" gradiensként viselkedik, vektormezővel „találkozva" viszont divergenciaként. Valójában három dimenzióban egy $f = (f_1, f_3, f_3)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú differenciálható vektormező esetén értelmezhető $\nabla \times f$ is, ahol $\times$ a vektoriális szorzatot jelöli:

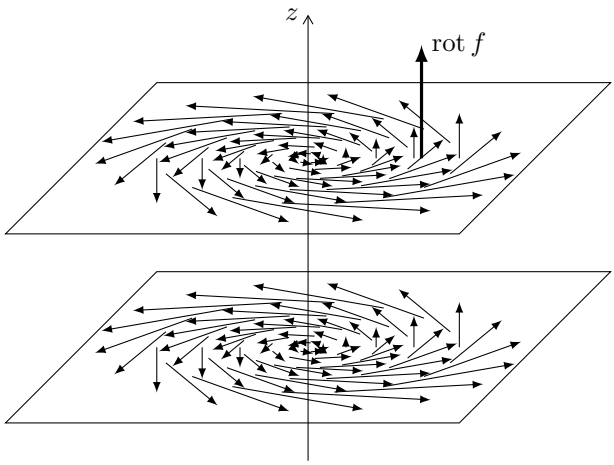
$$\nabla \times f := (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1).$$

Könnyebben megjegyezhető a képlet, ha mindezt (formális) determináns alakjában írjuk fel:

$$\nabla \times f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix},$$

ahol $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ és $\mathbf{k} = (0,0,1)$ a derékszögű koordináta-rendszer bázisvektorai. A $\nabla \times f$ mennyiséget a vektormező *rotációjának* szokás nevezni és a $\operatorname{rot} f$ jelölés használatos (angol nyelvterületen gyakori a *curl* elnevezés és emiatt a $\operatorname{curl} f$ jelölés is; a curl jelentése: csavarodás). A divergenciához hasonlóan a rotációnak ugyancsak adható szemléletes jelentés: a vektormező adott pontbeli *cirkulációsűrűségét*, más szóval *forgássűrűségét* adja meg. Ehhez képzeljük el ismét a vektormezőt mint egy folyadékáramlás sebességvektorait, és egy adott pontba helyezzünk egy piciny sugarú gömböt, amelynek középpontját rögzítjük, de a gömb a körülötte lévő áramlás hatására a középpont körül szabadon foroghat. Belátható, hogy ennek a forgásnak a tengelye éppen a rotációvektor (a jobbkézszabály szerint irányítva), és a forgás szögsebessége éppen a rotációvektor hosszának a fele. Példaképpen a 4.11. ábrán az $f(x,y,z) = (-y,x,z)$ vektormező látható, amelyre mindenütt $\operatorname{rot} f = (0,0,2)$. Ez a z tengelyen legalábbis megfelel a szemléletnek, hiszen ott a vektormező a z tengelyre merőleges, egységnyi szögsebességű forgásokat ír le.

4.28. *Történeti megjegyzés.* A curl elnevezést a divergencia kapcsán már említett James Clerk Maxwell (1831–1879) skót fizikus vezette be az *Értekezés az*



4.11. ábra. Az $f(x, y, z) = (-y, x, z)$ vektormező és rotációja

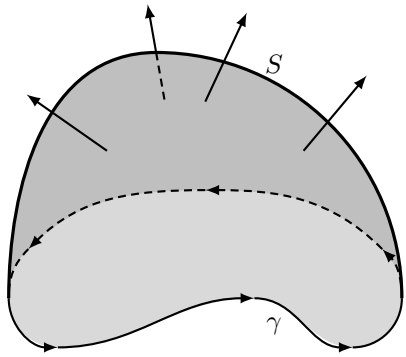
elektromosságról és mágnességről című művében, és használta az egyenletek felírásában.

A divergenciatétel párjaként három dimenzióban érvényes az úgynevezett rotációtétel vagy ismertebb nevén Kelvin–Stokes-tétel. Kissé pongyolán fogalmazva arról szól, hogy egy γ egyszerű zárt görbe által határolt (irányított) $S \subset \mathbb{R}^3$ felületen (gondoljunk például a 4.12. ábrán látható „sapkaszerű" felületre) a rotációvektor felületre merőleges komponensének felszíni integrálja megegyezik az f-nek a határgörbén vett vonalintegráljával:

$$\int_S \operatorname{rot} f \cdot \nu \, d\sigma = \int_\gamma f.$$

Mivel a jobb oldali vonalintegrál lényegében az f vektormező érintőirányú komponensének integrálja, ezért a rotációtétel szemléletesen azt fejezi ki, hogy a felületi összcirkuláció megegyezik a határgörbén vett cirkulációval. Ha $\operatorname{rot} f = 0$, akkor rotációmentes vagy *örvénymentes* vektormezőről szokás beszélni. Belátható, hogy amennyiben egy konvex nyílt halmazon értelmezett vektormező rotációmentes, akkor van primitív függvénye (más néven potenciálfüggvénye), azaz olyan skalármező, amelynek gradiense éppen az adott vektormező.

4.29. *Történeti megjegyzés.* A rotációtétel első felbukkanása William Thomson (1824–1907) skót fizikus és matematikus egy 1850-ben Sir George Gabriel Stokes (1819–1903) ír fizikus és matematikusnak írott leveléhez köthető (Thomson 1892-ben bárói rangot szerzett, nemesi nevét a Glasgow-i Egyetemhez közeli Kelvin folyóról kapta, ezért a köznyelvben talán Lord Kelvin



4.12. ábra. Egyszerű zárt görbe által határolt felület és külső normális

néven ismert igazán). Stokes később, 1854-ben a Cambridge-i Egyetemen a nagy tekintélyű Smith-díj vizsgafeladatai között tűzte ki. Bizonyítással együtt nyomtatásban először Hermann Hankel (1839–1873) német matematikus egy 1861-es, a folyadékok mechanikájával kapcsolatos pályamunkájában jelent meg, amellyel Hankel a Göttingeni Egyetem matematikai díját nyerte el.

A divergencia- és rotációtétel valójában messzemenően általánosítható és egy egységes keretbe foglalható. Az első lépést Vito Volterra (1860–1940) tette meg ebben az irányban 1889-ben, majd az ő jelöléseit egyszerűsítette Jules Henri Poincaré (1854–1912) 1899-ben az égi mechanikával foglalkozó művében. A tétel végül a differenciálformák elméletének megalapozásával nyerte el végső alakját, amely Élie Joseph Cartan (1869–1951) francia matematikus ez irányú munkásságnak köszönhető; a mai modern általános Stokes-tétel először 1945-ben jelent meg nyomtatásban. A tétel történetéről bővebben olvashatunk a [89] cikkben.

A szakasz zárásaként végül bevezetjük a Laplace-operátort, amelynek később az egész 8. fejezetet szenteljük.

4.30. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható skalármező. Ekkor

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f,$$

ahol Δ az úgynevezett *Laplace-operátor*. Ha $F = (F_1, \dots, F_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektormező, akkor a Laplace-operátort koordinátánként alkalmazzuk:

$$\Delta F := (\Delta F_1, \dots, \Delta F_n).$$

A Δ jelölés eredetét illetően lásd a 6.6. Történeti megjegyzést. Vegyük észre, hogy a ∇ vektor segítségével a Δ operátor formálisan ∇^2 alakban is írható (így kissé mulatságosan: $\nabla^2 = \Delta$).

II. rész

Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek

5. fejezet

Parciális differenciálegyenletek alapfogalmai, példák

Ha sokan nem hiszik, hogy a matematika egyszerű, az csak azért van, mert nem fogják fel, hogy milyen bonyolult az élet.

Neumann János (1903–1957)

A fejezet tartalma. Bevezetjük a parciális differenciálegyenletek tanulmányozásához nélkülözhetetlen alapfogalmakat, és megismerkedünk az egyenletek főbb típusaival. Értelmezzük továbbá a különböző mellékfeltételekkel nyert feladatok korrekt kitűzésének fogalmát. Ezt követően néhány példát mutatunk elemi módszerek segítségével megoldható parciális differenciálegyenletekre.

5.1. „PDE" és mellékfeltétel

5.1.1. A változás egyenletei

A természetben és a mindennapi élet során végbemenő fizikai, kémiai, biológiai, közgazdasági stb. folyamatok különböző állapotváltozók segítségével írhatók le, amelyek rendszerint térben és időben folyamatosan változnak. Gondoljunk például egy szoba levegőjének hőmérsékletére vagy egy gitár megpengetett húrjának alakváltozására, esetleg egy populáció egyedszámának növekedésére, csökkenésére vagy a tőzsdei részvényárfolyamok ingadozására. Az ilyen és ehhez hasonló folyamatok állapotváltozói a legtöbb esetben olyan

egyenleteknek tesznek eleget, amelyekben a változónak az idő és tér szerinti deriváltjai is szerepelnek, ezeket hívjuk *parciális differenciálegyenleteknek*.

Könnyen belátható, hogy az egyenletek önmagukban általában nem elegendőek az állapotváltozók egyértelmű meghatározására, hiszen például a szoba levegőjének mindenkori hőmérsékletéhez ismernünk kell a fal (más néven a perem) hőmérsékletét is, és szükségünk van egy korábbi (más szóval kezdeti) időpontbeli hőmérsékleti adatra. Hasonlóan, egy megpengetett gitárhúr vagy egy megrántott kötél alakjának egyértelmű leírásához egy kezdeti alakra és egy kezdeti sebességeloszlásra is szükség van, továbbá a húr vagy kötél két végpontjának (peremének) viselkedését szintén ismernünk kell. A különböző folyamatokban számos egyéb információ megadása is indokolt lehet, amelyeket összefoglaló néven *mellékfeltételeknek* hívunk. Az egyenletek a mellékfeltételektől függően igen változatos problémákat határoznak meg, amelyek megoldásait, például differenciálhatóság szempontjából, többféle értelemben kereshetjük. Már ebben a rövid kis motivációs szakaszban is több alapvető fogalom bukkant fel; az alábbiakban ezek szabatos bevezetésére térünk rá.

5.1.2. Parciális differenciálegyenlet fogalma

A magasabb rendű parciális deriváltak tömörebb jelölése érdekében a 3.1. szakaszban bevezettük a multiindexes jelölésmódot, amelyet innentől kezdve használunk.

5.1. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ tartomány. Jelölje N valamely adott m nemnegatív egész szám esetén azon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multiindexek számát, amelyekre $|\alpha| \leq m$, és legyen $G \subset \mathbb{R}^N$ tartomány. Tekintsünk egy $(n+N$ változós) $F\colon \Omega \times G \to \mathbb{R}$ függvényt, amelynek simasági tulajdonságait a konkrét problémák során fogjuk megmondani. Keressünk ekkor olyan $u \in \in C^m(\Omega)$ függvényt, amelyre

$$F(x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x), \dots, \partial_n^m u(x)) = 0 \quad (x \in \Omega), \tag{5.1}$$

vagy tömörebben

$$F \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \dots, \partial_n^m u) = 0, \tag{5.2}$$

ahol id az identitás (azaz $\mathrm{id}(x) = x$ minden x-re). Az (5.1) vagy az egyenrangú (5.2) egyenletet *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük (gyakran tömören PDE). Az ezt kielégítő m-szer folytonosan differenciálható függvényeket a *parciális differenciálegyenlet klasszikus megoldásainak* mondjuk, az m számot pedig a parciális differenciálegyenlet *rendjének* hívjuk.

Az iméntiek alapján tehát egy parciális differenciálegyenlet klasszikus megoldása általában legalább annyiszor folytonosan differenciálható függvény,

mint amennyi az egyenlet rendje (ám bizonyos esetekben nem követeljük meg a megoldás összes, legfeljebb m-edrendű parciális deriváltjának létezését és folytonosságát, hanem csupán azokét, amelyek a differenciálegyenletben előfordulnak). A 15. fejezetben értelmezni fogjuk nem feltétlenül folytonosan differenciálható megoldások fogalmát is, ezeket *gyenge* vagy *általánosított megoldásoknak* hívjuk majd.

5.1.3. Parciális differenciálegyenletek főbb típusai

A különféle alkalmazásokban előforduló parciális differenciálegyenletek alapján célszerű az egyenleteknek néhány speciális típusát megkülönböztetni. A számunkra fontos főbb típusok a következők.

- *Kvázilineáris parciális differenciálegyenletek*:

$$\sum_{|\alpha|=m} \big(a_\alpha \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n^{m-1} u)\big)\partial^\alpha u = f \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n^{m-1} u),$$

  ahol $a_\alpha, f\colon \Omega\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| \le m$) adott függvények. Ezek az egyenletek tehát az egyenletben előforduló legmagasabb rendű deriváltak lineáris kombinációját tartalmazzák oly módon, hogy az együtthatófüggvények csak az egyenlet rendjénél alacsonyabb rendű deriváltaktól és a független változótól függhetnek. A legmagasabb rendű deriváltakat nem tartalmazó a_α és f tagokban bármilyen függést megengedünk.

- *Főrészükben lineáris* (más néven *szemilineáris*) *parciális differenciálegyenletek*:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha u = f \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n^{m-1} u),$$

  ahol $a_\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| = m$), $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ adott függvények. Az ilyen típusú egyenletek ugyancsak az egyenletben előforduló legmagasabb rendű deriváltak lineáris kombinációját tartalmazzák, ám az együtthatófüggvények csak a független változótól függhetnek. Az egyenlet rendjénél alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmazó tagokban ismét bármilyen függést megengedünk, ezt a jobb oldali f függvény jelképezi. A (legmagasabb rendű deriváltakat tartalmazó) bal oldalt az egyenlet *főrészének* nevezzük.

- *Lineáris parciális differenciálegyenletek*:

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha u = f,$$

ahol $a_\alpha, f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| \leq m$) adott függvények. Az ilyen típusú egyenlet tehát az összes, legfeljebb m-edrendű deriváltban lineáris, és az együtthatófüggvények, valamint a jobb oldali függvény csak a független változótól függhet. Amennyiben $f = 0$, akkor az egyenletet *homogénnek* hívjuk, egyébként *inhomogén egyenletről* beszélünk.

- *Állandó együtthatós lineáris parciális differenciálegyenletek*:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f,$$

ahol $a_\alpha \in \mathbb{R}$ ($|\alpha| \leq m$) konstansok és $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ adott függvény. Ezek az egyenletek tehát a lineáris egyenletek speciális esetei.

5.1.4. Mellékfeltételek, korrekt kitűzésű feladatok

Egy parciális differenciálegyenlet megoldása általában nem egyértelmű, ezért rendszerint további feltételeket kell szabnunk a megoldásra nézve. Az időben és térben változó folyamatokat leíró egyenletekhez különféle feltételeket írhatunk elő, ezeket összefoglaló néven *mellékfeltételeknek* nevezzük. E feltételek gyakran a fizikai meggondolásokból természetesen adódnak, mint ahogy ezt a bevetőben is említettük, és a későbbiekben konkrét példákon keresztül szintén látni fogjuk. A mellékfeltételek fontosabb típusai a következők.

- *Peremfeltétel*: ha előírjuk a megoldásnak vagy esetleg valamilyen rendig a deriváltjainak (vagy akár azok bizonyos összegeinek) az értékeit az Ω tartomány határán (más szóval peremén) vagy annak egy részhalmazán, akkor *peremfeltételről* beszélünk, és így kapjuk a *peremérték-feladatot*. Amennyiben a szóban forgó kifejezéseket azonosan nullaként írjuk elő, akkor a peremfeltétel *homogén*, különben pedig *inhomogén*.

- *Kezdeti feltétel*: időtől függő folyamatok esetén előírhatjuk a megoldásnak és esetleg valamilyen rendig az idő változója szerinti deriváltjainak az értékeit egy kiindulási időpillanatban, ekkor *kezdeti feltételről* beszélünk, és így nyerjük a *kezdetiérték-feladatot*, más néven *Cauchy-feladatot*.

- *Kezdeti és peremfeltétel*: előfordulhat (többek között korlátos tartományon végbemenő időfüggő feladatok esetén), hogy *kezdeti és peremfeltételre* egyaránt szükség van, ez esetben *vegyes feladatról* (esetleg *kezdeti-peremérték-feladatról*) beszélünk.

5.2. *Történeti megjegyzés.* A Cauchy-feladat elnevezés bevezetése Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) francia matematikusnak köszönhető, aki a

témakör elméletét megalapozó könyvének címében is használta (lásd [70]). Hadamard szerint a Cauchy-feladat a közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatainak megfelelője parciális differenciálegyenletekre. A közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték-feladatok elméletének megalapozója Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) francia matematikus volt, az ő tiszteletére használta Hadamard a Cauchy-feladat elnevezést.

Hadamard a matematika szinte minden ágában maradandót alkotott. A hatványsorok elméletéből mindenki számára jól ismert Cauchy–Hadamard-tétel az ő nevét (is) viseli. Hadamard 1896-ban Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866–1962) belga matematikussal egy időben, de tőle függetlenül igazolta a prímszámtételt. Érdekesség, hogy de la Vallée Poussin 96, Hadamard 97 éves korában hunyt el, és a két matematikus élete szinte ugyanazokra az évekre esett.

Egy konkrét egyenlet kapcsán gyakran komoly feladat a megfelelő mellékfeltételek megadása, amellyel a matematikai probléma egy adott folyamat vagy jelenség reális modelljének tekinthető, és bizonyos természetes módon elvárt tulajdonságokkal rendelkezik. Általában az alábbi három alapvető tulajdonságot célszerű megkövetelni.

(i) *A megoldás létezése*: a szóban forgó feladatnak *létezik megoldása* az adott függvényosztályban.

(ii) *A megoldás egyértelműsége*: a vizsgált feladat *megoldása egyértelmű* az adott függvényosztályban.

(iii) *Stabilitás*: a *megoldás folytonosan függ az adatoktól.* Ez azt jelenti, hogy a feladatban szereplő bizonyos adatokat (például a mellékfeltételeket vagy az egyenlet jobb oldalát) „kissé” megváltoztatva a kapott megoldás „sem változik túlzottan”. E feltétel az alkalmazások szempontjából fontos, hiszen az adatok általában mérési eredményekből származnak, tehát mérési hibát tartalmaznak, és elvárjuk, hogy kis mérési hibák a feladat megoldásának csak kis hibáját idézzék elő.

5.3. Definíció. Ha egy feladat kielégíti az (i)–(iii) feltételeket, akkor *korrekt kitűzésűnek* nevezzük.

5.4. *Történeti megjegyzés.* A korrekt kitűzésű feladat alapgondolata Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) egy 1902-ben írott cikkéhez köthető, amelyben a fizikából származó bizonyos Cauchy-feladatok egyértelmű megoldhatóságának kérdését vizsgálta. A folytonos függés feltételét és ezáltal a korrekt kitűzésű feladat mai jelentését csupán két évtizeddel később fogalmazta meg Hadamard. A következő nem korrekt kitűzésű feladat Hadamard-tól származik 1917-ből.

5.5. Példa (Hadamard)**.** Tekintsük az alábbi feladatcsaládot pozitív egész k esetén:

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u_k(x,y) + \partial_2^2 u_k(x,y) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}), \\ u_k(0,y) &= \frac{1}{k}\sin ky \quad (y \in \mathbb{R}), \\ \partial_1 u_k(0,y) &= 0 \quad (y \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

A megoldásokat keressük a $C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ térben (vagyis a zárt jobb félsíkban kétszer folytonosan differenciálható függvények között). Az 5.2.5. szakaszban a változók szétválasztásának módszerével kapjuk majd, hogy

$$u_k(x,y) = \frac{1}{k}\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}\sin ky = \frac{1}{k}\cosh kx \sin ky$$

megoldás, és belátható (lásd az 5.20. Feladatot), hogy ez a szóban forgó függvényosztályban egyértelmű. A mellékfeltételben $k \to \infty$ esetén $\frac{1}{k}\sin ky \to 0$ egyenletesen, tehát határátmenetben a homogén feladatot nyerjük, amelynek az egyértelműség folytán a konstans 0 függvény az egyetlen megoldása. Ugyanakkor például rögzített $y = \frac{\pi}{2}$ esetén az u_k függvény bármely k paraméter mellett tetszőlegesen nagy értékeket is felvesz, hiszen végtelen sok y-ra $\sin ky = 1$ és

$$\frac{1}{k}\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty.$$

Mindez azt jelenti, hogy a stabilitás feltétele nem teljesül: a homogén feladatban az egyik mellékfeltételt kissé megváltoztatva a kapott megoldás lényegesen eltávolodhat a homogén feladat megoldásától. A $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$ egyenlet az úgynevezett Laplace-egyenlet (amellyel a 8. fejezetben részletesen foglalkozunk), így az eredmény úgy is fogalmazható, hogy a Laplace-egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat nem korrekt kitűzésű. Megemlítjük, hogy a feladat valójában korrekt kitűzésűvé tehető, ha a megoldást olyan függvények körében keressük, amelyek növekedésére bizonyos korlátot szabunk. További nem korrekt kitűzésű problémák szerepelnek az 5.21–5.22. Feladatokban.

5.2. Néhány elemi megoldási módszer

Az alábbiakban néhány elemi módszert mutatunk parciális differenciálegyenletek megoldására. Nem törekszünk az általánosságra, hanem a módszereket a lehető legegyszerűbb példákon szemléltetjük. Közben lépten-nyomon alkalmazzuk az integrálszámítás alaptételét: ha az F függvény differenciálható az I intervallumon és $F'(x) = 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor van olyan C valós szám, hogy $F(x) = C$ az I-n.

5.2.1. Integrálható egyenletek

Ha az egyenletben mindössze egyetlen tagban szerepelnek deriváltak, akkor kézenfekvő lehet az egyenletek többszöri integrálása.

5.6. Példa. Az integrálszámítás alaptétele apró általánosításának tekinthető, hogy az elsőrendű

$$\partial_1 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

differenciálegyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = c(y)$$

alakúak, ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény (de a c függvény differenciálhatóságát sem szükséges megkövetelni, amennyiben a szóban forgó elsőrendű parciális differenciálegyenlet megoldásától sem várjuk el a második változóban való differenciálhatóságot). Valóban, az egyenlet azt jelenti, hogy minden rögzített y esetén az $x \mapsto u(x,y)$ függvény deriváltja azonosan 0, tehát a függvény konstans. Ez a konstans minden y esetén más, így $u(x,y) = c(y)$.

Általában a lineáris

$$\partial_1 u(x,y) = f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = F(x,y) + c(y)$$

alakúak, ahol $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, amelyre $\partial_1 F(x,y) = f(x,y)$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén, továbbá $c \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. Valóban, $F(x,y)$ az egyenlet egy partikuláris megoldása, és $c(y)$ a homogén egyenlet általános megoldása az előbbiek alapján.

5.7. Példa. A másodrendű

$$\partial_1 \partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = c(x) + d(y)$$

alakúak, ahol $c, d \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Valóban, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ esetén $0 = \partial_1 \partial_2 u = \partial_2(\partial_1 u)$, vagyis az 5.6. Példa szerint $\partial_1 u(x,y) = \tilde{c}(x)$, ahol $\tilde{c} \in C^1(\mathbb{R})$, így $\tilde{c}$ egy tetszőleges $c \in C^2(\mathbb{R})$ primitív függvényét választva $u(x,y) = c(x) + d(y)$. (Ha nem követeljük meg az u függvényről az x és y szerinti kétszeres differenciálhatóságot, akkor az általános megoldás képletében a $c, d \in C^1(\mathbb{R})$ feltétel is elegendő.)

Az 5.2–5.5. Feladatokban egyéb integrálható egyenletekre találhatók példák.

5.2.2. Visszavezetés közönséges differenciálegyenletre

Előfordulhat, hogy integrálással vagy új ismeretlen függvény bevezetésével egy parciális differenciálegyenlet közönséges differenciálegyenletre vezethető vissza.

5.8. Példa. Keressük meg a

$$\partial_1\partial_2 u(x,y) + 2x\partial_2 u(x,y) = x \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{5.4}$$

másodrendű lineáris egyenlet $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásait! Legyen y rögzített, és definiáljuk a $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a $v(x;y) = \partial_2 u(x,y)$ hozzárendeléssel, ahol most y paraméter. Ekkor az (5.4) egyenlet a

$$v'(x;y) + 2xv(x;y) = x \tag{5.5}$$

alakot ölti, ahol „$'$” az x szerinti deriválást jelenti. Az (5.5) egyenlet minden rögzített y esetén egy elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet, amelyet megoldhatunk például az integráló tényező módszerével. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát e^{x^2}-tel, ekkor

$$e^{x^2}v'(x;y) + 2xe^{x^2}v(x;y) = xe^{x^2}.$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon éppen az $x \mapsto e^{x^2}v(x;y)$ függvény (x szerinti) deriváltja áll, a jobb oldalon pedig az $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$ függvény (x szerinti) deriváltja, így az egyenlet mindkét oldalát x szerint integrálva

$$e^{x^2}v(x;y) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c(y)$$

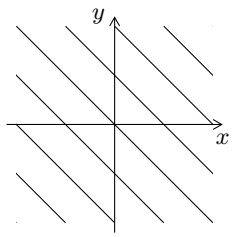
adódik. (Vigyázzunk, hogy y paraméter v-ben, ezért az integrálás során keletkező c konstans függ y-tól!) Innen rendezéssel $v(x;y) = \frac{1}{2} + c(y)e^{-x^2}$. Mivel $v(x;y) = \partial_2 u(x,y)$, ezért végül az (5.4) egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = \frac{1}{2}y + C(y)e^{-x^2} + D(x) \tag{5.6}$$

alakúak, ahol $C, D \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Megjegyezzük, hogy úgy is eljárhattunk volna, hogy a kiindulási egyenletet először integráljuk y szerint, ekkor az $x \mapsto u(x,y)$ függvényre nézve az

$$u'(x;y) + 2xu(x;y) = xy + d(x)$$

közönséges differenciálegyenletet kapjuk, amelyet az integráló tényező módszerével megoldva ugyancsak az (5.6) alakú függvényekhez jutunk.



5.1. ábra. Az $x + y = c$ egyenletű egyenesek

5.2.3. Új változók bevezetése

Gyakran célravezető, hogy új független változókat vezetünk be, és az egyenletet egy könnyebben kezelhető alakra transzformáljuk.

5.9. Példa. Tekintsük az elsőrendű lineáris

$$\partial_1 u(x,y) - \partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{5.7}$$

egyenletet. Vegyük észre, hogy az egyenlet így írható:

$$0 = \partial_1 u - \partial_2 u = (\partial_1 u, \partial_2 u) \cdot (1,-1) = \partial_{(1,-1)} u,$$

más szóval az u függvénynek az $(1,-1)$ irányban vett iránymenti deriváltja a sík minden pontjában 0. Ez azt jelenti, hogy az $(1,-1)$ irányvektorú, és ennek megfelelően $x + y = c$ egyenletű egyenesek (lásd 5.1. ábra) mentén u konstansfüggvény, így

$$u(x,y) = C(x+y),$$

ahol $C \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény.

Az iménti érvelés adhatja az ötletet egy eltérő okoskodásra, mégpedig az új $\xi = x + y$ független változó bevezetésére. A másik változót lényegében tetszőlegesen választhatjuk meg, a későbbiek szempontjából azonban célszerű az $\eta = x - y$ helyettesítés. Az így kapott transzformáció a koordinátatengelyek felcserélését, majd a koordináta-rendszer 45°-kal való elforgatását és $\sqrt{2}$-szeres nagyítását jelenti, más szóval az új bázisvektoraink

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

az új koordinátákra való áttérést az 5.2. ábra szemlélteti.

Vezessük be tehát a

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y \end{cases} \tag{5.8}$$

új független változókat. Ez kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az új $(\xi, \eta) \in \in \mathbb{R}^2$ és régi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koordináták között, hiszen az inverze

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2}, \\ y = \dfrac{\xi - \eta}{2}. \end{cases}$$

Tekintsük most az u függvényt az új változókban, azaz legyen

$$U(\xi, \eta) := u(x, y) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right),$$

és nézzük meg, hogyan alakul U-ra nézve a differenciálegyenlet (a továbbiakban a régi és új változók hangsúlyosabb megkülönböztetése céljából ∂_x, ∂_y és $\partial_\xi, \partial_\eta$ jelölésekre térünk át). A többváltozós láncszabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)) &= (\partial_\xi U(\xi,\eta), \partial_\eta U(\xi,\eta)) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= (\partial_\xi U(\xi,\eta), \partial_\eta U(\xi,\eta)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_\xi U + \partial_\eta U, \\ \partial_y u = \partial_\xi U - \partial_\eta U. \end{cases} \tag{5.9}$$

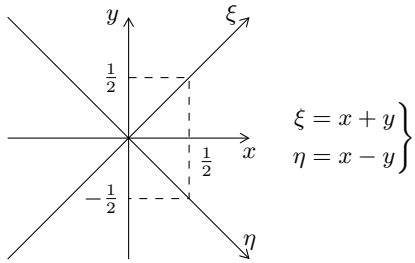
Ebből következően $\partial_x u - \partial_y u = 2\partial_\eta U$, vagyis az (5.7) egyenlet U-ra nézve a $\partial_\eta U = 0$ alakot ölti. Ennek megoldása (az 5.7. Példa alapján) $U(\xi, \eta) = C(\xi)$, tehát

$$u(x, y) = C(x + y),$$

ahol $C \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges. Érdemes megjegyeznünk, hogy az (5.9) összefüggést gyakran érdemesebb a függvények mellőzésével csupán magukra a parciális deriváltak differenciáloperátoraira felírni:

$$\begin{cases} \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta, \\ \partial_y = \partial_\xi - \partial_\eta. \end{cases} \tag{5.10}$$

Az operátorokat ugyanis formálisan hatványozhatjuk, összeszorozhatjuk, sőt a Young-tétel miatt (klasszikus megoldásokról lévén szó) fel is cserélhetjük őket. A következő példában rögtön hasznát is vesszük ennek.



5.2. ábra. Áttérés új koordinátákra

5.10. Példa. Az 5.9. Példában alkalmazott (5.8) koordináta-transzformáció a

$$\partial_1^2 u(x,y) - \partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{5.11}$$

egyenlet megoldására is használható. A deriváltakra vonatkozó (5.10) összefüggések alapján

$$\begin{aligned} \partial_x^2 &= (\partial_\xi + \partial_\eta)^2 = \partial_\xi^2 + 2\partial_\xi\partial_\eta + \partial_\eta^2, \\ \partial_y^2 &= (\partial_\xi - \partial_\eta)^2 = \partial_\xi^2 - 2\partial_\xi\partial_\eta + \partial_\eta^2, \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &= \partial_\xi^2 U + 2\partial_\xi\partial_\eta U + \partial_\eta^2 U, \\ \partial_y^2 u &= \partial_\xi^2 U - 2\partial_\xi\partial_\eta U + \partial_\eta^2 U, \end{aligned} \tag{5.12}$$

így $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 4\partial_\xi\partial_\eta U$, ezért az (5.11) egyenlet alakja

$$4\partial_\xi\partial_\eta U = 0. \tag{5.13}$$

Ez persze nem meglepő, mert oly módon is okoskodhattunk volna, hogy formálisan

$$\partial_x^2 - \partial_y^2 = (\partial_x + \partial_y)(\partial_x - \partial_y) = 4\partial_\xi\partial\eta.$$

Az így kapott (5.13) egyenlet általános megoldása (az 5.7. Példa alapján) $U(\xi,\eta) = c(\xi) + d(\eta)$, vagyis az (5.11) egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = C(x+y) + D(x-y)$$

alakúak, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Megjegyezzük, hogy (ha az első változót az időnek tekintjük, akkor) az (5.11) egyenlet az úgynevezett *egydimenziós hullámegyenlet*, amellyel a későbbiekben részletesen is foglalkozunk.

Az egyenletek differenciáloperátoros alakban való felírása a célravezető új változók felismerésében is segíthet. Ennek szemléltetésére maradjunk továbbra is az 5.10. Példánál, és tegyük fel, hogy senki nem súgta meg nekünk a megfelelő helyettesítést. Észrevettük azonban, hogy

$$\partial_x^2 - \partial_y^2 = (\partial_x + \partial_y)(\partial_x - \partial_y),$$

ezért olyan (ξ, η) változókat szeretnénk találni, amelyekkel fennállnak a

$$\begin{aligned} \partial_\xi &= \partial_x + \partial_y, \\ \partial_\eta &= \partial_x - \partial_y \end{aligned} \tag{5.14}$$

összefüggések, hiszen ebben az esetben a

$$\partial_x^2 - \partial_y^2 = \partial_\xi \partial_\eta$$

átalakítást nyerjük. Legyen tehát $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ egy egyelőre ismeretlen invertálható mátrix, és tekintsük a

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

új változókat. Ha ismét használjuk az $U(\xi, \eta) = u(x, y)$ függvényt, akkor a láncszabály szerint

$$(\partial_x u, \partial_y u) = (\partial_\xi U, \partial_\eta U) S,$$

ahol a jobb oldalon egy sorvektort szorzunk jobbról az S mátrixszal. Az egyenlőség mindkét oldalát az S inverzével jobbról szorozva, és csupán a differenciáloperátorokat meghagyva:

$$(\partial_\xi, \partial_\eta) = (\partial_x u, \partial_y u) S^{-1}.$$

Ebből már világosan látszik, hogy ha az (5.14) összefüggéseket szeretnénk megkapni, akkor

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

így

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az új változóink tehát

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x+y}{2}, \\ \eta &= \frac{x-y}{2}, \end{aligned}$$

amelyek lényegében megegyeznek az 5.9. és az 5.10. Példákban alkalmazott (5.8) változókkal.

5.11. Példa. Határozzuk meg a

$$\partial_1^2 u(x,y) - 2\partial_1\partial_2 u(x,y) - 3\partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

másodrendű differenciálegyenlet $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásainak általános alakját! Először is célszerű áttérni a

$$\partial_x^2 u - 2\partial_x\partial_y u - 3\partial_y^2 u = 0 \tag{5.15}$$

jelölésre, mert koordináta-transzformációt fogunk végrehajtani. Vegyük észre, hogy a ∂_x és ∂_y operátorok segítségével az (5.15) egyenlet

$$(\partial_x + \partial_y)(\partial_x - 3\partial_y)u = 0$$

alakba írható. Érdemes lenne tehát áttérni (ξ, η) koordinátákra úgy, hogy

$$\begin{cases} \partial_\xi = \partial_x + \partial_y, \\ \partial_\eta = \partial_x - 3\partial_y \end{cases} \tag{5.16}$$

teljesüljön, hiszen ekkor az (5.15) egyenlet $v(\xi,\eta) = u(x,y)$ függvényre a $\partial_\xi\partial_\eta v = 0$ alakot ölti, amely egyenletet az 5.7. Példában már tárgyaltuk, és általános megoldása az egyes változók szerinti integrálással adódik:

$$v(\xi,\eta) = C(\xi) + D(\eta).$$

Az (5.16) transzformáció mátrixos alakja

$$(\partial_\xi, \partial_\eta) = (\partial_x, \partial_y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

így a jelen példa előtt foglaltak alapján

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

azaz

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - 3\eta,$$

ezért

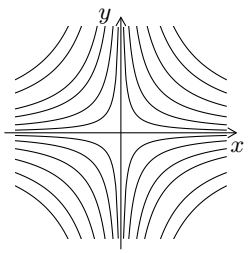
$$\begin{cases} \xi = \dfrac{3x+y}{4}, \\ \eta = \dfrac{x-y}{4}. \end{cases}$$

Végeredményben tehát $v(\xi,\eta) = \tilde{f}(\frac{3x+y}{4}) + \tilde{g}(\frac{x-y}{4})$, vagyis az (5.15) egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = F(3x+y) + G(x-y)$$

alakúak, ahol $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

Az új változók bevezetésének módszerére a 7. fejezetben a másodrendű lineáris differenciálegyenletek kanonikus alakra hozatalának kérdése kapcsán még visszatérünk.



$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= a(x(t),y(t))\\ \dot{y}(t) &= b(x(t),y(t))\end{aligned}\right\}$$

5.3. ábra. Karakterisztikák

5.2.4. Elsőrendű lineáris egyenletek

Tekintsük ismét az elsőrendű lineáris

$$\partial_1 u(x,y) - \partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2) \tag{5.17}$$

egyenletet. Amint azt az 5.9. Példában már láttuk, az egyenlet megoldásai az $x+y=c$ egyenletű egyenesek mentén állandók (lásd az 5.1. ábrát). Ezeket az egyeneseket az (5.17) egyenlet *karakterisztikus görbéinek* vagy *karakterisztikáinak* hívjuk. (A karakterisztikus szó a matematikában mindig „invariáns módon kapcsolódót" jelent, a mostani esetben a karakterisztikák a koordináta-rendszer választásától függetlenek.)

Általában, adott $a_1, a_2 \in C(\mathbb{R}^2)$ függvények esetén az

$$a(x,y)\partial_1 u(x,y) + b(x,y)\partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2) \tag{5.18}$$

elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenlethez tartozó *karakterisztikus (differenciálegyenlet-)rendszer* az

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = a(x(t),y(t)),\\ \dot{y}(t) = b(x(t),y(t))\end{cases} \tag{5.19}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer (ahol a pont az idő – most éppen t – szerinti deriváltat jelöli), amelynek $t\mapsto(x(t),y(t))$ megoldásgörbéit (trajektóriáit) az (5.18) egyenlet *karakterisztikus görbéinek* vagy *karakterisztikáinak* nevezzük (lásd az (5.3. ábrát). Az (5.18) egyenlet megoldásai a karakterisztikus görbék mentén állandók, ugyanis

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(u(x(t),y(t))\big)\\ &\quad= \big(\partial_1 u(x(t),y(t)),\partial_2 u(x(t),y(t))\big)\cdot(\dot{x}(t),\dot{y}(t))\\ &\quad= a(x(t),y(t))\partial_1 u(x(t),y(t)) + b(x(t),y(t))\partial_2 u(x(t),y(t)),\end{aligned} \tag{5.20}$$

ahol a jobb oldal nulla, mert u kielégíti az (5.18) differenciálegyenletet. Ez azt jelenti, hogy az (5.18) egyenlet minden $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldása az (5.19) karakterisztikus rendszer *első integrálja*, vagyis a megoldásgörbéken állandó függvény. Megfordítva, ha $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ minden karakterisztikus görbén állandó, az (5.20) összefüggés bal oldala 0, így a jobb oldal is, tehát u kielégíti az (5.18) parciális differenciálegyenletet minden $(x(t), y(t))$ pontban.

5.12. Példa. Az elsőrendű homogén lineáris

$$y\partial_1 u(x,y) - x\partial_2 u(x,y) = 0 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{5.21}$$

egyenlet karakterisztikus rendszere:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t). \end{cases}$$

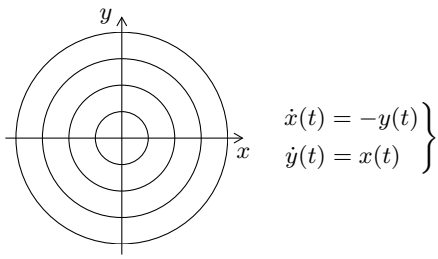
A közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy ennek megoldása $x(t) = c\sin(t+t_0)$, $y(t) = c\cos(t+t_0)$, ahol a c és t_0 konstansok a kezdeti feltételtől függnek. Ez azt jelenti, hogy a rendszer megoldásgörbéi, vagyis a karakterisztikák origó középpontú körvonalak (lásd az 5.4. ábrát). Az (5.21) egyenlet megoldásai tehát az origó középpontú körvonalak mentén állandók, vagyis a megoldás (x,y) pontbeli értéke csak az origótól vett távolságtól (vagy annak négyzetétől) függ. Ebből következően $u(x,y) = \Phi(x^2+y^2)$, ahol $\Phi \in \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges függvény, és ezek valóban megoldások.

Megjegyezzük, hogy az x^2+y^2 első integrált a karakterisztikus rendszer megoldásainak ismerete nélkül is megtalálhattuk volna. Nevezetesen a karakterisztikus rendszer első egyenletét $x(t)$-vel, a másodikat $y(t)$-vel szorozva, majd a kapott egyenleteket összegezve

$$\dot{x}(t)x(t) + \dot{y}(t)y(t) = 0$$

adódik. Más szóval

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t)\right) = 0,$$



5.4. ábra. Karakterisztikák

tehát $t \mapsto x^2(t)+y^2(t)$ konstansfüggvény, így $\varphi(x,y) = x^2+y^2$ a rendszer egy első integrálja. Következésképpen az (5.21) egyenlet klasszikus megoldásai az $u(x,y) = \Phi(x^2+y^2)$ alakú függvények, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. Belátható (az első okoskodás is mutatja), hogy ezzel az összes megoldást megkaptuk. (Jóllehet ez a példa azt sugallja, hogy az általános megoldás minden esetben előáll mint egy rögzített első integrál tetszőleges függvénye, ez általában nem igaz, lásd az 5.9. Feladatot. Az előállíthatóság pontos feltételeit az alszakasz végén az 5.14. Tételben fogalmazzuk meg.)

Tekintsük most az elsőrendű inhomogén lineáris

$$a(x,y)\partial_1 u(x,y) + b(x,y)\partial_2 u(x,y) = f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{5.22}$$

parciális differenciálegyenletet, ahol $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ adott függvény. Ennek *karakterisztikus rendszere* szintén az

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y), \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer, amelynek $t \mapsto (x(t), y(t))$ megoldásgörbéi (trajektóriái) az (5.21) egyenlet *karakterisztikái*. Az (5.18) egyenlet megoldásaira a karakterisztikák mentén a következő teljesül:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(u(x(t),y(t))\big) &= \big(\partial_1 u(x(t),y(t)), \partial_2 u(x(t),y(t))\big) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \\ &= a(x(t),y(t))\partial_1 u(x(t),y(t)) + b(x(t),y(t))\partial_2 u(x(t),y(t)) \\ &= f(x(t),y(t)). \end{aligned}$$

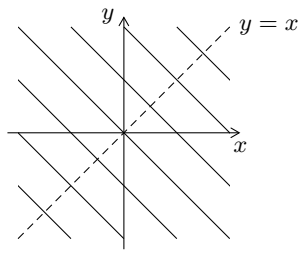
Ezt integrálva

$$u(x(t),y(t)) - u(x(t_0),y(t_0)) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),y(\tau))\,d\tau, \tag{5.23}$$

vagyis megkapjuk az u megoldás általános alakját egy $t \mapsto (x(t),y(t))$ karakterisztika mentén. Amennyiben tehát ismerjük u értékét a karakterisztika egy $(x(t_0),y(t_0))$ pontjában, akkor ezen a karakterisztikán a megoldás már egyértelműen meg van határozva. Ebből következően, ha az (5.22) egyenlet egy megoldását előírjuk egy olyan kezdeti görbe mentén, amely minden karakterisztikus görbét pontosan egyszer metsz, akkor általában az egyenletnek egyértelmű klasszikus (és többnyire csak lokális) megoldását nyerjük. A részletek, az elsőrendű parciális differenciálegyenletek elméletének szabatos tárgyalásával együtt megtalálhatók például a [3, 33] könyvekben.

5.13. Példa. Határozzuk meg a

$$\partial_1 u(x,y) - \partial_2 u(x,y) = x \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{5.24}$$



5.5. ábra. Karakterisztikák és kezdeti görbe

inhomogén elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenlet olyan megoldását, amelyre

$$u(x,x) = x \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{5.25}$$

Láttuk, hogy a homogén egyenlet karakterisztikái az $x + y = c$ egyenletű egyenesek, pontosabban az $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = -1$ rendszer megoldásgörbéi, amelyeket például

$$(x(t), y(t)) = (t, c - t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

módon paraméterezhetünk. Az (5.25) feltétel azt jelenti, hogy a megoldás értékeit előírjuk az $y = x$ egyenes mentén, amely minden karakterisztikát pontosan egyszer metsz (lásd az 5.5. ábrát).

Egy rögzített karakterisztikán a $(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ pontból integrálva az (5.24) egyenletet az (5.23) összefüggés alapján:

$$u(t, c-t) = u\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right) + \int_{\frac{c}{2}}^{t} \tau \, d\tau = \frac{c}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{c^2}{8}.$$

Ebből következően

$$u(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{8},$$

ami valóban kielégíti az (5.24) egyenletet és az (5.25) mellékfeltételt.

Az elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletekről szóló rész zárásaként érdemes röviden szót ejtenünk a magasabb dimenziós esetről is. Adott $a_1, \ldots, a_n \in C(\mathbb{R}^n)$ függvények esetén az

$$a_1(x)\partial_1 u(x) + a_2(x)\partial_2 u(x) + \ldots + a_n(x)\partial_n u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{5.26}$$

egyenlethez tartozó *karakterisztikus (differenciálegyenlet-)rendszer* az

$$\dot{x}_1(t) = a_1(x(t)), \quad \dot{x}_2(t) = a_2(x(t)), \quad \ldots, \quad \dot{x}_n(t) = a_n(x(t))$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer, amelynek

$$t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

megoldásgörbéit (trajektóriáit) az (5.18) egyenlet *karakterisztikus görbéinek* vagy *karakterisztikáinak* nevezzük. Az (5.20) összefüggéshez hasonlóan itt is érvényes

$$\frac{d}{dt}\big(u(x(t))\big) = a_1(x)\partial_1 u(x) + a_2(x)\partial_2 u(x) + \ldots + a_n(x)\partial_n u(x).$$

Ezáltal az (5.26) egyenlet minden $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ klasszikus megoldása az (5.19) karakterisztikus rendszer *első integrálja*, vagyis a megoldásgörbéken állandó függvény, továbbá ha $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ minden karakterisztikus görbén állandó, akkor u kielégíti az (5.26) parciális differenciálegyenletet. A kétváltozós esetben az általános megoldás egy első integrál tetszőleges függvénye volt. A magasabb dimenziós esetben ennek az felel meg, hogy az általános megoldás $(n-1)$ darab egymástól független első integrál tetszőleges függvénye. Pontosabban, igazolható a következő tétel (a bizonyítás bőven túlmutat ezen alszakasz keretein, lásd a [33] jegyzetben).

5.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományban az $a_1, \dots, a_n \in$ $\in C(\Omega)$ függvények nem veszik fel a 0 értéket. Ha az* (5.26) *egyenletnek létezik úgynevezett* alaprendszere, *azaz olyan $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \in C^1(\Omega)$ függvények, hogy*

- *minden $j = 1, \dots, n-1$ esetén a φ_j függvény kielégíti az egyenletet az Ω tartományon,*
- *az $(n-1) \times n$-es*

$$(\partial_\ell \varphi_j(x))_{j=1,\dots,n-1}^{\ell=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1(x) & \partial_2\varphi_1(x) & \dots & \partial_n\varphi_1(x) \\ \partial_1\varphi_2(x) & \partial_2\varphi_2(x) & \dots & \partial_n\varphi_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1\varphi_{n-1}(x) & \partial_2\varphi_{n-1}(x) & \dots & \partial_n\varphi_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

mátrix rangja minden $x \in \Omega$ pontban $(n-1)$,

akkor található olyan $(n-1)$ változós folytonosan differenciálható Φ függvény, amelyre

$$u(x) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)) \quad (x \in \Omega). \tag{5.27}$$

Megfordítva, tetszőleges (megfelelő halmazon értelmezett) $(n-1)$ változós folytonosan differenciálható Φ függvény esetén az (5.27) *képlettel értelmezett $u \in$ $\in C^1(\Omega)$ függvény kielégíti az* (5.26) *egyenletet, így a formula a szóban forgó egyenlet általános megoldását szolgáltatja.*

5.15. *Megjegyzés.* Az iménti tételben az a_j együtthatófüggvényekre kirótt feltétel, miszerint nem egyenlők nullával az adott tartományban, általában nem hagyható el. Ezzel kapcsolatban lásd az 5.9. Feladatot.

5.16. Példa. Tekintsük a

$$\partial_1 u(x,y,z) + \partial_2 u(x,y,z) + \partial_3 u(x,y,z) = 0 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet. A karakterisztikus rendszere:

$$\dot{x}_1(t) = 1, \quad \dot{x}_2(t) = 1, \quad \dot{x}_3(t) = 1,$$

amelynek megoldásai

$$x(t) = t + c_1, \quad x(t) = t + c_2, \quad z(t) = t + c_3,$$

vagyis

$$(x(t), y(t), z(t)) = t(1,1,1) + (c_1, c_2, c_3),$$

amelyek $(1,1,1)$ irányvektorú egyenesek (lásd az 5.6. ábrát). A karakterisztikus rendszerből az is világosan kitűnik, hogy

$$0 = \dot{x}(t) - \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}(x(t) - z(t)),$$

más szóval $\varphi_1(x,y,z) = x - z$ állandó a karakterisztikus görbék mentén, tehát első integrál. Hasonlóan adódik, hogy $\varphi_2(x,y,z) = y - z$ szintén első integrál. Ráadásul a

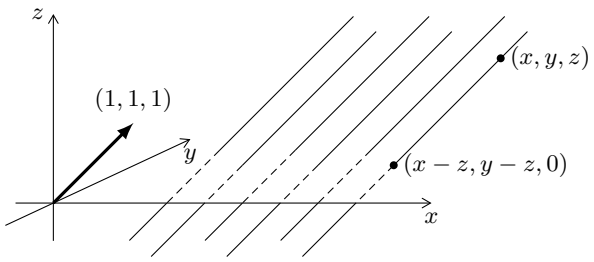
$$(\partial_\ell \varphi_j(x,y,z))_{j=1,2}^{\ell=1,2,3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja $\mathbb{R}^n$ bármely pontjában kettő, így φ_1, φ_2 alaprendszert alkot $\mathbb{R}^n$-ben. Mivel a példában szereplő parciális differenciálegyenlet együtthatófüggvényei sehol sem egyenlők nullával $\mathbb{R}^n$-en, ezért az 5.14. Tétel alapján az egyenlet általános megoldása $u(x,y,z) = \Phi(x-z, y-z)$ alakú, ahol $\Phi \in$ $\in C^1(\mathbb{R}^3)$ tetszőleges függvény.

Megjegyezzük, hogy az általános megoldást pusztán a karakterisztikus görbék ismeretében, az 5.14. Tételre való hivatkozás nélkül is meghatározhattuk volna. Valóban, tetszőleges $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ ponton áthaladó $(1,1,1)$ irányvektorú egyenesen az u megoldás konstans, azaz $u(x,y,z) = u(x+t, y+t, z+t)$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Speciálisan $t = -z$ választással:

$$u(x,y,z) = u(x-z, y-z, 0),$$

ahol $(x-z, y-z, 0)$ az (x,y,z) ponton átmenő $(1,1,1)$ irányvektorú egyenesnek az xy síkkal vett metszéspontja (lásd az 5.6. ábrát). Innen a $\Phi(x,y,z) =$ $= u(x,y,0)$ függvény bevezetésével $u(x,y,z) = \Phi(x-z, y-z)$ adódik. Ebben



5.6. ábra. Karakterisztikus görbék

az előállításban tehát a Φ függvény az u megoldás értékeit szolgáltatja az xy síkon.

Az általános megoldás előállításának egy harmadik lehetséges módja, ha áttérünk egy olyan koordináta-rendszerre, amelynek egyik tengelye az $(1, 1, 1)$ vektor, és ebben írjuk fel a parciális differenciálegyenletet (lásd az 5.16. Feladatot).

5.2.5. A változók szétválasztása

Ebben a részben az 5.5. Példában már látott Hadamard-féle

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u_k(x,y) + \partial_2^2 u_k(x,y) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}), \\ u_k(0,y) &= \frac{1}{k} \sin ky \quad (y \in \mathbb{R}), \\ \partial_1 u_k(0,y) &= 0 \quad (y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

feladaton bemutatjuk a *változók szétválasztásának módszerét*, amely sokféle egyenlet esetén hatékonynak bizonyul. Ennek lényege, hogy a feladat megoldását

$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

alakban keressük, ahol $F \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$ és $G \in C^2(\mathbb{R})$ alkalmas függvények. Ezt a differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0.$$

Az $F(x)G(y)$ kifejezéssel osztva (feltéve, hogy az nem 0), majd átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}. \tag{5.28}$$

Mivel a bal oldal csak az x változótól, a jobb oldal pedig csak az y változótól függ, ezért mindkét oldal állandó:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda, \qquad \frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda.$$

Most emlékeztetünk arra a közönséges differenciálegyenletek elméletéből jól ismert összefüggésre, hogy a $v''+\lambda v = 0$ állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris közönséges differenciálegyenlet összes megoldása a λ előjelétől függően a következőképpen néz ki:

$$v(x) = \begin{cases} c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x, & \text{ha } \lambda > 0, \\ c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, & \text{ha } \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

5.17. *Megjegyzés.* Valójában az iménti függvények között, a látszat ellenére, szoros kapcsolat van: mindegyik az $\alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ függvényből származik, ahol α, β komplex számok. Ha $\lambda < 0$, akkor visszakapjuk az exponenciális függvények lineáris kombinációját, amely valójában szinusz-hiperbolikusz és koszinusz-hiperbolikusz függvények lineáris kombinációja. A $\lambda > 0$ esetben a kitevőben tisztán képzetes szám áll, így ekkor a szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációját nyerjük. A $\lambda = 0$ eset $\lambda \to 0$ határátmenettel kapható. Ekkor nyerjük a konstans függvényeket, valamint az $\frac{1}{\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - - e^{-\sqrt{-\lambda}x})$ hányadosból (amely ugyancsak megoldás) $\lambda \to 0$ esetén adódó $\text{const} \cdot x$ függvényeket.

Visszatérve az (5.28) egyenletekre, az iméntiek felhasználásával $\lambda > 0$ esetén

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$
$$G(y) = c_3 \sin\sqrt{\lambda}y + c_4 \cos\sqrt{\lambda}y.$$

Az $u_k(0, y) = \frac{1}{k}\sin ky$ kezdeti feltétel alapján

$$\frac{1}{k}\sin ky = u(0, y) = (c_1 + c_2)\left(c_3 \sin\sqrt{\lambda}y + c_4 \cos\sqrt{\lambda}y\right).$$

Ebből $y = 0$ helyettesítéssel $0 = (c_1 + c_2)c_4$ adódik, ezért $c_4 = 0$, hiszen $c_1 + c_2 = 0$ esetén az iménti egyenlőség nem teljesülhet minden y-ra. Ekkor

$$\frac{1}{k}\sin ky = (c_1 + c_2)c_3 \sin\sqrt{\lambda}y,$$

ami könnyen láthatóan csak a $\sqrt{\lambda} = k$ és

$$(c_1 + c_2)c_3 = \frac{1}{k} \tag{5.30}$$

feltételek mellett teljesül. Ezek után a $\partial_1 u_k(0,y) = 0$ kezdeti feltétel figyelembevételével kapjuk:

$$0 = \partial_1 u_k(0,y) = F'(0)G(y) = k(c_1 - c_2)c_3 \sin ky.$$

Ez minden $y \in \mathbb{R}$ értékre csakis $c_1 = c_2$ esetén áll fenn, így

$$F(x) = c_1 \left(e^{kx} + e^{-kx}\right),$$
$$G(y) = c_3 \sin ky,$$

Végül tehát az (5.30) és a $c_1 = c_2$ feltételt szem előtt tartva:

$$u_k(x,y) = F(x)G(y) = c_1(e^{ky} + e^{-ky})c_3 \sin ky = \frac{1}{k}\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \sin ky.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott u_k függvény kielégíti a szóban forgó feladatot.

Hátravan még a $\lambda < 0$ és a $\lambda = 0$ eset. Ha $\lambda < 0$, akkor

$$F(x) = c_1 \sin \sqrt{|\lambda|}x + c_2 \cos \sqrt{|\lambda|}x,$$
$$G(y) = c_3 e^{\sqrt{|\lambda|}y} + c_4 e^{-\sqrt{|\lambda|}y}.$$

Ekkor azonban $G(y)$ egy nem korlátos függvény, így az

$$\frac{1}{k} \sin ky = u(0,y) = c_2 G(y)$$

mellékfeltétel nem telesülhet minden $y \in \mathbb{R}$ esetén.

Hasonló módon, a $\lambda = 0$ esetben

$$F(x) = c_1 x + c_2,$$
$$G(y) = c_3 y + c_4,$$

ahol $G(y)$ ismét nem korlátos, így az

$$\frac{1}{k} \sin ky = u(0,y) = c_2 G(y)$$

mellékfeltétel nem teljesülhet minden $y \in \mathbb{R}$ esetén.

Összefoglalva, a változók szétválasztásának módszerével az Hadamard-féle feladatra a következő megoldást nyertük:

$$u_k(x,y) = \frac{1}{k} \sin kx \cdot \frac{e^{ky} + e^{-ky}}{2}.$$

Némi komplex függvénytan segítségével igazolható (lásd az 5.20. Feladatot), hogy a szóban forgó feladat megoldása egyértelmű.

A változók szétválasztásának módszere igen hasznos eszközként kerül elő sajátérték-feladatok megoldása kapcsán is; ezzel a 8.4.2. alszakaszban foglalkozunk.

5.3. Feladatok

5.1. Rögzített n és m nemnegatív egész számok esetén határozzuk meg azon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multiindexek számát, amelyekre $|\alpha| \leq m$.

5.2. Adjuk meg a következő parciális differenciálegyenletek $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásainak általános alakját!

a) $\partial_1 u(x,y) = x + y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_2 u(x,y) = xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

c) $\big(\partial_1 u(x,y)\big)^2 + \big(\partial_2 u(x,y)\big)^2 = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

5.3. Határozzuk meg a következő parciális differenciálegyenletek $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásainak általános alakját!

a) $\partial_1^2 u(x,y) = e^{x+y} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_1 \partial_2 u(x,y) = xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

5.4. Adjuk meg a következő parciális differenciálegyenletek $u \in C^3(\mathbb{R}^3)$ klasszikus megoldásainak általános alakját!

a) $\partial_1^3 u(x,y,z) = 0 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$,

b) $\partial_1 \partial_2 \partial_3 u(x,y,z) = xyz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

5.5. Határozzuk meg azon $u \in C^n(\mathbb{R}^n)$ függvényeket, amelyek kielégítik a következő parciális differenciálegyenletet!

$$\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_n u(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad ((x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n).$$

5.6. Vezessük vissza a következő parciális differenciálegyenleteket elsőrendű közönséges differenciálegyenletekre, majd ezután határozzuk meg az $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásaik általános alakját!

a) $\partial_1^2 u(x,y) + \partial_1 u(x,y) = y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_1 \partial_2 u(x,y) + 2x \partial_2 u(x,y) = x \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

5.7. Írjuk fel az alábbi egyenleteknek a megadott (ξ, η) koordináták bevezetése után kapott alakját, majd határozzuk meg az egyenletek klasszikus megoldásait!

a) $\partial_1^2 u(x,y) + 2\partial_1 \partial_2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = x \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,
$\xi = x + y$, $\eta = x - y$,

b) $\partial_1^2 u(x,y) - 2\partial_1 \partial_2 u(x,y) - 3\partial_2^2 u(x,y) = y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,
$\xi = 3x + y$, $\eta = x - y$.

5.8. Írjuk fel az alábbi egyenleteket a parciális deriválások operátorainak segítségével, majd megfelelő átalakítás után sejtsük meg, hogy az eredeti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ helyett milyen $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ új változókat célszerű bevezetni az egyszerűbb alakra való hozatal érdekében. Végezzük el a transzformációkat, és adjuk meg az egyenleteknek a (ξ, η) koordináták bevezetése után kapott alakját, majd határozzuk meg az egyenletek klasszikus megoldásait!

a) $\partial_1^2 u - \partial_1\partial_2 u - 2\partial_2^2 u - \partial_1 u - \partial_2 u = 0$,

b) $\partial_1^2 u - 2\partial_1\partial_2 u + \partial_2^2 u + \partial_1 u - \partial_2 u - 2u = 0$.

5.9. Mutassuk meg, hogy az

$$x\partial_1 u(x, y) - y\partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

elsőrendű lineáris egyenlet első integrálja a $\varphi(x, y) = xy$ függvény! Igaz-e, hogy az egyenlet bármely $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldása előáll $u(x, y) = \Phi(xy)$ alakban, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ alkalmas függvény?

5.10. Keressük meg a következő elsőrendű lineáris egyenletek klasszikus megoldásait! Rajzoljuk fel az egyenletek karakterisztikáit is, ahol tudjuk!

a) $\partial_1 u(x, y) - y\partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $y^2\partial_1 u(x, y) + e^x\partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$.

5.11. Keressük meg a

$$\partial_1 u(x, y) + 2x\partial_2 u(x, y) = y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amelyre $u(0, y) = y$ minden $y \in \mathbb{R}$ esetén.

5.12. Határozzuk meg a

$$3y^2\partial_1 u(x, y) + \partial_2 u(x, y) = x + y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amelyre $u(x, 0) = x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

5.13. Legyen $H \in C^1(\mathbb{R}^2)$ és $f, g \in C(\mathbb{R})$. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek egy-egy első integrálját!

a)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \partial_2 H(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = -\partial_1 H(x(t), y(t)). \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(y(t)), \\ \dot{y}(t) = g(x(t)). \end{cases}$$

5.14. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszer egy első integrálját, vagyis olyan $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amely állandó a megoldásgörbék mentén (tehát $t \mapsto \varphi(x(t), y(t))$ konstansfüggvény)!

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), \\ \dot{y}(t) = (x(t) + y(t))^2. \end{cases}$$

5.15. Adjuk meg a következő elsőrendű homogén lineáris egyenletek egy-egy alaprendszerét, és ennek segítségével a klasszikus megoldás általános alakját:

a) $x\partial_1 u(x,y,z) + \partial_2 u(x,y,z) - \partial_3 u(x,y,z) = 0$,

b) $yz\partial_1 u(x,y,z) + xz\partial_2 u(x,y,z) + (x^2+y^2)\partial_3 u(x,y,z) = 0$,

ahol $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

5.16. Jelölje (x,y,z) az $\mathbb{R}^3$ tér szokásos bázisa szerinti, valamint (ξ,η,ζ) az

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

páronként merőleges (de nem egység hosszú) vektorok alkotta bázis szerinti koordinátákat. Írjuk át a

$$\partial_1 u(x,y,z) + \partial_2 u(x,y,z) + \partial_3 u(x,y,z) = 0 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

egyenletet az $U(\xi,\eta,\zeta) = u(x,y,z)$ függvényre, majd oldjuk is meg a kapott egyenletet.

5.17. Igazoljuk, hogy a

$$\partial_1\partial_2 u(x,y) - \frac{1}{x-y}\partial_1 u(x,y) + \frac{1}{x-y}\partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y)$$

differenciálegyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = \frac{f(x) + g(y)}{x-y}$$

alakúak, ahol $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

5.18. Adjuk meg azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ függvényeket, amelyekre teljesül a következő parciális differenciálegyenlet!

$$\partial_1 u(x,y) \cdot \partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

5.19. Keressük meg a következő feladatok $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásait!

a)
$$\begin{cases} \partial_1 \partial_2 u(x,y) = 0 & ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \\ u(x,0) = x^2 & (x \in \mathbb{R}), \\ u(0,y) = 4y^2 & (y \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \partial_1^2 u(x,y) - \partial_2^2 u(x,y) = 2 & ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \\ u(x,x) = \sin 2x + 5x^2 & (x \in \mathbb{R}), \\ u(x,-x) = \sin 2x - 7x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

5.20. Igazoljuk, hogy az (5.3) Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ megoldása egyértelmű!

5.21. Legyen $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi peremértékfeladatnak nem létezik $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása!

$$\begin{cases} \partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 1 & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

5.22. A változók szétválasztásának módszerét alkalmazva adjunk meg végtelen sok $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ függvényt, amely kielégíti az alábbi feladatot:

$$\begin{cases} \partial_1 u - \partial_2^2 u = 0 & \mathbb{R}_+^2\text{-ban}, \\ u(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

6. fejezet

A matematikai fizika néhány parciális differenciálegyenlete

A természet elmélyült tanulmányozása a matematikai felfedezések legtermékenyebb forrása.

Joseph Fourier (1768–1830)

A fejezet tartalma. Levezetjük két alapvető fizikai jelenség, a hővezetés és a hullámmozgás leírására szolgáló egyenleteket egy és több dimenzióban, majd további példákat mutatunk különféle természeti folyamatok modellezésében szerepet játszó parciális differenciálegyenletekre és differenciálegyenlet-rendszerekre.

6.1. „Kimúlt mennyiségek kísértetei”

A következőkben a másodrendű parciális differenciálegyenletek elméletének három alapegyenletével és azok fizikai motivációjával ismerkedünk meg. Ezek az egyenletek két, a hétköznapi ember számára is jól ismert fizikai jelenség, a hővezetés és a hullámmozgás matematikai leírásának alappillérei. A fejezet fő célja az említett két folyamat matematikai vizsgálata egyszerű fizikai törvények alapján. Szándékosan nem fogunk a precizitásra törekedni, levezetéseink matematikailag egyáltalán nem lesznek szabatosak, azonban remélhetőleg kellőképpen érzékeltetik az egyenletek mögött megbúvó természetes gondolatokat. Voltaképpen a differenciálegyenletek elméletének minden szemléltető okoskodása ugyanabból a pofonegyszerű észrevételből indul ki. Nevezetesen, ha $f(t)$ egy adott mennyiség, például hőmérséklet, koncentráció, elmozdulás nagysága, populáció egyedszám, pénzösszeg stb. értékét adja meg a t időpil-

lanatban, akkor δt idő alatt annak *megváltozása*

$$f(t+\delta t)-f(t),$$

amelyet az eltelt δt időhöz arányítva megkapjuk a mennyiség átlagos változási ütemét a szóban forgó időintervallumon. Mármost piciny (más szóval *infinitezimális*) δt esetén f keveset változik az adott intervallumon, így az

$$\frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t}$$

hányadost joggal nevezhetjük a *pillanatnyi változási ütemnek* vagy *pillanatnyi változási sebességnek*. Valójában persze $\delta t \to 0$ határátmenetet kellene tekinteni, ezáltal megkapva az $f'(t)$ deriváltat, ám a gyakorlati életben rendszerint csupán véges sok mérési adat áll rendelkezésünkre, emiatt lépten-nyomon az

$$\frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t} \approx f'(t)$$

közelítő formulát használjuk (ahol δt piciny!). Ez a közelítés matematikailag precízzé tehető például a differenciálszámítás középértéktételeinek segítségével (lásd a [175] könyvet), azonban a szabatosság háttérbe szorításával gyakran szemléletesebb képet kaphatunk a levezetett egyenletek jelentéséről.

A fejezet végén számos további fizikai jelenséget sorolunk fel (a teljesség igénye nélkül), amelyek matematikai modellezésében parciális differenciálegyenletek és rendszerek jutnak szerephez. Ezzel rávilágítunk arra, hogy a természeti folyamatok számtalan érdekes és nehéz matematikai problémát vetnek fel, ahogy ezt a fejezet nyitó idézete is megfogalmazza.

A későbbi fejezetek fő célkitűzése a megismert három alapegyenlet és az ezekből a különböző mellékfeltételekkel nyert problémák részletes tanulmányozása, ezen belül elsősorban a megoldások létezésével és tulajdonságaival kapcsolatos kérdések vizsgálata, valamint az ehhez szükséges alapvető elméleti háttér megteremtése.

6.1. *Történeti megjegyzés.* Lényegében a pillanatnyi sebesség imént vázolt szemléletes jelentéséből indult ki Sir Isaac Newton (1643–1727), amikor lefektette a differenciál- és integrálszámítás alapjait. Newton egy időtől függő mennyiséget *fluensnek* (angolul: fluent), a pillanatnyi változási sebességét pedig *fluxiónak* (angolul: fluxion) nevezte; a derivált elnevezést (jelentése: származtatott) jóval később, 1772-ben Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) francia matematikus használta először. Newton elmélete tulajdonképpen már az 1665-1666-os években megszületett, ekkoriban dúlt ugyanis a londoni pestisjárvány, amely miatt a Cambridge-i Egyetemet egy időre bezárták, és Newton a családi birtokra vonult vissza, ahol csakis a tudománnyal foglalkozhatott. Elméletét teljes részletességgel 1671-re dolgozta ki *A fluxiók módszere* című

művében, amely nyomtatásban végül csak halála után, 1736-ban jelent meg. Az 1666-os évben a fluxiók mellett Newton számos más, a tudomány későbbi fejlődését alapjaiban meghatározó felfedezést tett, többek között a Newton-féle színelmélet és a gravitációs törvény (beleértve a Newton fejére hullott alma legendáját) is ebben az időszakban született. Emiatt szokás Newton számára az 1666-os évet a „csodák éve"-ként (Annus Mirabilis) emlegetni.

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy nem sokkal Newtont követően George Berkeley (1685–1753) angol filozófus tudományfilozófiai írásainak gyakori témája volt a „végtelenül kicsiny" meglehetősen homályos fogalma és a differenciálszámítás alapjainak tisztázása. Az 1734-ben *Az analizáló* címmel írt vitairatában a következőképpen öntötte szavakba gondolatait.

> *De mik ezek a fluxiók? Az eltűnőben levő növekmények sebességei? És mik ezek az eltűnőben levő növekmények? Se nem véges mennyiségek, se nem végtelenül kicsinyek, még csak nem is semmik. Mi mások lennének tehát, mint a kimúlt mennyiségek kísértetei?*

6.2. A hővezetés matematikai leírása

6.2.1. Fourier törvénye

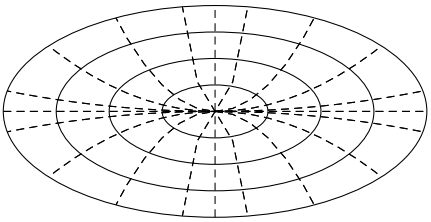
A *hővezetés* folyamata a hétköznapjaink szerves része, hiszen a levegő hőmérséklete szinte minden embert érint, meghatározza például ruházatunkat vagy télen a lakásunk fűtését. Egy adott légnemű, folyékony vagy szilárd anyagban a hővezetés a hőmérséklet-különbség hatására alakul ki. Közismert tapasztalati tény, hogy a hő a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb felé áramlik. Arról van szó, hogy az anyag mikroszkopikus részecskeinek folyamatos ütközésének és az elektronok mozgásának hatására belső energiaátadás megy végbe.

A hővezetés alaptörvényét Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikus és fizikus fogalmazta meg először. Eszerint egy adott pontban a hőenergia terjedésének iránya a hőmérsékletfüggvénynek a térváltozók szerinti gradiensével (deriváltvektorával) ellentétes irányú, és nagysága arányos a gradiens hosszával, ezt az arányossági tényezőt (amely függhet az adott ponttól) szokás belső hővezetési tényezőnek nevezni. Kissé formalizálva, ha az x pontban t időpillanatban $u(x,t)$ adja meg a hőmérsékletet, akkor Fourier törvénye alapján a felületdarabon a hőenergia áramlásának sebességvektora

$$-k(x)\,\mathrm{grad}\,u(x,t),$$

ahol a gradiens csak a térváltozókra vonatkozik.

Többváltozós analízisből jól ismert, hogy a gradiensvektor merőleges a függvény adott ponton áthaladó szintvonalára, így Fourier törvénye szerint



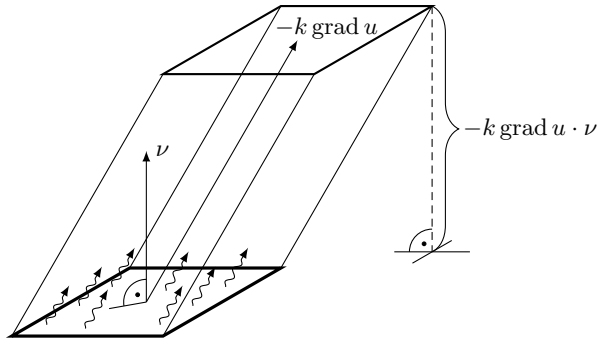
6.1. ábra. Izoterma és gradiens

a hőenergia áramlásának iránya az állandó hőmérsékletű vonalakra (idegen szóval izotermákra) merőleges. Mindezt oly módon tehetjük igazán érzékletessé, hogy a hőenergia a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb felé úgy áramlik, mint ahogy az eső lefolyik a dombtetőről, vagy a síelő lesiklik a hegy tetejéről. A 6.1. ábrán ellipszisvonalak jelzik az izotermákat, és az ezekre merőleges (szaggatottal jelölt) görbék – jelen esetben éppen parabolák – mentén áramlik a hőenergia.

Mielőtt a hővezetés egyenletének levezetésére térnénk rá, érdemes Fourier törvényét egy kissé más formában is megfogalmaznunk, mert főképp erre az alakra fogunk támaszkodni. Amit eddig a hőáramlás sebességvektoraként emlegettünk, az valójában a hőáramsűrűség, amelynek segítségével egy adott felületen időegység alatt áthaladó hőmennyiséget adhatjuk meg. Ez más szóval a fluxus, amelyet a 4.3. szakaszban már szemléltettünk. Most hasonló módon járunk el, mint ott, de az integrálok helyett megtartjuk az infinitezimális mennyiségeket.

Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk három dimenzióra, és tegyük fel, hogy az $x \in \mathbb{R}^3$ pontba egy piciny felületdarabot helyezünk, amelyet δA területű téglalapnak tekinthetünk. Jelölje $\nu(x)$ az x pontban a téglalap síkjának egyik egység hosszú normálvektorát, és határozzuk meg, hogy kis δt idő alatt mennyi hőenergia áramlik át a felületen a $\nu(x)$ irányban. Mivel az áramlás sebességvektora $-k(x)\operatorname{grad} u(x,t)$, így az időegység alatt átáramló hőenergia mennyisége szemléletesen egy hasáb térfogatával egyezik meg (lásd a 6.2. ábrát), amelynek alapja δA területű, magassága pedig a sebességvektor ν egységvektorral párhuzamos komponensének nagysága. Ismeretes, hogy ez utóbbi összetevő megegyezik a két vektor skalárszorzatával, vagyis értéke $-k(x)\operatorname{grad} u(x,t)\cdot\nu$, ami éppen $-k(x)\partial_\nu u(t,x)$, ahol ∂_ν az u függvénynek a ν irányú iránymenti deriváltja (a deriválás során ismét csak a térváltozókat tekintjük). Időegység alatt a δA felületdarabon átáramló hőenergia tehát közelítőleg $-k(x)\partial_\nu u(x,t)\delta A$, ezért kicsiny δt idő alatti átáramló hőmennyiség:

$$\delta Q \approx -k(x)\partial_\nu u(x,t)\,\delta A\,\delta t.$$



6.2. ábra. Hőáramlás kicsiny felületdarabon keresztül

A kapott kifejezés előjeléből az áramlás irányára is következtethetünk: pozitív érték esetén a ν vektorral azonos, negatív érték esetén a ν vektorral ellentétes irányú. Amennyiben meg szeretnénk szabadulni az infinitezimális mennyiségektől, akkor egy adott A felület kicsiny érintő téglalapokkal való közelítését vehetjük, és ezen téglalapokra összegezzük az előbbiekben kapott kifejezést. Ezáltal az időegység alatt átáramló hőmennyiségre a

$$-\int_A k(x)\partial_\nu u(x,t)\,d\sigma_x$$

integrál közelítőösszegét nyerjük, vagyis határátmenetben magát az integrált.

A piciny felületen átáramló hőmennyiségre nyert közelítés segítségével a következő szaszokban részletesen levezetjük az egy- és magasabb dimenziós hővezetési egyenletet, majd megvizsgáljuk, hogy milyen mellékfeltételek szükségesek a hőmérséklet egyértelmű meghatározásához.

6.2. *Történeti megjegyzés.* A hővezetési egyenletet először Fourier vezette le *A hővezetés analitikus elemélete* című művében (lásd [50]) lényegében az előbbiekben ismertetett tapasztalati törvény alapján. A művet 1807-ben írta meg, majd 1812-ben egy kissé átdolgozott formában a Párizsi Akadémia egy nagydíját is elnyerte. A zsűri azonban nem járult hozzá a pályamunka kiadásához arra hivatkozva, hogy bár újszerű gondolatokat tartalmaz, de matematikailag hibás érvelésekkel. Fourier munkája végül 1822-ben jelent meg nyomtatásban, amikor is Fourier a Párizsi Akadémia titkára lett, és maga engedélyezte saját könyve kiadását. A mű később a Fourier-sorok elméletének kiindulópontjává vált, a fizika fejlődésében szintén mérföldkőnek számított. Lord Kelvin (1824–1907) például, saját bevallása szerint, 16 éves korában két hét alatt áttanulmányozta, és ez egész későbbi pályafutását meghatározta. Ahogy ő fogalmazott: a mű egy „nagyszerű matematikai költemény”. Hasonlóan véle-

kedett a kiváló német fizikus Arnold Sommerfeld (1868–1951), aki a fizikusok bibliájának nevezte a művet.

Érdemes megemlíteni, hogy az üvegházhatás felfedezése ugyancsak Fourier nevéhez köthető. További történeti érdekesség, hogy fizikai kutatásai mellett Fourier egy ideig Alsó-Egyiptom kormányzója tisztét is beöltötte, később pedig a francia Isère megye prefektusaként tevékenykedett; ezalatt készítette el egyiptológiai témájú áttekintő monográfiáját és a hővezetésről szóló munkáját is.

6.2.2. Hővezetés egy dimenzióban

Tegyük fel, hogy adott egy L hosszúságú, vékony, henger alakú rúd, amelynek palástja szigetelt, tehát nem áramlik rajta keresztül hő. Mivel a rúd vékony, ezért a pontjait az $x \in [0, L]$ koordinátákkal jellemezhetjük, és ennek megfelelően jelölje $u(x, t)$ a rúd x koordinátájú pontjának hőmérsékletét a t időpillanatban.

Tekintsük a rúd egy $[x, x+\delta x]$ kicsiny szakaszát, és vizsgáljuk meg a szakasz két végén végbemenő hőáramlást! Ha az $x+\delta x$ végpont egy kis környezetében a hőmérséklet csökken, akkor a rúdszakasz itt hőt ad le, ha pedig a hőmérséklet nő, akkor hőt vesz fel, hiszen a hőenergia a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb felé áramlik. Fourier törvényét az egydimenziós esetre alkalmazva azt mondhatjuk, hogy az $x + \delta x$ pontban a hőenergia kiáramlási sebessége (lásd a 6.3. ábrát)

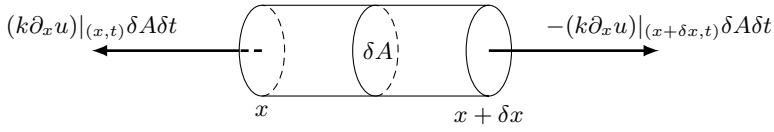
$$-k(x + \delta x)\partial_x u(x + \delta x),$$

ahol $k(x)$ a *hővezetési tényező*.

A rúddarab x végpontjában fordított a helyzet, ha a hőmérséklet lokálisan csökken, akkor hőt vesz fel a szakasz, ha pedig a hőmérséklet nő, akkor hőt ad le, így a kifelé haladó hőáramlás sebessége

$$k(x)\partial_x u(x, t).$$

A rúddarab két végén a befelé áramlás sebessége az előbbi kifejezéseknek a (-1)-szerese, ezért az $[x, x + \delta x]$ kicsiny szakaszon δt idő alatt befelé áramló



6.3. ábra. Kifelé haladó hőáram vékony rúddarabban

hőmennyiség közelítőleg

$$\begin{aligned}\delta Q_1 &\approx \big(k(x+\delta x)\partial_x u(x+\delta x,t) - k(x)\partial_x u(x,t)\big)\,\delta A\,\delta t\\ &\approx \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t))\delta x\,\delta A\,\delta t,\end{aligned}$$

ahol δA a henger keresztmetszetének területe. Tegyük fel, hogy a rúdban külső *hőforrások* és *hőnyelők* révén is keletkezik hőmennyiség, más szóval a rúd egyes pontjaival esetleg hőt közlünk, más pontokból pedig hőt vonunk el. Jelölje $F(x,t)$ a külső hőforrások és hőnyelők intenzitását: $F(x,t) > 0$ esetén hőforrásról, $F(x,t) < 0$ esetén pedig hőnyelőről van szó az x pontban. Pontosabban szólva, ez azt jelenti, hogy az $[x, x+\delta x]$ kicsiny szakaszon δt idő alatt közelítőleg

$$\delta Q_2 \approx F(x,t)\,\delta x\,\delta A\,\delta t$$

hőmennyiség keletkezik külső hőforrások és nyelők útján. Az imént kapott δQ_1 és δQ_2 mennyiségek együttesen kiadják a rúddarab hőmennyiségének változását a δt idő alatt, és ez eredményezi a szakasz hőmérsékletének megváltozását. A szakaszon δt idő alatt bekövetkező hőmérséklet-változás közelítőleg

$$u(x,t+\delta t) - u(x,t) \approx \partial_t u(x,t)\,\delta t,$$

amelyhez szükséges hőmennyiség a rúddarab tömegével és a hőmérséklet-változással arányos:

$$\delta Q_3 \approx c(x)\varrho(x)\,\delta x\,\delta A\partial_t u(x,t)\,\delta t,$$

ahol $c(x)$ a rúddarab fajhője és $\varrho(x)$ a sűrűsége az x pontban. Ekkor szükségképpen

$$\delta Q_3 = \delta Q_1 + \delta Q_2,$$

azaz

$$c(x)\varrho(x)\,\delta x\,\delta A\partial_t u(x,t)\,\delta t \approx \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t))\,\delta x\,\delta A\,\delta t + F(x,t)\,\delta x\,\delta A\,\delta t,$$

ahonnan a δx, δA és δt mennyiségekkel való osztás után a

$$c(x)\varrho(x)\partial_t u(x,t) - \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t)) = F(x,t)$$

pontos egyenletet nyerjük, amely az *egydimenziós hővezetési egyenlet inhomogén közeg esetén.* Ha c, ϱ, k állandók, akkor a

$$\partial_t u(x,t) - \frac{k}{c\varrho}\partial_x^2 u(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\varrho},$$

vagy tömören a

$$\partial_t u - a\partial_x^2 u = f \tag{6.1}$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$a = \frac{k}{c\varrho}$$

az úgynevezett *hőmérséklet-vezetési tényező*. A (6.1) egyenletet röviden *inhomogén egydimenziós hővezetési egyenletnek* nevezzük, az f jobb oldalt pedig *forrástagnak*. Amennyiben $f = 0$, akkor *homogén* egyenletről beszélünk.

Mellékfeltételek

Vizsgáljuk most meg, hogy milyen mellékfeltételek szükségesek a hőmérséklet egyértelmű meghatározásához! Kézenfekvő, hogy megadjuk a rúd kezdeti hőmérséklet-eloszlását és ezenkívül valamilyen formában a rúd peremén a hőmérséklet vagy a hőmennyiség időbeli változását.

- *Kezdeti feltétel.* Ha megadjuk a rúd kezdeti hőmérséklet-eloszlását, azaz

$$u(x,0) = T_0(x) \quad (x \in [0,L]),$$

ahol $T_0\colon [0,L] \to \mathbb{R}$ adott függvény, akkor *kezdeti feltételről* beszélünk.

- *Első peremfeltétel.* Ha a rúd végeinek hőmérsékletét időben szabályozzuk, akkor

$$u(0,t) = T_1(t), \quad u(L,t) = T_2(t) \quad (t \geq 0)$$

úgynevezett *első peremfeltételt*, más néven *Dirichlet-féle peremfeltételt* írhatunk elő, ahol $T_1, T_2\colon [0,L] \to \mathbb{R}$ adott függvények.

- *Második peremfeltétel.* Ha a peremen hőáramlás megy végbe, akkor megadhatjuk a kifelé (vagy befelé) haladó hőáramot, azaz

$$k(0)\partial_x u(0,t) = u_1(t), \quad -k(L)\partial_x u(L,t) = u_2(t) \quad (t \geq 0),$$

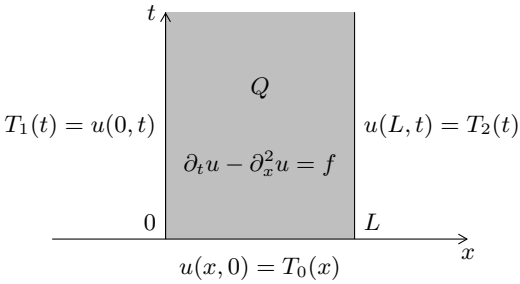
ahol $u_1, u_2\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ezt *második* vagy *Neumann-féle peremfeltételnek* hívjuk.

- *Harmadik peremfeltétel.* Ha a peremen hőcsere megy végbe az állandó hőmérsékletű közeggel, akkor Newton lehűlési törvénye szerint a kifelé mutató hőáramlás sebessége arányos a rúd végpontja és a közeg T_k hőmérsékletének különbségével. Az arányossági tényezőt λ-val jelölve:

$$\begin{aligned} k(0)\partial_x u(0,t) &= \lambda(u(0,t) - T_\mathrm{k}(t)), \\ -k(L)\partial_x u(L) &= \lambda(u(L,t) - T_\mathrm{k}(t)) \quad (t \geq 0), \end{aligned}$$

vagy ekvivalens módon

$$k(0)\partial_x u(0,t) - \lambda u(0,t) = -\lambda T_\mathrm{k}(t),$$



6.4. ábra. Hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladat

$$k(L)\partial_x u(L,t) + \lambda u(L,t) = \lambda T_{\mathrm{k}}(t),$$

amelyet *harmadik* vagy *Robin-féle peremfeltételnek* nevezünk.

A hővezetés (homogén vagy inhomogén) egyenletéhez hozzávéve a kezdeti feltételt, valamint az első, második, harmadik peremfeltétel valamelyikét, a *hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatot* kapjuk a $Q := (0,L) \times \mathbb{R}^+$ végtelen téglalap (kétdimenziós henger) lezártján, lásd a 6.4. ábrát.

Amennyiben a rúd végtelen hosszú, más szóval a perem hatása elhanyagolható, akkor nincs szükség peremfeltételre, csak az $u(x,0) = T_0(x)$ ($x \in \in \mathbb{R}$) kezdeti feltételre, ekkor a *hővezetési egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatról* vagy más néven *Cauchy-feladatról* beszélünk.

E feladatokat matematikailag akkor fogalmaztuk meg pontosan, ha megadjuk azt a függvényteret is, amelyben a megoldásokat keressük. A hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatnak első peremfeltétel esetén kereshetjük például $u \in C^2(\overline{Q})$, vagy akár $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ megoldásait, vagy esetleg olyan $u \in C^1(Q) \cap C(\overline{Q})$ megoldásait, amelyek az x változóban kétszer differenciálhatók, és $\partial_x^2 u \in C(Q)$. Azt, hogy valójában mely terek választása esetén lesznek korrekt kitűzésűek a fenti feladatok, a hővezetési egyenletről szóló 9. fejezetben vizsgáljuk meg.

6.3. *Történeti megjegyzés.* Sir Isaac Newton (1642–1727) a Királyi Társaság tudományos folyóiratában 1701-ben névtelenül megjelentetett hatoldalas cikkében különböző anyagok lehűlését vizsgálta, és megállapította, hogy lehűlés során az anyag és a közeg $T(t) - T_{\mathrm{k}}$ hőmérséklet-különbsége egyenlő időközök alatt ugyanannyiad részére csökken. Ezt fejezi ki modern formában a

$$(T(t) - T_{\mathrm{k}})' = -\lambda(T(t) - T_{\mathrm{k}})$$

közönséges differenciálegyenlet. Newton az említett cikkben a megfigyelések alapján egy hőmérsékleti skálát is felállított, amelyben többek között olyan

viszonyítási pontokat jelölt meg, mint a levegő hőmérséklete egy júliusi napon délben (ez a Newton skálában 6 fok) vagy az emberi kéz számára még éppen elviselhetően forró fürdővíz hőmérséklete (ez a Newton skálában 17 fok).

A Dirichlet-peremfeltétel Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) német matematikusról kapta nevét. A Dirichlet-feladat szemléletes jelentésével a 8.3.3. szakaszban foglalkozunk.

A Neumann-féle peremfeltétel Carl Gottfried Neumann (1832–1925) német matematikusról kapta a nevét. Neumann 1870-es években írt potenciálelméleti, vagyis a Laplace-egyenlet megoldásaival foglalkozó cikkeiben gyakran jelenik meg a második peremfeltétel (a Laplace-egyenlettel a 8. fejezetben foglalkozunk). A funkcionálanalízisbeli Neumann-sor szintén az ő nevét viseli, ugyanis Neumann a peremérték-feladatok megoldásait lényegében ilyen sor alakjában adta meg.

Victor Gustave Robin (1855–1897) francia matematikus volt, aki többek között potenciálelmélettel is foglalkozott. Munkáiban azonban nem szerepel a harmadik peremfeltétel, a kissé félrevezető Robin-peremfeltétel elnevezés az 1950-es évektől terjedt el.

6.2.3. Hővezetés két és magasabb dimenzióban

Mielőtt tetszőleges dimenzióban felírnánk a hővezetés egyenletét, érdemes a kétdimenziós esetet is részletesen megnéznünk. Tekintsünk egy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományban elhelyezkedő vékony szigetelt lemezt, amelynek pontjait jellemezzük az (x, y) koordinátákkal! Tegyük fel, hogy $u(x, y, t)$ jelöli a lemez (x, y) pontjának hőmérsékletét a t időpillanatban. Vegyük a lemez egy kicsiny $R = [x, x + \delta x] \times [y, y + \delta y]$ résztartományát, és írjuk fel a δt idő alatt a peremen befelé haladó hőáramot, amelyet az egyes peremszakaszokon befelé haladó hőáramok összegeként nyerhetünk (lásd a 6.5. ábrát).

Az x tengellyel párhuzamos oldalakon δt alatt befelé haladó hőáram közelítőleg

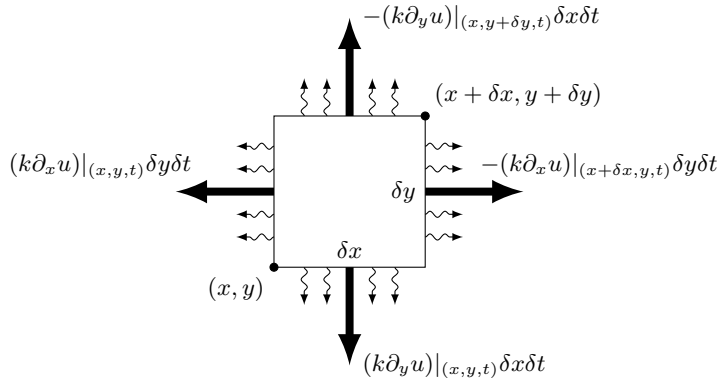
$$\begin{aligned}\big(k(x+\delta x, y)\partial_x u(x+\delta x, y, t) - k(x, y)\partial_x u(x, y, t)\big)\,\delta y\,\delta t \\ \approx \partial_x\big(k(x, y)\partial_x u(x, y, t)\big)\,\delta x\,\delta y\,\delta t,\end{aligned}$$

az y tengellyel párhuzamos oldalakon pedig

$$\begin{aligned}\big(k(x, y+\delta y)\partial_y u(x, y+\delta y, t) - k(x, y)\partial_y u(x, y, t)\big)\,\delta x\,\delta t \\ \approx \partial_y\big(k(x, y)\partial_y u(x, y, t)\big)\,\delta y\,\delta x\,\delta t,\end{aligned}$$

így összességében a peremen közelítőleg

$$\delta Q_1 = \big(\partial_x\big(k(x, y)\partial_x u(x, y, t)\big) + \partial_y\big(k(x, y)\partial_x u(x, y, t)\big)\big)\,\delta x\,\delta y\,\delta t$$



6.5. ábra. Kifelé haladó hőáram téglalaptartományon

$$= \operatorname{div}\big(k(x,y)\operatorname{grad} u(x,y,t)\big)\,\delta x\,\delta y\,\delta t$$

hőmennyiség áramlik befelé δt idő alatt (ahol a gradiens és a divergencia csak az (x,y) térváltozókra vonatkozik).

Tegyük fel, hogy a lemezen elhelyezkedő külső hőforrások és nyelők intenzitását $F(x,y,t)$ sűrűségfüggvény írja le, vagyis δt idő alatt az R kicsiny téglalaptartományon közelítőleg

$$\delta Q_2 = F(x,y,t)\delta x\delta y\delta t$$

hőmennyiség keletkezik külső hőforrások és nyelők útján. A téglalapon δt idő alatt a hőmérséklet-változás közelítőleg

$$u(x,y,t+\delta t) - u(x,y,t) \approx \partial_t u(x,y,t)\,\delta t,$$

amelyhez

$$\delta Q_3 = c(x,y)\varrho(x,y)\,\delta x\,\delta y\partial_t u(x,y,t)\,\delta t$$

hőmennyiség szükséges, ahol $c(x,y)$ a lemez fajhője és $\varrho(x,y)$ a sűrűsége az (x,y) pontban. Ekkor

$$\delta Q_3 = \delta Q_1 + \delta Q_2,$$

azaz

$$\begin{aligned} &c(x,y)\varrho(x,y)\,\delta x\,\delta y\partial_t u(x,y,t)\,\delta t \\ &\qquad \approx \operatorname{div}\big(k(x,y)\operatorname{grad} u(x,y,t)\big)\,\delta x\,\delta y\,\delta t + F(x,y,t)\,\delta x\,\delta y\,\delta t, \end{aligned}$$

ahonnan a δx, δy és δt mennyiségekkel való osztás után a

$$c(x,y)\varrho(x,y)\partial_t u(x,y,t) - \operatorname{div}\big(k(x,y)\operatorname{grad}(u(x,y,t)\big) = F(x,y,t)$$

egyenletet nyerjük, amely a *kétdimenziós hővezetés egyenlete inhomogén közeg esetén*, forrástag jelenléte mellett. Ha c, ϱ, k állandók, akkor a

$$\partial_t u(x,y,t) - \frac{k}{c\varrho}\Delta u(x,y,t) = \frac{F(x,y,t)}{c\varrho},$$

kétdimenziós hővezetési egyenletet nyerjük, ahol

$$\Delta u(x,y,t) = \partial_x^2 u(x,y,t) + \partial_y^2 u(x,y,t)$$

a kétdimenziós *Laplace-operátor* (amelybe a t változót nem értjük bele).

6.4. *Megjegyzés.* Nem meglepő, hogy a peremen beáramló hőmennyiségre éppen

$$\operatorname{div}\big(k(x,y)\operatorname{grad} u(x,y,t)\big)\,\delta x\,\delta y\,\delta t$$

adódott. Csakugyan, a 4.5. szakaszban láttuk, hogy a divergencia forrássűrűséget jelent, a mi esetünkben

$$-\operatorname{div}\big(-k(x,y)\operatorname{grad} u(x,y,t)\big)$$

a $-k(x,y)\operatorname{grad} u(x,y,t)$ vektormező által meghatározott hőáramlás révén az (x,y) pontban keletkező forrássűrűség a t időpillanatban, így a téglalapon (a belső áramlás hatására) δt idő alatt keletkező anyagmennyiség közelítőleg a divergencia, a terület és a δt idő szorzata. Mi ezt a levezetéskor a peremen ki- és beáramló hőmennyiség felől közelítettük meg, és ezzel tulajdonképpen téglalap tartomány esetében a divergenciatételt igazoltuk, legalábbis heurisztikusan.

A fentiek mintájára nyerhető a háromdimenziós hővezetési egyenlet. Hasonló módon belátható, hogy az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartományban elhelyezkedő *inhomogén közegben végbemenő háromdimenziós hővezetést forrástag esetén* az alábbi egyenlet írja le:

$$c(x)\varrho(x)\partial_t u(x,t) - \operatorname{div}\big(k(x)\operatorname{grad}(u(x,t)\big) = F(x,t),$$

ahol a térváltozó $x = (x_1, x_2, x_3)$. Amennyiben c, ϱ, k állandó mennyiségek, akkor a

$$\partial_t u(x,t) - \frac{k}{c\varrho}\Delta u(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\varrho}$$

háromdimenziós hővezetési egyenletet nyerjük, ahol

$$\Delta u(x,t) := \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 u(x,t)$$

a háromdimenziós *Laplace-operátor* (amelybe a t változót nem értjük bele).

Az előbbiek mintájára tetszőleges n pozitív egész esetén értelmezhető az n dimenziós hővezetési egyenlet (közvetlen fizikai tartalom nélkül):

$$\partial_t u(x,t) - a\Delta u(x,t) = f(x,t),$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ és $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^+$ adottak, továbbá

$$\Delta u(x,t) := \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u(x,t)$$

az n dimenziós Laplace-operátor, amely csak az $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ változókban hat.

6.5. *Megjegyzés.* A hővezetési egyenletet szokás *diffúziós egyenletnek* is nevezni, mert ugyanez az egyenlet írja le a *diffúzió* folyamatát, amely a koncentrációkülönbség hatására bekövetkező anyagáramlást jelenti. Ekkor az egyenletben $u(x,t)$ az anyag koncentrációja az x pontban t időpillanatban, és a levezetéskor Fourier törvénye helyett Fick törvényét kell alkalmaznunk, amely hasonlóan szól, csupán a hőáramlást anyagáramlásra, valamint a hőmérsékleti gradienst a koncentráció gradiensére kell cserélnünk. A törvényt először Adolf Eugen Fick (1829–1901) német fizikus fogalmazta meg, innen kapta a nevét.

Mindemellett a hővezetési egyenlet egyéb más folyamatok matematikai leírása kapcsán is felbukkan. Ezek közül megemlítjük például, hogy a pénzügyi matematika Black–Scholes-egyenlete megfelelő változócserével a hővezetési egyenlet alakjára hozható (lásd a 6.7. Feladatot), valamint a lökéshullámok elméletének kiinduló egyenlete, a Burgers-egyenlet szintén kapcsolatban áll a hővezetési egyenlettel (lásd a 6.12. Feladatot).

Mellékfeltételek

Vizsgáljuk most meg, hogy az egydimenziós esetben ismertetett különböző mellékfeltételeknek mik felelnek meg az Ω kétdimenziós, korlátos tartományban végbemenő hővezetés leírásakor.

- *Kezdeti feltétel.* Megadjuk a test kezdeti hőmérséklet-eloszlását, azaz

  $$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in \overline{\Omega}),$$

  ahol $\varphi\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ rögzített függvény.

- *Első peremfeltétel.* A tartomány peremének hőmérsékletét szabályozzuk, vagyis

  $$u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

  ahol $\chi\colon \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ adott függvény.

- *Második peremfeltétel.* Ha a peremen hőáramlás megy végbe, akkor megadhatjuk a (befelé vagy kifelé haladó) hőáramot, azaz

$$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \chi \quad (t \geq 0),$$

ahol $\chi\colon \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ adott függvény, és ν a tartományból kifelé mutató normális egységvektor.

- *Harmadik peremfeltétel.* Ha a peremen hőcsere megy végbe a közeggel, akkor

$$\alpha(\partial_\nu u)|_{\partial\Omega} + \beta u|_{\partial\Omega} = \chi$$

alakú peremfeltételt adhatunk meg, ahol $\alpha, \beta, \chi\colon \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ adott függvények.

A hővezetés (homogén vagy inhomogén) egyenletéhez hozzávéve a kezdeti feltételt, valamint az első, második, harmadik peremfeltétel valamelyikét, a *hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatot* kapjuk a

$$Q := \Omega \times \mathbb{R}^+$$

$(n+1)$ dimenziós végtelen henger lezártján, lásd a 6.6. ábrát.

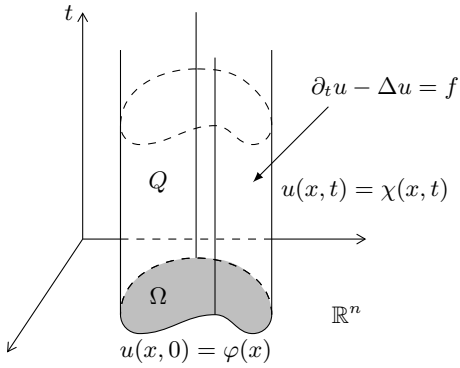
Amennyiben $\Omega = \mathbb{R}^n$, abban az esetben peremfeltételre nincsen szükség, csupán az $u(x,0) = \varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltételt kell megadni, ekkor a *hővezetési egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatról* vagy más néven *Cauchy-feladatról* beszélünk.

Az iménti feladatok kitűzése matematikailag akkor válik teljessé, ha megadjuk azt a teret is, amelyben a megoldásokat keressük. A hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatnak első peremfeltétel esetén kereshetjük például $u \in C^2(\overline{Q})$ vagy akár $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ megoldásait, vagy esetleg olyan $u \in C^1(Q) \cap C(\overline{Q})$ megoldásait, amelyek bármely térváltozó szerint kétszer differenciálhatók, és $\partial_j^2 u \in C(Q)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Azt, hogy valójában mely terek választása esetén lesznek korrekt kitűzésűek a fenti feladatok, a 9. fejezetben vizsgáljuk meg részletesen.

6.2.4. Stacionárius hővezetés

A hővezetés folyamata során előfordulhat, hogy a hőmérséklet-eloszlás időben állandó, gondoljunk például arra, amikor a szoba hőmérséklete egy idő elteltével már nem változik, beáll egy értékre. Ekkor *stacionárius hővezetésről* beszélünk. Mivel az u hőmérséklet időben konstans, ezért a hővezetés egyenletében $\partial_t u = 0$, így azt kapjuk, hogy az u hőmérséklet-eloszlás, amely immár időtől független, kielégíti az alábbi egyenletet:

$$-\operatorname{div}\big(k(x)\operatorname{grad} u(x)\big) = F(x) \quad (x \in \Omega).$$



6.6. ábra. Vegyes feladat n dimenzióban

Ebből $k = 1$ állandó esetén a

$$-\Delta u(x) = F(x) \quad (x \in \Omega)$$

n dimenziós Poisson-egyenletet nyerjük. (Számos könyvben a negatív előjeltől eltekintenek, mi azonban lényegesnek érezzük, többek között a fizikai tartalom miatt, valamint azért, mert a $-\Delta$ operátor sajátértékei nemnegatívak, bővebben lásd a 8. fejezetet.) Amennyiben $F = 0$, vagyis a tartomány külső forrásoktól és nyelőktől mentes, akkor $k = 1$ esetén *Laplace-egyenletről* beszélünk:

$$-\Delta u(x) = 0 \quad (x \in \Omega).$$

(Világos, hogy a mínusz előjelnek a Laplace-egyenlet esetében egyáltalán nincs jelentősége, azonban fontos szerepet töltenek be azok a függvények, amelyekre a Laplace-egyenletet egyenlőség helyett egyenlőtlenséggel teljesítik, és ekkor a negatív előjel már számít.)

Mellékfeltételek

Az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartománybeli stacionárius hővezetés esetében a hőmérséklet egyértelmű leírásához nincs szükség kezdeti feltételre, csupán a három peremfeltétel valamelyikére.

- *Első peremfeltétel.* A tartomány peremének pontjait adott hőmérsékleten tartjuk, vagyis

  $$u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

  ahol $\chi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ rögzített függvény.

- *Második peremfeltétel.* Ha a peremen hőáramlás megy végbe, akkor megadhatjuk a (befelé vagy kifelé haladó) hőáramot, azaz

$$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

ahol $\chi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ adott függvény és ν a tartományból kifelé mutató normális egységvektor.

- *Harmadik peremfeltétel.* Ha a peremen hőcsere megy végbe a közeggel, akkor

$$\alpha(\partial_\nu u)|_{\partial\Omega} + \beta u|_{\partial\Omega} = \chi$$

alakú peremfeltételt adhatunk meg, ahol $\alpha, \beta, \chi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ adott függvények.

A stacionárius hővezetés (homogén vagy inhomogén) egyenletéhez hozzávéve a peremfeltételek valamelyikét, a *Poisson-egyenletre vonatkozó Dirichlet-, Neumann- vagy Robin-feladatokat* nyerjük.

A feladatok matematikailag pontos megfogalmazásához meg kell adnunk azt a függvényteret, amelyben a megoldásokat keressük. A Dirichlet-feladat megoldásait például kereshetjük a $C^2(\overline{\Omega})$, vagy $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ terekben. Azt, hogy ezek közül mely terek választása esetén válnak korrekt kitűzésűvé a fenti feladatok, a Laplace- és a Poisson-egyenletről szóló a 8. fejezetben tanulmányozzuk.

6.6. *Történeti megjegyzés.* A Laplace-operátort és egyenletet elsőként Pierre-Simon Laplace (1749–1827) francia matematikus és fizikus vezette le (méghozzá polárkoordinátás alakban) csillagászati vizsgálódásai során. A Δ jelölést Robert Murphy (1806–1843) angol matematikus és fizikus használta először 1833-ban, a Laplace-operátor elnevezés pedig James Clerk Maxwell (1831–1879) skót fizikusnak a híres 1873-as *Értekezés az elektromosságról és mágnességről* című művében bukkant fel. Laplace tanítványa, Siméon Denis Poisson (1781–1840) az elektromosságtani vizsgálódásai során a $\Delta u = f$ egyenletet írta fel, ezt az ő tiszteletére nevezzük Poisson-egyenletnek.

6.2.5. A hővezetési egyenlet Einstein-féle levezetése

A hővezetési vagy diffúziós egyenlet egy másik igen fontos folyamat, a Brown-mozgás leírásában is felbukkan. Robert Brown (1773–1858) skót botanikus 1827-ben figyelte meg a vízben lebegő mikroszkopikus virágporszemcsék szabálytalan, véletlenszerű mozgását. Ezt a jelenséget 1905-ben Albert Einstein (1879–1955) egy valószínűségi modellel, a részecskék véletlenszerű ide-oda „lökdösődésével" magyarázta meg. Az alábbiakban röviden ismertetjük Einstein gondolatmenetét (lásd [41]).

Az egyszerűség kedvéért egydimenziós esetet tekintünk, és legyen a folyadékban lévő részecskék sűrűségfüggvénye $\varrho(x,t)$, ahol $x \in \mathbb{R}$ a helykoordináta és t az időváltozó. Egy adott részecske (előjeles) elmozdulása kicsiny δt idő alatt legyen ε, amelynek valószínűségi sűrűségfüggvénye $\varphi(\varepsilon)$. A φ függvény két természetes feltételnek tegyen eleget:

- φ páros függvény, azaz a részecske azonos valószínűséggel tér ki a két irány bármelyikébe,
- φ gyorsan lecsengő függvény, vagyis a részecske kitérése kis valószínűséggel lesz nagy.

Írjuk most fel a ϱ sűrűségfüggvényt a $t+\delta t$ időpillanatban! Világos, hogy az x pontban ekkor azok a részecskék lehetnek, amelyek t időpillanatban az $x-\varepsilon$ pontban voltak és δt idő alatt ε volt az elmozdulásuk, így

$$\varrho(x,t+\delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x-\varepsilon,t)\varphi(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Használjuk fel, hogy

$$\varrho(x-\varepsilon,t) = \varrho(x,t) - \varepsilon\partial_x\varrho(x,t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_x^2\varrho(x,t) + o(\varepsilon^2),$$

aminek következtében

$$\varrho(x,t+\delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varrho(x,t) - \varepsilon\partial_x\varrho(x,t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_x^2\varrho(x,t) + o(\varepsilon^2)\right)\varphi(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Most alkalmazzuk, hogy φ valószínűségi sűrűségfüggvény, tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1,$$

ezenkívül φ páros függvény, ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 0,$$

továbbá φ gyors lecsengése folytán

$$\int_{-\infty}^{\infty} o(\varepsilon^2)\varphi(\varepsilon)d\varepsilon \approx 0,$$

így azt kapjuk, hogy

$$\varrho(x,t+\delta t) = \varrho(x,t) + \delta t\partial_x^2\varrho(x,t)\frac{1}{2\delta t}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Ebből δt-vel való osztás és $\delta t \to 0$ határátmenet után a

$$\partial_t \varrho = D\partial_x^2 \varrho$$

egyenletet nyerjük, ahol

$$D := \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{2\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Láthatjuk tehát, hogy a részecskék sűrűségfüggvénye kielégíti az egydimenziós hővezetési egyenletet. Természetesen a fenti levezetés csupán heurisztikus okoskodás, azonban a mai modern sztochasztikus folyamatok elmélete egyik kiindulópontjának tekinthető.

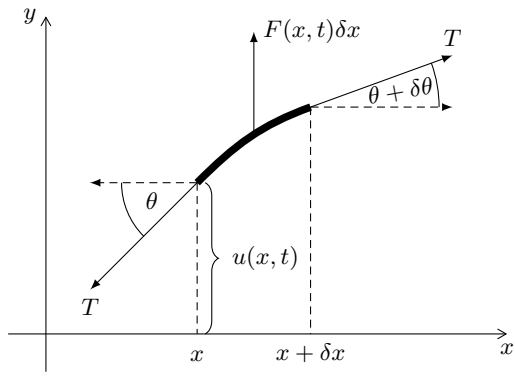
6.7. *Történeti megjegyzés.* Einstein számára az 1905-ös év volt az *Annus Mirabilis* („csodák éve"), ugyanis ekkor születtek a Brown-mozgással, a fényelektromos hatással, a speciális relativitáselmélettel és a tömeg–energia ekvivalenciával ($E = mc^2$) kapcsolatos világraszóló eredményei. A fényelektromos hatás magyarázatáért Einstein 1921-ben megkapta a fizikai Nobel-díjat.

6.3. A hullámmozgás matematikai leírása

A hővezetés folyamata mellett egy másik, mindenki által jól ismert fizikai jelenség a hullámmozgás. Gondoljunk például egy kötélen végighaladó hullámra vagy a megpengetett gitárhúr, vagy a dob membránja által keltett hangra, vagy a fényre, amelynek ugyancsak van hullámtermészete. Az alábbiakban a hullámmozgás egy- és többdimenziós matematikai leírását adjuk meg egyszerű fizikai és tapasztalati törvényekből kiindulva.

6.3.1. Az egydimenziós hullámegyenlet

Képzeljük el, hogy adott egy megfeszített húr vagy kötél, amelynek két végét egy-egy ember fel-le mozgatja, és mi kíváncsiak vagyunk, hogy a mozgatás hatására milyen alakot vesz fel a húr. Ehhez természetesen szükségünk van néhány egyszerűsítő feltételezésre. Tegyük fel, hogy a húr teljesen hajlékony, csak kis kitéréseket végez a függőleges síkban, a húr hosszának változása elhanyagolható, és a húrban állandó T nagyságú érintőirányú feszítő erő ébred. Jellemezzük a húr pontjait az $x \in \mathbb{R}$ koordinátával, és jelölje μ a húr (konstans) lineáris sűrűségét, ami azt jelenti, hogy tetszőleges ℓ hosszú húrdarab tömege $\mu\ell$. Legyen $u(x,t)$ a húr x koordinátájú pontjának az y tengely irányú (előjeles) kitérése a t időpillanatban (az esetleges vízszintes kitéréstől eltekintettünk). Végül tételezzük fel, hogy a húrra $F(x,t)$ sűrűségű, y tengely irányú külső erő hat, ami jelentse azt, hogy egy kicsiny $[x, x+\delta x]$ húrdarabra ható erő nagysága $F\delta x$.



6.7. ábra. Húrdarabra ható erők

Tekintsük most a húr x és $x + \delta x$ pontjai közötti δx hosszúságú kicsiny darabját, és tegyük fel, hogy az x végpontban az érintő θ szöget zár be az x tengellyel, míg az $x + \delta x$ pontban az érintő szöge $\theta + \delta\theta$ (lásd a 6.7. ábrát). Ekkor a húrdarab két végén ható erők függőleges komponenseinek nagysága rendre $T\sin(\theta + \delta\theta)$ és $T\sin\theta$. Newton második törvényét alkalmazva, ezen két komponens és a külső erő eredője megegyezik a húrdarab $\mu\delta x$ tömegének és a_y függőleges irányú gyorsulásának szorzatával:

$$T\sin(\theta + \delta\theta) - T\sin\theta + F(x,t)\delta x = (\mu\delta x)a_y. \tag{6.2}$$

A húrdarab infinitezimális hossza miatt $a_y \approx \partial_t^2 u(x,t)$. Másrészt, a húr csak kis kitéréseket végez, ezért $\delta\theta$ kicsiny szög, így alkalmazhatók a $\sin(\delta\theta) \approx \delta\theta$, $\cos(\delta\theta) \approx 1$ és

$$\sin(\theta + \delta\theta) = \sin\theta\cos(\delta\theta) + \cos\theta\sin(\delta\theta) \approx \sin\theta + \delta\theta$$

közelítések, amelyekkel a (6.2) egyenlet a következőképpen alakul:

$$T\delta\theta + F(x,t)\delta x = (\mu\delta x)\partial_t^2 u(x,t). \tag{6.3}$$

Vegyük még észre, hogy θ az érintő szöge, ezért $\operatorname{tg}\theta = \partial_x u$, amit x szerint deriválva az összetett függvény deriválása alapján $(1/\cos^2\theta)\partial_x\theta = \partial_x^2 u$ adódik. Ebből ismét a $\cos(\delta\theta) \approx 1$ közelítést használva, valamint a $\partial_x\theta$ deriváltat a $\delta\theta/\delta x$ különbségi hányadossal helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\delta\theta \approx (\partial_x^2 u)\delta x. \tag{6.4}$$

Ezzel a (6.3) egyenlet a

$$(T\delta x)\partial_x^2 u + F\delta x = (\mu\delta x)\partial_t^2 u$$

alakot ölti, ahonnan rendezéssel

$$\partial_t^2 u - \frac{T}{\mu}\partial_x^2 u = \frac{F}{\mu} \tag{6.5}$$

adódik. A (6.5) egyenletet *egydimenziós hullámegyenletnek* hívjuk, amelyet a *transzverzálisan rezgő húr* kis kitérései elégítenek ki. Ha $F = 0$, vagyis nem hat külső erő a húrra, akkor *szabad rezgésről* és *homogén egyenletről*, $F \neq 0$ esetén pedig *kényszerrezgésről* és *inhomogén egyenletről* beszélünk. Hasonló egyenlet írja le például egy vékony rúd vagy a levegőoszlop hosszirányú (longitudinális) rezgéseit (gondoljunk például egy orgonasíp hangjára), ekkor $u(x,t)$ az x pont hosszirányú kitérését jelöli. Később, a hullámegyenletről szóló 10. fejezetben látni fogjuk, hogy az egyenletben szereplő T/μ konstans éppen a rezgés hatására tovaterjedő hullám terjedési sebességének négyzete.

6.8. *Történeti megjegyzés.* Az egydimenziós hullámegyenletet először Brook Taylor (1685–1731) angol matematikus írta fel a mechanika törvényei alapján. Taylor lényegében a következőképpen érvelt: az egyensúlyi helyzetéből kitérített húr igyekszik „visszaegyenesedni", és az ennek következtében létrejövő visszatérítő erő a húr görbületével arányos: minél nagyobb mértékben kitérítettük, annál inkább vissza akar egyenesedni. A görbület a húr alakját leíró $u(x,t)$ függvény (x szerinti) második deriváltjának konstansszorosa, így Newton második törvényéből kapjuk, hogy $\partial_t^2 u = c\partial_x^2 u$, ahol c alkalmas konstans.

A klasszikus analízisből jól ismert Taylor-polinom és sor is Brook Taylor nevét viseli, noha azt James Gregory (1638–1675) skót matematikus már évtizedekkel Taylor előtt bevezette.

Mellékfeltételek

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek szükségesek a húr mozgásának egyértelmű leírásához! Feltételezve, hogy a húr véges hosszúságú, amely a $[0, L]$ szakaszon helyezkedik el, fizikai szempontból világos, hogy kezdeti és peremfeltételeket egyaránt meg kell adnunk. Ezek a következők lehetnek.

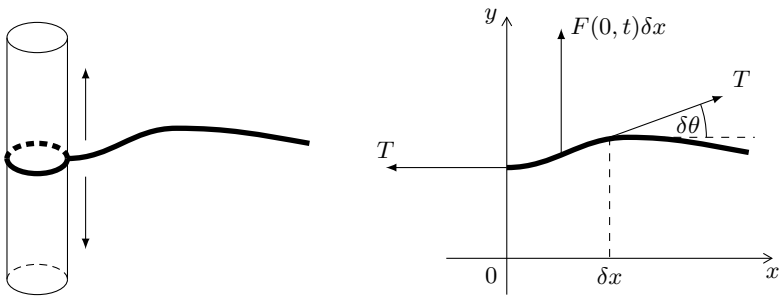
- *Kezdeti feltételek.* A húr mozgásának leírásához ismernünk kell a húr *kezdeti alakját*, azaz

  $$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in [0,L]),$$

  továbbá a húr *kezdeti sebességeloszlását* is, vagyis

  $$\partial_t u(x,0) = \psi(x) \quad (x \in [0,L]),$$

  ahol $\varphi, \psi\colon [0,L] \to \mathbb{R}$ adott függvények. E feltételeket együttesen *kezdeti feltételeknek* hívjuk.



(a) Kísérleti elrendezés (b) Végpontra ható erők

6.8. ábra. Szabadon mozgó végű húr

- *Peremfeltétel előírt módon mozgó végek esetén.* Ha a húr végeinek mozgását írjuk elő, akkor

$$u(0,t) = \chi_1(t), \quad u(L,t) = \chi_2(t) \quad (t \geq 0)$$

alakú *első peremfeltételt*, más néven *Dirichlet-féle peremfeltételt* adhatunk meg, ahol $\chi_1, \chi_2 \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ha a húr végei rögzítettek, akkor speciálisan a homogén

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

peremfeltételt írhatjuk elő.

- *Peremfeltétel szabadon mozgó végek esetén.* Tegyük fel, hogy a húr végei szabadon mozoghatnak, ám a húr továbbra is meg van feszítve. Ezt például úgy képzelhetjük el, hogy a húr végére egy (elhanyagolható tömegű) gyűrűt erősítünk, amely egy függőleges hengeren súrlódásmentesen fel-le mozoghat (lásd a 6.8. (a) ábrát.) Ekkor a végpontokban a feszítőerő párhuzamos az x tengellyel (különben a feszítőerő függőleges komponense gyorsulást adna a húr végének), így a $[0, \delta x]$ szakaszra ható erők függőleges komponenseinek összege (lásd a 6.8. (b) ábrát.)

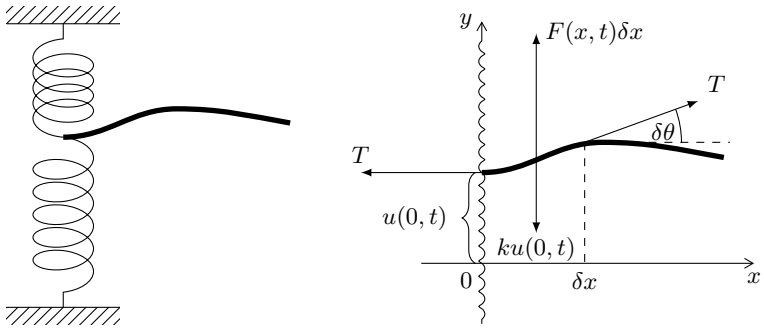
$$T \sin(\delta\theta) + F(0,t)\,\delta x,$$

és mivel $\delta\theta$ kicsiny szög, ezért alkalmazható a $\sin \delta\theta \approx \operatorname{tg} \delta\theta = \partial_x u(\delta x, t)$ közelítés. Ebből következően Newton második törvénye alapján

$$T\partial_x u(\delta x, t) + F(0,t)\,\delta x = (\mu\delta x)\partial_t^2 u(0,t).$$

Itt a δx mennyiséggel 0-hoz tartva $\partial_x u(0,t) = 0$ adódik. Az $x = L$ szabad végpont esetén hasonló módon a $-\partial_x u(L,t) = 0$ feltételt nyerhetjük, vagyis mindkét végén szabad húr esetén

$$\partial_x u(0,t) = 0, \quad -\partial_x u(L,t) = 0 \quad (t \geq 0)$$



(a) Kísérleti elrendezés (b) Végpontra ható erők

6.9. ábra. Rugalmasan rögzített végű húr

alakú homogén *második peremfeltételt*, más néven homogén *Neumann-féle peremfeltételt* adhatunk meg.

- *Peremfeltétel rugalmasan rögzített végek esetén.* Képzeljük el, hogy a rúd végein a rögzítés Hooke törvénye alapján a kitéréssel arányos és ellenkező irányú erővel hat (amit kísérletileg úgy valósíthatunk meg, hogy a húr végét rugókhoz rögzítjük). Ekkor a szabad vég esetéhez képest az $x = 0$ végpontban megjelenik a $-ku(0,t)$ nagyságú rugóerő is (k a rugóállandó), így Newton második törvénye szerint

$$T\partial_x u(\delta x, t) - ku(0,t) + F(0,t)\delta x = (\mu\delta x)\partial_t^2 u(0,t),$$

ahonnan $\delta x \to 0$ esetén $T\partial_x u(0,t) - ku(0,t) = 0$ adódik. Az $x = L$ végpontban hasonló módon a $-T\partial_x u(0,t) - ku(0,t) = 0$ feltételt nyerhetjük, vagyis mindkét végén rugalmasan rögzített húr esetén

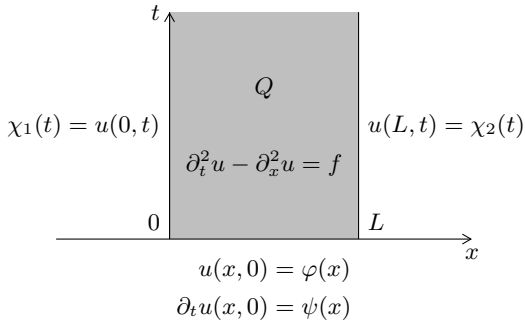
$$\partial_x u(0,t) - \frac{k}{T}u(0,t) = 0, \quad -\partial_x u(L,t) - \frac{k}{T}u(L,t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

vagy általánosabban

$$\alpha_1\partial_x u(0,t) + \beta_1 u(0,t) = \chi(t), \quad \alpha_2\partial_x u(L,t) + \beta_2 u(L,t) = \chi_2(t) \quad (t \geq 0)$$

alakú *harmadik peremfeltételt*, más néven *Robin-féle peremfeltételt* írhatunk elő, ahol $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ és $\chi_1, \chi_2 \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ adottak.

6.9. *Történeti megjegyzés.* A rugótörvényt, mely szerint a visszatérítő erő nagysága arányos a megnyúlással, Robert Hooke (1635–1703) angol természettudós fogalmazta meg először egy latin anagramma formájában: „ceiiinosssttuu". Később közölte az anagramma megfejtését: „ut tensio, sic vis",



6.10. ábra. Hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladat

ami annyit jelent, hogy „amekkora a megnyúlás, akkora az erő". Hooke egyébként igazi polihisztor volt, a természettudományok szinte minden területén, a fizikától kezdve a kémián át a biológiáig maradandót alkotott, többek között mikroszkópos megfigyelései során ő alkotta meg a sejt fogalmát.

A hullámegyenlethez a kezdeti feltételeket és a peremfeltételek valamelyikét hozzávéve, az *egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladatot* kapunk a $Q := (0, L) \times \mathbb{R}^+$ végtelen téglalap (kétdimenziós henger) lezártján, lásd a 6.10. ábrát.

Gyakran előfordul, hogy a húr végpontjainak hatásaitól eltekinthetünk, más szóval a húr „végtelen" hosszú. Ekkor peremfeltétel megadására nincs szükség, csak az

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

kezdeti feltételekre. Ilyenkor a *hullámegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatról* vagy *Cauchy-feladatról* beszélünk.

A mellékfeltételekkel nyert különböző feladatok matematikailag csak akkor vannak pontosan megfogalmazva, ha azt is megmondjuk, hogy milyen függvénytérben keressük a megoldásokat. Például az egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladatnak első peremfeltétel esetén kereshetjük $u \in C^2(\overline{Q})$, vagy akár $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ megoldásait, vagy esetleg olyan $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ megoldását, amelyre $\partial_t u \in C(\overline{Q})$. Az így kapott feladatok korrekt kitűzésének kérdésével a 10. fejezetben foglalkozunk részletesen.

6.3.2. Hullámegyenlet két és magasabb dimenzióban

A kétdimenziós hullámegyenlet levezetéséhez képzeljük el, hogy adott egy vékony homogén lemez vagy membrán (például dob membránja), amely a hajlítással szemben nem, hanem csak a feszítéssel szemben fejt ki ellenállást.

Vizsgáljuk meg, hogy a membrán megrezegtetésének hatására miként alakul az egyes pontjainak az egyensúlyi helyzettől való függőleges kitérése (lásd a 6.11. ábrát)!

Jellemezzük ennek érdekében a membrán pontjait az (x, y) koordinátákkal, és tegyük fel, hogy $u(x, y, t)$ jelöli az (x, y) koordinátájú pont függőleges kitérését a t időpillanatban. Jelölje továbbá S a membrán felületi feszültségét, ami azt jelenti, hogy a megfeszített membrán bármely piciny ℓ hosszúságú szakaszára a felület érintősíkjában $S\ell$ nagyságú, a szakaszra merőleges feszítő erő hat. Vegyük most a felület egy kicsiny téglalap tartományát, amelynek oldalai δx és δy nagyságúak és a tengelyekkel párhuzamosak, akkor az oldalakra ható erők nagysága $S\delta x$ és $S\delta y$ (lásd a 6.12 (a) ábrát). Ebből következően, a membrándarab xz síkkal párhuzamos metszetében (lásd a 6.12 (b) ábrát) az $S\delta x\delta y$ nagyságú erővel megfeszített húr esetét nyerjük vissza. Az előző szakaszbeli gondolatmenetünk alapján tudjuk, hogy ekkor ebben a síkmetszetben a függőleges erők eredője $S\delta y\delta\theta_x$. Hasonlóan, az yz síkban a függőleges erő eredője $S\delta x\delta\theta_y$. Jelölje σ a membrán egységnyi területre vonatkoztatott tömegét, ekkor Newton második törvényét a téglalap tartományra felírva:

$$S\delta y\delta\theta_x + S\delta x\delta\theta_y = \sigma\delta x\delta y\partial_t^2 u.$$

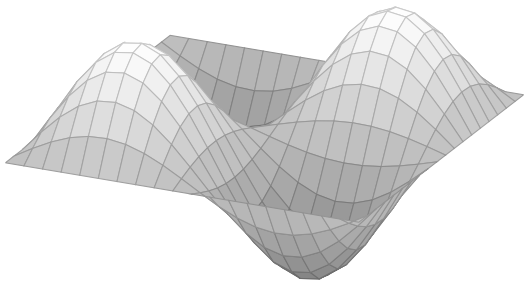
Az $\delta\theta_x \approx (\partial_x^2 u)\delta x$ és $\delta\theta_y \approx (\partial_y^2 u)\delta y$ közelítések (lásd az egydimenziós esetben a (6.4) összefüggést) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\partial_t^2 u - \frac{S}{\sigma}\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right) = 0.$$

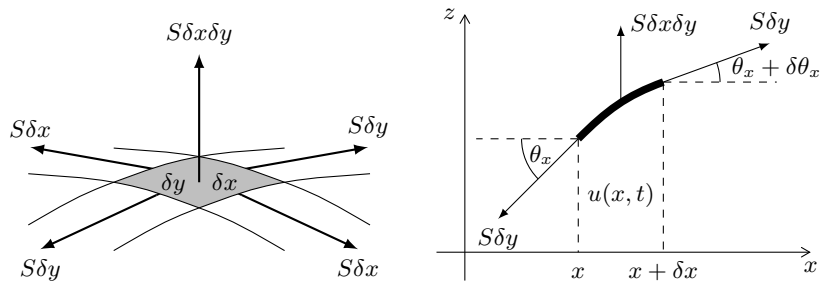
A fenti egyenletet *kétdimenziós hullámegyenletnek* nevezzük, amely a membrán transzverzális rezgéseit írja le.

Háromdimenziós esetben a *hullámegyenlet* alakja

$$\partial_t^2 u - c^2(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) = f,$$



6.11. ábra. Membrán rezgései



(a) Membrándarabra ható erők (b) Membrán metszete

6.12. ábra. Membrán rezgésének fizikai leírása

amely például a hang terjedését írja le levegőben vagy gázokban (és az egyenletben szereplő c konstans valójában a terjedési sebességnek felel meg).

Általában a

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f,$$

egyenletet *n dimenziós hullámegyenletnek* nevezzük, ahol

$$\Delta u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u(x,t)$$

a *Laplace-operátor*, amely csak az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ változókban hat.

Vegyük észre, hogy a hullámmozgás stacionárius eseteként, vagyis amikor a membrán alakja állandó, a Laplace- és Poisson-egyenletet nyerjük.

Mellékfeltételek

Az egydimenziós eset mintájára röviden tekintsük át, hogyan néznek ki a mellékfeltételek az n dimenziós hullámegyenlet esetében.

Szükség van két *kezdeti feltételre*,

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in \overline{\Omega}),$$

továbbá

$$\partial_t u(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \overline{\Omega}),$$

ahol $\varphi, \psi \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ rögzített függvények. Ezenkívül szükséges a három *peremfeltétel* valamelyikének megadása is. Lehet *Dirichlet-féle peremfeltétel*,

$$u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

vagy *Neumann-peremfeltétel*,

$$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

vagy *harmadik peremfeltétel*,

$$\alpha(\partial_\nu u)|_{\partial\Omega} + \beta u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

ahol $\alpha, \beta, \chi\colon \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ adott függvények, és ν a tartományból kifelé mutató normális egységvektor. A hullámegyenlethez a kezdeti feltételeket és a peremfeltételek valamelyikét hozzávéve az *n dimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladatot* kapjuk a $Q := \Omega \times \mathbb{R}^+$ végtelen henger lezártján.

A mellékfeltételekkel nyert különböző feladatok matematikailag csak akkor válnak pontosan megfogalmazottá, ha azt is megadjuk, hogy milyen függvénytérben keressük a megoldásokat. Például az n dimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladatnak első peremfeltétel esetén kereshetjük $u \in C^2(\overline{Q})$, vagy akár $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ megoldásait, vagy esetleg olyan $u \in C^2(Q) \cap \cap C(\overline{Q})$ megoldását, amelyre $\partial_t u \in C(\overline{Q})$.

6.4. Egyenletek kavalkádja

Parciális differenciálegyenletek és rendszerek kiapadhatatlan forrása a fizikai jelenségek modellezése. Az alábbiakban ezekből adunk (levezetések nélkül) némi ízelítőt. További fizikai példák (és levezetések) találhatók a [205, 206] könyvekben.

6.4.1. Lineáris egyenletek

Transzportegyenlet

Jelölje $u(x,t)$ a $v \in \mathbb{R}^n$ állandó sebességgel áramló folyadékban lévő oldott anyag koncentrációját az $x \in \mathbb{R}^n$ pontban t időpillanatban. Ekkor megfelelő fizikai feltételezésekkel élve u kielégíti a

$$\partial_t u(x,t) + v \cdot \operatorname{grad} u(x,t) = 0$$

egyenletet, ahol a gradiens csak az x változóra vonatkozik. (Az egyenlet megoldásainak előállítását illetően lásd a 6.1–6.3. Feladatokat.)

Tricomi-egyenlet

A gázdinamikában az

$$y\partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenlet a hangsebességhez közeli áramlások leírásában játszik szerepet. Itt u lényegében az áramlás úgynevezett áramfüggvényének felel meg, amelynek szintvonalai az áramvonalak, vagyis olyan görbék, amelyeket minden pontban az áramlás valamely sebességvektora érint. Az (x, y) koordináták azonban nem térkoordinátákat jelölnek, hanem az áramlás sebességének komponenseiből származtathatók bizonyos transzformációval oly módon, hogy az $y < 0$ eset a hangsebesség alatti (idegen szóval szubszonikus), az $y > 0$ a hangsebesség feletti (szuperszonikus) áramlásnak felel meg.

6.10. *Történeti megjegyzés.* Francesco Giacomo Tricomi (1897–1978) olasz matematikus, aki az 1920-as években több cikkében is tanulmányozta az egyenletet, innen származik az elnevezés. (Az egyenlettel kapcsolatban lásd a 6.4. Feladatot.)

Schrödinger-egyenlet

Kvantummechanikában egy fizikai rendszer állapotát az úgynevezett hullámfüggvénnyel jellemezhetjük, amely lényegében a részecske $x \in \mathbb{R}^n$ tartózkodási helyének időben változó valószínűségi sűrűségfüggvényével áll kapcsolatban. Ennek az $u(x, t)$ hullámfüggvénynek az időbeli változása az

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t u(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x,t) - V(x)u(x,t) = 0$$

egyenlettel írható le, ahol i az imaginárius egység, $\hbar$ az úgynevezett redukált Planck-állandó, m a részecske tömege és V a rendszer potenciális energiáját leíró függvény.

6.11. *Történeti megjegyzés.* Az egyenletet 1925-ben a neves osztrák fizikus, Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961) fizikus vezette le, és az ebből kiinduló eredményeiért 1933-ban fizikai Nobel-díjban részesült. (A Planck-állandó Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947) német fizikus, a kvantummechanika egyik megalapítója nevét viseli, aki 1918-ban kapott Nobel-díjat.)

Távíróegyenlet

Ha egy távvezetékben $u(x, t)$ jelöli a feszültséget az $x \in \mathbb{R}$ pontban és t időpillanatban, akkor természetesen adódó fizikai feltételezésekkel élve megmutatható, hogy u kielégíti a

$$\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u + (\alpha + \beta)\partial_t u + \alpha\beta u = 0$$

egyenletet, ahol a c, α, β konstansok a kábel elektromosságtani paramétereiből (ellenállás, kapacitás stb.) származó konstansok. Ez a másodrendű egyenlet valójában oly módon adódik, hogy távvezetékben lévő áramerősségre és

feszültségre a fizikai modell alapján két elsőrendű egyenletből álló egyenletrendszert írunk fel, amelyekből mind a feszültség, mind pedig az áramerősség kifejezhető egyetlen másodrendű egyenlettel (lásd a 6.5. Feladatot).

6.12. *Történeti megjegyzés.* A távvezeték matematikai modelljét az 1880-as években Oliver Heaviside (1850–1925) angol mérnök, fizikus és matematikus alkotta meg, a koaxiális kábelt ő szabadalmaztatta. Az elektromosságtan számos fogalma és elnevezése (impedancia, permittivitás, permeabilitás stb.) szintén tőle származik.

Biharmonikus egyenlet

Jelölje $u(x, y)$ egy elhanyagolható vastagságú vízszintes lemez $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontjának függőleges kitérését, amelyről feltételezzük, hogy időben állandó. A lemez, ellentétben egy membránnal, a hajlítással szemben is ellenállást fejt ki. Megfelelő fizikai feltételezések mellett levezethető, hogy ekkor u kielégíti a

$$\Delta^2 u = 0$$

egyenletet, ahol

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \partial_1^4 u + 2\partial_1^2 \partial_2^2 u + \partial_2^4 u.$$

(Az egyenlettel kapcsolatban lásd a 6.6. Feladatot.)

6.13. *Történeti megjegyzés.* A rezgő lemezek matematikai elmélete (legalább) Ernst Chladni (1756–1827) német fizikus klasszikus 1789-es kísérletéig nyúlik vissza. A kísérletben Chladni üveglemezre szórt homokot hozott rezgésbe egy hegedűvonóval, és ezáltal a lemezen (a frekvenciától és a rögzítéstől függő) mintázatok alakultak ki. A kísérletet Chladni 1809-ben megismételte Napóleonnak, akire ez olyan hatást gyakorolt, hogy felajánlott egy 1 kilós aranyérmet annak, aki elméletileg megmagyarázza a kísérlet eredményét. Az Akadémia 1809-ben írta ki a felhívást, amelyre egyedül Marie-Sophie Germain (1776–1831) francia matematikusnő nyújtott be pályázatot, kétszer is, 1811-ben és 1813-ban (akkor ráadásul névtelenül), de eredményeit fizikai elvekkel nem tudta megindokolni, ezért csak dicséretben részesült. A versenyt meghosszabbították, közben Siméon Denis Poisson (1781–1840) több cikket is írt a témában (például 1812-ben a róla elnevezett Poisson-formulát is ekkor vezette le), de akadémiai tagsága miatt ő nem pályázhatott, ehelyett az egyik bíráló volt Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) mellett. Germain a cikkeket elolvasva egy újabb pályázatot nyújtott be 1816-ban, Poisson módszerét bírálva, a sajátját javasolva helyette. A díjat Germainnek ítélték, ami számára óriási elismerést jelentett. Sajnos azonban ettől még az Akadémia ülésein továbbra sem vehetett részt, mert abban az időben ez nők számára nem volt megengedett.

Megjegyezzük, hogy Germain autodidakta matematikus volt. 13 éves korában apja könyvtárában Arkhimédészről olvasott, és ez annyira felkeltette érdeklődését, hogy önállóan latinul és görögül kezdett tanulni, és így később Newton és Euler munkáit olvasta. Érdekes módon Germain rezgéstani munkái talán kevésbé élnek a köztudatban, mint inkább számelméleti eredményei.

Black–Scholes-egyenlet

Utolsó példánk kivételesen nem a fizikából, hanem a pénzügyi matematikából származik, méghozzá az európai stílusú opciós ügyletek árazásának modellezésében bukkan fel. Az opció egy olyan szerződés, amelyben a vevő az opció (úgynevezett kötési árfolyamon történő) megvásárlásával jogot szerez arra, hogy valamilyen terméket (például részvényt, kötvényt vagy árucikket) adott időpontban (a lejáratkor) adott áron (a lehívási árfolyamon) a másik félnek eladjon (vagy megvegyen); a másik fél pedig kötelezettséget vállal arra, hogy a szóban forgó terméket az adott áron megveszi (vagy eladja). Amennyiben $V(S,t)$ jelöli az opció árfolyamát az alapjául szolgáló termékek S jelenértéke és a t idő függvényében, akkor megmutatható, hogy V kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + rS\partial_S V - rV = 0,$$

ahol r a kockázatmentes kamatláb, σ a volatilitás, amely az árfolyam változékonyságát fejezi ki. Megfelelő változócserét végrehajtva az egyenlet az egydimenziós hővezetési egyenlet alakját veszi fel (lásd a 6.7. Feladatot).

6.14. *Történeti megjegyzés.* Az egyenlet Fischer Sheffey Black (1938–1995) amerikai és Myron Scholes (1941–) kanadai-amerikai közgazdász nevét viseli. Az európai opciók árazásának modelljét ők állították fel, de annak matematika kidolgozásában Robert Cox Merton (1944–) amerikai közgazdász is igen jelentős szerepet játszott. Munkásságukért Scholes és Merton 1997-ben elnyerte a közgazdasági Nobel-emlékdíjat (Black ekkor már nem élt, így nem részesülhetett az elismerésben).

6.4.2. Nemlineáris egyenletek

Porózus közeg egyenlete

Egy porózus, más szóval lyukacsos közegben (például mészkő, homokkő, de a talaj is modellezhető ily módon) áramló anyag (legyen az folyadék vagy gáz) időben változó $u(x,t)$ sűrűségfüggvényére megfelelő feltételezésekkel teljesül a

$$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0$$

egyenlet, ahol $\gamma > 1$ állandó. A porózus közeg egyenlete, a hővezetés (vagy diffúzió) egyenletével szemben, véges sebességű hatásterjedést ír le, ezért bi-

zonyos esetekben a hővezetés egyenleténél valósághűbb modellnek tekinthető. (Az egyenlet úgynevezett Barenblatt-megoldását illetően lásd a 6.9. Feladatot.)

Burgers-egyenlet

Jelölje $u(x,t)$ az x tengely mentén áramló folyadék vagy gáz sebességét a t időpillanatban. Ekkor megfelelő feltételek mellett u kielégíti a

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u$$

egyenletet, ahol ν az úgynevezett kinematikus viszkozitás, amely lényegében a belső súrlódást jellemző mérőszám ($\nu = 0$ esetén nem-viszkózus Burgers-egyenletről szokás beszélni). A Burgers-egyenlet a folyadékmechanika fontos egyenlete, többek között gázok vagy akár a közlekedés dinamikájának modellezésére is használják (lásd a 6.10. Feladatot). Érdemes megemlíteni, hogy az úgynevezett Hopf–Cole-transzformáció segítségével a hővezetési egyenlet és a Burgers-egyenlet megoldásai között kapcsolat teremthető (lásd a 6.12. Feladatot). (Az egyenlettel kapcsolatban lásd még a 6.10–6.12. Feladatokat.)

6.15. *Történeti megjegyzés.* Johannes Martinus Burgers (1895–1981) holland fizikus, aki 1948-ban a turbulencia jelenségének vizsgálatakor vezette be az egyenletet, amely a lökéshullámok elméletének egyik kiindulópontjává vált. (Lökéshullám ott alakulhat ki, ahol klasszikus értelemben már nem létezik megoldás; ennek illusztrálására lásd a 6.11. Feladatot.)

Korteweg–de Vries-egyenlet

Tegyük fel, hogy egy hosszú, keskeny csatornában sekély víz található. Ha $u(x,t)$ jelöli a víz egyensúlyi helyzethez viszonyított magasságát az x pontban t időpillanatban, akkor teljesül, hogy

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0.$$

6.16. *Történeti megjegyzés.* Az egyenlet története legalább 1834-ig nyúlik vissza, amikor John Scott Russell (1808–1882) skót mérnök a keskeny csatornákban való közlekedésre alkalmas hajók megtervezésével kísérletezett. Ekkor figyelt fel a csatornában végighaladó, és eközben az alakját megőrző utazó hullám jelenségére (egy ilyen hullám látható a 6.13. ábrán). Ezt, a hidrodinamika addig felállított elméleteibe nem igazán illeszkedő jelenséget transzlációs hullámnak nevezte el. A megfigyelés matematikai alátámasztására 1871-ben Joseph Valentin Boussinesq (1842–1929), majd 1876-ban John William Strutt (ismertebb nevén Lord Rayleigh) (1842–1919) tett kísérletet. A szóban forgó egyenletet 1895-ben Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) és Gustav de Vries (1866–1934) holland matematikusok írták fel, innen kapta a nevét. Az



6.13. ábra. Szoliton

egyenlet vizsgálata az 1960-as években a modern számítógépek megjelenésével új lendületet vett, Norman J. Zabusky (1929–2018) amerikai fizikus és Martin David Kruskal (1925–2006) amerikai matematikus részletesen tanulmányozták az utazó hullám megoldásokat, amelynek a *szoliton* nevet adták (a solitarius latin szó jelentése: magányos). A 6.13. Feladatban szerepel az egyenlet egy konkrét szoliton megoldása.

Eikonal egyenlet

Jelölje $u(x)$ azt a minimális időt, amely alatt a fény egy x pontból egy Ω tartomány határáig eljut, ha $f(x)$ a terjedési sebesség az x pontban. Ekkor teljesül a geometriai optika alapegyenlete:

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{f(x)}.$$

Az eikonal elnevezés a görög *ikon* (kép) szóból származik. (Az egyenlettel kapcsolatban lásd a 6.14-6.15. Feladatokat.)

p-Laplace-egyenlet

Nemlineáris rugalmasságtanban (például műanyagok vagy gumi alakváltozásakor) vagy úgynevezett nem-newtoni áramlásokban (például futóhomok vagy méz ilyen közeget biztosít) fordul elő a

$$\operatorname{div}\left(|\operatorname{grad} u|^{p-2} \operatorname{grad} u\right) = 0$$

egyenlet, ahol $p \geq 2$ valós szám. Speciálisan $p = 2$ esetén visszakapjuk a Laplace-egyenletet. (Az egyenlet speciális – úgynevezett radiális – megoldásaival kapcsolatban lásd a 6.16. Feladatot.)

6.4.3. Egyenletrendszerek

Ha egy jelenséget egyszerre több állapotváltozóval írhatunk le, akkor a matematikai modell általában parciális differenciálegyenlet-rendszerekre vezet. Most két igencsak nevezetes rendszert említünk meg.

Maxwell-egyenletek

A (háromdimenziós) elektromos és mágneses tér viselkedését és kölcsönhatását az elektrodinamika négy alapegyenletével írhatjuk le. Ha $\mathbf{E}$ az elektromos térerősség, $\mathbf{B}$ a mágneses indukció, $\mathbf{J}$ az áramsűrűség (a félkövér betű arra utal, hogy vektormezőkről van szó), továbbá ϱ az elektromos töltéssűrűség, akkor

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0},\\
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0,\\
\operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\partial_t\mathbf{B},\\
\operatorname{rot}\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E},
\end{aligned}$$

ahol ε_0 az elektromos permittivitás és μ_0 a mágneses permeabilitás. A $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ nabla vektor segítségével (a divergencia és rotáció formális átírását felhasználva, lásd a 4.5. szakaszt) az egyenletek így festenek:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{6.6}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{6.7}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}, \tag{6.8}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}. \tag{6.9}$$

6.17. *Történeti megjegyzés.* Az egyenleteket, még kissé bonyolultabb módon James Clerk Maxwell (1831–1879) 1873-ban *Értekezés az elektromosságról és mágnességről* című művében írta fel: 20 egyenletet és a nabla vektorban kvaterniókat használt. Az egyenletek mai alakjukat Oliver Heaviside (1850–1925) angol mérnök, matematikus és fizikus munkái nyomán érték el, aki számos egyszerűsítést hajtott végre (egyúttal a vektoranalízist is megreformálva), és az előbbi négy egyenlet tőle származik. Érdekességképpen megjegyezzük, hogy Heaviside autodidakta módon tanulta a felsőbb matematikát és fizikát, 16–17 éves kora után nem részesült formális oktatásban. Maxwell könyvével 23 évesen találkozott, és – visszaemlékezései szerint – több évbe telt, mire a mű megértéséhez szükséges matematikai analízisbeli fogalmakat saját maga elsajátította.

Az egyenletekből Maxwell elektromágneses hullámok létezésére következtetett. Ennek az óriási felfedezésnek az érzékeltetése céljából tegyük fel, hogy $\varrho = 0$ és $\mathbf{J} = 0$ (például vákuumban), és vegyük először a (6.8) egyenlet mindkét oldalának rotációját. Ekkor

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\nabla\times(\partial_t\mathbf{B}),$$

ahol a jobb oldalon megfelelő simaságot feltételezve (Young tétele miatt) felcserélhetjük a deriválások sorrendjét, így a (6.9) egyenlet alapján kapjuk:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times (\partial_t \mathbf{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E}. \tag{6.10}$$

Hasonló módon, a (6.9) egyenlet mindkét oldalának rotációját véve és a deriválások sorrendjét felcserélve:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{B}. \tag{6.11}$$

Most a kapott (6.10) és (6.11) egyenletek bal oldalain használjuk fel (lásd 6.18. Feladat), hogy ha $\mathbf{F}$ sima vektormező, akkor

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}, \tag{6.12}$$

így

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E},$$
$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{B}.$$

Mivel (6.6), (6.7) alapján $\varrho = 0$ feltételezéssel élve $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ és $\nabla \cdot \mathbf{B}$, ezért végül

$$\partial_t^2 \mathbf{E} - c_0^2 \Delta \mathbf{E} = 0, \tag{6.13}$$
$$\partial_t^2 \mathbf{B} - c_0^2 \Delta \mathbf{B} = 0, \tag{6.14}$$

ahol $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2{,}9979 \cdot 10^8 m/s$ a vákuumbeli fénysebesség. A (6.13) és (6.14) egyenletek (ezek a koordináta-függvényekre valójában 3-3 egyenletet jelentenek!) hullámegyenletek, amelyeket *elektromágneses hullámegyenleteknek* szokás hívni. Többek között ez mutatja, hogy a fény hullámtermészettel is rendelkezik.

Navier–Stokes-egyenletek

Ha egy áramló folyadék sebessége $\mathbf{u}$, az állandónak feltételezett sűrűsége ϱ, a nyomása p, és a külső erőkből származó gyorsulása $\mathbf{a}$, akkor az összenyomhatatlan folyadék mozgását leíró egyenletrenszer egyszerűsített alakja a következő:

$$\nabla \mathbf{u} = 0,$$
$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p + \mathbf{a},$$

ahol ν az úgynevezett kinematikus viszkozitás (amely lényegében a folyadék belső ellenállását, súrlódását jellemző anyagi mennyiség). Az első egyenletet

szokás *kontinuitási egyenletnek* hívni, amely a tömegmegmaradást fejezi ki (ezzel kapcsolatban lásd még a 6.17. Feladatot). A második egyenletcsoportot, amely valójában három egyenletet foglal magába (az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{a}$ vektormezők koordináta-függvényeire külön-külön egy-egy egyenlet, sőt $\mathbf{a} = 0$ és $p = 0$ esetén éppen a Burgers-egyenlet!) *momentumegyenletekként* szokás emlegetni, ezek írják le a mozgástörvényt.

6.18. *Történeti megjegyzés.* Claude-Louis Navier (1785–1836) francia hídépítő mérnök 1822-ben, később pedig Sir George Gabriel Stokes (1819–1903). ír matematikus 1842-ben írta le az egyenletek első formáját, innen kapta az egyenletrendszer a nevét. A megoldások létezésével és tulajdonságaival kapcsolatos kérdések egy része mindmáig megoldatlan, és a probléma szerepel a kanadai Clay Intézet által kitűzött Millenniumi Problémák között, amelyek bármelyikének megoldásáért 1 millió dollár jár.

6.5. Feladatok

6.1. Legyen $v \in \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy ha $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ kielégíti a

$$\partial_t u(x,t) + v \cdot \operatorname{grad} u(x,t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R})$$

transzportegyenletet, akkor u az

$$s \mapsto (x_0 + vs, t_0 + s) \quad (s \in \mathbb{R}^n)$$

paraméteres alakú egyenesek mentén állandó, ahol $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tetszőleges. Adjuk meg mindezek ismeretében a transzportegyenlet $u \in \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ megoldásainak általános alakját.

6.2. Legyen $v \in \mathbb{R}^n$ rögzített (sebesség)vektor, továbbá $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$ és $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ adott függvények, és tekintsük az inhomogén jobb oldalú transzportegyenletre vonatkozó alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \operatorname{grad} u = f & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Határozzuk meg a feladat $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$ megoldását, ha

a) $f = 0$ és g tetszőleges függvény;

b) $g = 0$ és f tetszőleges függvény;

c) f és g tetszőleges függvények.

6.3. Határozzuk meg az alábbi inhomogén jobb oldalú, nulladrendű taggal kiegészített transzportegyenletre vonatkozó alábbi kezdetiérték-feladat

$u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$ klasszikus megoldását, ahol $v \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, továbbá $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$ és $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ adott függvények:

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \operatorname{grad} u + cu = f & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\text{-ban}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

6.4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C, D konstansok esetén az

$$u(x,y) = Axy + Bx + Cy + D$$

és

$$u(x,y) = A(3x^2 - y^3) + B(x^3 - xy^3) + C(6x^2y - y^4)$$

függvények kielégítik a Tricomi-egyenletet!

6.5. Ismert, hogy ha egy hosszú távvezetékben lévő feszültséget $V(x,t)$, az áramerősséget pedig $I(x,t)$ függvény adja meg az x helyen, t időben, akkor megfelelő fizikai feltevésekkel élve fennállnak az alábbi elsőrendű parciális differenciálegyenletek:

$$\begin{aligned} C\partial_t V + GV + \partial_x I = 0, \\ L\partial_t I + RI + \partial_x V = 0, \end{aligned}$$

ahol a C, L, G, R állandók a vezeték bizonyos elektromosságtani jellemzői. Kétszeri differenciálhatóságot feltételezve mutassuk meg, hogy ekkor a V és I függvények a

$$c^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = \frac{G}{C}, \quad \beta = \frac{R}{L}$$

paraméterek választása mellet kielégítik a

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u + (\alpha + \beta)\partial_t u + \alpha\beta u = 0$$

távíró egyenletet.

6.6. Tegyük fel, hogy az $u \in C^4(\mathbb{R}^2)$ függvényre $\Delta u = 0$ az $\mathbb{R}^2$ síkon. Igazoljuk, hogy ekkor a $v(x,y) := xu(x,y)$ és a $v(x,y) := (x^2 + y^2)u(x,y)$ függvényekre $\Delta^2 v = 0$ az $\mathbb{R}^2$ síkon.

6.7. Igazoljuk, hogy a

$$\partial_t V(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V(S,t) + rS\partial_S V(S,t) - rV(S,t) = 0,$$

Black–Scholes-egyenlet az új

$$x = \log S - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t, \quad \tau = -t$$

változók és $u(x,\tau) = e^{r\tau}V(S,t)$ ismeretlen függvény bevezetésével a

$$\partial_\tau u - \frac{1}{2}\sigma^2\partial_x^2 u = 0$$

egydimenziós hővezetési egyenlet alakjára hozható.

6.8. Igazoljuk, hogy ha α, β és $\gamma > 1$ olyan konstansok, amelyekre

$$\alpha(\gamma - 1) + 2\beta = 1,$$

továbbá az $u \in C^2(\mathbb{R}^2_+)$ függvény kielégíti a porózus közeg

$$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0$$

egyenletét, akkor tetszőleges rögzített $\lambda > 0$ paraméter mellett az

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

függvény szintén megoldása az egyenletnek.

6.9. Legyenek $b > 0$, $\gamma > 1$ tetszőleges valós számok és

$$\alpha := \frac{n}{n(\gamma-1)+2}, \quad \beta := \frac{1}{n(\gamma-1)+2}.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha}\left(\left(b - \frac{\beta(\gamma-1)}{2\gamma}\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)^+\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

függvény (azokban a pontokban, ahol differenciálható) kielégíti a porózus közeg egyenletét. (Egy v függvényre $v^+ := \max\{v, 0\}$ a függvény pozitív része.) Ezeket a megoldásokat Grigorij Iszakovics Barenblatt (1927–2018) orosz matematikus találta 1952-ben, ezért az ő tiszteletére Barenblatt-megoldásoknak szokás nevezni.

6.10. Tekintsük az autópályán haladó gépkocsikat a számegyenes mentén mozgó tömegpontoknak. Jelölje az x pontban a t időpillanatban az autók sűrűségét $\varrho(x,t)$, sebességüket pedig $v(x,t)$, amelyekről az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy $0 \le \varrho \le 1$ és $0 \le v \le 1$. Megfigyelések szerint minél sűrűbben helyezkednek el az autók, annál lassabban tudnak haladni, amit például a $v = 1 - \varrho$ összefüggéssel is modellezhetünk. Mutassuk meg, hogy ekkor ϱ kielégíti a

$$\partial_t \varrho(x,t) + \partial_x(\varrho(x,t)(1 - \varrho(x,t))) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

egyenletet, amely az $u = 1 - 2\varrho$ új ismeretlen függvény bevezetésével a

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0$$

nem-viszkózus Burgers-egyenlet alakját ölti.

6.11. Tekintsük a nem viszkózus Burgers-egyenletre vonatkozó

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + u\partial_x u(x,t) = 0 \quad ((x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), \\ u(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

kezdetiérték-feladatot. Ha u klasszikus megoldás, akkor az

$$\dot{x}(t) = u(x(t),t) \quad (t \geq 0)$$

közönséges differenciálegyenletet a feladat *karakterisztikus egyenletének* nevezzük, a $t \mapsto (x(t),t)$ görbéket pedig *karakterisztikus görbéknek*.

a) Bizonyítsuk be, hogy a Burgers-egyenlet bármely u megoldása állandó a karakterisztikus görbék mentén. Igazoljuk ennek segítségével, hogy $x(t) = x_0 + g(x_0)t$ (ahol $x_0 \in \mathbb{R}$), így a karakterisztikus görbék különböző meredekségű félegyenesek.

b) Ábrázoljuk $g(x) = -x$ esetén a karakterisztikus görbéket az (x,t) síkon! Melyik az a legbővebb időintervallum, amelyen az u klasszikus megoldás értelmezhető? Határozzuk meg az u megoldást!

c) Rajzoljuk fel a karakterisztikus görbéket a $g(x) = x$ esetben, majd adjuk meg az u klasszikus megoldást!

(A lineáris egyenletek esetében az 5.2.4. alszakaszban foglalkoztunk a karakterisztikus egyenlettel.)

6.12. Tegyük fel, hogy $\Phi \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ sehol sem nulla függvény, amely kielégíti a

$$\partial_t \Phi(x,t) - \nu\partial_x^2 \Phi(x,t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

egydimenziós hővezetési egyenletet, ahol $\nu > 0$ állandó. Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$u(x,t) := -2\nu \frac{\partial_x \Phi(x,t)}{\Phi(x,t)} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0). \tag{6.15}$$

képlettel értelmezett u függvény kielégíti a

$$\partial_t u(x) + u\partial_x u(x,t) = \nu\partial_x^2 u(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

Burgers-egyenletet. (A (6.15) formulával megadott helyettesítést szokás Hopf–Cole-transzformációnak nevezni, amelyet Eberhard Frederich Ferdinand Hopf (1902–1983) német matematikus 1950-ben és Julian David Cole (1925–1999) amerikai matematikus 1951-ben egymástól függetlenül vezetett be.)

6.13. Mutassuk meg, hogy a Korteweg–de Vries-egyenletet tetszőleges $\sigma > 0$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén kielégíti az alábbi függvény:

$$u(x,t) = -\frac{\sigma}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x-\sigma t-c)\right),$$

ahol $\operatorname{sech}(x) = 1/\operatorname{ch} x$. (A fenti megoldás az úgynevezett *szoliton*, amely egy speciális utazó hullám.)

6.14. Legyen K tetszőleges nem üres, konvex, zárt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.

a) Mutassuk meg, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ pont esetén egyértelműen létezik $x_K \in K$, amelyre $|x - x_K| = \operatorname{dist}(x, K)$.

b) Igazoljuk, hogy az

$$u(x) := |x - x_K| \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus K)$$

függvény differenciálható és

$$\operatorname{grad} u(x) = \frac{x - x_K}{|x - x_K|},$$

ezáltal $|\operatorname{grad} u(x)| = 1$, tehát u kielégíti az eikonal egyenletet $f(x) = = 1$ esetén.

6.15. Keressük meg a

$$|\operatorname{grad} u(x,y)| = 1 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

kétdimenziós eikonal egyenlet $u(x,y) = X(x) + Y(y)$ alakú $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldásait!

6.16. Igazoljuk, hogy az

$$u(x) = \begin{cases} \log|x|, & \text{ha } p = n, x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ |x|^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{ha } p \neq n, x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

képlettel értelmezett függvény kielégíti a p-Laplace-egyenletet az $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tartományon, azaz

$$\operatorname{div}\big(|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u(x)\big) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

6.17. Tegyük fel, hogy az n dimenziós térben áramló folyadék $x \in \mathbb{R}^n$ pontbeli sebességvektora a t időpillanatban $v(x,t) \in \mathbb{R}^n$, a folyadék sűrűsége $\varrho(x,t)$, és jelölje a folyadékban lévő külső források és nyelők intenzitását $f(x,t)$. Mutassuk meg, hogy ekkor érvényes az úgynevezett *kontinuitási egyenlet*:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = f(x,t).$$

6.18. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kétszer differenciálható vektormező, akkor érvényes a (6.12) azonosság, vagyis

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \Delta\mathbf{F},$$

ahol

$$\Delta\mathbf{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3).$$

7. fejezet

Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja

Nincs olyan tudomány, amely alkalmazott tudománynak hívható. Tudomány van és annak alkalmazásai, amelyek úgy kapcsolódnak össze, mint a fa a gyümölcseivel.

Louis Pasteur (1822–1895)

A fejezet tartalma. A másodrendű, főrészükben lineáris és a másodrendű lineáris egyenleteket főrészük alapján osztályozzuk, majd ezt követően az állandó együtthatós esetben az egyenletek úgynevezett kanonikus alakra való transzformációját tárgyaljuk.

7.1. Az egyenletek osztályozása

Amint ezt a 6. fejezetben ismertetett fizikai példák is kiválóan szemléltetik, a különböző természeti folyamatok matematikai modelljei igen gyakran másodrendű, főrészükben lineáris vagy lineáris egyenletekre vezetnek. A főrészükben lineáris egyenletek fogalmát az 5.1.3. alszakaszban vezettük be; emlékeztetőül arról van szó, hogy az egyenlet főrésze, vagyis a legmagasabb rendű deriváltakat tartalmazó tagok, a szóban forgó deriváltak lineáris kombinációjaként foghatók fel oly módon, hogy az együtthatófüggvények csupán a független változótól függnek. Ekkor az alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmazó tagokat hagyományosan az egyenlet jobb oldalára rendezve, a másodrendű esetben a következő alakot nyerjük valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u = g \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u), \tag{7.1}$$

ahol $a_{jk}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $(j,k=1,\dots,n)$ és $g\colon \Omega \times G \to \mathbb{R}$ adott függvények, valamint $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rögzített tartomány. Speciális esetként a másodrendű lineáris egyenletek pedig

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_j\partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega) \quad (7.2)$$

alakúak, ahol $a_{jk}, b_j, c, f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ adott függvények (amelyek simasági tulajdonságait a konkrét esetekben tisztázzuk pontosan, de többnyire folytonosak). Amennyiben klasszikus, azaz $u \in C^2(\Omega)$ megoldást keresünk, akkor a Young-tétel miatt $\partial_j\partial_k u = \partial_k\partial_j u$ $(j,k=1,2,\dots,n)$, és ennek következtében az együtthatófüggvények esetleges módosítása után feltehető (ezzel kapcsolatban lásd a 7.3. Példát), hogy

$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \quad (x \in \Omega; j,k=1,2,\dots,n).$$

A továbbiakban mindig feltételezzük az együtthatófüggvények előbbi szimmetriáját.

A másodrendű, főrészükben lineáris és másodrendű lineáris egyenleteket a főrészük alapján osztályozzuk. Legyen $x_0 \in \Omega$ rögzített és jelölje $A(x_0)$ a (7.1), valamint (7.2) egyenlet főrészének együtthatóiból képzett $n \times n$-es valós mátrixot:

$$A(x_0) := (a_{jk}(x_0))_{j,k=1}^{n} = \begin{pmatrix} a_{11}(x_0) & a_{12}(x_0) & \dots & a_{1n}(x_0) \\ a_{21}(x_0) & a_{22}(x_0) & \dots & a_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x_0) & a_{n2}(x_0) & \dots & a_{nn}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Mivel $a_{jk}(x_0) = a_{kj}(x_0)$ $(j,k=1,2,\dots,n)$, ezért $A(x_0)$ szimmetrikus négyzetes mátrix. A lineáris algebrából jól ismert főtengelytétel szerint egy $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrixnak multiplicitással számolva pontosan n darab valós sajátértéke van, és megadható a mátrix páronként ortogonális (azaz merőleges) sajátvektoraiból álló bázisa az $\mathbb{R}^n$ térben. A főrész együtthatóiból képzett $A(x_0)$ mátrix sajátértékeinek előjele alapján különböző osztályba soroljuk a másodrendű, főrészükben lineáris parciális differenciálegyenleteket.

7.1. Definíció. Jelölje rendre n_+, n_-, n_0 az $A(x_0)$ valós szimmetrikus együtthatómátrix pozitív, negatív és 0 sajátértékeinek számát (multiplicitással számolva). Ekkor a (7.1) és (7.2) egyenlet az x_0 pontban

- *elliptikus*, ha $n_+ = n$ vagy $n_- = n$ (más szóval a sajátértékek azonos előjelűek);
- *hiperbolikus*, ha $n_+ = 1$ és $n_- = n-1$; vagy $n_+ = n-1$ és $n_- = 1$ (azaz $n-1$ darab sajátérték előjele megegyezik és egy ezzel ellentétes).

Amikor $n_0 = 0$ és $n_+ > 1, n_- > 1$, az egyenletet *ultrahiperbolikusnak* szokás nevezni.

- *(szigorúbb értelemben) parabolikus*, ha $n_0 = 1$ és emellett $n_+ = n - 1$ vagy $n_- = n - 1$ (tehát $n - 1$ darab sajátérték azonos előjelű és egy sajátérték 0). Amikor csupán $n_0 > 0$ teljesül (vagyis a mátrixnak van 0 sajátértéke, de a többi sajátértékre nem feltétlenül teljesül előjelfeltétel), az egyenletet szokás *tágabb értelemben parabolikusnak* nevezni.

Azt mondjuk, hogy a (7.1) és (7.2) egyenlet az Ω tartományon *elliptikus*, *hiperbolikus* vagy *parabolikus*, ha a tartomány minden x pontjában ilyen tulajdonságú.

7.2. *Megjegyzés.* Mivel az egyenletek típusát a jobb oldal nem befolyásolja, ezért gyakran az egyenletek helyett magukról a bal oldalon szereplő differenciáloperátorokról mondjuk, hogy elliptikusak, hiperbolikusak vagy parabolikusak.

Az ellipticitást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $A(x_0)$ együtthatómátrix definit. Ha minden sajátértéke pozitív, akkor pozitív definit, ami azt jelenti, hogy az

$$\langle A(x_0)p, p\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x_0)p_j p_k$$

kvadratikus alak helyettesítési értéke bármely $p \in \mathbb{R}^n$ nem nullvektorra pozitív. Ezzel egyenértékűen

$$\langle A(x_0)p, p\rangle \geq \left(\min_{j=1,\dots,n} \lambda_j(x_0)\right) |p|^2 \text{ minden } p \in \mathbb{R}^n \text{ esetén,} \tag{7.3}$$

ahol $\lambda_j(x_0)$ $(j = 1, \dots, n)$ jelöli az $A(x_0)$ mátrix sajátértékeit. Egy mátrix pozitív definit volta ekvivalens azzal, hogy bal felső sarok-aldeterminánsainak (más szóval főminorainak) mindegyike pozitív (a determinánsok jeltartó sorozatot alkotnak). Negatív definit esetben a sarok-aldeterminánsok váltakozva negatívak és pozitívak (a kezdő minor, vagyis a bal felső elem negatív). Természetesen esetleges (-1)-gyel való szorzással mindig elérhető, hogy egy adott pontban elliptikus egyenlet együtthatómátrixa abban a pontban pozitív definit legyen. Ha a mátrixnak van 0 sajátértéke, akkor az ekvivalens azzal, hogy a determinánsa (amely éppen a sajátértékeinek szorzata) 0, és ebben az esetben az egyenlet tágabb értelemben parabolikus. Végezetül annyit érdemes még felelevenítenünk – feladatmegoldások során gyakran hasznunkra válik majd –, hogy 2×2 mátrixok körében a két főminor segítségével a definit, szemidefinit és indefinit tulajdonságok egyértelműen eldönthetők. Nevezetesen az

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

szimmetrikus mátrix

- definit, ha $\det A > 0$, az $a > 0$ esetben pozitív definit, $a < 0$ esetén negatív definit;
- szemidefinit, ha $\det A = 0$, $a > 0$ mellett pozitív szemidefinit, $a < 0$ esetén pedig negatív szemidefinit;
- indefinit, ha $\det A < 0$.

A 2×2-es indefinit esetben a mátrix egyik sajátértéke pozitív, a másik negatív, így az egyenlet hiperbolikus típusú.

7.3. Példa. Tekintsük az

$$x^2\partial_1^2 u(x,y) + xy\partial_1\partial_2 u(x,y) + y^2\partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenletet, amelyet az

$$xy\partial_1\partial_2 u = \frac{1}{2}xy\partial_1\partial_2 u + \frac{1}{2}xy\partial_2\partial_1 u$$

egyenlőség felhasználásával az

$$x^2\partial_1^2 u(x,y) + \frac{xy}{2}\partial_1\partial_2 u(x,y) + \frac{xy}{2}\partial_2\partial_1 u(x,y) + y^2\partial_2^2 u(x,y) = 0$$

szimmetrikus alakba írhatunk át. Az együtthatómátrixa

$$\begin{pmatrix} x^2 & \frac{xy}{2} \\ \frac{xy}{2} & y^2 \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa $\frac{3}{4}x^2y^2$. Ebből következően az egyenlet az x és y tengelyek kivételével az egész síkon elliptikus, a koordinátatengelyeken pedig az origó kivételével parabolikus (az origóban a mátrix éppen a nullmátrix, így ekkor valódi differenciálegyenletről sincs szó, de akár nevezhetjük tágabb értelemben parabolikusnak).

Érdemes megvizsgálni, hogy a három alapegyenlet (a hővezetési, a hullám- és a Poisson-egyenlet) a bevezetett típusok közül mely osztályba sorolható.

7.4. Példa. Az n dimenziós Poisson-egyenlet (lásd a 6.2.4. szakaszt), azaz

$$-\Delta u(x) = -\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u(x) = f(x),$$

az adott tartomány minden pontjában elliptikus.

Az n dimenziós hullámegyenlet (lásd a 6.3.2. szakaszt), vagyis

$$\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) = \partial_t^2 u(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u(x,t) = f(x)$$

(ahol t jelöli az $(n+1)$-edik változót, amelyet a Δ operátorba nem értünk bele) együtthatómátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

így az egyenlet minden pontban hiperbolikus egyenlet.

Végül az n dimenziós hővezetési egyenlet (lásd a 6.2.3. szakaszt), azaz

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = \partial_t u(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u(x,t) = f(x),$$

esetében a főrész csupán a $(-\Delta u)$ tagot jelenti, ezért az együtthatómátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

tehát az egyenlet minden pontban parabolikus.

Adott tartományon elliptikus egyenletek egy fontos osztályát alkotják azon egyenletek, amelyekhez tartozó együtthatómátrix sajátértékeinek létezik a tartomány pontjaitól független („univerzális") pozitív alsó korlátja. Ekkor a (7.3) egyenlőtlenségben a sajátértékek minimuma helyett ezt az alsó korlátot vehetjük bármely $x_0 \in \Omega$ pontban.

7.5. Definíció. A (7.1) és (7.2) egyenleteket az Ω tartományban *egyenletesen elliptikusnak* hívjuk, ha létezik $c_0 > 0$ szám, hogy

$$\langle A(x)p, p\rangle \geq c_0 |p|^2 \quad \text{minden} \quad p \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \quad x \in \Omega \quad \text{esetén.}$$

7.6. *Megjegyzés.* Mivel az iménti definíció alapján többek között a $-\Delta u = 0$ egyenlet sem egyenletesen elliptikus a negatív előjel miatt, célszerű a fogalmat

$$-\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_j \partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega)$$

alakban felírt egyenletekre is kiterjeszteni. Ezeket egyenletesen elliptikusnak fogjuk nevezni abban az esetben, ha az $(a_{jk}(x))$ együtthatókból képzett $A(x)$ mátrixra teljesül az egyenletes ellipticitás 7.5. Definícióban megfogalmazott feltétele. Fogalmazhatunk oly módon is, hogy a $(-a_{jk}(x))$ együtthatókból képzett $-A(x)$ mátrix sajátértékeinek létezik x-től független (univerzális) negatív felső korlátja.

7.7. Példa. A Laplace- és a Poisson-egyenletről szóló 8. fejezetben fogjuk vizsgálni az

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u(x)) + qu(x) = f(x) \quad (x \in \Omega)$$

alakú egyenleteket valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega})$ adott függvények. A p függvényről minden esetben feltételezzük majd, hogy $p > 0$ az $\overline{\Omega}$-on. Ekkor a szóban forgó egyenlet egyenletesen elliptikus a tartományon. Valóban, a divergencia definíciója alapján

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j (p \partial_j u) = \sum_{j=1}^{n} p \partial_j^2 u + \sum_{j=1}^{n} \partial_j p \partial_j u = p\Delta u + \sum_{j=1}^{n} \partial_j p \partial_j u,$$

tehát az egyenlet főrésze $-p\Delta u$. Ebből következően az együtthatómátrix diagonális és a főátló minden eleme $-p(x)$. Mivel p folytonos a korlátos zárt $\overline{\Omega}$ halmazon, ezért Weierstrass tétele (annak többváltozós esete) miatt a p függvénynek van minimuma, amely a $p > 0$ feltétel miatt pozitív. Ennélfogva az együtthatómátrix minden sajátértéke felülről becsülhető a $-\min_{\overline{\Omega}} p < 0$ állandóval. (A negatív előjel szerepe az egyenlet részletes tanulmányozásakor válik érthetővé.)

7.8. Példa. Magától értetődő, hogy ha egy állandó együtthatós egyenlet (tehát amelyben többek között az a_{jk} együtthatók állandók) egy adott tartományon egyenletesen elliptikus, akkor a tartomány minden pontjában elliptikus.

Abból viszont, hogy egy egyenlet minden pontban elliptikus, általában még nem következik az egyenletes ellipticitás. Ezt mutatja például az

$$x\partial_1^2 u(x,y) + x\partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in (0,1)^2)$$

egyenlet, amely a $(0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ tartomány minden pontjában elliptikus, mert az $A(x,y)$ együtthatómátrix sajátértékei x és x. Az egyenlet azonban nem egyenletesen elliptikus a tartományon, hiszen $\langle A(x,y)p, p\rangle / |p|^2 = x$, ami tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet midőn $x \to 0+$.

7.2. Az egyenletek kanonikus alakja

Az előző szakaszban láttuk, hogy a későbbi vizsgálódásaink tárgyát képező három alapegyenlet, a hővezetési, a hullám- és az ezek stacionárius eseteként adódó Poisson-egyenlet, rendre parabolikus, hiperbolikus és elliptikus

típusúak. Célunk megmutatni, hogy állandó együtthatós esetben a (7.1) alakú másodrendű, főrészükben lineáris egyenletek főrésze lényegében a három alapegyenlet főrészének valamelyikére transzformálható attól függően, hogy elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus egyenletről van-e szó az adott tartományon. Miután a főrész transzformációjával már végeztünk, az alacsonyabb rendű tagokat is egyszerűbb alakra hozhatjuk az állandó együtthatós esetben.

7.2.1. Főrészükben lineáris egyenletek

Tekintsük először a másodrendű, főrészében lineáris, állandó együtthatós

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u(x) = g(x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x)) \tag{7.4}$$

egyenletet az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, ahol $a_{jk} \in \mathbb{R}$, és emellett feltesszük, hogy $a_{jk} = a_{kj}$ $(j, k = 1, 2, \dots, n)$. Jelölje A az egyenlet főrészének együtthatóiból képzett szimmetrikus mátrixot. Célunk az $x = (x_1, \dots, x_n)$ változók helyett olyan új $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ változók bevezetése, hogy a $v(\xi) = u(x)$ függvényre nézve a (7.4) egyenlet főrésze csak $\partial_j^2 v$ deriváltakat tartalmazza, és azokat is ± 1 vagy 0 együtthatókkal. Ez az áttérés voltaképpen teljesen azonos lesz a lineáris algebrából jól ismert kvadratikus alakok négyzetösszegekké való alakításával. Hogy a lényeget egy picit jobban megértsük, célszerű átírnunk az egyenlet bal oldalát a

$$\nabla_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$$

nabla sorvektor segítségével a formális

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u = (\nabla_x A \nabla_x^T)u.$$

alakba. Legyen $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egyelőre ismeretlen invertálható mátrix, és tekintsük a

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

új változókat és $v(\xi) = u(x) = u(S^{-1}\xi)$ új ismeretlen függvényt. Ekkor a többváltozós láncszabály alapján

$$\nabla_x u = (\nabla_\xi v)S,$$

ahol a jobb oldalon a $\nabla_\xi v = (\partial_{\xi_1} v, \dots, \partial_{\xi_n} v)$ sorvektorral balról szorozzuk az S mátrixot. Ekkor formálisan a differenciáloperátorok szintjén

$$\nabla_x = \nabla_\xi S,$$

így

$$(\nabla_x A \nabla_x^T)u = (\nabla_\xi S A S^T \nabla_\xi^T v).$$

Ez azt mutatja, hogy ha az SAS^T mátrix diagonális és a főátlójában csak ± 1 vagy 0 számok állnak, akkor a v függvényre nézve a kívánt alakú transzformált egyenletet nyerjük. Ezen a ponton lép színre a főtengelytétel. Ismert ugyanis, hogy az A valós, szimmetrikus mátrix ortonormált sajátvektoraiból mint oszlopvektorokból álló B ortogonális mátrix segítségével elkészített $B^T AB$ mátrix diagonális, a főátlóban a sajátértékekkel. Az így kapott diagonális mátrixot egy megfelelő $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonális mátrixszal jobbról és (transzponáltjával) balról beszorozva a $D^T B^T ABD$ mátrix főátlójának elemei már normáltak, tehát ± 1 vagy 0. Ezek alapján az $S = (BD)^T$ mátrix választása célravezető az új koordináták bevezetésekor. Ez lesz a (7.4) egyenlet transzformációjának menete, amelyet az alábbiakban lépésről-lépésre ismertetünk.

Jelölje az A együtthatómátrix sajátértékeit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ és a hozzá tartozó ortonormált sajátvektorokat $s_1, \dots, s_n$. Ekkor a lineáris algebra főtengelytétele szerint a sajátvektorokból mint oszlopvektorokból képzett $B = (s_1, \dots, s_n)$ mátrix ortogonális, azaz $B^T = B^{-1}$, továbbá

$$B^T AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Másképpen fogalmazva, a sajátvektorok bázisában az A mátrix diagonális. A főátlóban lévő elemek egységnyi abszolút értékűvé vagy nullává transzformálásának érdekében legyen

$$D := \begin{pmatrix} d_{11} & & & 0 \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{ahol} \quad d_{jj} := \begin{cases} 1/\sqrt{|\lambda_j|}, & \text{ha } \lambda_j \neq 0, \\ 1, & \text{ha } \lambda_j = 0. \end{cases}$$

Ekkor a $C := BD$ mátrixra teljesül, hogy

$$C^T AC = (BD)^T A(BD) = D(B^T AB)D = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\lambda_1 & & & 0 \\ & \operatorname{sgn}\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \operatorname{sgn}\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hogy az egyenletünk főrésze diagonális alakot öltsön, vezessük most be $x \in \Omega$ helyett a $\xi = C^T x$ új független változót, és u helyett tekintsük a $v(\xi) = u(x) = u\left((C^T)^{-1}\xi\right)$ ismeretlen függvényt. Koordinátákkal kifejezve

$$\xi_p = \sum_{\ell=1}^{n} c_{\ell p} x_\ell \quad (p = 1, \dots, n),$$

így a többváltozós láncszabály alkalmazásával

$$\partial_k u(x) = \sum_{p=1}^{n} \partial_p v(\xi) \frac{\partial \xi_p}{\partial x_k} = \sum_{p=1}^{n} \partial_p v(\xi) c_{kp} \quad (k = 1, \dots, n), \tag{7.5}$$

amelyet ismét deriválva

$$\partial_j \partial_k u(x) = \sum_{p,q=1}^{n} \partial_q \partial_p v(\xi) c_{jq} c_{kp} \quad (j, k = 1, \dots, n).$$

Ezt a (7.4) egyenlet bal oldalába helyettesítve

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j \partial_k u(x) &= \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \sum_{p,q=1}^{n} \partial_q \partial_p v(\xi) c_{jq} c_{kp} \\ &= \sum_{p,q=1}^{n} \partial_p \partial_q v(\xi) \sum_{j,k=1}^{n} c_{jq} a_{jk} c_{kp}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $\sum_{j,k=1}^{n} c_{jq} a_{jk} c_{kp}$ nem más, mint a $C^T A C$ mátrix q-adik sorának p-edik eleme, vagyis $p = q$ esetén $\operatorname{sgn} \lambda_p$, különben pedig 0. Következésképpen a (7.4) egyenletet a v ismeretlen függvény bevezetésével az alábbi alakra transzformáltuk az Ω tartomány C^T általi képében:

$$\sum_{p=1}^{n} (\operatorname{sgn} \lambda_p) \partial_p^2 v(\xi) = G(\xi, v(\xi), \partial_1 v(\xi), \dots, \partial_n v(\xi)) \quad (\xi \in C^T(\Omega)), \tag{7.6}$$

ahol

$$G(\xi, z_1, \dots, z_{n+1}) = g\left(\left(C^T\right)^{-1} \xi, z_1, \dots, z_{n+1}\right).$$

Az átalakítás végeredményeképpen adódott (7.6) egyenletet a (7.1) egyenlet *kanonikus alakjának nevezzük.*

7.9. *Megjegyzés.* Érdemes egy pillanatra visszatérnünk a szakasz elején tárgyalt motiváció egy fontos tanulságára. Nevezetesen, ha

$$\xi = Sx$$

új változót (ahol ξ és x oszlopvektoroknak tekintendők) és $v(\xi) = u(x)$ új ismeretlen függvényt vezetünk be, akkor

$$\nabla_x u(x) = \nabla_\xi v(\xi) S,$$

vagyis formálisan az új és régi változók szerinti parciális deriválás differenciáloperátoraira érvényes

$$\nabla_x = \nabla_\xi S,$$

ahol a nabla vektorokat sorvektoroknak tekintjük. Ez az $S = C^T$ esetben éppen a (7.5) összefüggés „koordinátamentes" felírása, amely a deriválás operátorai közötti áttérést fejezi ki a koordináta-transzformáció mátrixának segítségével. Ezt a kétdimenziós esetben már az 5.2.3. szakaszban láttuk, és az 5.11. Példában alkalmaztuk.

Végül jegyezzük meg azt is, hogy a $\xi = Sx$ koordinátacsere a bázisok szintjén azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^n$-ben a standard

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisvektorokról az $\tilde{e}_j = S^{-1} e_j$ $(j = 1, \dots, n)$ bázisvektorokra térünk át. Jelen esetben $S = (BD)^T$, ezért $B^T = B^{-1}$ folytán

$$S^{-1} = \left(DB^T\right)^{-1} = BD^{-1},$$

amelynek oszlopvektorai a

$$(\operatorname{sgn} \lambda_1)\sqrt{|\lambda_1|}e_1, \quad (\operatorname{sgn} \lambda_2)\sqrt{|\lambda_2|}e_2, \quad \dots, \quad (\operatorname{sgn} \lambda_n)\sqrt{|\lambda_n|}e_n$$

az új bázisvektorok.

7.10. Következmény. *A* (7.1) *egyenlet kanonikus alakja*

- *az elliptikus és ezen belül a* $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$ *esetben*

$$-\sum_{p=1}^{n} \partial_p^2 v = G \circ (\mathrm{id}, v, \partial_1 v, \dots, \partial_n v),$$

  amelynek bal oldala éppen az n *dimenziós Poisson-egyenlet bal oldala;*

- *a hiperbolikus és ezen belül a* $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_{n-1} < 0, \lambda_n > 0$ *esetben*

$$\partial_n^2 v - \sum_{p=1}^{n-1} \partial_p^2 v = G \circ (\mathrm{id}, v, \partial_1 v, \dots, \partial_n v),$$

amelynek bal oldala az $(n-1)$ dimenziós hullámegyenlet bal oldalának tekinthető, ha az n-edik változó jelenti az időt (amelyet gyakran t-vel jelölünk);

- *a parabolikus és ezen belül a $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_{n-1} < 0, \lambda_n = 0$ esetben*

$$-\sum_{p=1}^{n-1} \partial_p^2 v = G \circ (\mathrm{id}, v, \partial_1 v, \dots, \partial_n v),$$

amelynek bal oldala lényegében az $(n-1)$ dimenziós stacionárius hővezetési egyenlet bal oldalának is tekinthető.

7.11. *Megjegyzés.* A változók sorrendjének cseréjével és (-1)-gyel való szorzással elérhető, hogy a megfelelő típusú egyenlet sajátértékeinek előjele a a 7.10. Következményben megfogalmazott speciális eseteknek feleljen meg.

7.12. Példa. Végezzük el a

$$4\partial_1\partial_2 u(x,y) + 2\partial_2 u(x,y) + u(x,y) = x + y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenlet főrészének kanonikus alakra való transzformációját! Az előzőekben ismertetett elmélet szerint járunk el. Az egyes változók megkülönböztetése érdekében célszerű áttérni a ∂_x és ∂_y jelölésekre:

$$4\partial_x\partial_y u + 2\partial_y u + u = x + y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2). \tag{7.7}$$

Az egyenlet főrészének együtthatómátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

így ennek sajátértékei

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

alapján ± 2. A $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó bármely $s^{(1)} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ sajátvektorra

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(1)} \\ s_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

azaz $s_1^{(1)} = s_2^{(1)}$, ahonnan (például) az

$$s^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egység hosszú sajátvektort kapjuk. Hasonlóan

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(2)} \\ s_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ezért $s_2^{(2)} = -s_2^{(2)}$, ahonnan (például) az

$$s^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

egység hosszú sajátvektor adódik (amely természetesen merőleges $s^{(1)}$-re). Legyen ekkor

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

amelyre $B^T = B^{-1}$, továbbá

$$D := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ezután tekintsük a

$$C = BD = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mátrixot. Vezessük be a $(\xi, \eta) = C^T(x, y)$ koordinátákat, azaz legyen

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x+y}{2}, \\ \eta = \dfrac{x-y}{2}, \end{cases}$$

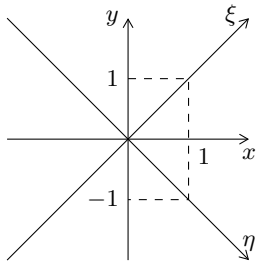
továbbá legyen

$$v(\xi, \eta) = u(x, y) = u(\xi + \eta, \xi - \eta).$$

Az új koordináták szemléletesen azt jelentik, hogy a bázisvektoraink

$$\sqrt{2}s^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \sqrt{2}s^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

amelyeket a 7.1. ábra szemléltet (vegyük észre, hogy valójában ennek a transzformációnak az inverzét hajtottuk végre az 5.10. Példában). Az új koordiná-



$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{x+y}{2}\\ \eta &= \frac{x-y}{2}\end{aligned}\right\}$$

7.1. ábra. Koordináta-transzformáció

tákra transzformált egyenlet főrészének együtthatómátrixa az általános elmélet szerint

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Másrészt az összetett függvény deriválási szabályából egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}(\partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)) &= (\partial_\xi v(\xi,\eta), \partial_\eta v(\xi,\eta)) \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi,\eta) + \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi,\eta), \frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi,\eta) - \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi,\eta)\right),\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$\partial_y u = \frac{1}{2}\partial_\xi v - \frac{1}{2}\partial_\eta v.$$

Ezek alapján a kiindulási (7.7) egyenletünk a

$$\partial_\xi^2 v - \partial_\eta^2 v + \partial_\xi v - \partial_\eta v + v = 2\xi \tag{7.8}$$

alakot ölti.

7.13. *Megjegyzés.* Felmerül a kérdés, vajon mit lehet mondani másodrendű, főrészükben lineáris egyenletek transzformációjával kapcsolatban a függvényegyütthatós esetben. Természetesen az adott tartomány minden rögzített pontjában elvégezhető a , ám ezekből nem feltétlenül áll össze egy kölcsönösen egyértelmű és megfelelően sima változócsere az egész tartományban vagy akár csak lokálisan egy pont környezetében sem. Kettőnél magasabb dimenzióban ennél több nem mondható általánosan, azonban a kétdimenziós esetben a főrész kanonikus alakra hozatala elvégezhető egy úgynevezett *karakterisztikus*

egyenlet (amely egy elsőrendű parciális differenciálegyenlet) és a *karakterisztikák* segítségével. A részleteket illetően lásd a [33, 175] könyveket, ízelítőül pedig a 7.14–7.16. Feladatokat.

7.2.2. Állandó együtthatós lineáris egyenletek

Tegyük most fel, hogy az egyenletünk másodrendű lineáris és állandó együtthatós:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j u(x) + cu(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{7.9}$$

ahol $a_{jk}, b_j, c \in \mathbb{R}$ és $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Az egyenlet főrészének transzformációját az előbbiekben már ismertettük, ezért feltehető, hogy az egyenletünket egy alkalmas ξ független változó és $v(\xi) = u(x)$ ismeretlen függvény bevezetésével a következő alakra hoztuk az Ω tartomány megfelelő transzformáltjában:

$$\sum_{p=1}^{n}(\operatorname{sgn}\lambda_p)\partial_p^2 v(\xi) + \sum_{p=1}^{n}\beta_p\partial_p v(\xi) + \gamma v(\xi) = F(\xi).$$

A kanonikus alakra hozatal következő lépésében egy új ismeretlen függvényt bevezetésével azt próbáljuk elérni, hogy az elsőrendű és nulladrendű tagok együtthatói közül minél több nullával legyen egyenlő. Mielőtt ennek menetét ismertetnénk, célszerű szemléltetésképpen felhívni a figyelmet arra, hogy ilyen módszerrel már az állandó együtthatós lineáris közönséges differenciálegyenletek elméletében találkoztunk.

Nevezetesen, az

$$y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$$

egyenlet mindkét oldalát az $e^{\alpha t}$ integráló tényezővel szorozva

$$e^{\alpha t}y'(t) + \alpha e^{\alpha t}y(t) = e^{\alpha t}f(t),$$

ami az $Y(t) = e^{\alpha t}y(t)$ függvény bevezetésével az

$$Y'(t) = e^{\alpha t}f(t)$$

alakot ölti, amelyben már nem szerepel nulladrendű tag. Másodrendű esetben ugyanez a módszer az elsőrendű tagnak a másodrendűbe való „beolvasztására” alkalmas. Valóban, ha továbbra is $Y(t) = e^{\alpha t}y(t)$, azaz $y(t) = {}^{-\alpha t}$, akkor egyszerű számolással nyerjük, hogy

$$e^{\alpha t}(y''(t) + \beta y'(t) + \gamma y(t)) = Y''(t) + (\beta - 2\alpha)Y'(t) + (\alpha^2 - \alpha\beta + \gamma)Y(t).$$

Ez azt jelenti, hogy $\alpha = \beta/2$ választással az Y' tag eltűnik. Hasonló módon, az n-edrendű esetben a $(n-1)$-edrendű derivált együtthatóját lehet 0-vá tenni, lásd a 7.9. Feladatot. (A mélyben egyébként ugyanarról az elvről van szó, mint amikor egy n-edfokú algebrai egyenletből a $(n-1)$-edfokú tagot küszöböljük ki megfelelő helyettesítéssel.)

7.14. *Történeti megjegyzés.* A közönséges differenciálegyenletek elméletében az $Y(t) = e^{\alpha t}y(t)$ alakú új ismeretlen függvény bevezetését szokás Euler-féle integráló tényező módszerének is hívni Leonhard Euler (1707–1783) tiszteletére, aki számos egyenlettípus egyszerűbb alakra hozatalában és alkalmazta ezt az eljárást. Eulert megelőzően már Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) és Johann Bernoulli (1667–1748) is használt különféle integráló tényezőket differenciálegyenletek megoldása során.

Az állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek körében tulajdonképpen szóról-szóra ugyanígy járunk el, mindegyik változóban az elsőrendű tagot eltüntethetjük, kivéve akkor, ha az adott változó szerint az egyenletben nem szerepel másodrendű tag. Ekkor viszont a nulladrnedű tagot tudjuk kiküszöbölni.

Legyen tehát

$$V(\xi) := v(\xi)\exp\left(\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell\xi_\ell\right),$$

ahol az α_ℓ paraméterek értékét később határozzuk meg. A szorzatderiválási és a láncszabály alkalmazásával

$$\partial_p v(\xi) = [\partial_p V(\xi) - \alpha_p V(\xi)]\exp\left(-\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell\xi_\ell\right),$$

így

$$\partial_p^2 v(\xi) = \left[\partial_p^2 V(\xi) - 2\alpha_p\partial_p V(\xi) + \alpha_p^2 V(\xi)\right]\exp\left(-\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell\xi_\ell\right).$$

Mindezeket a (7.9) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\sum_{p=1}^{n}(\operatorname{sgn}\lambda_p)\partial_p^2 V(\xi) + \sum_{p=1}^{n}[\beta_p - 2\alpha_p(\operatorname{sgn}\lambda_p)]\partial_p V(\xi) + \left[\gamma - \sum_{p=1}^{n}\beta_p\alpha_p + \sum_{p=1}^{n}(\operatorname{sgn}\lambda_p)\alpha_p^2\right]V(\xi) = F(\xi)\exp\left(\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell y_\ell\right). \quad (7.10)$$

Ha valamely p esetén $\lambda_p \neq 0$, akkor $\alpha_p = \beta_p/(2\operatorname{sgn}\lambda_p)$ mellett a (7.10) egyenletben $\partial_p V$ együtthatója nullával egyenlő. Ezenkívül, ha van olyan q

index, amelyre $\lambda_q = 0$, de $\beta_q \neq 0$, akkor V együtthatóját tehetjük nullává azáltal, hogy

$$\alpha_q := \frac{1}{\beta_q}\left(\gamma - \sum_{p\neq q}\beta_p\alpha_p + \sum_{p=1}^{n}(\operatorname{sgn}\lambda_p)\alpha_p^2\right).$$

Következésképpen az α_p paraméterek alkalmas megválasztása után a (7.9) egyenlet az alábbi alakok valamelyikére hozható:

$$\sum_{p=1}^{n}(\operatorname{sgn}\lambda_p)\partial_p^2 V + dV = G \tag{7.11}$$

vagy

$$\sum_{p=1}^{n}(\operatorname{sgn}\lambda_p)\partial_p^2 V + \sum_{p:\lambda_p=0}\beta_p\partial_p V = G. \tag{7.12}$$

A (7.11) és (7.12) egyenleteket a (7.9) egyenlet *kanonikus alakjának* nevezzük.

7.15. Következmény. *Az állandó együtthatós másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja*

- *az elliptikus és ezen belül a $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$ esetben*

$$-\sum_{p=1}^{n}\partial_p^2 V + dV = G,$$

  vagy rövidebben $-\Delta V + dV = G$;

- *a hiperbolikus és ezen belül a $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_{n-1} < 0, \lambda_n > 0$ esetben*

$$\partial_n^2 V - \sum_{p=1}^{n-1}\partial_p^2 V + dV = G,$$

  amit rövidebben $\partial_t^2 V - \Delta V + dV = G$ alakba is írhatunk, ha az n-edik változót tekintjük az időnek (t-nek), amelyet a Δ operátorba nem értünk bele;

- *a parabolikus és ezen belül a $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_{n-1} < 0, \lambda_n = 0$ esetben*

$$\beta_n\partial_n V - \sum_{p=1}^{n-1}\partial_p^2 V = G,$$

  A $\beta_n = 0$ eset érdektelen, hiszen ekkor egy $(n-1)$ dimenziós elliptikus egyenletet kapunk, amelyben az n-edik változó csupán paraméterként viselkedik. Ha $\beta_n \neq 0$, akkor egy újabb koordináta-transzformáció

segítségével, nevezetesen $\tilde{\xi}_n := \beta_n \xi_n$ *helyettesítéssel és* $\tilde{V}(\tilde{\xi}) = V(\xi)$ *új ismeretlen függvény bevezetésével* $\partial_n \tilde{V}(\tilde{\xi}) = \beta_n V(\xi)$ *folytán elérhető, hogy* $\partial_n \tilde{V}$ *együtthatója* 1 *legyen, így a kanonikus alak*

$$\partial_n \tilde{V} - \sum_{p=1}^{n-1} \partial_p^2 \tilde{V} = \tilde{G}.$$

Ez utóbbi a $\partial_t \tilde{V} - \Delta \tilde{V} = \tilde{G}$ *alakot ölti, ha ismét az n-edik változót tekintjük az időnek, amelyet a* Δ *operátorba nem értünk bele.*

7.16. *Megjegyzés.* A $-\Delta u + du = 0$ (vagy az egyenértékű $\Delta u + du = 0$) egyenletet szokás Helmholtz-egyenletnek is hívni Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) német fizikus tiszteletére, aki elektromágnesességi vizsgálódásai során foglalkozott az egyenlettel.

7.17. Példa. Térjünk vissza a 7.12. Példa egyenletére:

$$4\partial_1\partial_2 u(x,y) + 2\partial_2 u(x,y) + u(x,y) = x + y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

A főrész transzformációját már elvégeztük a

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x+y}{2}, \\ \eta = \dfrac{x-y}{2}, \end{cases}$$

új változók és $v(\xi,\eta) = u(x,y)$ függvény bevezetésével:

$$\partial_\xi^2 v - \partial_\eta^2 v + \partial_\xi v - \partial_\eta v + v = 2\xi.$$

Folytassuk most az alacsonyabb rendű tagok transzformációjával. Vezessük be a

$$w(\xi,\eta) = v(\xi,\eta) e^{\alpha\xi+\beta\eta}$$

függvényt, vagyis

$$v(\xi,\eta) = w(\xi,\eta) e^{-\alpha\xi-\beta\eta},$$

ahol az α, β konstansok értékeit szeretnénk meghatározni. Rövid számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned} \partial_\xi v &= \partial_\xi w e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - \alpha w e^{-\alpha\xi-\beta\eta}, \\ \partial_\xi^2 v &= \partial_\xi^2 w e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - 2\alpha\partial_\xi w e^{-\alpha\xi-\beta\eta} + \alpha^2 w e^{-\alpha\xi-\beta\eta}, \end{aligned} \tag{7.13}$$

valamint

$$\begin{aligned} \partial_\eta v &= \partial_\eta w e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - \beta w e^{-\alpha\xi-\beta\eta}, \\ \partial_\eta^2 v &= \partial_\eta^2 w e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - 2\beta\partial_\eta w e^{-\alpha\xi-\beta\eta} + \beta^2 w e^{-\alpha\xi-\beta\eta}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Az iménti összefüggéseket a (7.8) egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - \partial_\eta^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}\\ + (1-2\alpha)\partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} + (1-2\beta)\partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}\\ + (1+\beta-\alpha-\beta^2+\alpha^2)w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} = 2\xi\end{aligned}$$

egyenletet. A fenti alakból látszik, hogy célszerű az $\alpha = \beta = 1/2$ választás, hiszen ekkor az elsőrendű tagok kiesnek és az egyenlet a

$$\partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} - \partial_\eta^2 w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} + w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} = 2\xi$$

formára egyszerűsödik. Átszorzással kapjuk a (7.7) egyenlet kanonikus alakját:

$$\partial_\xi^2 w(\xi,\eta) - \partial_\eta^2 w(\xi,\eta) + w(\xi,\eta) = 2\xi e^{\frac{1}{2}(\xi+\eta)} \quad ((\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2).$$

Ahogy a 7.2.1. alszakasz elején láttuk (ezenkívül az 5.11. Példát is érdemes fellapozni az 5. fejezetben), a differenciáloperátoros írásmód gyakran segít a megfelelő új változók megsejtésében. Ha bevezetjük az I jelölést az identitás operátorára, azaz $Iu = u$ minden u függvényre, akkor az

$$e^{\alpha x+\beta y}\partial_1 u + \alpha u = \partial_1\left(e^{\alpha x+\beta y}u\right)$$

összefüggés

$$e^{\alpha x+\beta y}(\partial_1 + \alpha I)u = \partial_1\left(e^{\alpha x+\beta y}u\right) \tag{7.15}$$

alakba írható. A következő példában azt érzékeltetjük, hogy ez az átírás számos esetben hasznunkra válik az alkalmas integráló tényező megsejtésére (a próbálkozás helyett).

7.18. Példa. Keressük meg

$$2\partial_1\partial_2 u(x,y) + 6\partial_1 u(x,y) - \partial_2 u(x,y) + 3u(x,y) = e^x \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet klasszikus megoldásait! Ekkor a példa előtt bevezetett identitás operátor segítségével formálisan

$$2\partial_1\partial_2 u + 6\partial_1 u - \partial_2 u - 3u = 2\left(\partial_1 - \frac{1}{2}I\right)(\partial_2 + 3I)u.$$

A (7.15) összefüggést az $\alpha = -\frac{1}{2}$ és $\beta = 3$ szereposztással felírva

$$e^{-\frac{1}{2}x+3y}\left(\partial_1 - \frac{1}{2}I\right)u = \partial_1\left(e^{-\frac{1}{2}x+3y}v\right),$$

és a második változóban hasonló módon

$$e^{-\frac{1}{2}x+3y}(\partial_2 + 3I)u = \partial_2\left(e^{-\frac{1}{2}x+3y}u\right).$$

Ez azt sugallja számunkra, hogy a megoldandó egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg az $e^{-\frac{1}{2}x+3y}$ kifejezéssel. Ekkor az iménti okoskodás alapján a bal oldalon azt kapjuk, hogy

$$e^{-\frac{1}{2}x+3y}\left(\partial_1\partial_2 u + 6\partial_1 u - \partial_2 u - 3u\right) = 2\partial_1\partial_2\left(e^{-\frac{1}{2}x+3y}u\right).$$

Ez utóbbi összefüggés természetesen egyszerű számolással is ellenőrizhető, ha az operátoros érvelés nem tűnik teljes mértékben meggyőzőnek. Az egyenletünk tehát így alakul:

$$\partial_1\partial_2\left(e^{-\frac{1}{2}x+3y}u\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x+3y}.$$

Ezt először az x, majd az y változó szerint integrálva adódik, hogy

$$e^{-\frac{1}{2}x+3y}u(x,y) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}x+3y} + C(x) + D(y),$$

ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Végeredményben a feladat egyenletének összes megoldása:

$$u(x,y) = \frac{1}{3}e^{x} + e^{\frac{1}{2}x-3y}(C(x) + D(y)),$$

ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőlegesek.

Megjegyezzük, hogy úgy is célhoz értünk volna, ha bevezetjük a

$$v(x,y) = e^{\alpha x+\beta y}u(x,y)$$

függvényt, és az α, β paraméterek értékét oly módon próbáljuk meghatározni, hogy a v függvényre adódó egyenletben az első és nulladrendű tagok együtthatói közül minél több legyen 0-val egyenlő. Egyszerű számolással kapjuk ekkor, hogy

$$\begin{aligned}\partial_1 u &= e^{-\alpha x-\beta y}(\partial_1 v - \alpha v),\\ \partial_2 u &= e^{-\alpha x-\beta y}(\partial_2 v - \beta v),\end{aligned} \tag{7.16}$$

valamint

$$\partial_1\partial_2 u = e^{-\alpha x-\beta y}(\partial_1\partial_2 v - \beta\partial_1 v - \alpha\partial_2 v + \alpha\beta v). \tag{7.17}$$

Ebből következően

$$2\partial_1\partial_2 u + 6\partial_2 - \partial_2 u - 3u$$

$$= e^{-\alpha x-\beta y}\left(2\partial_1\partial_2 v-(2\beta-6)\partial_1 v-(2\alpha+1)\partial_2 v+(2\alpha\beta-6\alpha+\beta-3)v\right),$$

ahonnan az $\alpha=-\frac{1}{2}$ és $\beta=3$ választás tűnik a legkézenfekvőbbnek. Ezzel v-re nézve az egyenlet

$$2e^{3x+2y}\partial_1\partial_2 v=e^x$$

alakot ölti, amely lényegében ugyanaz, mint amit az első megoldásban kaptunk.

7.3. Feladatok

7.1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi másodrendű lineáris differenciálegyenletek hol milyen típusúak!

a) $\partial_1^2 u+6\partial_1\partial_2 u+\partial_2^2 u=0$ $\mathbb{R}^2$-ben,

b) $6\partial_1^2 u+8\partial_1\partial_2 u+8\partial_2^2 u+2\partial_1\partial_3 u+6\partial_2\partial_3 u+10\partial_3^2 u=0$ $\mathbb{R}^3$-ben,

c) $(x+y)\partial_1^2 u+2\sqrt{xy}\partial_1\partial_2 u+(x+y)\partial_2^2 u=0$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2, xy\geq 0)$.

7.2. Mutassunk olyan differenciálegyenletet, amely $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$-on elliptikus, $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^-$-on és $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+$-on hiperbolikus. Igaz-e, hogy ha az egyenletben szereplő együtthatófüggvények folytonosak $\mathbb{R}^2$-en, akkor egy ilyen differenciálegyenlet a $\{0\}\times\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}\times\{0\}$ egyeneseken tágabb értelemben parabolikus?

7.3. Mutassunk folytonos együtthatófüggvényekkel olyan differenciálegyenletet, amely az $\mathbb{R}^n$ tér minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus $\mathbb{R}^n$-en!

7.4. Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ tetszőleges korlátos tartomány. Folytonos együtthatófüggvények felhasználásával adjunk meg olyan differenciálegyenletet, amely az Ω tartomány minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus Ω-n!

7.5. Igazoljuk, hogy ha egy lineáris differenciálegyenlet együtthatófüggvényei egy $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartomány lezártján folytonosak, és az egyenlet $\overline{\Omega}$ minden pontjában elliptikus, akkor az egyenlet egyenletesen elliptikus Ω-n, sőt léteznek $c_0, c_1>0$ konstansok úgy, hogy

$$c_0|p|^2\leq\langle A(x)p,p\rangle\leq c_1|p|^2 \text{ minden } p\in\mathbb{R}^n \text{ és } x\in\Omega \text{ esetén!}$$

7.6. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az

$$a(x,y)\partial_1^2 u+2b(x,y)\partial_1\partial_2 u+c(x,y)\partial_2^2 u=0 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet a felső nyílt félsíkban elliptikus, az alsó nyílt félsíkban pedig hiperbolikus legyen!

7.7. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az

$$a(x,y)\partial_1^2 u + 2b(x,y)\partial_1\partial_2 u + c(x,y)\partial_2^2 u = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet az $y = 1$ és $y = -2$ egyenletű egyenesek közötti végtelen nyílt sávban elliptikus, az $y > 1$ és $y < -2$ nyílt félsíkokban pedig hiperbolikus legyen!

7.8. Adjunk meg a, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az

$$a(x,y)\partial_1^2 u + x^2\partial_1\partial_2 u + y^2\partial_2\partial_1 u + c(x,y)\partial_2^2 u = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet elliptikus legyen a $B(0,1)$ nyílt körlapon és az $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0,2)}$ végtelen körgyűrűben, továbbá hiperbolikus legyen a $B(0,2) \setminus \overline{B(0,1)}$ körgyűrűben, ahol $B(0,R)$ jelöli az origó középpontú R sugarú nyílt körlapot a síkon.

7.9. Tekintsük $\mathbb{R}$-en az

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

állandó együtthatós lineáris közönséges differenciálegyenletet. Milyen $\alpha \in \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy az egyenletet az

$$Y(t) = e^{\alpha t}y(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvényre átírva $Y^{(n-1)}$ együtthatója 0?

7.10. Transzformáljuk kanonikus alakra a következő másodrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) $\partial_1^2 u + 2\partial_1\partial_2 u + \partial_2^2 u + \partial_1 u + u = x - y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$;

b) $\partial_1^2 u + 4\partial_2^2 u + \partial_3^2 u + 4\partial_1\partial_2 u + 2\partial_1\partial_3 u + 4\partial_2\partial_3 u + 2u = 0$ $\mathbb{R}^3$-ben.

7.11. Határozzuk meg az alábbi másodrendű lineáris differenciálegyenletek $u \in \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásainak általános alakját!

a) $3\partial_1^2 u - 5\partial_1\partial_2 u - 2\partial_2^2 u + 3\partial_1 u + \partial_2 u = 0$ $\mathbb{R}^2$-ben;

b) $\partial_1\partial_2 u - 2\partial_1 u - 3\partial_2 u + 6u = 2e^{x+y}$ $\mathbb{R}^2$-ben.

7.12. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u(x,y) + 2\partial_1\partial_2 u(x,y) + \partial_2^2(x,y) + u(x,y) &= 1 + xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \\ u(x,0) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_2 u(x,0) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

7.13. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u(x,y) - \partial_2^2 u(x,y) - 2\partial_1 u(x,y) + u(x,y) &= y, \\ u(x,0) &= e^x \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_2 u(x,0) &= e^x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

7.14. Legyenek az a, b, c függvények folytonosak $\mathbb{R}^2$-en, és tekintsük az

$$a\partial_1^2 u + 2b\partial_1\partial_2 u + c\partial_2^2 u = g \tag{7.18}$$

függvényegyütthatós másodrendű, főrészében lineáris parciális differenciálegyenletet $\mathbb{R}^2$-en. Tegyük fel, hogy $\Phi = (\varphi, \psi)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijekció, amely az inverzével együtt kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^2$-en, és vezessük be a $v := u \circ \Phi^{-1}$ új ismeretlen függvényt. Mutassuk meg, hogy ekkor a (7.18) egyenlet a v függvényre nézve az

$$(\alpha \circ \Phi^{-1})\partial_1^2 v + 2(\beta \circ \Phi^{-1})\partial_1\partial_2 v + (\gamma \circ \Phi^{-1})\partial_2^2 v = g \circ (\mathrm{id}, v, \partial_1 v, \partial_2 v)$$

alakot ölti, ahol

$$\begin{aligned} \alpha &= a(\partial_1\varphi)^2 + b(\partial_1\varphi)(\partial_2\varphi) + c(\partial_2\varphi)^2, \\ \beta &= a(\partial_1\varphi)(\partial_1\psi) + b\left[(\partial_1\varphi)(\partial_2\psi) + (\partial_2\varphi)(\partial_1\psi)\right] + c(\partial_2\varphi)(\partial_2\psi), \\ \gamma &= a(\partial_1\psi)^2 + b(\partial_1\psi)(\partial_2\psi) + c(\partial_2\psi)^2. \end{aligned}$$

7.15. Legyen $a, b, c \in C(\mathbb{R}^2)$. Ekkor az

$$a\partial_1^2 u + 2b\partial_1\partial_2 u + c\partial_2^2 u = 0 \tag{7.19}$$

függvényegyütthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletének* nevezzük az elsőrendű

$$a(\partial_1 w)^2 + 2b(\partial_1 w)(\partial_2 w) + c(\partial_2 w)^2 = 0$$

parciális differenciálegyenletet. Tegyük fel, hogy $\Phi = (\varphi, \psi)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az inverzével együtt kétszer folytonosan differenciálható bijekció $\mathbb{R}^2$-en, amelyre φ kielégíti a karakterisztikus egyenletet $\mathbb{R}^2$-en. Igazoljuk, hogy ha $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldása a (7.19) egyenletnek, akkor a $v := u \circ \Phi^{-1}$ új ismeretlen függvényre átírva az egyenletet, $\partial_1^2 v$ együtthatója 0.

7.16. Tekintsük a függvényegyütthatós másodrendű lineáris

$$\partial_1^2 u(x,y) - 2x\partial_1\partial_2 u(x,y) + x^2\partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{7.20}$$

parciális differenciálegyenletet.

a) Írjuk fel az egyenlethez tartozó karakterisztikus differenciálegyenletet (a definícióval kapcsolatban lásd a 7.15. Feladatot), és adjuk meg a $w \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásait!

b) Legyen $w \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a karakterisztikus egyenlet egy megoldása. Ekkor a
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : w(x, y) = 0\}$$
síkgörbét a másodrendű egyenlet *karakterisztikájának* nevezzük. Határozzuk meg a (7.20) egyenlet karakterisztikáit!

c) Legyen $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a karakterisztikus egyenlet egy megoldása, amelyre $\Phi = (\mathrm{id}, \varphi)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az inverzével együtt kétszer folytonos differenciálható bijekció. Bevezetve az $u(x, y) = v(x, \varphi(x, y))$ helyettesítéssel a v új ismeretlen függvényt, írjuk át a (7.20) egyenletet a v függvényre nézve!

8. fejezet

A Laplace- és a Poisson-egyenlet

Az élet két dologra jó: művelni és tanítani a matematikát.

Siméon Denis Poisson (1781–1840)

A fejezet tartalma. A Laplace- és a Poisson-egyenlet fizikai hátterének felelevenítése után az egyenletek tanulmányozásában alapvető segédeszközöknek bizonyuló Green-formulákat ismertetjük. Ezután a Laplace-egyenlet speciális típusú, úgynevezett radiális megoldásait állítjuk elő, majd bevezetjük az alapmegoldást és annak segítségével a Newton-potenciált, amely a Poisson-egyenlet egy megoldását szolgáltatja. Ezt követően a Poisson-egyenletnél valamivel általánosabb elliptikus egyenletre vonatkozó klasszikus peremérték- és sajátérték-feladatokat értelmezzük, és megvizsgáljuk a megoldások egyértelműségét. Egyszerű tartományok esetében meghatározzuk a Laplace-operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit, majd ezek segítségével a peremérték-feladatok megoldásait Fourier-sor alakban állítjuk elő. Foglalkozunk továbbá a Laplace-egyenlet megoldásaival, az úgynevezett harmonikus függvényekkel, az ezekre vonatkozó maximum- és minimumelvekkel és következményeikkel, valamint a középérték-tulajdonsággal. Végül az alapmegoldás és a Green-függvény fogalmának felhasználásával formulát adunk peremérték-feladatok klasszikus megoldásaira.

8.1. Előkészületek

Mielőtt nekilátnánk a Laplace- és a Poisson-egyenlet konkrét vizsgálatának, érdemes röviden összefoglalni az egyenletek fizikai hátterét és néhány hasznos

összefüggést, amelyek a későbbiekben segítségünkre lesznek az egyenletek tanulmányozásában. A kapcsolódó fizikai példák részletes magyarázata a 6. fejezetnek a hővezetésről szóló 6.2. szakaszában található meg (különös tekintettel a stacionárius hővezetést tárgyaló 6.2.4. alszakaszra). Mivel a szóban forgó egyenletek egy dimenzióban valójában viszonylag egyszerűen kezelhető másodrendű lineáris közönséges differenciálegyenletek, ezért tárgyalásunkban ezekre nem térünk ki, de a sorra kerülő eredmények többsége ekkor is érvényes. A fejezetben általában feltesszük, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója $n \geq 2$ pozitív egész, ha ettől eltérünk, arra külön felhívjuk a figyelmet.

8.1.1. Fizikai háttér

A fizikai példákról szóló 6. fejezetben megismerkedtünk az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományban elhelyezkedő inhomogén közegben végbemenő *stacionárius hővezetés* folyamatával. Ez azt jelenti, hogy az Ω tartomány pontjainak hőmérsékletét megadó $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény időben állandó, a hőmérséklet csak térben változik. Ekkor a folyamatot a következő parciális differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f \quad \Omega\text{-ban}, \tag{8.1}$$

ahol $k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a hővezetési együtthatófüggvény és $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a forrástag, amely a tartományban lévő hőforrások és nyelők eloszlását adja meg ($f > 0$ esetén az adott pontban hőforrás, $f < 0$ esetén hőnyelő található). Forrásra gondolhatunk például úgy, mint egy szobában elhelyezett fűtőtestre vagy valamilyen (exoterm vagy endoterm) kémiai reakció során felszabaduló vagy éppen elnyelődő hőre. A (8.1) egyenletből a $k = 1$ konstans esetben kapjuk a *Poisson-egyenletet*, azaz

$$-\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban},$$

ahol

$$u \mapsto \Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$$

a *Laplace-operátor*. A Poisson-egyenlet homogén jobb oldalú speciális eseteként a *Laplace-egyenletet* nyerjük:

$$-\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban}.$$

Ha az egyenletek fizikai hátterét szemléletessé szeretnénk tenni, akkor kissé leegyszerűsítve a következőre gondolhatunk. Amennyiben u jelöli az adott tartomány pontjainak időben állandó hőmérsékletét, akkor a $\operatorname{grad} u$ gradiensvektor minden pontban abba az irányba mutat, amely merőleges az u függvény szintvonalaira és amely mentén a hőmérsékletfüggvény a legmeredekebben növekszik. Ez éppen ellentétes a hőáramlás irányával, hiszen a

hőmennyiség a magasabb hőmérsékletű pontok felől az alacsonyabb hőmérsékletűek felé áramlik, méghozzá a szintvonalakra merőlegesen (ezzel kapcsolatban lásd még a 6.2.1. alszakaszt). Tehát a $(-\operatorname{grad} u)$ vektor a hőáramlás irányvektorának valamilyen konstanszorosa, és ennek divergenciája (más szóval forrássűrűsége) megadja a tartományban lévő források és nyelők sűrűségét. A hőáramlás vektorai helyett gondolhatunk például az elektromos mező térerősségvektoraira, és ekkor u az elektromos potenciál.

Általában a $\operatorname{grad} u$ vektormező egy potenciálfüggvényén (többváltozós primitív függvényén) matematikailag az u függvényt értjük, tehát a Poisson-egyenletre oly módon is tekinthetünk, mint amelyet a $(-f)$ divergenciájú vektormező potenciálja elégít ki. A fizikában azonban (nem véletlenül) a matematikában elterjedt potenciálfogalomnak az ellentettjét szokás használni, tehát fizikai értelemben a $(-\operatorname{grad} u)$ vektormező egy potenciálja u, és ekkor a Poisson-egyenlet az f divergenciájú vektormező potenciáljára vonatkozik.

Az imént vázolt szemléletes jelentés remélhetőleg megfelelően alátámasztja, hogy noha a (8.1) egyenletben a negatív előjelnek voltaképpen nincsen lényeges szerepe, kiváltképp a speciális Laplace-egyenlet esetében, azonban mégis érdemes megőrizni. Ez egyrészt a mögöttes fizikai tartalom okán lehet célravezető, másrészt, ami talán ennél is jóval lényegesebb, a $-\Delta$ és az $u \mapsto -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$ differenciáloperátor a funkcionálanalízis nézőpontjából úgynevezett pozitív operátor, a sajátértékei nemnegatívak (lásd a 8.4.2. alszakaszt), és talán a pozitív tulajdonságok kellemesebbek a negatívaknál.

8.1. *Történeti megjegyzés.* A Laplace-egyenlet a francia matematikus és fizikus Pierre-Simon Laplace (1749–1827) nevét viseli, aki csillagászati vizsgálódásai során megmutatta, hogy forrásmentes vektormező potenciálja ezt az egyenletet elégíti ki. Érdekes módon Laplace a később róla elnevezett egyenletet először polárkoordinátás alakban írta fel, és csak később derékszögű koordináta-rendszerben (a kétdimenziós Laplace-operátor polárkoordinátás alakját illetően lásd a 8.2. Feladatot). Laplace fő műve az ötkötetes *Égi mechanika*, amelyet 1799 és 1825 között írt, és ebben a klasszikus mechanika elméletét a kalkulus nyelvére fordította le. Laplace egyik kiemelkedő tanítványa volt Siméon Denis Poisson (1781–1840), aki levezette, hogy források és nyelők jelenléte esetén a vektormező potenciálfüggvénye a (később róla elnevezett) Poisson-egyenletnek tesz eleget.

Térjünk most vissza a stacionárius hővezetés folyamatához. Az Ω tartomány belsejében zajló hőáramlás mellett ugyanolyan lényeges, hogy a tartomány peremén a hőáramlás miként megy végbe, mert ez határozza meg a különböző *peremfeltételeket*. Például előírhatjuk a peremen a hőmérsékletet, vagy a hőáramot a hely függvényében, vagy akár a peremen a közeggel hőcsere is végbemehet Newton lehűlési törvénye szerint. E peremfeltételeknek a stacionárius hővezetés egyenletéhez való hozzácsatolásával nyerjük a különböző *peremérték-feladatokat*.

A fejezetben fő célunk a Laplace- és a Poisson-egyenlet, valamint a hozzájuk kapcsolódó különféle peremfeltételek segítségével nyert peremérték-feladatok megoldásaival kapcsolatos egzisztencia (azaz létezés) és unicitás (azaz egyértelműség) kérdéseinek vizsgálata, továbbá a megoldások tulajdonságainak tanulmányozása. A megoldások létezésének kérdése már e két egyszerűnek látszó egyenlet esetében is igen nehéz és meglehetősen sok számolást igénylő probléma, ezért csak a főbb eredményekre és azon belül leginkább speciális tartományokra fogunk kitérni. Az egyértelműségi kérdések viszont sokkal könnyebben kezelhetők, olyannyira, hogy vizsgálódásainkban célszerű nem csupán a Laplace- és a Poisson-egyenletre szorítkozni, hanem egy kissé általánosabb alakú egyenlettípust tekinteni, méghozzá a

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f \quad \Omega\text{-ban} \tag{8.2}$$

alakú egyenleteket, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$ adott függvények. A divergencia definíciója alapján

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j (p \partial_j u) = \sum_{j=1}^{n} p \partial_j^2 u + \sum_{j=1}^{n} \partial_j p \partial_j u = p \Delta u + \sum_{j=1}^{n} \partial_j p \partial_j u,$$

tehát az egyenlet

$$-p \Delta u - \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} u + qu = f$$

alakban is írható, ahol „$\cdot$” az $\mathbb{R}^n$-beli vektorok skaláris szorzásának műveletét jelöli.. Mindvégig feltételezzük majd, hogy $p > 0$ az $\overline{\Omega}$ halmazon, ami az egyenlet egyenletesen elliptikus voltát eredményezi (lásd a 7.7. Példát). Látni fogjuk, hogy ez az egyenlettípus sok esetben, például a megoldások egyértelműsége és tulajdonságai, valamint a sajátértékek szempontjából ugyanolyan módon kezelhető, mint a Poisson- vagy a Laplace-egyenlet.

A (8.2) egyenletre (és speciális eseteire) vonatkozó peremérték-feladatok tanulmányozása lényegében két fő összefüggésen alapszik, amelyeket léptennyomon alkalmazni fogunk: ezek a *Green-formulák*. Mielőtt tehát hozzálátnánk a (8.2) egyenletre vonatkozó problémák vizsgálatához, érdemes az

$$u \mapsto -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$

operátorra vonatkozó Green-formulákról szót ejtenünk.

8.1.2. Green-formulák

A Green-formulák megfogalmazásához és általában korlátos tartományokon értelmezett peremérték-feladatok vizsgálatához elengedhetetlen, hogy a szóban forgó tartományok peremének simaságára vonatkozóan megfelelő feltételeket szabjunk. A sorra kerülő összefüggésekben elegendő (néhol nem is

szükséges), ha a tartomány pereme Lipschitz-folytonos, azaz minden pontja körül lokálisan egy Lipschitz-folytonos függvény grafikonjával azonosítható (a fogalom részletes tárgyalása a 4.1. szakaszban található), ezért mi is ezzel a feltételezéssel fogunk élni.

A Green-formulák nagyon szoros kapcsolatban állnak a divergenciatétellel vagy más néven Gauss–Osztrogradszkij-tétellel, amely a többváltozós analízis egy igen jelentős eredménye. A kapcsolódó témakör egy tömör és leginkább a szemléletességre törekvő bevezetését nyújtotta a 4. fejezet.

Az *első* (vagy más néven *antiszimmetrikus*) *Green-formula* (vagy *Green-tétel*) az egydimenziós parciális integrálás szabályának több változóra való általánosítása, amelyet a Gauss–Osztrogradszkij-tételhez hasonlón kétféle változatban is megfogalmazhatunk. Green első formulájának koordinátánkénti változata a következő.

8.2. Tétel (Green első formulájának koordinátánkénti alakja)**.** *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ és $p \in C^1(\overline{\Omega})$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány. Ekkor minden $j = 1, \dots, n$ esetén*

$$\int_\Omega v\partial_j(p\partial_j u) = -\int_\Omega p\partial_j u\partial_j v + \int_{\partial\Omega} pv\partial_j u\nu_j \, d\sigma, \tag{8.3}$$

ahol ν_j a $\partial\Omega$ perem kifelé mutató ν normális egységvektorának j-edik koordinátája, továbbá $d\sigma$ jelöli a $\partial\Omega$ peremen vett felszíni mérték szerinti integrálást.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tétel skalár alakját, vagyis a 4.18. Tételt az $f = vp\partial_j u$ függvényre, ekkor

$$\partial_j f = v\partial_j(p\partial_j u) + p\partial_j u\partial_j v,$$

így

$$\int_\Omega \big(v\partial_j(p\partial_j u) + p\partial_j u\partial_j v\big) = \int_{\partial\Omega} pv\partial_j u\nu_j \, d\sigma,$$

ahonnan átrendezéssel adódik a bizonyítandó összefüggés. □

Az első Green-formula koordinátánkénti alakját az $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektorértékű függvény koordinátafüggvényire alkalmazva, majd a $j = 1, \dots, n$ indexekre összegezve, a divergencia definíciójának figyelembevételével kapjuk Green első formulájának másik alakját.

8.3. Tétel (Green első formulája)**.** *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ és $p \in C^1(\overline{\Omega})$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány. Ekkor*

$$\int_\Omega v \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = -\int_\Omega p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \int_{\partial\Omega} pv\partial_\nu u \, d\sigma,$$

ahol „$\cdot$” az $\mathbb{R}^n$-beli vektorok skaláris szorzásának műveletét jelöli.

8.4. *Megjegyzés.* Bár a fejezetben a dimenzió mindig legalább 2, érdemes megnéznünk, hogy egy dimenzióban, $\Omega = (a, b)$ esetén mit is jelentene az első Green-formula. Egyrészt a tartomány peremének sima volta semmitmondó feltétel, másrészt pedig az u függvény a és b pontokbeli normális irányú deriváltja $-u'(a)$ és $u'(b)$ módon értelmezhető (ezzel kapcsolatban lásd a 4.19. Megjegyzést). Ekkor az első Green-formula (és egyben annak koordinátánkénti alakja is) így írható:

$$\int_a^b v(pu')' = -\int_a^b pu'v' + [vpu']_a^b,$$

ami nem más, mint a parciális integrálás tétele.

Az első Green-formula egyszerű következménye a *második* (vagy más néven *szimmetrikus*) *Green-formula.*

8.5. Tétel (Green második formulája)**.** *Legyen $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ és $p \in C^1(\overline{\Omega})$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány. Ekkor*

$$\int_\Omega \big(v \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - u \operatorname{div}(p \operatorname{grad} v)\big) = \int_{\partial\Omega} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\, d\sigma.$$

A szakirodalomban az előbbi tételeknek leginkább a Δ operátorra vonatkozó $p = 1$ speciális esetét szokás Green-formulákként emlegetni, ezért (és a történeti hűség okán) alább ilyen formában is kimondjuk a tételeket.

8.6. Tétel (Green-formulák Laplace-operátorra)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány. Ekkor $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ esetén*

$$\int_\Omega v\Delta u = -\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u\, d\sigma.$$

Ha pedig $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, akkor

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\, d\sigma.$$

8.7. *Megjegyzés.* A későbbi alkalmazások szempontjából fontos megjegyeznünk, hogy a Green-formulák Lipschitz-tartományok esetében a bennük szereplő függvényekre nézve valójában némileg gyengébb feltevések mellett is érvényesek. Nevezetesen, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, akkor Green első formulája abban az esetben is igaz, ha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ olyan, amelyre $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \in L^1(\Omega)$. Green második formulájában hasonlóan gyengítve az u-ra és v-re vonatkozó simasági feltételt, a tétel továbbra is érvényben marad. A bizonyításhoz a Gauss–Osztrogradszkij-tételnek a 4.19. és 4.22. Megjegyzések végén megfogalmazott, gyengébb simasági feltevések melletti változatát kell alkalmazni.

8.8. *Történeti megjegyzés.* George Green (1793–1841) brit fizikus, akinek fő műve az 1828-ban kiadott *Esszé a matematikai analízisnek az elektromosság- és mágnességtanban való alkalmazásáról* (lásd [64]). Ebben fogalmazta meg többek között a Δ operátorra vonatkozó 8.6. Tételbeli Green-formulákat három dimenzióban, továbbá alkalmazta azokat elektromosságtani és mágnességtani vizsgálatokban.

Green életútja nem volt mindennapi, 40 éves koráig a Nottingham melletti családi malomban molnárként dolgozott, és ez idő alatt gyakran látogatta a nottinghami könyvtárat. Matematikai ismereteit valószínűleg ennek révén szerezhette, és eközben írta meg fő művét. 40 éves korában iratkozott be egy főiskolára, amelyet el is végzett, majd ezt követően a Cambridge-i Filozófiai Társaság tagja lett. Sajnos Green nem érte meg, hogy művének jelentőségét felismerjék. 1845-ben, az akkor 21 éves William Thomson (későbbi, nemesi nevén Lord Kelvin) elolvasta Robert Murphy elektromosságtanról szóló 1833-as művét (lásd [127]), amely idézte Greent (és Murphy ebben a műben vezette be a Δ jelölést a Laplace-operátorra). Thomson ekkor beszerzett Green 1828-as művéből egy példányt, és a mű áttanulmányozása közben azonnal felmérte annak jelentőségét. Green műve a mai napig is az elektromosság- és mágnességtan egyik mérföldkövének tekinthető.

8.2. Speciális megoldások

Egy-egy differenciálegyenlet vizsgálatát gyakran célszerű valamilyen speciális alakú megoldás előállításával kezdeni, mert a konkrét megoldás vagy megoldássereg sokszor képet adhat az általános megoldásokról, továbbá számos esetben az egyenlet összes megoldása előállítható speciális megoldások segítségével. Természetesen a Laplace-egyenlet esetében is többféle alakú speciális megoldásokat kereshetünk, ezzel kapcsolatban lásd a 8.1–8.4. Feladatokat. Számunkra most az úgynevezett *radiális* megoldások családja fog kiemelten fontos szerepet betölteni.

8.2.1. Radiális megoldások

A Laplace-egyenlet egy lényeges tulajdonsága az ortogonális transzformációra, vagyis tükrözések és forgatások kompozíciójára vonatkozó invariancia. Egy ilyen transzformációt egy $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix segítségével írhatunk le, ahol a mátrix oszlopvektorai jelentik az új ortonormált (vagyis egymásra merőleges és egység hosszúságú) bázisvektorokat, így $Q^TQ = I$, ahol I az $n \times n$-es egységmátrix. Ha az eredeti bázisban a koordinátákból alkotott n dimenziós oszlopvektort x jelöli, akkor az új bázisban a koordinátákat az $y = Q^{-1}x = Q^Tx$ áttéréssel adhatjuk meg, így egy $u(x)$ függvény az új koordinátákban az $u(x) = u(Qy) = U(y)$ alakot ölti. Az alábbi állítás

arról szól, hogy ha az u függvény kielégíti a Laplace-egyenletet, akkor az U függvény is.

8.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvény eleget tesz a Laplace-egyenletnek, azaz $\Delta u(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges ortogonális mátrix, és vezessük be az $y = Q^{-1}x$ koordinátákat. Ekkor az $U(y) = u(x)$ függvény is kielégíti a Laplace-egyenletet, vagyis $\Delta U(y) = 0$ $(y \in \mathbb{R}^n)$.*

Bizonyítás. Legyen $Q = (q_{ij})_{j,k=1}^n$. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$U'(y) = u'(Qy)Q,$$

ahol a jobb oldalon a gradiens sorvektort szorozzuk a Q mátrixszal. Koordinátánként felírva

$$\partial_k U(y) = \sum_{j=1}^n \partial_j u(Qy) q_{jk}, \tag{8.4}$$

amit ismét alkalmazva

$$\partial_k^2 U(y) = \partial_k \left(\sum_{j=1}^n \partial_j u(Qy) q_{jk} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \partial_{\ell j} u(Qy) q_{\ell k} q_{jk}.$$

Ebből következően

$$\begin{aligned} \Delta U(y) = \sum_{k=1}^n \partial_k^2 U(y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \partial_{\ell j} u(Qy) q_{\ell k} q_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \partial_{\ell j} u(Qy) \sum_{k=1}^n q_{\ell k} q_{jk}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $\sum_{k=1}^n q_{\ell k} q_{jk}$ a Q mátrix j-edik és ℓ-edik sorának skalárszorzata, amely az ortogonalitás folytán 0, ha $j \neq \ell$, és 1, ha $j = \ell$. Ezt az észrevételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\Delta U(y) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u(Qy) = \Delta u(Qy) = 0,$$

amit bizonyítani kellett. □

8.10. *Megjegyzés.* A bizonyítást formálisan a $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ nabla vektor segítségével is elvégezhetjük oly módon, ahogyan ezt már korábban a kanonikus alak kapcsán a 7.2.1. alszakasz elején tettük, valamint a 7.9. Megjegyzésben is utaltunk rá. Nevezetesen, az $y = Q^{-1}x$ koordináta-transzformációval

nyert (8.4) összefüggés azt jelenti, hogy az x és y változóban ható ∇_x és ∇_y lineáris operátorokra (azokat sorvektorokként képzelve)

$$\nabla_x = \nabla_y Q^{-1},$$

és így

$$\Delta_x = \nabla_x \nabla_x^T = \nabla_y Q^{-1} (\nabla_y Q^{-1})^T = \nabla_y (Q^T Q) \nabla_y = \nabla_y \nabla_y^T = \Delta_y.$$

A Laplace-egyenlet forgatásra és tükrözésre vonatkozó invarianciája motiválja, hogy érdemes lehet megkeresnünk az egyenlet *radiális megoldásait*, vagyis az $u(x) = U(|x|)$ alakú megoldásokat, tehát azokat, amelyeknek bármely pontban az értéke csak az adott pontnak az origótól vett távolságától függ. Ehhez először célszerű az ilyen tulajdonságú, úgynevezett radiális függvényekre felírni a Laplace-operátort. A rövidség kedvéért a továbbiakban $x \in \mathbb{R}^n$ esetén az

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

jelölést fogjuk használni.

8.11. Állítás. *Legyen $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $u(x) = U(|x|) = U(r)$ $(x \neq 0)$, ahol $U\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. kétszer differenciálható függvény. Ekkor*

$$\Delta u(x) = \frac{1}{r^{n-1}} \left(r^{n-1} U'(r) \right)' \quad (r \neq 0). \tag{8.5}$$

Bizonyítás. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\partial_j r = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2x_j = \frac{x_j}{r} \quad (r \neq 0), \tag{8.6}$$

ezért $j = 1, \ldots, n$ esetén

$$\partial_j u(x) = U'(r) \partial_j r = U'(r) \frac{x_j}{r},$$

így

$$\begin{aligned} \partial_j^2 u(x) &= U''(r) (\partial_j r)^2 + U'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j}{r^2} \partial_j r \right) \\ &= U''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + U'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Ebből következően

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u(x) = \sum_{j=1}^n \left[U''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + U'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \right]$$

$$= U''(r)\frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{r^2} + \frac{1}{r}U'(r)\left(n - \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{r^2}\right) = U''(r) + \frac{n-1}{r}U'(r),$$

vagyis

$$\Delta u(x) = U''(r) + \frac{n-1}{r}U'(r) = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}U'(r)\right)'. \qquad \square$$

8.12. *Megjegyzés.* Ha $n = 2$, akkor a (8.5) képlet a

$$\Delta U(r) = \frac{1}{r}\left(rU'(r)\right)'$$

alakot ölti, amely speciális esete a Laplace-operátor polárkoordinátás alakjának, lásd a 8.2. Feladatot.

8.13. Következmény. *Tegyük fel, hogy* $u(x) = U(|x|) = U(r)$ $(x \neq 0)$, *ahol* $U\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *Ha* $\Delta u = 0$, *akkor*

$$U(r) = \begin{cases} a\log r + b, & \text{ha } n = 2, \\ \dfrac{a}{r^{n-2}} + b, & \text{ha } n \geq 3, \end{cases} \tag{8.7}$$

ahol a, b *tetszőleges konstansok.*

Bizonyítás. A 8.11. Állítás alapján

$$\Delta u(x) = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}U'(r)\right)' = 0,$$

ahonnan $U'(r) = Cr^{1-n}$, ahol C tetszőleges konstans. Innen az állítás integrálás után azonnal adódik. $\square$

A radiális megoldások az origóban szinguláris, azonban lokálisan integrálható függvények.

8.14. Állítás. *Ha* $u(x) = U(|x|)$ $(x \neq 0)$, *ahol* U *a* (8.7) *hozzárendeléssel adott, akkor* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Bizonyítás. Az integrálhatóság természetesen csupán az origó környezetében kérdéses, és nyilván feltehető, hogy $b = 0$. Legyen $R > 0$ rögzített, ekkor $n \geq 3$ esetén a 4.15. Állítás alapján

$$\left|\int_{B(0,R)} u(x)\,dx\right| = \left|\int_0^R \int_{S(0,r)} u(x)\,d\sigma_x\,dr\right| \leq \int_0^R \int_{S(0,r)} \frac{C_1}{r^{n-2}}\,d\sigma_x\,dr.$$

Mivel a 0 középpontú r sugarú $S(0,r)$ gömbfelület felszíni mértéke $\omega_n r^{n-1}$, ahol ω_n a 0 középpontú egység sugarú gömbfelület felszíni mértéke, ezért

$$\int_0^R \int_{S(0,r)} \frac{C_1}{r^{n-2}}\,d\sigma_x\,dr = \int_0^R \frac{C_1}{r^{n-2}} \int_{S(0,r)} 1\,d\sigma_x\,dr = C_2 \int_0^R r\,dr < \infty.$$

Az $n = 2$ esetben pedig hasonló módon

$$\left| \int_{B(0,R)} u(x)\,dx \right| \le C_1 \int_0^R \int_{B(0,r)} |\log r|\ dr = C_2 \int_0^R |r \log r|\ dr < \infty,$$

hiszen az egyváltozós analízisből jól ismert, hogy $r \log r \to 0$, ha $r \to 0+$. □

8.2.2. Alapmegoldás és Newton-potenciál

A Laplace-egyenletnek a 8.13. Következményben nyert radiális megoldásai közül kitüntetett szerepe van az úgynevezett *alapmegoldásoknak*.

8.15. Definíció. Az n dimenziós $(-\Delta)$ operátor (vagy Laplace-egyenlet) *alapmegoldása* az

$$E(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{ha } n = 2,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}}, & \text{ha } n \ge 3,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \end{cases}$$

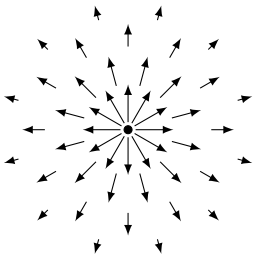
függvény, ahol ω_n jelöli az n dimenziós egységgömb felszíni mértékét. (Ezzel kapcsolatban lásd még a későbbi 11. fejezetet.)

A 8.13. Következmény és a 8.14. Állítás az alapmegoldás két alapvető tulajdonságát tartalmazza, érdemes ezeket most egy külön tételben együtt megfogalmaznunk.

8.16. Tétel. *A $(-\Delta)$ operátor 8.15. Definícióban értelmezett E alapmegoldására teljesül, hogy $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, továbbá E a 0 pont kivételével akárhányszor differenciálható és $\Delta E = 0$ az $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon.*

A későbbiekben az alapmegoldás legalább olyan lényeges szerepet fog betölteni, mint amilyet a Green-formulák. Az alapmegoldás szemléletes jelentését a következőképpen érthetjük meg. Képzeljük el, hogy az origóban elhelyeztünk egy egységnyi forrást, gondolhatunk például hő- vagy folyadékforrásra. Ekkor fizikai szemléletünknek megfelelően a forrásból kiinduló hő az origóra nézve középpontosan szimmetrikusan fog áramlani, tehát az $\vec{r}$ irányvektorú pontban az áramlásvektor az $f(r)\vec{r}$ irányba mutat, ahol $r = |\vec{r}|$ (lásd a 8.1. ábrát). Ha a térben máshol nem található forrás vagy nyelő, akkor bármely origó középpontú gömbfelületen összességében egységnyi hőmennyiség áramlik keresztül, amelyet a vektormező felületi integráljaként írhatunk fel (a felületi integrállal kapcsolatban lásd a 4.3. szakaszt), azaz

$$1 = \int_{S(0,r)} f(r)\vec{r}\, d\mathbf{A}.$$



8.1. ábra. Pontszerű forrás vektormezője

Mivel az $S(0,r)$ gömbfelszínen a kifelé mutató egység hosszú normálvektor az adott pont helyvektorával párhuzamos, ezért $\nu = \frac{\vec{r}}{r}$, tehát

$$1 = \int_{S(0,r)} f(r)\vec{r}\, d\mathbf{A} = \int_{S(0,r)} f(r)\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\, d\sigma = f(r)r\int_{S(0,r)} 1\, d\mathbf{A} = f(r)\omega_n r^n.$$

Ez azt jelenti, hogy az egységnyi forrás által létrehozott vektormező éppen

$$\frac{1}{\omega_n r^n}\vec{r}.$$

Ennek matematika értelemben véve egy potenciálja (azaz primitív függvénye) éppen a $(-E)$ függvény, vagyis az alapmegoldás (-1)-szerese, ugyanis a (8.6) összefüggés felhasználásával az összetett függvény deriválási szabályával adódik, hogy

$$\partial_j E(x) = -\frac{x_j}{\omega_n r^n},$$

tehát $\vec{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ alapján

$$\operatorname{grad} E(x) = -\frac{\vec{r}}{\omega_n r^n}.$$

Az alapmegoldás tehát nem más, mint az origóban elhelyezett egységnyi nyelő egy potenciálfüggvénye. Ahogy említettük már, a fizikában a matematikában használatos potenciálfüggvény ellentettjét szokás használni, így fizikai értelemben az alapmegoldás az egységnyi töltés potenciálja.

8.17. *Megjegyzés.* Az egységnyi forrást (vagy töltést) szokás az úgynevezett (0 pontra koncentrált) *Dirac-delta* „függvénnyel" megadni:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad \text{úgy, hogy} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, dx = 1.$$

Természetesen ilyen függvény nem létezik, de később a disztribúcióelméletről szóló fejezetben ennek értelmet fogunk adni az általánosított függvények

körében. Az alapmegoldást tehát úgy is értelmezhetjük, mint a Dirac-delta potenciálfüggvénye, azaz

$$-\Delta E(x) = \delta(x), \tag{8.8}$$

és így

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta E(x)\,dx = 1,$$

ami $\mathbb{R}^n$ helyett nyilván tetszőleges, origó középpontú gömbön is igaz.

A Dirac-delta „függvény" használata számos esetben motivációul szolgálhat bizonyos összefüggések megsejtéséhez. Például vegyük észre, hogy rögzített x esetén

$$-\Delta_y(E(x-y)) := -\Delta(y \mapsto E(x-y)) = \delta_x(y),$$

ahol $\delta_x(y)$ az x pontra koncentrált Dirac-delta, vagyis

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \neq x, \\ +\infty, & \text{ha } y = x \end{cases} \quad \text{úgy, hogy} \quad \int_{\mathbb{R}^\ltimes} \delta(y)\,dy = 1. \tag{8.9}$$

Ennélfogva az

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\,dy \tag{8.10}$$

formulával értelmezett függvényre formálisan

$$-\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[-\Delta_y(E(x-y))f(y)\right]\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x(y)f(y)\,dy,$$

ahol a Dirac-delta tulajdonságai alapján ismét formálisan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_x(y)f(y)\,dy = f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \delta_x(y)\,dy = f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy formálisan a $-\Delta u = f$ Poisson-egyenletre megoldóképletet szolgáltat a (8.10) összefüggés. Az iménti érvelések nem csupán formálisan érvényesek, ezt mutatja az alábbi tétel.

8.18. Tétel. *Legyen $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Ekkor a* (8.10) *formulával értelmezett u függvényre $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ és $-\Delta u = f$ az $\mathbb{R}^n$ térben.*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy a 8.14. Állítás alapján E lokálisan integrálható függvény, így f kompakt tartójú és folytonos volta miatt az $y \mapsto E(x-y)f(y)$ függvény integrálható $\mathbb{R}^n$-en. Következésképpen u jól definiált és

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)f(x-y)\,dy.$$

Mivel $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ folytán az

$$y \mapsto E(y)\partial_j f(x-y)$$

és

$$y \mapsto E(y)\partial_k \partial_j f(x-y)$$

függvények ugyancsak integrálhatók $\mathbb{R}^n$-en, ezért a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tételből következően u kétszer folytonosan differenciálható, és a deriválás elvégezhető az integráljel mögött, vagyis

$$\partial_k \partial_j u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)\partial_k \partial_j f(x-y)\, dy.$$

Következésképpen

$$-\Delta u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} E(y)\Delta f(x-y)\, dy.$$

Legyen most $x \in \mathbb{R}^n$ rögzített, továbbá $\varepsilon > 0$, és válasszunk olyan $R > 0$ számot, hogy az $y \mapsto f(x-y)$ függvény azonosan 0 legyen a $B(0,R)$ gömbön kívül. Ekkor a $B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}$ „lyukas" gömbön (lásd a 8.2. ábrát) Green második formulájának felhasználásával kapjuk, hogy

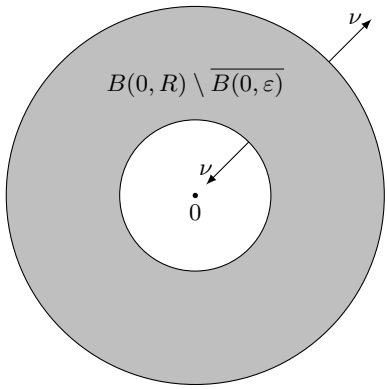
$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R)\setminus B(0,\varepsilon)} E(y)\Delta f(x-y)\, dy \\
&= -\int_{B(0,R)\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E(y) f(x-y)\, dy + \\
&\quad + \int_{S(0,\varepsilon)} \big(E(y)\partial_\nu^y (f(x-y)) - \partial_\nu E(y) f(x-y)\big)\, d\sigma_y + \\
&\quad + \int_{S(0,R)} \big(E(y)\partial_\nu^y (f(x-y)) - \partial_\nu E(y) f(x-y)\big)\, d\sigma_y,
\end{aligned}$$

ahol a $\partial_\nu^y (f(x-y)) = \partial_\nu (y \mapsto f(x-y))$ tömör jelölést alkalmaztuk. Mivel $\Delta E(y) = 0$ $(y \neq 0)$, ezért

$$\int_{B(0,R)\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E(y) f(x-y)\, dy = 0.$$

Ezenkívül az $S(0,R)$ peremen R választása miatt

$$\int_{S(0,R)} \big(E(y)\partial_\nu^y (f(x-y)) - \partial_\nu E(y) f(x-y)\big)\, d\sigma_y = 0.$$



8.2. ábra. A $B(0,R)\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}$ „lyukas” gömb

Másrészt az $S(0,\varepsilon)$ peremen ν a $B(0,R)\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}$ tartomány külső normálisa, tehát az $S(0,\varepsilon)$ gömbfelületnek a középpont felé mutató normálvektora (lásd ismét a 8.2. ábrát), emiatt $n\geq 2$ esetén

$$\partial_\nu E(y)|_{S(0,\varepsilon)} = -\partial_{|y|}E(y))|_{S(0,\varepsilon)} = \frac{1}{\omega_n|\varepsilon|^{n-1}}.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned}-\Delta u(x) = &\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{S(0,\varepsilon)}\big(f(x-y)-f(x)\big)\,d\sigma_y + \\ &+\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{S(0,\varepsilon)}f(x)\,d\sigma_y + \\ &+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{S(0,\varepsilon)}E(y)\partial_\nu^y(f(x-y))\,d\sigma_y,\end{aligned}$$

feltéve, hogy a limeszek mind léteznek. Vegyük észre, hogy $\omega_n\varepsilon^{n-1}$ éppen $S(0,\varepsilon)$ felszíne, ezért f folytonossága miatt

$$\left|\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{S(0,\varepsilon)}\big(f(x-y)-f(x)\big)\,d\sigma_y\right| \leq \sup_{y\in S(0,\varepsilon)}|f(x-y)-f(x)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0,$$

továbbá ε-tól függetlenül

$$\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{S(0,\varepsilon)}f(x)\,d\sigma_y = \frac{f(x)}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{S(0,\varepsilon)}1\,d\sigma_y = f(x).$$

Hasonlóan, E definíciója és $\partial_\nu^y(f(x-y))$ korlátossága alapján $n \geq 3$ esetén

$$\left| \int_{S(0,\varepsilon)} E(y) \partial_\nu^y (f(x-y))\, d\sigma_y \right|$$
$$\leq \omega_n \varepsilon^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-2)\omega_n \varepsilon^{n-2}} \cdot \sup_{y \in S(0,\varepsilon)} |\partial_\nu^y (f(x-y))| \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} 0,$$

az $n = 2$ esetben pedig

$$\left| \int_{S(0,\varepsilon)} E(y) \partial_\nu^y (f(x-y))\, d\sigma_y \right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi} |\log \varepsilon| \cdot \sup_{y \in S(0,\varepsilon)} |\partial_\nu^y (f(x-y))|,$$

ahol a klasszikus analízisből jól ismert $\varepsilon \log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} 0$ összefüggés folytán a felső becslés 0-hoz tart midőn $\varepsilon \to 0+$. Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy $-\Delta u(x) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén. □

8.19. *Megjegyzés.* Belátható (erről szól a 8.37. Feladat), hogy ha $n \geq 3$, $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, és $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ korlátos megoldása a $-\Delta u = f$ egyenletnek $\mathbb{R}^n$-ben, akkor alkalmas C konstanssal

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y) f(y)\, dy + C.$$

A (8.10) integrált (vagy ennek (-1)-szeresét) szokás *Newton-potenciálnak* nevezni. Ez megadja annak a vektormezőnek egy potenciálját, azaz primitív függvényét, amelynek divergenciája $(-f)$. Newton a tömegvonzási törvény vizsgálata kapcsán a háromdimenziós esetben jutott a fenti összefüggésre. A tömegvonzás törvénye szerint az r távolságra lévő testek között $1/r^2$-tel arányos vonzás lép fel (ez Coulomb törvénye szerint elektromos töltésekre is érvényes), így az origóban elhelyezett test (vagy éppen töltés) által létrehozott vektormező potenciálja $1/r$-rel arányos, ami éppen az E alapmegoldás az $n = 3$ speciális esetben.

8.3. Klasszikus peremérték-feladatok

A stacionárius hővezetés modelljének felállításakor láttuk, hogy a folyamatot leíró egyenlethez különféle peremfeltételeket csatolhatunk, attól függően, hogy a tartomány peremén a hőmérsékletet vagy a hőáramot adjuk meg, vagy a peremen hőcsere megy végbe. Az így kapott peremérték-feladatokat a következő általános alakban írhatjuk fel:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-ban}, \\ \text{peremfeltétel} & \partial\Omega\text{-n}. \end{cases} \tag{8.11}$$

A (8.11) probléma pontos megfogalmazásához a peremfeltételek konkrét alakja mellett azt a függvényteret is meg kell adnunk, amelyben a megoldásokat keressük.

8.3.1. A klasszikus feladatok kitűzése

A klasszikus peremérték-feladatokban mindig feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tartomány*, tehát *nyílt és összefüggő halmaz*. Valójában az összefüggőségre rendszerint nincs szükség, jelezni fogjuk, amikor ez lényeges. Ezenkívül gyakran a tartomány peremének megfelelő simaságát is fel kell tennünk, például ha a peremen normális irányú deriváltról beszélünk, vagy valamilyen integrálátalakító tételt használunk. Ahogy a Green-formulákról szóló 8.1.2. alszakasz elején említettük, Lipschitz-folytonos perem a következőkben mindvégig elegendő. Mindezek mellett (a fizikai motivációból adódóan) a p függvényről mindig fel fogjuk tenni, hogy pozitív.

Az első peremérték-feladatban olyan u függvényt keresünk, amely a (8.2) egyenletet az Ω tartományon kielégíti, továbbá u-nak adottak a tartomány peremén felvett értékei. Ilyen típusú problémát kapunk többek között, amikor a stacionárius hővezetés folyamatában a peremen előírjuk a hőmérsékletet. A peremre való megszorítás értelmezhetőségéhez a klasszikus esetben feltesszük, hogy $u \in C(\overline{\Omega})$.

8.20. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$ és $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ adott függvények. Ekkor a *klasszikus első peremérték-feladatban* vagy *Dirichlet-feladatban* olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényt keresünk, amelyik kielégíti a (8.2) egyenletet az Ω tartományban, továbbá u eleget tesz az $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ úgynevezett *első* (vagy *elsőfajú*, avagy *Dirichlet-féle*) *peremfeltételnek*:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

8.21. *Megjegyzés.* Felmerülhet a kérdés, hogy az első peremérték-feladat esetében miért nem $u \in C^2(\overline{\Omega})$ simaságú megoldásokat keresünk? Ennek oka, hogy ekkor a feladat már igen egyszerű esetekben sem korrekt kitűzésű, lásd például az 5.21. Feladatot.

A második peremérték-feladatban olyan u függvényt keresünk, amely kielégíti az egyenletet az Ω tartományon, és adott a tartomány peremén a normális irányú deriváltja. Ilyen típusú probléma fordul elő például, ha a stacionárius hővezetés folyamatában a peremen a hőáramot írjuk elő. Mivel a peremen a megoldás bizonyos deriváltjára szabunk feltételt, ezért $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ simaságot követelünk meg, és emellett a tartomány peremének regularitását is fel kell tennünk.

8.22. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, ezenkívül $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ adott függvények. Ekkor a *klasszikus második peremérték-feladatban* vagy *Neumann-feladatban* olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvényt keresünk, amelyik kielégíti a (8.2) egyenletet az Ω tartományban, továbbá eleget tesz a $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi$ úgynevezett *második* (vagy *másodfajú*, avagy *Neumann-féle*) *peremfeltételnek*:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

8.23. *Megjegyzés.* Ahogy a Green-formulák kapcsán a 8.4. Megjegyzésben is megemlítettük, az egydimenziós $\Omega = (a, b)$ tartomány esetén az a és b perempontokbeli normális irányú deriváltak rendre $-u'(a)$ és $u'(b)$.

A harmadik peremérték-feladatban az első és második peremfeltételek lineáris kombinációját írjuk elő a tartomány peremén. Ilyen típusú peremfeltétel például a peremen a Newton-féle lehűlési törvény szerint végbemenő hőcsere esetében fordulhat elő.

8.24. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, ezenkívül $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$ és $f \in C(\Omega)$, $g, h, \varphi \in C(\partial\Omega)$ adott függvények. Ekkor a *klasszikus harmadik peremérték-feladatban* olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvényt keresünk, amelyik kielégíti a (8.2) egyenletet az Ω tartományban, továbbá u eleget tesz a $gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi$ úgynevezett *harmadik* (vagy *harmadfajú*, avagy *Robin-féle*) *peremfeltételnek*:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-ban}, \\ gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

8.25. *Megjegyzés.* A harmadik peremfeltételből a $g = 1$, $h = 0$ választással a Dirichlet-, a $g = 0$, $h = 1$ választással pedig a Neumann-peremfeltételt nyerjük. Egy másik fontos speciális eset, ha a tartomány peremének különböző részein egymástól eltérő peremfeltételeket írunk elő. Például, amennyiben $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, ahol Γ_0, Γ_1 diszjunkt (a felszíni mérték szerint) mérhető részhalmazai $\partial\Omega$-nak, akkor $g|_{\Gamma_0} = 1$, $g|_{\Gamma_1} = 0$, $h|_{\Gamma_0} = 0$, $h|_{\Gamma_1} = 1$ választással és $\varphi_0 := \varphi|_{\Gamma_0}$ és $\varphi_1 := \varphi|_{\Gamma_1}$ jelölésekkel a következő peremérték-feladatot nyerjük:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\Gamma_0} = \varphi_0, \\ \partial_\nu u|_{\Gamma_1} = \varphi_1. \end{cases}$$

Egy dimenzióban, $\Omega = (a, b)$ esetén például a két perempontban különböző típusú peremfeltételeket is előírhatunk.

8.3.2. A megoldás egyértelműsége

A peremérték-feladatok kapcsán alapvető kérdés a megoldások létezése és egyértelműsége. A klasszikus harmadik peremérték-feladat megoldásának egyértelműsége biztosítható például a feladatban szereplő függvényekre vonatkozó bizonyos előjelfeltételek mellett. Erről szól a következő tétel.

8.26. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, valamint legyenek $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$ olyan függvények, amelyekre $p > 0$, $q \geq 0$ teljesül, továbbá $f \in C(\Omega)$, $g, h, \varphi \in C(\partial\Omega)$ olyanok, amelyekre $gh \geq 0$ és $g + h > 0$. Ekkor a $q = 0$, $g = 0$ eset kivételével a klasszikus harmadik peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása lehet. A $q = 0$, $g = 0$ esetben a klasszikus második peremérték-feladat egy speciális esetét nyerjük, amelynek ha létezik $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása, akkor végtelen sok megoldása van, és ezek konstansban térnek el egymástól.*

8.27. *Megjegyzés.* A $p > 0$ és $q \geq 0$ egyenlőtlenségeket az $\overline{\Omega}$ halmazon követeljük meg. Mivel p folytonos a korlátos zárt $\overline{\Omega}$ halmazon, ezért Weierstrass tétele alapján van minimuma, amely szükségképpen pozitív, tehát valójában $p > c > 0$ is teljesül egy alkalmas c állandóval. A $gh \geq 0$, $g + h > 0$ feltételek azt fejezik ki, hogy a g és h függvények nemnegatívak, és nincs olyan pont, ahol mindkét függvény a 0 értéket venné fel. Természetesen a peremfeltétel (-1)-gyel való szorzásával nemnegatív helyett nempozitív g, h függvényeket kapunk, emiatt akár úgy is fogalmazhatunk, hogy a g, h függvények azonos előjelűek (beleértve a 0 értéket is), de semelyik pontban nem veszik fel egyszerre a 0 értéket.

Mivel a klasszikus harmadik peremérték-feladat magába foglalja a klasszikus első és második peremérték-feladatokat, ezért ezek egyértelmű megoldhatóságát is nyertük megfelelő függvényterekben.

8.28. Következmény. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, valamint $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, amelyekre $p > 0, q \geq 0$, és $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Ekkor a klasszikus első peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása lehet.*

8.29. Következmény. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, valamint $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, amelyekre $p > 0, q \geq 0$, továbbá $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Ekkor a $q = 0$ eset kivételével a klasszikus második peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása van. A $q = 0$ esetben, ha létezik $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása a peremérték-feladatnak, akkor végtelen sok megoldása van, és ezek konstansban térnek el egymástól.*

8.30. *Megjegyzés.* Az egyértelműségi tételekben a $q \geq 0$ feltevés lényeges, mert a 8.4. szakaszban látni fogjuk, hogy ha $q < 0$ és $(-q)$ klasszikus sajátérték,

akkor a peremérték-feladatoknak végtelen sok megoldása van, a megfelelő sajátfüggvények.

Vigyázzunk, hogy a 8.28. Következmény a klasszikus első peremérték-feladat esetében csupán $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ simaságú megoldások egyértelműségét garantálja. Az $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ simaságú megoldások egyértelműségét a 8.5.2. alszakaszban a maximum- és minimumelvek segítségével fogjuk igazolni.

A 8.26. Tétel bizonyítása. Ha u_1 és u_2 a klasszikus harmadik peremérték-feladat megoldásai, akkor a feladat linearitása folytán az $u_1 - u_2$ függvény a homogén jobb oldalú és homogén peremfeltételű harmadik peremérték-feladatnak megoldása. Elegendő tehát belátni, hogy $f = 0$, $\varphi = 0, q \neq 0$ esetén a klasszikus harmadik peremérték-feladatnak csak az azonosan 0 függvény a megoldása az $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ függvények körében, továbbá a $q = 0$ esetben u csak konstansfüggvény lehet, azaz $u = c$, és $c \neq 0$ esetén $g = 0$. Tegyük fel tehát, hogy $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, amelyre

$$\begin{cases} Lu := -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \\ gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Ekkor $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = qu \in C^1(\overline{\Omega})$, így az első Green-formula 8.7. Megjegyzésben szereplő gyengített feltevései teljesülnek az u és $v = u$ függvényekre, ezért

$$0 = \int_\Omega uLu = \int_\Omega (p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u + qu^2) - \int_{\partial\Omega} pu\partial_\nu u \, d\sigma. \tag{8.12}$$

Vegyük most figyelembe a homogén harmadik peremfeltételt. Ha $x \in \partial\Omega$ olyan, amelyre $h(x) = 0$, akkor a $g + h > 0$ feltevés miatt $g(x) \neq 0$, így szükségképpen $u(x) = 0$; ha viszont $h(x) \neq 0$, akkor a peremfeltételből egyszerű átalakítással

$$\partial_\nu u(x) = -\frac{g(x)u(x)}{h(x)}.$$

Összefoglalva:

$$-pu\partial_\nu u(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h(x) = 0, \\ p\frac{g}{h}u^2, & \text{ha } h(x) \neq 0. \end{cases} \tag{8.13}$$

Mivel $p > 0$ és $gh \geq 0$ (tehát azonos előjelűek), ezért a $\partial\Omega$ peremen végső soron

$$-pu\partial_\nu u \geq 0,$$

következésképpen

$$0 = \int_\Omega uLu \geq \int_\Omega (p \left|\operatorname{grad} u\right|^2 + qu^2) \geq 0. \tag{8.14}$$

Ebből következően $\operatorname{grad} u = 0$ és $qu^2 = 0$. Az előbbi feltételből adódik, hogy $u = c$ konstansfüggvény, amely az utóbbi feltétel alapján $q \neq 0$ esetén csak az azonosan 0 függvény lehet, továbbá a $c \neq 0$ esetben a

$$0 = gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = gc$$

peremfeltétel miatt szükségképpen $g = 0$. □

8.31. *Megjegyzés.* Az előbbi bizonyításban valójában a következőt igazoltuk. Tekintsük az Ω tartományon négyzetesen integrálható függvényeknek az

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv$$

skalárszorzattal ellátott $L^2(\Omega)$ Hilbert-terén azt az $L\colon D(L) \to L^2(\Omega)$ lineáris operátort, amelyre

$$D(L) := \big\{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : Lu \in L^2(\Omega), gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0\big\},$$
$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu,$$

ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $p > 0, q \geq 0$, továbbá $g, h \in C(\partial\Omega)$, amelyekre $gh \geq 0$ és $g + h > 0$. Ekkor

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (Lu)u \geq 0, \quad \text{minden } u \in D(L) \text{ esetén},$$

vagyis az L operátor pozitív. Sőt, a $g = 0$, $q = 0$ eset kivételével L szigorúan pozitív, vagyis az előbbi egyenlőtlenség minden $u \in D(L)$, $u \neq 0$ esetén szigorú. A 8.4. szakaszban az L operátornak egyéb tulajdonságait is belátjuk.

Bár a klasszikus peremérték-feladatok megoldásainak egyértelműsége, mint látható, viszonylag egyszerűen megválaszolható kérdés, a megoldások létezése ennél jóval nehezebb. Általában nem feltétlenül létezik megoldás, ezt mutatja az alábbi állítás.

8.32. Állítás. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány és $f \in L^1(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ függvények. Ha az $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvény megoldása a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f & \Omega\text{-ban,} \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

második peremérték-feladatnak, akkor szükségképpen

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} pg \, d\sigma = 0.$$

Bizonyítás. Az első Green-formulát (a 8.7. Megjegyzésbeli feltételek mellett) az u és a $v = 1$ függvényekre alkalmazva

$$\int_\Omega f = -\int_\Omega \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = -\int_{\partial_\Omega} p\partial_\nu u \, d\sigma. \qquad \square$$

A megoldások létezésével és azok valamilyen formula segítségével történő előállításával a Green-függvényekről szóló a 8.6. szakaszban fogunk foglalkozni. Addig is azonban speciális tartományok és speciális jobb oldal esetén gyakran egyszerűen megkereshetjük egy-egy peremérték-feladat megoldásait.

8.33. Példa. Adjuk meg a következő Dirichlet-feladat $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldását, ahol $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ az origó középpontú nyílt egységkörlap:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = x + y \quad ((x,y) \in B(0,1)), \\ u|_{\partial B(0,1)} = x. \end{cases}$$

Kézenfekvő az u megoldást polinom alakban keresni, méghozzá

$$u(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)p(x,y) + x$$

formában, hiszen ekkor a körlap határán, vagyis az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körvonalon előírt peremfeltétel automatikusan teljesül. Mivel a Laplace-operátor legalább kettővel csökkenti egy polinom fokszámát, ezért célszerű a p polinomot elsőfokúnak választani, keressük tehát az u megoldást

$$u(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(ax + by + c) + x$$

alakban. Ekkor $\Delta u(x,y) = 8ax + 8by + 4c$, így a feltételekből következően $a = b = \frac{1}{8}$ és $c = 0$, tehát a feladat megoldása

$$u(x,y) = \frac{x+y}{8}(x^2 + y^2 - 1) + x.$$

Mivel a Dirichlet-feladat $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ simaságú megoldása Lipschitz-tartományon egyértelmű, ezért a kapott u függvény a peremérték-feladat egyetlen $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ simaságú megoldása (amely a későbbi 8.59. Tétel alapján valójában mint $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldás is egyértelmű).

A 8.7–8.8. Feladatokban további példákat láthatunk.

8.3.3. Dirichlet-elv

Tekintsük most a (8.2) egyenlet speciális esetét, a Laplace-egyenletet:

$$-\Delta u = 0.$$

Eddig erre az egyenletre úgy tekintettünk, mint a

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

hővezetési egyenlet stacionárius, azaz időtől független esetére. Gondolhatunk azonban a Poisson-egyenletre úgy is, mint a

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f$$

hullámegyenlet stacionárius esetére, amelynek megoldása két dimenzióban egy szabadon rezgő (tehát olyan, amelyre külső erő nem hat) membrán egyensúlyi helyzetét írja le.

Képzeljük el például, hogy egy drótkeretet szappanos vízbe mártunk, majd abból kivéve nyugalomban hagyunk, és így egy szappanhártya képződik a kereten. A fizikából ismeretes, hogy ekkor a felületi feszültség hatására a hártya a lehető legkisebb felszínű állapot elérésére törekszik. Ha a hártyát az u függvény Ω tartomány feletti grafikonjának tekintjük (ahogyan ezt a 8.3. ábra szemlélteti), akkor a hártya felszíne (lásd a (4.1) formulát)

$$A = \int_\Omega \sqrt{1 + |\operatorname{grad} u(x,y)|^2}\, dx\, dy,$$

így kis kitérések esetén a

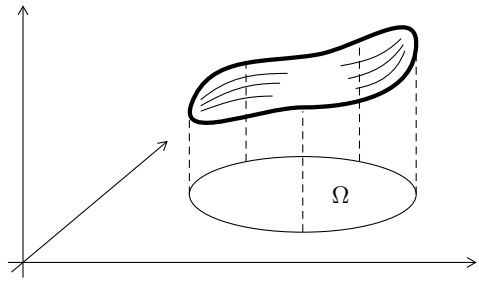
$$\sqrt{1+z} \approx 1 + \frac{z}{2}$$

Taylor-polinom közelítést használva

$$A \approx \int_\Omega \left(1 + \frac{1}{2} |\operatorname{grad} u(x,y)|^2\right) dx\, dy.$$

Ez azt jelenti, hogy a hártya által felvett egyensúlyi állapotban várhatóan az

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\operatorname{grad} u(x,y)|^2 \; dx\, dy$$



8.3. ábra. Szappanhártya drótkereten

integrál minimális lesz. Ez az integrál valójában nem más, mint a hártya potenciális energiájának konstansszorosa. A potenciális energia ugyanis az az energiamennyiség, amely ahhoz szükséges, hogy az egyensúlyi helyzetből az adott helyzetbe hozzuk a hártyát. Az eközben végzett munka arányos a felszínváltozással, amely

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\operatorname{grad} u(x,y)|^2}\,dx\,dy - \int_\Omega 1\,dx\,dy \approx \frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{grad} u(x,y)|^2 .$$

Mindezek alapján, ha a hártyára úgy tekintünk, mint a hullámegyenlet stacionárius megoldására, amelynek értékeit előírjuk a peremen (ez felel meg annak, hogy a hártya a drótkeretre van kifeszítve), akkor egy *Dirichlet-feladatot* kapunk, amely valójában egy *energiaminimalizációs problémával* ekvivalens. Ezt matematikailag a (8.11) egyenlet $q = 0$ speciális esetére nézve a következőképpen fogalmazhatjuk meg pontosan.

Vezessük be az

$$E(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}p\,|\operatorname{grad} u|^2 - fu\right) \tag{8.15}$$

energia jellegű mennyiséget, amelyet szokás *Dirichlet-energiának* is nevezni. A Dirichlet-energiában megjelenő

$$\int_\Omega fu$$

tagra gondolhatunk úgy, mint az f sűrűségfüggvény által meghatározott külső erő munkájára. A Dirichlet-integrált az úgynevezett *megengedhető állapotok*

$$\mathcal{A} = \big\{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = \varphi\big\},$$

halmazán fogjuk vizsgálni, ahol $\varphi \in C(\partial\Omega)$ rögzített függvény.

8.34. Tétel (Dirichlet-elv)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, Lipschitz-tartomány, továbbá $f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Ha $u \in C^2(\overline{\Omega})$ kielégíti a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) = f & \Omega\text{-ban,} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{8.16}$$

klasszikus első peremérték-feladatot, akkor

$$E(u) = \min_{\tilde{u}\in\mathcal{A}} E(\tilde{u}). \tag{8.17}$$

Fordítva, ha az $u \in \mathcal{A}$ függvényre a (8.17) *egyenlőség teljesül, akkor u kielégíti a* (8.16) *feladatot.*

Bizonyítás. A rövidség kedvéért legyen

$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u).$$

Ha $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása a (8.16) feladatnak, akkor minden $w \in \mathcal{A}$ függvényre $(u - w)|_{\partial\Omega} = 0$, így az első Green-formula alapján

$$0 = \int_\Omega \big[(Lu - f)(w - u)\big] = \int_\Omega \big(p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w - p \left|\operatorname{grad} u\right|^2 - fw + fu\big),$$

ahonnan a

$$0 \le \left|\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} w\right|^2 = \left|\operatorname{grad} u\right|^2 - 2 \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w + \left|\operatorname{grad} w\right|^2$$

egyenlőtlenségből nyert

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w \le \frac{1}{2}\left(\left|\operatorname{grad} u\right|^2 + \left|\operatorname{grad} w\right|^2\right)$$

egyenlőtlenség (amely valójában a mértani és a négyzetes közép egyenlőtlenségéből is könnyen megkapható) és $p > 0$ felhasználásával

$$0 \le \int_\Omega \left(\frac{1}{2} p \left|\operatorname{grad} w\right|^2 - fw\right) - \int_\Omega \left(\frac{1}{2} p \left|\operatorname{grad} u\right|^2 - fu\right)$$

adódik. Ez átrendezve éppen azt jelenti, hogy tetszőleges $w \in \mathcal{A}$ esetén $E(w) \ge E(u)$, vagyis (8.17) teljesül.

Fordítva, tegyük fel, hogy $u \in \mathcal{A}$ esetén teljesül a (8.17) egyenlőség. Legyen tetszőleges rögzített $w \in C^2(\overline{\Omega})$, amelyre $w|_{\partial\Omega} = 0$. Ekkor $\tau \in \mathbb{R}$ esetén $u + \tau w \in \mathcal{A}$, így a

$$J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad J(\tau) = E(u + \tau w)$$

hozzárendeléssel értelmezett függvénynek a 0-ban szükségképpen (globális és egyúttal lokális) minimuma van. Mivel

$$\begin{aligned} J(\tau) - J(0) &= E(u + \tau w) - E(u) \\ &= \tau \int_\Omega \Big(p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w + \frac{1}{2} \tau p \left|\operatorname{grad} w\right|^2 - fw\Big), \end{aligned}$$

így

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{J(\tau) - J(0)}{\tau} = \int_\Omega \big(p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w - fw\big),$$

vagyis a J függvény a 0-ban deriválható, és

$$J'(0) = \int_\Omega \big(p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w - fw\big),$$

ami szükségképpen 0, hiszen J-nek a 0-ban lokális minimuma van. Mivel $w|_{\partial\Omega} = 0$, azért az első Green-formula alapján

$$\int_\Omega (Lu - f)w = \int_\Omega \big(p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w - fw\big) = J'(0) = 0$$

teljesül minden fenti w esetén. Ez viszont csakis úgy lehetséges, ha $Lu - f = 0$. Valóban, ha valamely $x_0 \in \Omega$ pontban $(Lu - f)(x_0) > 0$ lenne (a negatív eset hasonló), akkor $Lu - f$ folytonossága miatt (hiszen $u \in C^2(\overline{\Omega})$ és $f \in C(\overline{\Omega})$) az x_0 pont egy egész $B(x_0, \varepsilon)$ környezetében $Lu - f > 0$. Ha most a 3.31. Állítás alapján olyan $w \in C_0^\infty(\Omega)$ függvényt választunk, amelyre $w = 1$ a $B(x_0, \varepsilon/2)$ gömbön és $w = 0$ a $B(x_0, \varepsilon)$ gömbön kívül, akkor $(Lu - f)w > 0$ az egész Ω tartományon, és így az integrálja nem lehet 0. Beláttuk tehát, hogy $Lu = f$, és ezt akartuk bizonyítani. □

8.35. *Történeti megjegyzés.* A Dirichlet-elv története meglehetősen hosszú múltra tekint vissza. Valójában már George Green (1793–1841) 1833-ban, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) 1840-ben, később pedig 1847-ben William Thomson (1824–1907) ugyancsak kimondta az elvet (ezért szokás Thomson-féle elvnek is hívni). Ezután Lejeune Dirichlet (1805–1859) 1850-ben írta le, az elnevezés pedig Bernhard Riemanntól (1826–1866) származik, aki Dirichlet berlini előadásain hallott róla. Riemann az elvet tetszőleges minimalizálási problémára fogalmazta meg, és alkalmazta komplex függvénytani vizsgálódásai során. Karl Weierstrass (1815–1897) 1870-ben példát mutatott olyan esetre, amikor nem létezik minimum (lásd a 8.36. Példát és a [209] cikket), így egyre inkább felmerült az elv pontos megfogalmazásának és igazolásának igénye. A Dirichlet-elv kétdimenziós esetére 1870-ben Hermann Schwarz (1843–1921), a háromdimenziós esetre ugyanebben az évben Karl Neumann (1832–1925) adott bizonyítást, később, 1890-ben Henri Poincaré (1854–1912) az úgynevezett kisöprés módszerét fejlesztette ki a probléma vizsgálatához. Végül a Dirichlet-elv precíz megfogalmazását és bizonyítását David Hilbert (1862–1943) adta 1899-ben a variációszámítás eszköztárának segítségével. Talán eme rövid történeti áttekintés is jól mutatja, hogy a Dirichlet-elvvel összefüggő kérdések számos új kutatási területet nyitottak meg, ezzel kapcsolatban lásd még a Szoboljev-terek kialakulásáról szóló 15.44. Megjegyzést.

8.36. Példa (Weierstrass, 1870)**.** Tekintsük a következő $\mathcal{J}\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ funkcionált:

$$\mathcal{J}(u) := \int_{-1}^{1} x^2 (u'(x))^2 \, dx,$$

ahol a megengedett állapotok halmaza

$$\mathcal{K} := \{u \in C^1([-1,1]) : u(-1) = a, u(1) = b\} \quad (a \neq b).$$

Ekkor nyilvánvalóan $\mathcal{J}(u) \geq 0$ minden $u \in \mathcal{K}$ esetén. Ezenkívül az

$$u_\varepsilon(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0, x \in [-1,1])$$

képlettel értelmezett függvényekre $u_\varepsilon \in \mathcal{K}$, továbbá

$$\mathcal{J}(u_\varepsilon) = \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon x^2}{(x^2+\varepsilon^2)^2}\, dx < \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\, dx,$$

ahol

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\, dx = \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}\right]_{-1}^{1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ennélfogva

$$\mathcal{J}(u_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} 0,$$

felhasználva, hogy $\lim_{\varepsilon \to 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$. Következésképpen

$$\inf_{\mathcal{K}} \mathcal{J} = 0.$$

Azonban nem létezik olyan $u \in \mathcal{K}$, amelyre $\mathcal{J}(u) = 0$ volna. Valóban, ez csak $u' = 0$ esetén teljesülhetne, vagyis u konstansfüggvény lenne, de ez ellentmond az $u(-1) = a \neq b = u(1)$ feltételnek.

8.4. Klasszikus sajátérték-feladatok

A klasszikus peremérték-feladatok kapcsán az $L^2(\Omega)$ függvénytér $D(L)$ alterén értelmeztük a következő $L\colon D(L) \to L^2(\Omega)$ lineáris operátort:

$$\begin{gathered} D(L) := \left\{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : Lu \in L^2(\Omega), gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \\ Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu. \end{gathered} \tag{8.18}$$

A 8.31. Megjegyzésben láttuk, hogy az L operátor pozitív, vagyis

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \text{minden } u \in D(L) \text{ esetén.}$$

A következőkben ennek fontos szerepe lesz, amikor az L operátor sajátértékeivel és sajátfüggvényeivel foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ számot és ehhez $u \in D(L)$, $u \neq 0$ függvényt keresünk, amelyre

$$Lu = \lambda u. \tag{8.19}$$

Az alábbiakban pontosan megfogalmazzuk, mit értünk klasszikus sajátérték-feladatokon.

8.4.1. A klasszikus sajátérték-feladatok kitűzése

A (8.18) összefüggéssel értelmezett L operátorra vonatkozó klasszikus sajátérték-feladatok általánosan a következő alakban írhatók fel: keresendő $\lambda \in \mathbb{R}$ és $u \neq 0$ megfelelő simaságú függvény, amelyre

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u & \Omega\text{-ban}, \\ \text{homogén peremfeltétel teljesül} & \partial\Omega\text{-n}. \end{cases} \tag{8.20}$$

Célszerű rögtön a harmadik peremfeltétel segítségével megfogalmazni a definíciót.

8.37. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, ezenkívül $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$ és $g, h \in C(\partial\Omega)$ adott függvények. A *klasszikus harmadik sajátérték-feladatban* olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ számot és $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $u \neq 0$ függvényt keresünk, amelyekre:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u & \Omega\text{-ban}, \\ gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Ekkor a λ számot a sajátérték-feladat *sajátértékének*, az u függvényt pedig a probléma *sajátfüggvényének* nevezzük.

8.38. *Megjegyzés.* A $g = 0$, $h = 1$ választással a klasszikus harmadik sajátérték-feladat speciális eseteként a *klasszikus második sajátérték-feladat* adódik. A $g = 1$, $h = 0$ esetben pedig a *klasszikus első sajátérték-feladatot* nyerjük, ekkor a tartomány regularitásáról szóló feltétel elhagyható, és ezenkívül a sajátfüggvényeket a $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ térben kereshetjük.

Világos, hogy a klasszikus sajátérték-feladatok az L lineáris operátorra vonatkozó (8.19) sajátérték-feladattal ekvivalensek, és ekkor az $Lu \in L^2(\Omega)$ feltétel automatikusan teljesül.

A $\lambda = 0$ esetben a klasszikus sajátérték-feladatból a homogén jobb oldalú és homogén peremfeltételű klasszikus peremérték-feladatot nyerjük. Ha ennek csak az azonosan 0 függvény a megoldása, akkor a klasszikus peremérték-feladat megoldása egyértelmű (más szóval legfeljebb egy megoldása lehet). Ezt érdemes egy külön állítás formájában is kimondanunk.

8.39. Állítás. *A korábban megfogalmazott klasszikus peremérték-feladatok megoldása pontosan akkor egyértelmű, ha $\lambda = 0$ nem sajátértéke a megfelelő klasszikus sajátérték-feladatnak.*

A sajátértékekkel kapcsolatban a következő tételt fogalmazhatjuk meg.

8.40. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, ezenkívül legyenek $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$ függvények, amelyekre $p > 0, q \geq 0$, továbbá $g, h \in C(\partial\Omega)$, amelyekre $gh \geq 0$ és $g + h > 0$. Ekkor a (8.18) összefüggés alapján értelmezett $L\colon D(L) \to L^2(\Omega)$ operátorra a következők teljesülnek:*

- *az L operátor szimmetrikus és pozitív, legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke lehet, ezek nemnegatívak, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények ortogonálisak az $L^2(\Omega)$ térben;*
- *az L operátornak $\lambda = 0$ csak a $q = 0$, $g = 0$ esetben (a második peremfeltétel esetén) sajátértéke, és ekkor a nemnulla konstansfüggvények a hozzá tartozó sajátfüggvények.*

Bizonyítás. Az L operátor szimmetriájának igazolásához a második Green-formulát alkalmazzuk (az u, v függvényekre vonatkozó, a 8.7. Megjegyzésben említett gyengébb feltevések mellett):

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} p(v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\, d\sigma. \tag{8.21}$$

Az u-ra és v-re vonatkozó homogén harmadik peremfeltétel és a $g + h > 0$ feltevés figyelembevételével (a 8.26. Tételben már látott (8.13) összefüggés mintájára) kapjuk, hogy

$$pv\partial_\nu u(x) = pu\partial_\nu v(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h(x) = 0, \\ -p\frac{g}{h}uv, & \text{ha } h(x) \neq 0. \end{cases}$$

Emiatt a (8.21) egyenlőség jobb oldala 0-val egyenlő, tehát

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)},$$

vagyis L szimmetrikus. A pozitivitást a 8.26. Tételben már igazoltuk. A pozitivitásból adódóan az L operátor sajátértékei nemnegatívak, az L szimmetriája miatt pedig a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények merőlegesek $L^2(\Omega)$-ban, ezért legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok különböző sajátértéke lehet L-nek (hiszen $L^2(\Omega)$ szeparábilis, vagyis egy ortonormált rendszer elemszáma legfeljebb megszámlálhatóan végtelen). A $\lambda = 0$ pontosan akkor sajátérték, ha $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$, és ez, amint a 8.26. Tétel bizonyításában láttuk, csak a $q = 0$, $g = 0$ esetben lehetséges, ekkor u szükségképpen tetszőleges konstansfüggvény. □

8.41. *Megjegyzés.* Bizonyos feltételek mellett igazolható, hogy pontosan megszámlálhatóan végtelen sok sajátérték létezik, ezek véges rangúak, csak a $+\infty$-ben torlódnak, továbbá a sajátfüggvények ortogonális rendszere teljes az $L^2(\Omega)$ térben (lásd a 16. fejezetet).

8.4.2. Sajátértékek és a változók szétválasztása

Speciális tartományok esetében könnyen meghatározhatjuk a $(-\Delta)$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit. Bár a fejezetben általában a dimenzióról feltesszük, hogy legalább 2, most mégis célszerű először az egydimenziós esettel kezdenünk.

Egydimenziós sajátértékek

Legyen $a > 0$, és határozzuk meg az $\Omega = (0, a)$ intervallumon az egydimenziós $(-\Delta)$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit homogén Dirichlet- és Neumann-peremfeltételek mellett. Legyen tehát először

$$D(L) = \big\{u \in C^2(0,a) \cap C([0,a]) : u(0) = u(a) = 0\big\}, \quad Lu = -u'',$$

és keressük azokat a $\lambda \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekhez létezik nem azonosan nulla $u \in D(L)$ úgy, hogy $Lu = -\lambda u$, azaz $-u'' = \lambda u$. Ehhez hozzávéve az operátor értelmezési tartományában szereplő peremfeltételt, az alábbi jól ismert egydimenziós peremérték-feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0,a)), \\ \quad u(0) = 0, \\ \quad u(a) = 0. \end{cases}$$

A differenciálegyenlet összes megoldása λ előjelétől függően:

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x, & \text{ha } \lambda > 0, \\ c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, & \text{ha } \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases} \tag{8.22}$$

(Az előbbi három esetben adódó függvények szoros kapcsolatáról korábban az 5.2.5. alszakaszban az 5.17. Megjegyzésben részletesen szót ejtettünk.) Vegyük most szemügyre a peremfeltételeket! A $\lambda = 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_2 = 0$, így $u(a) = 0$ folytán $c_1 a = 0$, azaz $c_1 = 0$, tehát $u = 0$. A $\lambda < 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_1 + c_2 = 0$, így $u(a) = 0$ folytán $c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a} - c_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}a} = 0$, ezért $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$. Marad a $\lambda > 0$ eset. Ekkor $u(0) = 0$ miatt $c_2 = 0$, másrészt $u(a) = 0$ folytán $\sin\sqrt{\lambda}a = 0$, következésképpen $\sqrt{\lambda}a = k\pi$, ahol k pozitív egész szám (hiszen a $\lambda > 0$ esetet vizsgáljuk). Ez azt jelenti, hogy $\lambda = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, ekkor $u(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$, ahol k a pozitív egész számok halmazát futja be, tehát a sajátértékek mind pozitívak, és megszámlálhatóan végtelen sok sajátérték van. Jól ismert (például Fourier-analízisből, lásd [188]), hogy a fenti szinusz-rendszer teljes ortogonális rendszer $L^2(0,a)$-ban. Normáljuk le az előbb kapott u függvényeket, ekkor nyerjük az L operátor $L^2(0,a)$-ban teljes ortonormált sajátfüggvényrendszerét és a hozzá tartozó sajátértékrendszert. Ehhez a kétszeres szög koszinuszára vonatkozó $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ addíciós képlet alapján adódó

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \tag{8.23}$$

összefüggést hívjuk segítségül:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\,dx = \int_0^a \frac{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{a}x\right)}{2}\,dx = \frac{a}{2}.$$

8.42. Következmény. *Tekintsük az egydimenziós* $(-\Delta)$ *operátort a* $(0,a)$ *intervallumon homogén Dirichlet-peremfeltétel esetén, azaz legyen*

$$D(L)=\big\{u\in C^2(0,a)\cap C([0,a]) : u(0)=u(a)=0\big\},\quad Lu=-u''.$$

Ekkor az operátor sajátértékei és az $L^2(0,a)$ *térben teljes ortonormált rendszert alkotó sajátfüggvényei a következők:*

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2,\quad u_k(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\quad (k=1,2,\dots).$$

Tekintsük most a homogén Neumann-peremfeltétel esetét, azaz legyen

$$D(L)=\big\{u\in C^2(0,a)\cap C^1([0,a]) : u'(0)=u'(a)=0\big\},\quad Lu=-u''.$$

Ekkor a sajátérték-feladat a következő jól ismert egydimenziós peremértékfeladat:

$$\begin{cases} -u''(x)=\lambda u(x) \quad (x\in(0,a)),\\ u'(0)=0,\\ u'(a)=0. \end{cases}$$

A differenciálegyenlet λ előjelétől függő megoldásai a (8.22) függvények. A peremfeltételeket figyelembe véve $\lambda=0$ esetén $c_1=0$ adódik, azaz $u=c_2$. A $\lambda<0$ esetben $u'(0)=0$ miatt $\sqrt{|\lambda|}(c_1-c_2)=0$, azaz $c_1=c_2$, így $u'(a)=0$ folytán

$$\sqrt{|\lambda|}\left(c_1e^{\sqrt{|\lambda|}a}-e^{-\sqrt{|\lambda|}a}\right)=0,$$

ezért $c_1=0$, tehát $u=0$. Végül a $\lambda>0$ esetben $u'(0)=0$ miatt $\sqrt{\lambda}c_1\cos 0=$ $=0$, így $c_1=0$. Másrészt $u'(a)=0$ folytán $\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a=0$, következésképpen $\sqrt{\lambda}a=k\pi$, ahol k pozitív egész szám (hiszen a $\lambda>0$ esetet vizsgáljuk). Ekkor $u(x)=\cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$, ahol $k=0$ választással a $\lambda=0$ esetben kapott konstans függvényeket nyerjük. Összefoglalva, megszámlálhatóan végtelen sok sajátérték van, valamennyien nemnegatívak és egyszeresek. Továbbá 0 is sajátérték, és a konstansfüggvények a hozzá tartozó sajátfüggvények. Jól ismert (megint csak Fourier-analízisből, lásd például [188]), hogy a fenti koszinusz-rendszer teljes ortogonális rendszer $L^2(0,a)$-ban, így az előbbi függvényeket lenormálva nyerjük az L operátor $L^2(0,a)$-ban teljes ortonormált sajátfüggvényrendszerét és a hozzá tartozó sajátértékrendszert.

8.43. Következmény. *Tekintsük az egydimenziós* $(-\Delta)$ *operátort a* $(0,a)$ *intervallumon homogén Neumann-peremfeltétel esetén, azaz legyen*

$$D(L)=\big\{u\in C^2(0,a)\cap C([0,a]) : u'(0)=u'(a)=0\big\},\quad Lu=-u''.$$

Ekkor az operátor sajátértékei és az $L^2(0,a)$ térben teljes ortonormált rendszert alkotó sajátfüggvényei a következők:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

További egydimenziós sajátérték-feladatok találhatók a 8.10. Feladatban.

Kétdimenziós sajátértékek

Térjünk most rá a kétdimenziós esetre, legyen a tartományunk egy téglalap, $T = (0,a)\times(0,b) \subset \mathbb{R}^2$, ahol $a, b > 0$. Tekintsük a $(-\Delta)$ operátort a T téglán homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett:

$$D(L) = \left\{u \in C^2(T) \cap C(\overline{T}) : u|_{\partial T} = 0\right\}, \quad Lu = -\Delta u,$$

és határozzuk meg L sajátértékeit és sajátfüggvényeit. A *változók szétválasztásának módszerét* használjuk (amelyre az 5.2.5. szakaszban már egy példát láttunk), azaz a sajátfüggvényeket

$$u(x,y) = v(x)\cdot w(y)$$

alakban keressük. Ekkor az $Lu = \lambda u$ sajátérték-egyenlet lényegében a következő differenciálegyenletet jelenti a T kétdimenziós téglán:

$$-v''(x)w(y) - v(x)w''(y) = \lambda v(x)w(y).$$

Feltételezve, hogy $v(x)\cdot w(y) \neq 0$, formális leosztás és rendezés után

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda + \frac{w''(y)}{w(y)}$$

adódik. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőség bal oldala csak x-től függ, a jobb oldal pedig csak y-tól. Mivel az egyenlőségnek minden $(x,y) \in T$ esetén teljesülnie kell, ezért ez csak úgy lehet, ha mindkét oldalon konstansfüggvény áll, azaz létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \alpha, \quad -\frac{w''(y)}{w(y)} = \beta \quad \text{és} \quad \alpha + \beta = \lambda,$$

azaz

$$-v'' = \alpha v \quad \text{és} \quad -w'' = \beta w. \tag{8.24}$$

Az operátor értelmezési tartományában lévő peremfeltételt felhasználva a $v(0) = v(a) = 0$, $w(0) = w(b) = 0$ homogén Dirichlet-peremfeltételeket nyerjük. Ez azt jelenti, hogy v sajátfüggvénye, α pedig sajátértéke az egydimenziós

$-\Delta$ operátornak homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett, tehát a 8.42. Következmény alapján $\alpha = \alpha_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ és $v(x) = v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$. Hasonlóan, w is sajátfüggvénye ugyanennek az operátornak $a = b$ választással, tehát $\beta = \beta_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$ és $w(x) = w_\ell(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right)$. Ennek alapján az L operátor következő megszámlálható sok sajátértékét nyertük:

$$\lambda_{k,\ell} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2}\right) \quad (k,\ell = 1,2,\dots),$$

továbbá a megfelelő ortonormált sajátfüggvényrendszer:

$$u_{k,\ell}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right) \quad (k,\ell = 1,2,\dots).$$

(Bár az előbbi levezetésben feltettük, hogy $u(x,y) \neq 0$, és az iménti függvényekre ez nem áll fenn, de könnyen ellenőrizhető, hogy valóban sajátfüggvényeket kaptunk.) Belátható (lásd a 8.11. Feladatot), hogy ez az ortonormált rendszer teljes $L^2(T)$-ben, mivel a (v_k) függvények rendszere teljes $L^2(0,a)$-ban, és a (w_ℓ) függvények rendszere teljes $L^2(0,b)$-ben. Ezért megkaptuk a kétdimenziós feladat összes sajátértékét és lényegében összes sajátfüggvényét: többszörös sajátértékek eseten a kapott sajátfüggvények lineáris burka a megfelelő sajátaltér.

8.44. Következmény. *Tekintsük a $T = (0,a)\times(0,b)$ téglalapon a kétdimenziós $(-\Delta)$ operátort homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett, azaz legyen*

$$D(L) = \big\{u \in C^2(T)\cap C(\overline{T}) : u|_{\partial T} = 0\big\}, \quad Lu = -\Delta u.$$

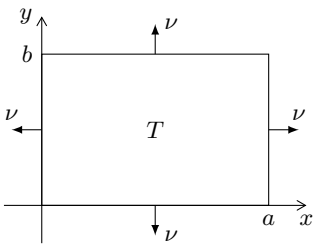
Ekkor az operátor sajátértékei:

$$\lambda_{k,\ell} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2}\right) \quad (k,\ell = 1,2,\dots),$$

továbbá a megfelelő, $L^2(T)$-ben teljes ortonormált sajátfüggvényrendszer:

$$u_{k,\ell}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right) \quad (k,\ell = 1,2,\dots).$$

A fentiekhez hasonló módon nyerjük a kétdimenziós $(-\Delta)$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit homogén Neumann-peremfeltétel esetében. Változatlanul teljesülnek a (8.24) differenciálegyenletek. A peremfeltételhez a 8.4. ábra alapján gondoljuk meg, hogy a téglalap oldalain a kifelé mutató, egység hosszú ν normálvektor a megfelelő bázisvektorral megegyező vagy azzal ellentétes irányú, így a normális irányú derivált a megfelelő változó szerinti parciális deriváltat vagy annak ellentettjét jelenti. Ekkor $\partial_\nu u|_{\partial T} = -v(x)w'(0)$



8.4. ábra. Külső normális téglalapon

a $(0,a)\times\{0\}$ oldalon, $\partial_\nu u|_{\partial T} = v(x)w'(b)$ a $(0,a)\times\{b\}$ oldalon, továbbá $\partial_\nu u|_{\partial T} = -v'(0)w(y)$ a $\{0\}\times(0,b)$ oldalon, és végül $\partial_\nu u|_{\partial T} = v'(a)w(y)$ az $\{a\}\times(0,b)$ oldalon. Ez azt jelenti, hogy $v'(0) = v'(a) = 0$ és $w'(0) = w'(b) = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy a v függvény sajátfüggvénye, α pedig sajátértéke az egydimenziós $(-\Delta)$ operátornak Neumann-peremfeltétel mellett a $(0,a)$ intervallumon. Hasonlóan, w sajátfüggvénye, β pedig sajátértéke ugyanennek az operátornak a $(0,b)$ intervallumon. Így kapjuk az alábbi következményt.

8.45. Következmény. *Tekintsük a $T=(0,a)\times(0,b)$ téglalapon a kétdimenziós $(-\Delta)$ operátort homogén Neumann-peremfeltétel esetén, azaz legyen*

$$D(L) = \big\{u\in C^2(T)\cap C^1(\overline{T}) : \partial_\nu u|_{\partial T} = 0\big\}, \quad Lu = -\Delta u,$$

Ekkor az operátor sajátértékei:

$$\lambda_{k,\ell} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{\ell^2}{b^2}\right) \quad (k,\ell = 0,1,\dots),$$

valamint $L^2(T)$-ben teljes ortonormált sajátfüggvényrendszere:

$$\begin{aligned}
u_{0,0}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{ab}},\\
u_{k,0}(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \quad (k=1,2\dots),\\
u_{0,\ell}(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right) \quad (\ell=1,2,\dots),\\
u_{k,\ell}(x,y) &= \frac{2}{\sqrt{ab}}\cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right) \quad (k,\ell=1,2\dots).
\end{aligned}$$

Egy további kétdimenziós sajátérték-feladat található a 8.12. Feladatban, ahol harmadik peremfeltétel van csatolva a $(-\Delta)$ operátorhoz.

A sajátfüggvények rendszerének ortogonalitása és teljessége lehetőséget ad peremérték-feladatok megoldásainak Fourier-sor alakban való előállítására. Ez a Fourier-módszer.

8.4.3. Fourier-módszer

A Laplace-operátornak valamely tartományon egy adott típusú homogén peremfeltételhez tartozó sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek ismeretében eljárást adhatunk peremérték-feladatok megoldására. Ezt először egy egydimenziós példán szemléltetjük. Keressük meg a következő peremérték-feladat klasszikus megoldását:

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 \quad (x \in (0,\pi)), \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{8.25}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$u(x) = \frac{1}{2}x(\pi - x) \tag{8.26}$$

klasszikus, $C^2([0,\pi])$ simaságú megoldás, ezért a 8.26. Tételből (elfogadván, hogy egy dimenzióban is érvényes) tudjuk, hogy egyértelmű. A későbbi 8.59. Tételből az is következik, hogy $C^2(0,a) \cap C([0,a])$ simaságú megoldásként szintén egyértelmű. Próbáljuk meg most u-t előállítani a homogén Dirichlet-peremfeltétellel ellátott egydimenziós $(-\Delta)$ operátor sajátfüggvényrendszerében, vagyis a szinusz-rendszerben ($a = \pi$ esetén). Keressük tehát az u függvényt

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin kx$$

alakban. Tegyük fel, hogy a sor összegfüggvénye tagonként kétszer deriválható, ekkor

$$-u''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k k^2 \sin kx.$$

Az azonosan 1 függvényt szintén fejtsük sorba, a k-adik Fourier-együttható

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_{x=0}^{\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-(-1)^k}{k},$$

így

$$1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{(2\ell+1)\pi} \sin\left[(2\ell+1)x\right].$$

Mivel u kielégíti a (8.25) peremérték-feladatot, azért szükségképpen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k k^2 \sin kx = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{(2\ell+1)\pi} \sin\left[(2\ell+1)x\right],$$

vagyis

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ \dfrac{4}{(2\ell+1)^3\pi}, & \text{ha } k = 2\ell+1 \ (k \text{ páratlan}), \end{cases}$$

azaz

$$u(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{(2\ell+1)^3\pi} \sin\left[(2\ell+1)x\right]. \tag{8.27}$$

Felmerül a kérdés, hogy a kapott sor tényleg tagonként differenciálható-e, jogosak voltak-e a fenti átalakítások? Világos, hogy

$$\left| \frac{4}{(2\ell+1)^3\pi} \sin\left[(2l+1)x\right] \right| \leq \frac{4}{(2\ell+1)^3\pi},$$

és a

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{(2\ell+1)^3\pi}$$

végtelen sor konvergens, így a Weierstrass-kritérium miatt u sora abszolút és egyenletesen konvergens a $[0,\pi]$ intervallumon, tehát u folytonos, és így a (8.25) peremfeltételek teljesülnek. Ezenkívül a tagonkénti deriválással nyert

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{(2\ell+1)^2} \cos\left[(2\ell+1)x\right]$$

sor ugyancsak egyenletesen konvergens $[0,\pi]$-n, tehát a tagonkénti deriválás jogos. Sőt, a függvénysorok egyenletes konvergenciájára vonatkozó Dirichlet-kritériumból (lásd a [98] könyvet) következik, hogy a

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{(2\ell+1)} \sin\left[(2\ell+1)x\right]$$

sor egyenletesen konvergens tetszőleges $[\delta, \pi-\delta]$ intervallumon (ahol $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$), így a tagonkénti kétszeres deriválás ismét jogos. Azt kaptuk tehát, hogy

a (8.27) sor alakjában megadott u függvény klasszikus megoldása a (8.25) peremérték-feladatnak. Ahogy az elején már utaltunk rá, a megoldás egyértelmű, ezért egyúttal a (8.26) függvény Fourier-sor előállítását is nyertük:

$$\frac{1}{2}x(\pi - x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{(2\ell+1)^3\pi} \sin\left[(2\ell+1)x\right].$$

A fentiek alapján könnyen megfogalmazhatjuk a klasszikus peremérték-feladatok megoldásának sor alakban való előállításának módszerét, a Fourier-módszert.

Tegyük fel, hogy ismerjük egy L differenciáloperátor (például $L = -\Delta$) egy adott tartományhoz és adott homogén peremfeltételhez tartozó sajátértékeit és sajátfüggvényeit, és a következő peremérték-feladat megoldását keressük:

$$\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{-ban}, \\ \text{homogén peremfeltétel} & \partial\Omega\text{-n}. \end{cases} \tag{8.28}$$

Feltesszük, hogy az L operátorra vonatkozó klasszikus sajátérték-feladatnak megszámlálhatóan végtelen sok nemnulla λ_k sajátértéke van, és az ezekhez tartozó u_k sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak az $L^2(\Omega)$ térben. Ekkor a peremérték-feladat megoldását célszerű

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k$$

alakban keresni. A sor megfelelő konvergenciája mellett a peremfeltétel automatikusan teljesül, másrészt pedig, feltéve, hogy a sor tagonként differenciálható,

$$Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k L u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \lambda_k u_k.$$

Az f függvényt szintén felírjuk a sajátfüggvények bázisában:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k.$$

Ekkor az $Lu = f$ egyenlőségben a Fourier-sorok megfelelő együtthatóinak szükségképpen meg kell egyezniük:

$$\xi_k \lambda_k = c_k,$$

tehát

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} u_k.$$

Felmerül a kérdés, hogy a kapott u függvény vajon klasszikus értelemben megoldás-e, azaz kétszer differenciálható-e, elvégezhető-e a tagonkénti deriválás és teljesül-e a peremfeltétel? Ezek a kérdések általában a konkrét példákban megválaszolhatók, és a módszer jól alkalmazható, de a kapott sorra a feltételek teljesülését ellenőrizni kell (L. még a 16. fejezetet és a [175] tankönyvet). Jegyezzük meg, hogy a Fourier-módszer inhomogén peremfeltétel esetén is alkalmazható. Ha például $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, akkor első lépésként egy olyan $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényt célszerű keresni, amelyre $\Phi|_{\partial\Omega} = \varphi$ (ha van megoldás, akkor létezik ilyen függvény). Majd ezt követően az előbbi módszert a $v = u - \Phi$ függvényre alkalmazzuk.

Nézzünk most egy kétdimenziós példát a Fourier-módszer alkalmazására.

8.46. Példa. Legyen $T = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$, és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = x + y \quad ((x,y) \in (0,\pi)^2), \\ u|_{\partial(0,\pi)^2} = 0. \end{cases}$$

A megoldást a $(-\Delta)$ operátor $L^2(T)$-ben ortonormált sajátfüggvényrendszerében állítjuk elő. Ehhez írjuk fel az f függvényt is ebben a rendszerben:

$$f = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} c_{k,\ell} u_{k,\ell},$$

ahol $u_{k,\ell}$ a 8.44. Következményben szereplő függvényrendszer. A $c_{k,\ell}$ együtthatókat a következőképpen nyerjük:

$$\begin{aligned} c_{k,\ell} &= \int_T f u_{k,\ell} = \int_0^\pi \int_0^\pi (x+y) \frac{2}{\pi} \sin kx \sin \ell y \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\pi x \sin kx \, dx \int_0^\pi \sin \ell y \, dy + \int_0^\pi y \sin \ell y \, dy \int_0^\pi \sin kx \, dx \right] \\ &= \frac{2}{k\ell} \left((-1)^{k+1}(1-(-1)^\ell) + (-1)^{\ell+1}(1-(-1)^k) \right), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\int_0^\pi \sin \ell y \, dy = \frac{1}{\ell} \left[-\cos \ell y \right]_{y=0}^{\pi} = \frac{1}{\ell} \big(1 - (-1)^\ell \big),$$

valamint

$$\int_0^\pi x \sin kx \, dx = \frac{1}{k} \left[-x \cos kx \right]_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos ky \, dy = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{k}. \quad (8.29)$$

Bevezetve a

$$w_{k,\ell} := \begin{cases} 0 & \text{ha } k \text{ és } \ell \text{ páros,} \\ 4 & \text{ha } k \text{ és } \ell \text{ páratlan,} \\ -2 & \text{egyébként} \end{cases}$$

jelölést, $c_{k,\ell} = \frac{2}{k\ell} w_{k,\ell}$; ennek alapján

$$u(x,y) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{2w_{k,\ell}}{k\ell(k^2+\ell^2)} \cdot \frac{2}{\pi} \sin kx \sin \ell y.$$

A sor egyenletesen konvergens $\overline{\Omega}$-on, mert felhasználva a $k^2+\ell^2 \geq 2k\ell$ egyenlőtlenséget,

$$\begin{aligned} \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left| \frac{2w_{k,\ell}}{k\ell(k^2+\ell^2)} \cdot \frac{2}{\pi} \sin kx \sin \ell y \right| &\leq \frac{16}{\pi} \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{1}{k\ell(k^2+\ell^2)} \\ &\leq \frac{8}{\pi} \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\ell^2} \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} \\ &= \frac{2\pi^3}{9} < +\infty. \end{aligned}$$

Belátható, hogy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ klasszikus értelemben is megoldása a peremérték-feladatnak (és a 8.59. Tétel alapján egyértelmű, hiszen a téglalap Lipschitz-tartomány, mert konvex), azonban ennek igazolása meglehetősen hosszadalmas. Végül azt is érdemes megjegyeznünk, hogy $u \in C^2(\overline{\Omega})$ viszont nem teljesül, lásd az ehhez nagyon hasonló az 5.21. Feladatot.

8.5. Harmonikus függvények

Ebben a szakaszban a

$$-\Delta u = 0$$

Laplace-egyenlet kétszer folytonosan differenciálható megoldásaival foglalkozunk, amelyeket *harmonikus függvényeknek* hívunk.

8.47. Definíció. Ha az $u \in C^2(\Omega)$ függvényre $-\Delta u = 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, akkor u-t az Ω-n *harmonikus* függvénynek hívjuk. Ha $-\Delta u \leq 0$, akkor u-t *szubharmonikus* függvénynek, a $-\Delta u \geq 0$ egyenlőtlenségnek eleget tevő függvényeket pedig *szuperharmonikus* függvényeknek nevezzük.

8.48. *Megjegyzés.* Míg a harmonikus függvények esetében a negatív előjelnek nincs lényeges szerepe, addig a szub- és szuperharmonikus függvények elnevezése ezzel az előjellel válik logikussá („szub" jelentése „alatt", „szuper" jelentése „felett"). Érdemes megjegyeznünk, hogy egy változóban a harmonikus függvények kevéssé érdekesek, hiszen a $-u''(x) = 0$ egyenletnek a lineáris függvények tesznek eleget. A szub- és szuperharmonikus függvények ebben a speciális dimenzióban éppen a konvex és konkáv függvények (ami ismét magyarázatot ad az elnevezésre).

8.49. *Történeti megjegyzés.* A harmonikus jelzőt a Laplace-egyenlet kapcsán először William Thomson (későbbi nevén Lord Kelvin) (1824–1907) és Peter Guthrie Tait (1831–1901) skót fizikusok használták először 1867-ben. Gömbi polárkoordináták bevezetésével a változók szétválasztásának módszerét alkalmazva Thomson és Tait az általuk *gömbi harmonikusoknak* (magyarul inkább gömbfüggvényeknek) nevezett függvényekhez jutottak, amelyek segítségével a Fourier-sorok mintájára az egyenlet összes megoldása előállítható végtelen sor alakban. A Fourier-sor tagjai a trigonometrikus függvények, amelyek a harmonikus rezgőmozgást írják le, és ennek analógiájaként született a gömbi harmonikus elnevezés.

A harmonikus függvények számos fontos tulajdonsággal rendelkeznek, ezek közül a maximum- és minimumelveket, a középérték-tulajdonságot és a kétdimenziós esetben a komplex függvényekkel való kapcsolatukat tárgyaljuk.

8.5.1. Maximum- és minimumelvek

A fizikában ismert tény, hogy egy szoba pontjainak stacionárius hőmérséklete legfeljebb akkora, mint a falakon mérhető maximális hőmérséklet. Sőt, ez nyilván akkor is igaz, ha a szobában hő nem keletkezik, csak esetleg elnyelődik, például télen kinyitjuk az ablakokat. Amennyiben hő keletkezik, mondjuk a szobában fűtőtestek vannak, akkor a szoba minden pontjának hőmérséklete legalább akkora, mint a falakon mért minimális hőmérséklet. E fizikailag természetes módon adódó észrevételeket matematikai szempontból az úgynevezett maximum- és minimumelvek fogalmazzák meg pontosan. Ezekben a tételekben a szóban forgó maximum és minimum létezését Weierstrass tétele (annak többváltozós esete) biztosítja, amely szerint korlátos és zárt (más szóval kompakt) halmazon folytonos függvénynek van maximuma és minimuma. Jegyezzük meg azt is, hogy a következőkben a tartomány peremének simasága egyáltalán nem játszik majd szerepet.

8.50. Tétel (Gyenge maximumelv Laplace-operátorra)**.** *Tegyük fel, hogy az* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *függvényre* $-\Delta u \leq 0$ *az* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos tartományon. Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Bizonyítás. A bizonyítást két lépésben végezzük el: először feltesszük, hogy $-\Delta u < 0$ az Ω halmazon, és belátjuk, hogy ekkor teljesül az állítás, majd ebből határátmenettel kapjuk a $-\Delta u \le 0$ esetet. (Ez az egyszerű bizonyítás lényegében I. I. Privalovtól (1891–1941) származik: lásd [148].)

A $-\Delta u < 0$ esetben indirekt módon tegyük fel, hogy $\max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$, ezért létezik $x_0 \in \Omega$, amelyre $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Ekkor x_0 lokális maximumhely is egyben, sőt tetszőleges változóra szorítkozva is az. Ezért szükségképpen $\partial_j u(x_0) = 0$ és $\partial_j^2 u(x_0) \le 0$ (hiszen $\partial_j u(x_0) = 0$ és $\partial_j^2 u(x_0) > 0$ esetén x_0 szigorú lokális minimumhely volna), így

$$-\Delta u(x_0) = \partial_1^2 u(x_0) + \ldots + \partial_n^2 u(x_0) \ge 0,$$

ami ellentmond a $-\Delta u < 0$ feltételnek. Vegyük észre, hogy azt láttuk be: $-\Delta u < 0$ esetén u az $\overline{\Omega}$-beli maximumát kizárólag a peremen veszi fel.

Legyen most $-\Delta u \le 0$. Tekintsük az $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{x_1}$ függvényt, ahol $\varepsilon > 0$. Ekkor $-\Delta u \le 0$ folytán

$$-\Delta u_\varepsilon(x) = -\Delta u(x) - \varepsilon e^{x_1} \le -\varepsilon e^{x_1} < 0,$$

így az előzőek alapján

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Már csak annyit kell belátnunk, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \to \max_{\overline{\Omega}} u$ és $\max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max_{\partial\Omega} u$. Ehhez elegendő felhasználnunk azt, hogy $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen az $\overline{\Omega}$ halmazon. Mivel erre a következtetésre a későbbiekben is hivatkozni fogunk, ezért célszerű egy külön segédállításban megfogalmaznunk és igazolnunk. □

8.51. Lemma. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz, továbbá $u_j \colon K \to \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ és $u \colon K \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $u_j \to u$ egyenletesen a K halmazon. Ekkor*

$$\max_K u_j \to \max_K u.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor az $u_j \to u$ egyenletes konvergencia miatt egy alkalmas N küszöbtől kezdve

$$|u_j(x) - u(x)| < \varepsilon \quad (x \in K).$$

Ez egyrészt azt jelenti, hogy $j > N$ esetén

$$u_j(x) < u(x) + \varepsilon \le \max_K u + \varepsilon \quad (x \in K),$$

másrészt

$$u(x) < u_j(x) + \varepsilon \le \max_K u_j + \varepsilon \quad (x \in K).$$

Következésképpen

$$\max_K u_j < \max_K u + \varepsilon \quad \text{és} \quad \max_K u < \max_K u_j + \varepsilon,$$

vagyis $j > N$ esetén

$$\left|\max_K u_j - \max_K u\right| < \varepsilon,$$

ahonnan a maximumok konvergenciája már adódik. □

8.52. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a 8.50. Tétel bizonyítása szinte szóról szóra átvihető a $-\Delta$ operátorról az

$$u \mapsto -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = -p\Delta u - \sum_{j=1}^{n} \partial_j p \partial_j u$$

operátorra, tehát ebben az esetben is érvényes a megfogalmazott gyenge maximumelv.

A gyenge maximumelvben az Ω halmaz összefüggőségének valójában egyáltalán nincsen szerepe. Ha azonban az összefüggőséget is feltételezzük, akkor a gyenge maximumelvnél némileg erősebb eredmény, erős maximumelv is igaz (lásd a 8.63. Tételt): ha az Ω korlátos tartományon (lényeges a halmaz összefüggősége!) az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\Delta u \leq 0$ (más szóval u szubharmonikus), továbbá u felveszi $\overline{\Omega}$-beli maximumát Ω egy belső pontjában, akkor u szükségképpen konstansfüggvény.

A gyenge maximumelvet a $(-u)$ függvényre alkalmazva könnyen adódik a *gyenge minimumelv*, ehhez mindössze az elemi

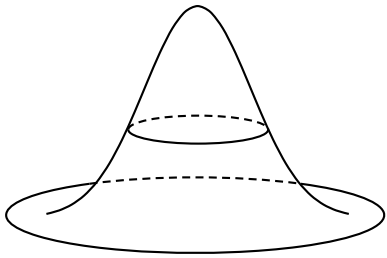
$$\max_H(-u) = -\min_H u \tag{8.30}$$

összefüggést kell figyelembe vennünk, ahol H tetszőleges korlátos, zárt részhalmaza az u függvény értelmezési tartományának (a következőkben többnyire $H = \overline{\Omega}$ és $H = \partial\Omega$).

8.53. Tétel (Gyenge minimumelv Laplace-operátorra)**.** *Ha az Ω korlátos tartományon az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\Delta u \geq 0$, akkor*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

8.54. *Megjegyzés.* Ahogy a Laplace-operátorra vonatkozó gyenge maximumelv, úgy a gyenge minimumelv is érvényben marad az $u \mapsto -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra. Továbbá hasonlóan a később bizonyítandó erős maximumelvhez, érvényes az erős minimumelv is: ha egy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ szuperharmonikus függvény minimuma felvétetik $\overline{\Omega}$ egy belső pontjában, és Ω korlátos tartomány (tehát összefüggő), akkor u szükségképpen konstansfüggvény.



8.5. ábra. „Hegycsúcs levágása”

Mielőtt a maximum- és minimumelveket általánosabb operátorokra is megfogalmaznánk, érdemes egy kis időre visszatérnünk a fizikai szemlélethez. Először is gondoljuk meg, hogy a két elv egyszerű következménye az, hogy harmonikus függvénynek a tartomány belső pontjában nem lehet szigorú lokális szélsőértéke. Valóban, ellenkező esetben ugyanis a szóban forgó szigorú lokális szélsőértékhely egy kicsiny gömbi környezetében nem teljesülne a két elv valamelyike (szigorú lokális maximum esetében a gyenge maximumelv, minimum esetében a gyenge minimumelv). Az iménti észrevételt fizikailag a következőképpen magyarázhatjuk. Ahogy a 8.3.3. alszakaszban már érzékeltettük, a $-\Delta u = 0$ egyenlet u megoldásának grafikonjára tekinthetünk úgy, mint egy drótkeretre illeszkedő szappanhártyára, amely a minimális felszínű állapotra törekszik. Ha a hártyafelületen valahol volna „hegy”, akkor a „hegycsúcs levágásával” csökkenthető lenne a hártya felszíne (lásd a 8.5. ábrát). Hasonlóan, „völgyek” sem lehetnek a hártyafelületen.

Ezek után térjünk vissza a gyenge maximumelvhez, amelynek bizonyítását könnyedén általánosíthatjuk a Laplace-operátor helyett a

$$u \mapsto -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$

alakú operátorra is, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$.

8.55. Tétel (Gyenge maximumelv a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)+qu$ operátorra)**.** *Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \leq 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$. Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+,$$

ahol $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ az u függvény pozitív része.

Bizonyítás. A rövidség kedvéért használjuk az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ jelölést. Első lépésben azt látjuk be, hogy ha $Lu < 0$ az Ω tartományon, akkor u-nak belső pontban nem lehet nemnegatív értékű lokális maximuma,

és ebből következni fog a bizonyítandó összefüggés ebben a speciális esetben. Ha ugyanis az $x_0 \in \Omega$ belső pontban u-nak nemnegatív maximuma volna, akkor ott $u(x_0) \geq 0$, továbbá $\partial_j u(x_0) = 0$ és $\partial_j^2 u(x_0) \leq 0$ minden j-re, így p és q előjele miatt

$$(Lu)(x_0) = -p(x_0)\Delta u(x_0) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j p(x_0)\partial_j u(x_0) + q(x_0)u(x_0) \geq 0,$$

ami ellentmond az $Lu < 0$ feltevésnek. Vegyük észre, hogy ha u az Ω belsejében nem vehet fel nemnegatív értékű maximumot, akkor szükségképpen az u^+ függvény a $\partial\Omega$ peremen veszi fel az $\overline{\Omega}$-beli maximumát, azaz

$$\max_{\overline{\Omega}} u^+ = \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Mivel $u \leq u^+$, ezért az előbbi összefüggés egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u^+,$$

vagyis az $Lu < 0$ esetben igaz a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Ezek után második lépésben tegyük fel, hogy $Lu \leq 0$, és $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ esetén legyen $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$. Mivel

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda x_1}) &= e^{\lambda x_1}\left[\lambda(-p\lambda + \partial_1 p) + q\right] \\ &\leq e^{\lambda x_1}\left[\lambda\Big(-\lambda \min_{\overline{\Omega}} p + \max_{\overline{\Omega}} |\partial_1 p|\Big) + \max_{\overline{\Omega}} q\right], \end{aligned}$$

ahol a szögletes zárójelben lévő kifejezés $\min_{\overline{\Omega}} p > 0$ folytán $\lambda \to \infty$ esetén $-\infty$-hez tart, tehát elég nagy $\lambda > 0$ számot választva $L(e^{\lambda x_1}) < 0$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén. Egy ilyen tulajdonságú λ szám rögzítése után minden $\varepsilon > 0$ számra

$$Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon L(e^{\lambda x_1}) < Lu \leq 0,$$

tehát az első lépés alapján

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon^+.$$

Ezenkívül $u \leq u_\varepsilon$, továbbá ha $\Omega \subset B(0,R)$, akkor $u_\varepsilon^+ \leq u^+ + \varepsilon e^{\lambda R}$, így végső soron

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon e^{\lambda R}.$$

Az egyenlőtlenségláncolat elején és végén található kifejezésekből $\varepsilon \to 0+$ határátmenettel adódik a bizonyítandó összefüggés. □

Egy függvény pozitív része mellett bevezethető a *negatív rész* is:

$$u^- := (-u)^+ = -\min\{u, 0\}.$$

Vigyázzunk, hogy az iménti definíció alapján u^- nemnegatív értékű függvény! A 8.55. Tételt az u függvény helyett a $(-u)$-ra alkalmazva adódik a *gyenge minimumelv* általánosabb változata.

8.56. Tétel (Gyenge minimumelv a $-\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u)+qu$ operátorra)**.** *Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u)+qu \geq 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$. Ekkor*

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló módon a $(-u)$ függvényre

$$-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}(-u)) + q(-u) \leq 0,$$

így a 8.55. Tétel alapján

$$\max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-u)^+,$$

ahonnan a (8.30) összefüggés felhasználásával, (-1)-gyel való szorzás után rögtön adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség. □

Ha egy u függvényre $-\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) + qu = 0$, akkor mind a maximum-, mind pedig a minimumelv teljesül, ilyenkor az alábbi következményt fogalmazhatjuk meg.

8.57. Következmény. *Ha az Ω korlátos tartományon az $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) + qu = 0$, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$, akkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Bizonyítás. Szűkebb halmazon a maximum legfeljebb akkora, mint a bővebb halmazon, így a szóban forgó két maximum egyenlőségéhez elegendő belátnunk, hogy

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|. \tag{8.31}$$

A 8.55. és a 8.56. Tétel alapján bármely $x \in \overline{\Omega}$ pontra:

$$-\max_{\partial\Omega} u^- \leq \min_{\overline{\Omega}} u \leq u(x) \leq \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Mivel $u^+ \leq |u|$ és $u^- \leq |u|$, ezért

$$\max_{\partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad \text{és} \quad -\max_{\partial\Omega} |u| \leq -\max_{\partial\Omega} u^-,$$

így az előbbi egyenlőtlenségek alapján minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén

$$-\max_{\partial\Omega} |u| \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} |u|,$$

ahonnan a (8.31) egyenlőtlenség már adódik. □

8.58. *Megjegyzés.* A maximumelv (és természetesen a minimumelv is) valójában még általánosabban, a következő alakú egyenletesen elliptikus operátorok esetében is igaz:

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j u + qu,$$

ahol $a_{jk}, b_j, q \in C(\overline{\Omega})$ $(j,k = 1,\dots,n)$ és $q \ge 0$, továbbá az a_{jk} együtthatókra teljesül az egyenletes ellipticitás 7.5. Definícióban megfogalmazott feltétele (lásd a 8.21. Feladatot).

A maximum- és minimumelvekben a $q \ge 0$ feltételnek lényeges szerepe van, a $q < 0$ esetben általában nem igaz hasonló állítás. Legyen ugyanis például u az $u \mapsto -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátor sajátfüggvénye homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett. Ekkor egyrészt $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - \lambda u = 0$, ahol $\lambda > 0$, mert a 8.40. Tétel szerint a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátor sajátértékei első peremfeltétel mellett pozitívak. Másrészt viszont a peremfeltételből adódóan $\max_{\partial\Omega} |u| = 0$, azonban $\max_{\overline{\Omega}} |u| \ne 0$, hiszen u nem azonosan 0, mert sajátfüggvény.

8.5.2. A Dirichlet-feladat megoldásának egyértelműsége

A maximum- és minimumelvnek több fontos következménye van a Dirichlet-feladat megoldásaira nézve: a megoldás egyértelműsége és folytonos függése.

8.59. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, amelyekre $p > 0$ és $q \ge 0$. Ekkor a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-n}, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

első peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldása lehet, azaz a megoldás egyértelmű.

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a peremérték-feladat megoldásai. Ekkor az egyenlet linearitása miatt az $u = u_1 - u_2$ függvényre

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$$

az Ω tartományon, továbbá $u|_{\partial\Omega} = 0$, így a 8.57. Következmény szerint $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| = 0$, vagyis $u = 0$, tehát $u_1 = u_2$. □

8.60. Tétel (Folytonos függés)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, amelyekre $p > 0$ és $q \geq 0$. Ekkor létezik (csak Ω-tól, p-től és q-tól függő) $C > 0$ konstans, hogy ha $f \in C(\overline{\Omega})$ és $g \in C(\partial\Omega)$ esetén $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-}n, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

első peremérték-feladat (egyértelmű) megoldása, akkor

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

Bizonyítás. Legyen

$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu,$$

ekkor $Lu = f$ és $f \in C(\overline{\Omega})$ folytán Lu folytonosan kiterjed az Ω tartomány lezártjára. Belátjuk, hogy alkalmas $C > 0$ számmal

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + C \max_{\overline{\Omega}} |Lu|, \tag{8.32}$$

amivel nyilván készen leszünk. Első lépésben válasszunk egy olyan Φ függvényt, amelyre $\Phi \geq 0$ és $L\Phi \leq -1$ az Ω halmazon, például a $\Phi(x) = \mu e^{\lambda x_1}$ függvény elég nagy $\mu > 0$ és $\lambda > 0$ esetén megfelelő lesz. Valóban,

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda x_1}) &= e^{\lambda x_1} \left[\lambda(-p\lambda + \partial_1 p) + q\right] \\ &\leq e^{\lambda x_1} \left[\lambda\Big(-\lambda \min_{\overline{\Omega}} p + \max_{\overline{\Omega}} |\partial_1 p|\Big) + \max_{\overline{\Omega}} q\right], \end{aligned}$$

ahol a szögletes zárójelben lévő kifejezés $\min_{\overline{\Omega}} p > 0$ folytán $\lambda \to \infty$ esetén $-\infty$-hez tart, tehát elég nagy $\lambda > 0$ számot választva $L(e^{\lambda x_1}) < 0$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén. Egy ilyen tulajdonságú λ szám rögzítése után legyen μ olyan, hogy

$$\mu > -\frac{1}{\max_{\overline{\Omega}} L(e^{\lambda x_1})} > 0,$$

ekkor

$$L(\mu e^{\lambda x_1}) \leq -1.$$

Tekintsük ezek után a

$$v(x) = u(x) + \Phi(x) \max_{\overline{\Omega}} |Lu|$$

függvényt. Mivel

$$Lv = Lu + L\Phi \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \leq Lu - \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \leq 0,$$

ezért a v függvényre érvényes a 8.55. Tételben megfogalmazott gyenge maximumelv, tehát

$$u(x) \le v(x) \le \max_{\overline{\Omega}} v \le \max_{\partial\Omega} v^+ \le \max_{\partial\Omega} |u| + (\max_{\overline{\Omega}} \Phi)(\max_{\overline{\Omega}} |Lu|),$$

így

$$u(x) \le \max_{\partial\Omega} |u| + (\max_{\overline{\Omega}} \Phi)(\max_{\overline{\Omega}} |Lu|). \tag{8.33}$$

Az iménti egyenlőtlenségben u helyére $(-u)$-t írva, $|L(-u)| = |Lu|$ figyelembevételével kapjuk, hogy

$$-u(x) \le \max_{\partial\Omega} |u| + (\max_{\overline{\Omega}} \Phi)(\max_{\overline{\Omega}} |Lu|). \tag{8.34}$$

A (8.33) és (8.34) egyenlőtlenségekből a $C = \max_{\overline{\Omega}} \Phi$ konstanssal a bizonyítandó (8.32) becslést nyerjük. □

8.5.3. Harmonikus függvények középérték-tulajdonsága

A maximum- és minimumelvek mellett a harmonikus függvényekre érvényes egy másik fontos összefüggés, a középérték-tulajdonság: egy harmonikus függvénynek tetszőleges gömbön (gömbtesten) vett integrálátlaga a függvény középpontbeli értékével egyenlő; ugyanez igaz gömbtest helyett gömbfelületen vett integrálátlaggal. Általában egy nem nullmértékű mérhető $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon integrálható f függvénynek a H halmazon vett *integrálátlagán* (vagy *integrálközepén*) az

$$\frac{\int_H f(x)\,dx}{\lambda(H)}$$

kifejezést értjük, ahol $\lambda(H)$ a H halmaz Lebesgue-mértéke. Ha f folytonos függvény és a H halmazon van minimuma és maximuma (például H korlátos és zárt halmaz), akkor a minden $x \in H$ esetén érvényes $\min_H f \le f(x) \le \max_H$ becslés segítségével

$$\min_H f \le \frac{\int_H f}{\lambda(H)} \le \max_H f \tag{8.35}$$

adódik, tehát az f integrálátlaga a függvény minimuma és maximuma közé esik (ezért valóban tekinthető egyfajta középértéknek). Amennyiben f folytonos függvény, és H valamely x belső pontjában $f(x) > \min_H f$ vagy $f(x) < \max_H f$, akkor ez az x egy egész környezetében teljesül, így a (8.35) egyenlőtlenségek bármelyikében az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha f konstansfüggvény a H halmazon.

A középérték-tulajdonság kimondása előtt emlékeztetünk arra (lásd a 2.15., 4.13. Állításokat, valamint a 4.14. Megjegyzést), hogy az n dimenziós, tetszőleges x_0 középpontú és R sugarú $B(x_0,R)$ gömb térfogata (Lebesgue-mértéke) és az $S(x_0,R)=\partial B(x_0,R)$ gömbfelület felszíne (felszíni mértéke) rendre

$$V(B(x_0,R))=\frac{\omega_n R^n}{n} \quad \text{és} \quad A(S(x_0,R))=\omega_n R^{n-1},$$

ahol ω_n jelöli a $B(0,1)$ gömb felületének felszínét.

8.61. Tétel (Középérték-tulajdonság)**.** *Tegyük fel, hogy $u\in C^2(\Omega)$ harmonikus függvény az $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ tartományon. Ekkor tetszőleges $\overline{B(x_0,R)}\subset\Omega$ gömb esetén*

$$u(x_0)=\frac{1}{V(B(x_0,R))}\int_{B(x_0,R)} u(x)\,dx \tag{8.36}$$

és

$$u(x_0)=\frac{1}{A(S(x_0,R))}\int_{S(x_0,R)} u(x)\,d\sigma_x, \tag{8.37}$$

ahol $V(B(x_0,R))$ az n dimenziós R sugarú gömb térfogata, $A(B(x_0,R))$ pedig az $S(x_0,R)=\partial B(x_0,R)$ gömbfelület felszíne.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a gömbön és a gömbfelületen vett átlagintegrálok megegyeznek. Ehhez Green második formuláját fogjuk alkalmazni a harmonikus u és a

$$v(x)=|x-x_0|^2=(x_1-x_{0,1})^2+\ldots+(x_j-x_{0,j})^2+\ldots+(x_n-x_{0,n})^2$$

függvényre a $B(x_0,R)$ gömbön (ahol $x_{0,j}$ az x_0 vektor j-edik koordinátáját jelöli). Mivel minden j-re $\partial_j^2 v=2$, így $\Delta v=2n$ mindenütt $\mathbb{R}^n$-ben, ezenkívül nyilván $v(x)=R^2$ az $S(x_0,R)$ gömbfelületen. Továbbá a szóban forgó gömbfelület bármely x pontjában a ν külső normálvektor az x pontba mutató $x-x_0$ sugárvektorral azonos irányú, ezért az $S(x_0,R)$ gömbfelületen vett iránymenti derivált valójában az $|x-x_0|$ kifejezés szerinti deriválttal egyezik meg:

$$\partial_\nu v(x)|_{S(x_0,R)}=\partial_{|x-x_0|}v(x)|_{S(x_0,R)}=2|x-x_0|=2R.$$

Mindezek figyelembevételével az u és v függvényekre felírt második Green-formula az alábbi alakot ölti:

$$-2n\int_{B(x_0,R)} u=R^2\int_{S(x_0,R)}\partial_\nu u\,d\sigma-2R\int_{S(x_0,R)} u\,d\sigma. \tag{8.38}$$

Másrészt ugyancsak a második Green-formulából a harmonikus u és $v=1$ választással azt kapjuk, hogy

$$\int_{S(x_0,R)}\partial_\nu u\,d\sigma=0, \tag{8.39}$$

és így a (8.38) egyenlőségből végül

$$\frac{n}{\omega_n R^n}\int_{B(x_0,R)} u(x)\,dx = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{S(x_0,R)} u(x)\,d\sigma_x$$

adódik, amit igazolni akartunk.

Most megmutatjuk, hogy az x_0 körüli különböző sugarú gömbfelületeken vett integrálátlagok értéke állandó. Valóban, ehhez alkalmazzuk Green második formuláját a $B(x_0,R)\setminus\overline{B(x_0,\varrho)}$ tartományon a harmonikus u függvényre, valamint az E alapmegoldásnak (lásd a 8.15. Definíciót) az x_0 pontba való eltoltjára, vagyis az

$$x\mapsto E(x-x_0)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\log|x-x_0|\,, & \text{ha } n=2,\ x\in\mathbb{R}^n,\ x\neq x_0,\\[2mm] \dfrac{1}{(n-2)\omega_n\,|x-x_0|^{n-2}}, & \text{ha } n\geq 3,\ x\in\mathbb{R}^n,\ x\neq x_0\end{cases}$$

függvényre. A 8.16. Tételből tudjuk, hogy $\Delta E=0$ az $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ tartományon, ezért minden $x\neq x_0$ esetén $\Delta(x\mapsto E(x-x_0))=0$, továbbá az $S(x_0,R)$ peremen

$$\partial_\nu(x\mapsto E(x-x_0)) = -\partial_{|x-x_0|}E(x-x_0) = -\frac{1}{\omega_n|x-x_0|^{n-1}} = -\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}.$$

Az $S(x_0,\varrho)$ peremen a kifelé mutató normális az x_0 gömbközéppont felé mutat (lásd az ehhez nagyon hasonló 8.2. ábrát), ezért ott

$$\partial_\nu(x\mapsto E(x-x_0))|_{S(x_0,\varrho)} = \frac{1}{\omega_n\varrho^{n-1}}.$$

Most már felírhatjuk az előbb említett második Green-formulát:

$$\int_{S(x_0,R)}\left(-\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}u+\frac{1}{\omega_n(n-2)R^{n-2}}\partial_\nu u\right)d\sigma$$
$$=\int_{S(x_0,\varrho)}\left(-\frac{1}{\omega_n\varrho^{n-1}}u+\frac{1}{\omega_n(n-2)\varrho^{n-2}}\partial_\nu u\right)d\sigma.$$

Felhasználva a (8.39) összefüggést, amely nyilván az $S(x_0,\varrho)$ gömbfelszínen is érvényes, végül

$$\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{S(x_0,R)} u\,d\sigma = \frac{1}{\omega_n\varrho^{n-1}}\int_{S(x_0,\varrho)} u\,d\sigma \tag{8.40}$$

adódik, ami valóban azt jelenti, hogy az x_0 körüli koncentrikus gömbfelületeken vett integrálátlagok értéke állandó. Mivel az integrálátlag a függvény minimuma és maximuma közé esik, ezért

$$\min_{x\in S(x_0,\varrho)} u \leq \frac{1}{A(S(x_0,\varrho))}\int_{S(x_0,\varrho)} u(x)\,d\sigma_x \leq \max_{x\in S(x_0,\varrho)} u(x), \tag{8.41}$$

így u folytonossága miatt

$$\lim_{\varrho\to 0+} \frac{1}{\omega_n \varrho^{n-1}} \int_{S(x_0,\varrho)} u \, d\sigma = u(x_0), \tag{8.42}$$

tehát a (8.40) összefüggésből $\varrho \to 0+$ határátmenettel a bizonyítandó állítást nyerjük. □

8.62. *Megjegyzés.* A középérték-tuladonságot szokás Gauss-féle középértéktételként is emlegetni annak nyomán, hogy 1840-ben Carl Friedrich Gauss (1777–1855) a térfogati integrálátlagra vonatkozó összefüggést három dimenzióban igazolta.

Belátható, hogy a (8.36) és a (8.37) középérték-tulajdonság egymással ekvivalens (abban az értelemben, hogy az egyik pontosan akkor teljesül minden $\overline{B(x_0,R)}$ gömbön, amikor a másik), lásd a 8.26. Feladatot.

Megmutatható az is, hogy a középérték-tulajdonság valójában karakterizálja a harmonikus függvényeket. Pontosabban, ha az $u \in C(\Omega)$ függvény bármely $\overline{B(x_0,R)} \subset \Omega$ gömbön rendelkezik ugyanazzal a (térfogati vagy felszíni) középérték-tulajdonsággal, akkor u szükségképpen harmonikus az Ω-n (lásd a 8.28. Feladatot). Ennek az eredménynek a térfogati integrálátlagra vonatkozó részét 1906-ban Paul Koebe (1882–1945) német matematikus, a felszíni integrálátlagról szóló részét pedig 1909-ben Eugenio Elia Levi (1883–1917) olasz matematikus (Beppo Levi [1875–1961] öccse) igazolta.

A középérték-tulajdonság általánosítható szubharmonikus függvényekre, ekkor az integrálátlagok legalább akkorák, mint a középpontbeli függvényérték, lásd a 8.27. Feladatot.

A középérték-tulajdonságból könnyen levezethető az *erős maximumelv.*

8.63. Következmény (Erős maximumelv Laplace-operátorra)**.** *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ harmonikus függvény az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományban. Ekkor nemcsak az igaz, hogy*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \textit{(gyenge maximumelv)},$$

hanem ha $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ valamely $x_0 \in \Omega$ pontra, akkor u konstansfüggvény.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $x_0 \in \Omega$ pontra $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u = M$. Elég kis R-et választva $\overline{B(x_0,R)} \subset \Omega$, így a középérték-tulajdonság alapján

$$\begin{aligned} M = u(x_0) &= \frac{1}{V(B(x_0,R))} \int_{B(x_0,R)} u(x)\, dx \\ &\le \frac{1}{V(B(x_0,R))} \int_{B(x_0,R)} M \, dx = M. \end{aligned}$$

Ekkor az u függvény folytonosságának következtében $u(x) = M$ az egész $B(x_0, R)$ gömbön, ennélfogva a $H = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ nem üres halmaz nyílt. Ugyanakkor az u függvény folytonossága és Ω nyíltsága miatt az

$$\Omega \setminus H = \{x \in \Omega : u(x) > 0 \text{ vagy } u(x) < 0\}$$

halmaz is nyílt, ezáltal H és $\Omega \setminus H$ az Ω tartomány egy diszjunkt nyílt halmazokkal való fedését adja. Mivel azonban Ω összefüggő (itt lényeges, hogy Ω tartomány!), ezért ez csakis úgy lehetséges, ha a fedésben szereplő két halmaz valamelyike üres, tehát szükségképpen $H = \Omega$. □

8.64. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az erős maximumelvben valójában azt igazoltuk, hogy ha egy $u \in C(\Omega)$ függvényre minden $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ gömbön teljesül a (8.36) középérték-tulajdonság, akkor u csak a $\partial\Omega$ peremen veheti fel az $\overline{\Omega}$-beli maximumát, kivéve, ha u konstansfüggvény. Mivel a (8.36) és a (8.37) középérték-tulajdonságok ekvivalensek (lásd a 8.26. Feladatot), ezért a (8.37) középérték-tulajdonsággal bíró függvényekre is érvényes az erős maximumelv.

Az erős maximumelvnek a $(-u)$ függvényre való alkalmazásával könnyen láthatóan maximumok helyett minimumokkal teljesül a 8.63. Következmény, ez az *erős minimumelv*.

Fontos hangsúlyozni, hogy az erős maximum- és minimumelvben lényeges feltétel, hogy összefüggő Ω halmazról van szó, különben $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ esetén csak annyit állíthatunk, hogy u az Ω azon összefüggő komponensében konstansfüggvény, amelyben az x_0 pont található.

Végül megjegyezzük, hogy az erős maximumelv szubharmonikus függvényekre is érvényben marad, lásd a 8.29. Feladatot. Ha pedig u szuperharmonikus, akkor az erős minimumelv alkalmazható rá.

8.5.4. Kapcsolat a komplex differenciálhatósággal

A kétváltozós harmonikus függvények szoros kapcsolatban állnak a komplex értelemben differenciálható komplex függvényekkel (az ilyeneket szokás reguláris vagy holomorf függvényeknek hívni). Ismeretes, hogy egy

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

alakban megadott komplex függvény pontosan akkor differenciálható komplex értelemben, ha u és v valós értelemben differenciálható, és teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek:

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Továbbá az is igaz, hogy ha egy komplex függvény differenciálható egy nyílt körlapon, akkor ott analitikus, tehát végtelen sokszor differenciálható, és előáll hatványsor alakban. Ekkor az x és y szerinti kétszeres parciális deriváltakra

teljesül, hogy

$$\partial_x^2 u = \partial_x \partial_y v, \qquad \partial_y^2 u = -\partial_y \partial_x v,$$

és így a Young-tétel miatt

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az f valós része, $\operatorname{Re} f$, harmonikus függvény. Ez megfordítva is igaz, érvényes ugyanis a következő tétel (lásd például a [71] jegyzetet).

8.65. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. Az $u \in C^2(\Omega)$ függvény pontosan akkor harmonikus Ω-n, ha minden pontnak van olyan környezete és a környezetben olyan $f(z)$ reguláris függvény, hogy $u = \operatorname{Re} f$.*

8.66. *Megjegyzés.* A tétel valós rész helyett képzetes résszel is igaz. Amennyiben az Ω tartomány például konvex, akkor lokális állítás helyett globális állítás érvényes, tehát $u = \operatorname{Re} f$ az egész Ω-n. A konvexitás helyett jóval általánosabb feltétel is elegendő, nevezetesen az, hogy az Ω tartomány egyszeresen összefüggő, vagyis minden benne haladó folytonos zárt görbe egyetlen pontra húzható össze (minderről bővebben lásd a már említett [71] jegyzetet). Ezek a tételek lehetőséget nyújtanak arra, hogy egy kétváltozós függvény harmonikus mivoltát deriválás nélkül igazoljuk, ezzel kapcsolatban lásd a 8.1. Feladatot.

A 8.65. Tételnek számos következménye van kétváltozós harmonikus függvényekre nézve. Például, ahogy már utaltunk rá, harmonikus függvények végtelen sokszor differenciálhatók (lásd a későbbi 8.93.Következményt), és előállnak hatványsor alakban. Érvényes ezenkívül a Liouville-tétel általánosítása is, amely szerint ha egy harmonikus függvény az $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett és ott korlátos, akkor a függvény szükségképpen konstans (valójában az iménti eredmények mindegyike két dimenzió helyett tetszőleges véges dimenzióban is igaz, a Liouville-tétellel kapcsolatban lásd a 8.24. és a 8.32. Feladatot). A kétdimenziós esetben a körvonalra vonatkozó középérték-tulajdonság lényegében nem más, mint a reguláris függvények Cauchy-integrálformulájának egyszerű következménye. Valóban, a Cauchy-tétel szerint ha $\overline{B(z,R)} \subset \Omega$, akkor

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S(z,R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

ahol $S(z,R) = \partial B(z,R)$. A körvonalon a $\xi = Re^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$ paraméterezést választva:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{\mathrm{i}t})}{Re^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i} Re^{\mathrm{i}t}\, dt = \frac{1}{2R\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{\mathrm{i}t}) R\, dt.$$

Vegyünk valós részt és használjuk fel, hogy a körvonalon a „felszíni integrál” ívhossz szerinti vonalintegrált jelent, formálisan $Rdt = d\sigma$, így az $u = \operatorname{Re} f$

jelöléssel nyerjük az

$$u(x,y) = \frac{1}{2R\pi}\int_0^{2\pi} u(x+R\cos t, y+R\sin t)R\,dt = \frac{1}{\omega_2 R}\int_{S(z,R)} u\,d\sigma$$

összefüggést, ami éppen a körvonalra vonatkozó középérték-tulajdonság.

8.67. *Történeti megjegyzés.* A komplex függvénytanban Liouville tételének szokás hívni azt az eredményt, mely szerint ha f az egész komplex síkon holomorf (úgynevezett egészfüggvény) és korlátos, akkor konstans. A tételt valójában Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) már 1844-ben igazolta. Joseph Liouville (1809–1882) francia matematikus 1847-ben az előadásaiban azt látta be, hogy egy nem konstans, kétszeresen periodikus elliptikus függvény értelmezési tartománya nem lehet az egész komplex számsík.

8.6. Green-függvény

Ebben a szakaszban a Poisson-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat megoldásait állítjuk elő az alapmegoldás segítségével. Először egy hasznos segédeszközt, a harmadik Green-formulát igazoljuk (az első két Green-formulát illetően lásd a 8.1.2. alszakaszt).

8.6.1. Green harmadik formulája

A harmadik Green-formula egy megfelelően sima u függvénynek valamely x_0 pontbeli értékét adja meg az alapmegoldás, az u és egy tetszőleges, sima w függvény segítségével.

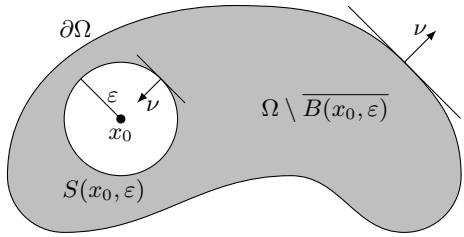
8.68. Tétel (Green harmadik formulája)**.** *Tegyük fel, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, és rögzítsünk egy tetszőleges $x_0 \in \Omega$ pontot. Legyen továbbá az $y \mapsto w(x_0,y) \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ olyan függvény (ahol x_0 paraméter), amelyre $\Delta(y \mapsto w(x_0,y)) \in L^1(\Omega)$, és értelmezzük az*

$$y \mapsto F(x_0,y) = E(x_0-y) - w(x_0,y) \quad (y \in \overline{\Omega})$$

függvényt (ahol x_0 ismét paraméter). Ekkor bármely olyan $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ esetén, amelyre $\Delta u \in L^1(\Omega)$, érvényes a következő összefüggés:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \big(F(x_0,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu F(x_0,y)\big)\,d\sigma_y - \\ - \int_\Omega \big(F(x_0,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0,y)\big)\,dy.$$

Bizonyítás. Mindenekelőtt célszerű tisztáznunk az F függvény néhány tulajdonságát. Mivel az $y \mapsto E(x_0-y)$ függvény valójában az E alapmegoldásnak



8.6. ábra. Az $\Omega \setminus \overline{B(x_0,\varepsilon)}$ „lyukas" tartomány

az x_0 pontba való eltoltja, ezért a 8.16. Tétel alapján integrálható $\mathbb{R}^n$-en, az x_0 pont kivételével pedig akárhányszor differenciálható és $y \neq x_0$ esetén

$$-\Delta(y \mapsto E(x_0 - y)) = 0.$$

Következésképpen $F \in L^1(\Omega)$, továbbá F az x_0 pont kivételével kétszer folytonosan differenciálható, és $y \in \Omega \setminus \{x_0\}$ esetén

$$-\Delta(y \mapsto F(x_0, y)) = \Delta(y \mapsto w(x_0, y)). \tag{8.43}$$

Legyen ezek után $\varepsilon > 0$ elegendően kicsiny szám, hogy $\overline{B(x_0,\varepsilon)} \subset \Omega$. Ekkor a simasági feltevésekből kövtkezően az u és $y \mapsto F(x_0, y)$ függvényekre az $\Omega \setminus \overline{B(x_0,\varepsilon)}$ „lyukas" tartományon (lásd a 8.6. ábrát) alkalmazható a második Green-formula, mégpedig a 8.7. Megjegyzésben megfogalmazott általánosabb feltételek mellett:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus\overline{B(x_0,\varepsilon)}} \big(F(x_0,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0,y)\big)\,dy \\
&= \int_{\partial\Omega} \big(F(x_0,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu F(x_0,y)\big)\,d\sigma_y + \\
&\quad + \int_{S(x_0,\varepsilon)} \big(F(x_0,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu F(x_0,y)\big)\,d\sigma_y.
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0+} &\int_{\Omega\setminus\overline{B(x_0,\varepsilon)}} \big(F(x_0,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0,y)\big)\,dy \\
&= \int_\Omega \big(F(x_0,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0,y)\big)\,dy,
\end{aligned} \tag{8.45}$$

valamint

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{S(x_0,\varepsilon)} \big(F(x_0,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu F(x_0,y)\big)\,d\sigma_y = -u(x_0), \tag{8.46}$$

ekkor $\varepsilon \to 0+$ határátmenet után a (8.44) összefüggésből a bizonyítandó állítást nyerjük. A (8.45) határátmenet jogosságához elegendő belátni, hogy az

$$y \mapsto F(x_0, y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0, y)$$

függvény integrálható Ω-n. Ez egyrészt következik abból, hogy valamely rögzített $\varepsilon > 0$ esetén a $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ zárt gömbön F integrálható és Δu folytonos, a $B(x_0, \varepsilon)$ gömbön kívül pedig F folytonos és Δu integrálható, így végeredményben $y \mapsto F(x_0, y)\Delta u(y)$ integrálható Ω-n. Másrészt, u folytonos $\overline{\Omega}$-on és a (8.43) összefüggés miatt $\Delta F(x_0, y)$ integrálható, tehát $y \mapsto u(y)\Delta F(x_0, y)$ is integrálható függvény Ω-n.

A (8.46) összefüggés igazolásához vegyük figyelembe, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{S(x_0,\varepsilon)} \big(F(x_0, y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu F(x_0, y)\big)\, d\sigma_y \\
&= \int_{S(x_0,\varepsilon)} E(x_0 - y)\partial_\nu u(y)\, d\sigma_y - \int_{S(x_0,\varepsilon)} w(x_0, y)\partial_\nu u(y)\, d\sigma_y - \qquad (8.47)\\
&\quad - \int_{S(x_0,\varepsilon)} u(y)\partial_\nu^y (E(x_0 - y))\, d\sigma_y + \int_{S(x_0,\varepsilon)} u(y)\partial_\nu^y w(x_0, y)\, d\sigma_y,
\end{aligned}$$

ahol $\partial_\nu^y (E(x_0 - y))$ az $y \mapsto E(x_0 - y)$ függvény normális irányú deriváltját jelöli. A (8.47) egyenlőség jobb oldalának első tagjára a $\partial_n u$ függvény korlátossága és E definíciója folytán $n \geq 3$ esetén

$$\left| \int_{S(x_0,\varepsilon)} E(x_0 - y)\partial_\nu u(y)\, d\sigma_y \right| \leq \int_{S(x_0,\varepsilon)} \frac{C_1}{\varepsilon^{n-2}}\, d\sigma_y = \frac{C_1}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \omega_n \varepsilon^{n-1} \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} 0,$$

az $n = 2$ esetben pedig

$$\left| \int_{S(x_0,\varepsilon)} E(x_0 - y)\partial_\nu u(y)\, d\sigma_y \right| \leq C_1 \varepsilon\, |\log \varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} 0.$$

Hasonlóan, a (8.47) összefüggés jobb oldalának második és negyedik tagjai 0-hoz tartanak $\varepsilon \to 0+$ esetén, hiszen az integrandusok korlátos integrálható függvények, az integrálási felület mértéke pedig 0-hoz tart. Végül vegyük szemügyre a (8.47) egyenlőség jobb oldalának harmadik tagját. A „lyukas" tartomány $S(0, \varepsilon)$ peremén a normális a gömb középpontja felé mutat (lásd a 8.6. ábrát), így

$$\partial_\nu^y (E(x_0 - y))|_{S(x_0,\varepsilon)} = -\partial_{|x_0 - y|}(y \mapsto E(x_0 - y))|_{S(x_0,\varepsilon)} = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}},$$

ezért

$$\int_{S(x_0,\varepsilon)} u(y)\partial_\nu^y (E(x_0 - y))\, d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(x_0,\varepsilon)} u(y)\, d\sigma_y,$$

ami az $S(x_0, \varepsilon)$ gömbfelületen vett integrálátlag. Ez azonban $\varepsilon \to 0+$ esetén az u függvény x_0-beli értékéhez tart, amint ezt a 8.61. Tétel bizonyításában is láttuk (lásd a (8.41) összefüggést). Ezzel a (8.46) határátmenetet igazoltuk, és a tétel bizonyítása kész. □

8.69. *Megjegyzés.* A 8.68. Tételben a w és u függvényekre vonatkozó kissé bonyolultnak tűnő simasági feltételek teljesüléséhez elegendő például, ha mindkét függvény $C^2(\overline{\Omega})$-beli.

A 8.68. Tétel jelentősége valójában egy speciális esetében rejlik. Nevezetesen, ha a w függvényt sikerül úgy megválasztani, hogy $\Delta F = 0$ az x_0 pont kivételével és $F = 0$ a $\partial\Omega$ peremen, akkor

$$u(x_0) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\partial_\nu F(x_0, y)\, d\sigma_y - \int_\Omega F(x_0, y)\Delta u(y)\, dy.$$

Ez azt jelenti, hogy az u függvény x_0-beli értékét előállítottuk az u peremen felvett értékeinek, valamint a Δu függvény Ω-n felvett értékeinek a segítségével. Következésképpen a Dirichlet-feladatra formálisan megoldóképletet nyertünk. Az F függvény alakjából nyilvánvaló, hogy az $F|_{\partial\Omega} = 0$ összefüggéshez $w(x_0, y) = E(x_0 - y)$ szükséges a peremen, továbbá a (8.43) azonosság alapján az is világos, hogy $\Delta F = 0$ feltétele $\Delta w = 0$. Az iménti két feltételt fogjuk alapul venni a Green-függvény értelmezéséhez.

8.6.2. A Green-függvény értelmezése és tulajdonságai

Tekintsük a következő klasszikus első peremérték-feladatot az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartományon:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{8.48}$$

ahol $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Ahogy a 8.69. Megjegyzésben említettük, a harmadik Green-formulában a w függvény speciális megválasztása figyelemre méltó jelentőséggel bír, annak segítségével megoldóképletet nyerhetünk a (8.48) probléma megoldására.

8.70. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány. Tegyük fel, hogy bármely rögzített $x \in \Omega$ pont esetén található olyan $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvény, amelyre

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \Omega\text{-ban}, \\ v(y) = E(x - y) & (y \in \partial\Omega), \end{cases} \tag{8.49}$$

ahol E a $-\Delta$ operátornak a 8.15. Definícióban értelmezett alapmegoldása. Vezessük be a $w(x, y) = v(y)$ $(x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$ jelölést. Ekkor a

$$\mathscr{G}(x, y) = E(x - y) - w(x, y) \quad (x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$$

függvényt a (8.48) problémához tartozó *Green-függvénynek* nevezzük.

8.71. *Megjegyzés.* Mivel az $y \mapsto E(x-y)$ függvény az $x \in \Omega$ pont kivételével folytonos, ezért a $\partial\Omega$ peremen is az, így a 8.28. Következmény alapján a (8.48) problémához tartozó Green-függvény egyértelmű (ha létezik).

A 8.70. Definícióból közvetlenül adódik a Green-függvény két alapvető tulajdonsága.

8.72. Állítás. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, és tegyük fel, hogy a* (8.48) *problémának létezik $\mathscr{G}$ Green-függvénye. Ekkor*

(i) $\Delta_y \mathscr{G}(x,y) = 0 \quad (x \in \Omega, y \in \Omega, y \neq x)$;

(ii) $\mathscr{G}(x,y) = 0 \quad (x \in \Omega, y \in \partial\Omega)$,

ahol $\Delta_y \mathscr{G}(x,y) := \Delta(y \mapsto \mathscr{G}(x,y))$.

8.73. *Megjegyzés.* A korábban látott (8.8) összefüggés alapján az (i) tulajdonság helyett valójában az is igaz, hogy megfelelő értelemben (lásd a disztribúciókról szóló fejezetben található 11.115. Példát)

$$-\Delta_y \mathscr{G}(x,y) = \delta_x(y),$$

ahol δ_x az x pontra koncentrált „Dirac-delta függvény” (amelyet a (8.9) összefüggésekkel heurisztikusan értelmeztünk).

A következő tétel választ ad arra a kérdésre, hogy milyen módon fejezhető ki a (8.48) peremérték-feladat megoldása a Green-függvény segítségével.

8.74. Tétel (Green reprezentációs tétele)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, továbbá tegyük fel, hogy a* (8.48) *problémának létezik $\mathscr{G}$ Green-függvénye. Ha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása a* (8.48) *peremérték-feladatnak $f \in C(\overline{\Omega})$ mellett, akkor*

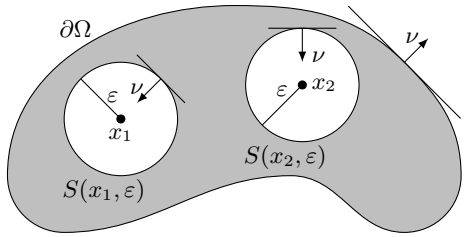
$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\,d\sigma_y + \int_\Omega \mathscr{G}(x,y) f(y)\,dy.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a harmadik Green-formulát $F = \mathscr{G}$ választással, és vegyük figyelembe a Green-függvénynek a 8.72. Állításban megfogalmazott két alaptulajdonságát. □

8.75. *Megjegyzés.* A reprezentációs tételben szereplő

$$-\int_{\partial\Omega} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\,d\sigma_y$$

integrált szokás *kettős réteg potenciáljának* nevezni, amely fizikailag megadja a $\partial\Omega$ felületen eloszló φ dipólus (azaz pozitív és negatív töltések együttese, ezt hívjuk *kettős rétegnek*) által keltett tér potenciálját.



8.7. ábra. Az $\Omega \setminus (\overline{B(x_1,\varepsilon)} \cup \overline{B(x_2,\varepsilon)})$ „kétlyukú" tartomány

A Green-függvény egy fontos tulajdonsága a szimmetriája.

8.76. Tétel (Green-függvény szimmetriatétele)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, továbbá tegyük fel, hogy a* (8.48) *problémának létezik $\mathscr{G}$ Green-függvénye. Ekkor*

$$\mathscr{G}(x,y) = \mathscr{G}(y,x) \quad (x \in \Omega, y \in \Omega, x \neq y).$$

Bizonyítás. Legyenek $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \neq x_2$ rögzített pontok, és válasszunk $\varepsilon > 0$ számot úgy, hogy a $\overline{B(x_1,\varepsilon)} \subset \Omega$ $\overline{B(x_2,\varepsilon)} \subset \Omega$ gömbök diszjunktak legyenek. Írjuk fel ekkor Green második formuláját (a 8.7. Megjegyzésben foglalt simasági feltevések mellett) az $y \mapsto \mathscr{G}(x_1,y)$ és $y \mapsto \mathscr{G}(x_2,y)$ függvényekre az $\Omega \setminus (\overline{B(x_1,\varepsilon)} \cup \overline{B(x_2,\varepsilon)})$ „kétlyukú" tartományra (lásd a 8.7. ábrát):

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega \setminus (\overline{B(x_1,\varepsilon)} \cup \overline{B(x_2,\varepsilon)})} \big(\mathscr{G}(x_2,y)\Delta_y \mathscr{G}(x_1,y) - \mathscr{G}(x_1,y)\Delta_y \mathscr{G}(x_2,y)\big)\, dy \\ &= \int_{\partial\Omega \cup S(x_1,\varepsilon) \cup S(x_2,\varepsilon)} \big(\mathscr{G}(x_2,y)\partial_\nu^y \mathscr{G}(x_1,y) - \mathscr{G}(x_1,y)\partial_\nu^y \mathscr{G}(x_2,y)\big)\, d\sigma_y.\end{aligned} \tag{8.50}$$

(Az, hogy a szóban forgó két függvényre valóban teljesülnek a megfelelő simasági feltételek, a harmadik Green-formula bizonyításában az F függvényre látott módon ellenőrizhető.) A Green-függvény 8.72. Állításban foglalt (i) tulajdonsága folytán a (8.50) egyenlőség bal oldala 0-val egyenlő, másrészt a (ii) tulajdonság alapján a jobb oldalon

$$\int_{\partial\Omega} \big(\mathscr{G}(x_2,y)\partial_\nu^y \mathscr{G}(x_1,y) - \mathscr{G}(x_1,y)\partial_\nu^y \mathscr{G}(x_2,y)\big)\, d\sigma_y = 0,$$

így

$$\int_{S(x_1,\varepsilon) \cup S(x_2\varepsilon)} \big(\mathscr{G}(x_2,y)\partial_\nu^y \mathscr{G}(x_1,y) - \mathscr{G}(x_1,y)\partial_\nu^y \mathscr{G}(x_2,y)\big)\, d\sigma_y = 0.$$

Innen a harmadik Green-formula bizonyításában igazolt a (8.46) összefüggésből $F = \mathscr{G}$ szereposztással $\varepsilon \to 0+$ esetén kapjuk, hogy

$$\mathscr{G}(x_2, x_1) - \mathscr{G}(x_1, x_2) = 0,$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani. □

A Green-függvényt értelmezhetjük a klasszikus harmadik peremérték-feladat esetében is, röviden kimondjuk a megfelelő definíciót, és bizonyítás nélkül közöljük Green reprezentációs tételének módosított alakját.

Tekintsük a következő klasszikus harmadik peremérték-feladatot az $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartományon:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} + hu|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{8.51}$$

ahol $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, $h \in C(\partial\Omega)$, $h \geq 0$.

8.77. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Tegyük fel, hogy bármely rögzített $x \in \Omega$ pont esetén található olyan $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvény, amelyre

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu v(y) + h(y)v(y) = \partial_\nu^y(E(x-y)) + h(y)E(x-y) \quad (y \in \partial\Omega), \end{cases}$$

ahol E a $(-\Delta)$ operátornak a 8.15. Definícióban értelmezett alapmegoldása. Vezessük be a $w(x, y) = v(y)$ $(x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$ jelölést. Ekkor a

$$\mathscr{G}(x, y) = E(x - y) - w(x, y) \quad (x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$$

függvényt a (8.51) problémához tartozó *Green-függvénynek* nevezzük.

8.78. *Megjegyzés.* A 8.26. Tétel alapján a Green-függvény egyértelmű, kivéve a $h = 0$, azaz a második peremérték-feladat esetét, ekkor csak konstans erejéig van meghatározva.

Green reprezentációs tétele harmadik peremfeltétel esetében a következőképpen fogalmazható meg (a bizonyítást a 8.38. Feladatban tűztük ki).

8.79. Tétel (Green reprezentációs tétele)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány, továbbá tegyük fel, hogy a* (8.51) *problémának létezik $\mathscr{G}$ Green-függvénye. Ha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása a* (8.51) *peremérték-feladatnak $f \in C(\overline{\Omega})$ mellett, akkor*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \mathscr{G}(x, y)\varphi(y)\, d\sigma_y + \int_\Omega \mathscr{G}(x, y) f(y)\, dy.$$

8.80. *Megjegyzés.* A (8.51) probléma Green-függvényére a 8.72. Állítás is érvényben marad azzal a módosítással, hogy a (ii) tulajdonságban

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) + h(y)\mathscr{G}(x,y) = 0 \quad (x \in \Omega, y \in \partial\Omega)$$

áll fenn.

A reprezentációs tételben szereplő

$$\int_{\partial\Omega} \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\, d\sigma_y$$

integrált szokás *egyszerű réteg potenciáljának* nevezni, amely fizikailag megadja a $\partial\Omega$ felületen eloszló φ töltéssűrűség (vagy tömegsűrűség) – ezt hívjuk *egyszerű rétegnek* – által keltett tér potenciálját.

8.81. *Történeti megjegyzés.* A Green-függvény értelmezésének alapgondolata George Green (1793–1841) brit fizikus elektromosságtani és mágnesség tani vizsgálódásai során jelent meg. Green életéről bővebben lásd a 8.8. Megjegyzést. Érdekességként megemlítjük, hogy a Green-függvény elnevezés először Carl Neumann (1832–1925) egy 1861-ben írt cikkében bukkant fel.

8.6.3. Poisson-formula gömbön

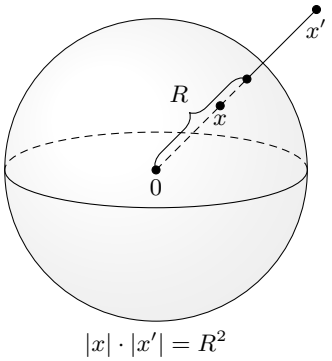
A Green-függvény fogalmával kapcsolatban természetesen vetődik fel a kérdés, hogy vajon milyen tartományok esetén létezik Green-függvény? Ez általában nem triviális probléma, ezért csak egy meglehetősen speciális, azonban jól kezelhető esetet fogunk részletesen tárgyalni. A továbbiakban tekintsük a $B(0,R)$ tartományon a Poisson-egyenletre vonatkozó első peremértékfeladatot:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad B(0,R)\text{-ben}, \\ u|_{S(0,R)} = \varphi. \end{cases} \tag{8.52}$$

Célunk, hogy meghatározzuk a problémához tartozó Green-függvényt, és ennek segítségével a Green reprezentációs tételen keresztül formulát adjunk a peremérték-feladat megoldására. A Green-függvény meghatározásához a *tükrözés módszerét* fogjuk alkalmazni. Ezt az alábbiakban az origó középpontú R sugarú $B(0,R)$ gömb példáján vizsgáljuk meg részletesen, és aztán a 8.6.4. alszakaszban néhány további példát mutatunk a módszer alkalmazására. Mindenekelőtt ismerkedjünk meg az $S(0,R) = \partial B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ gömbfelületre vonatkozó *inverzióval*.

8.82. Definíció. Az $S(0,R)$ gömbfelületre vonatkozó *inverzión* (tükrözésen) az alábbi $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ leképezést értjük:

$$x \mapsto x' = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$



8.8. ábra. Gömbre vonatkozó inverzió

Szemléletesen az x pont képe a $\overrightarrow{0x}$ félegyenesen azon egyértelmű x' pont, amelyre $|x| \cdot |x'| = R^2$ (lásd a 8.8. ábrát).

8.83. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az x' pont inverzió általi képe az eredeti x, tehát az inverzió leképezés inverze önmaga.

8.84. *Történeti megjegyzés.* Az inverzió transzformációját a síkon elsőként Jakob Steiner (1796–1863) svájci matematikus értelmezte egy 1824-ben írt, de nem publikált kéziratában. Steinert az elemi geometria egyik legnagyobb alakjának szokás tekinteni a matematika történetében. Nézete szerint: „A számolás helyettesíti a gondolkodást, míg a geometria ösztönzi azt." Érdekességként megemlítjük, hogy csak 14 éves korában tanult meg írni és olvasni, és csak 18 éves korától járhatott iskolába. Az inverzió elnevezést Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796–1874) belga csillagász és matematikus használta először 1825-ben a Brüsszeli Királyi Akadémián tartott előadásában. Az 1820–1840 időszakban egymástól függetlenül többen is bevezették és vizsgálták az inverziót (erről bővebben a [140] cikkben olvashatunk), például 1845-1846-ban William Thomson (későbbi nevén Lord Kelvin) (1824–1907) három levelet írt Joseph Liouville (1809–1882) francia matematikusnak bizonyos elektromosságtani problémák megoldásáról, amelyek kapcsán Thomson is értelmezte az (általa „gömbfelületre vonatkozó reciprok pontoknak" nevezett) inverziót, és ekkor született meg a később róla elnevezett Kelvin-transzformáció (lásd a 8.35. Feladatot).

Legyen most $x \in B(0,R)$ rögzített, ekkor a (8.52) problémához tartozó Green-függvény meghatározásakor olyan $v(y)$ függvényt keresünk, amelyre

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \quad B(0,R)\text{-ben}, \\ v(y) = E(x-y) \quad (y \in S(0,R)). \end{cases}$$

Első látásra a $v(y) = E(x-y)$ függvény „majdnem" megfelelő, hiszen a peremfeltétel nyilván teljesül, és mivel E alapmegoldás, ezért az x pont kivételével $\Delta_y(E(x-y)) = 0$. Az egyetlen pont, amely „galibát" okoz, maga az x. Az inverzió segítségével azonban ezt a szingularitást a gömbön kívülre transzformálhatjuk, és tekinthetjük a $v(y) = E(\gamma(x'-y))$ függvényt, ahol γ az x-től függő alkalmas konstans. Erre a v függvényre már $\Delta v = 0$ teljesül az egész $B(0,R)$ gömbön, és a γ konstans értékét úgy kell megválasztani, hogy $v(y) = E(x-y)$ teljesüljön az $S(0,R)$ gömbfelületen. Mivel $E(x-y)$ csak az $x-y$ argumentum abszolút értékétől függ, ezért célszerű megvizsgálni, hogy milyen kapcsolat áll fenn $|x-y|$ és $|x'-y|$ között $y \in S(0,R)$ esetén. Ehhez tekintsük a 8.9. ábrát. A $0xy$ és $0x'y$ háromszögek hasonlóak, ugyanis az origóban lévő szögük közös, és az origóban lévő megfelelő oldalak aránya az inverzió definíciója alapján megegyezik:

$$|x| : R = R : |x'|.$$

Ekkor az origóval szemközti oldalak aránya is ugyanez, így

$$|x-y| : |x'-y| = |x| : R,$$

azaz

$$|x-y| = \frac{|x|}{R}|x'-y| \quad (y \in S(0,R)). \tag{8.53}$$

Mindezt megkaphattuk volna egyszerű számolással is (felhasználva az (1.1) kifejtési azonosságot és az $|y|^2 = R^2$ egyenlőséget):

$$|x'-y|^2 = \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^2 = \frac{R^4|x|^2 - 2R^2|x|^2\langle x,y\rangle + |x|^4|y|^2}{|x|^4} = \frac{R^2}{|x|^2}|x-y|^2.$$

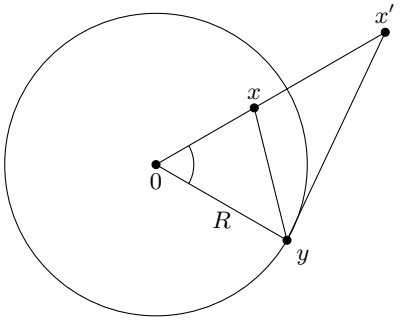
Következésképpen a

$$v(y) = E\left(\frac{|x|}{R}(x'-y)\right) \tag{8.54}$$

függvényre teljesül, hogy $v \in C^2(B(0,R)) \cap C^1(\overline{B(0,1)})$, $\Delta v = 0$ a $B(0,R)$ gömbön és $v(y) = E(x-y)$ az $S(0,R)$ gömbfelületen. Az előbbi megállapítás az $x = 0$ speciális esetben nem igaz, mert az inverzió nem értelmezett, azonban ekkor a $v(y) = E_R$ konstansfüggvény megfelel a kívánalmaknak, ahol

$$E_R := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log R, & \text{ha } n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3, \end{cases} \tag{8.55}$$

vagyis E_R az E alapmegoldásnak az $S(0,R)$ gömbfelületen felvett állandó értéke. Valóban, $\Delta v = 0$ nyilvánvaló, ezenkívül $y \in S(0,R)$ esetén $|y| = R$,



$|x| : R = R : |x'| = |x - y| : |x' - y|$

8.9. ábra. Az inverzió egy tulajdonsága

így csakugyan $v(y) = E(0 - y) = E(y)$. Voltaképpen arról van szó, hogy a v függvény (8.54) alakjában a (8.53) tulajdonság figyelembevételével elvégeztük az $x \to 0$ határátmenetet. Összefoglalva tehát a következő állítást nyertük.

8.85. Állítás. *A* (8.52) *problémához tartozó Green-függvény:*

$$\mathscr{G}(x, y) = E(x - y) - E\left(\frac{|x|}{R}(x' - y)\right) \quad (x \neq 0, y \in \overline{B(0, R)}),$$

illetve

$$\mathscr{G}(0, y) = E(y) - E_R \quad (y \in \overline{B(0, R)}),$$

ahol E a Laplace-egyenlet alapmegoldása és E_R az E-nek az $S(0, R)$ gömbfelületen felvett állandó értéke (azaz a (8.55) *konstans).*

8.86. *Megjegyzés.* A $B(0, R)$ gömb esetében a Green-függvény konkrét alakjára ránézve a szimmetriatétel könnyen ellenőrizhető, az egyszerűen következik a (8.53) összefüggésből, valamint abból, hogy $E(x - y)$ értéke csak az $x - y$ kifejezés abszolút értékétől függ.

Alkalmazzuk most a kapott Green-függvényt a (8.52) probléma megoldásának előállítására a 8.74. Tétel alapján. Ha valamely adott $\varphi \in C(S(0, R))$ esetén az $u \in C^2(B(0, R)) \cap C^1(\overline{B(0, R)})$ függvény megoldás, akkor

$$u(x) = -\int_{S(0,R)} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x, y)\varphi(y)\, d\sigma_y \quad (x \in B(0, R)). \tag{8.56}$$

Szükségünk van a Green-függvény normális irányú deriváltjára.

8.87. Állítás. *Ha $\mathscr{G}$ a* (8.52) *problémához tartozó Green-függvény, akkor*

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x, y) = -\frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \quad (x \in B(0, R), y \in S(0, R)).$$

Bizonyítás. Az $S(0,R)$ gömbfelület y pontjában a külső normálvektor az y sugárvektorral megegyező irányú és egység hosszúságú, ezért $\nu = y/R$, így az iránymenti derivált definíciója alapján

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{R} \partial_{y_j} \mathscr{G}(x,y).$$

Mivel

$$\partial_{y_j} E(x-y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^n},$$

és a (8.53) összefüggés felhasználásával $x \neq 0$ esetén

$$\partial_{y_j} E\left(\frac{|x|}{R}(x'-y)\right) = \frac{1}{\omega_n} \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^n} = -\frac{1}{\omega_n} \frac{y_j \frac{|x|^2}{R^2} - x_j}{|x-y|^n},$$

ezért

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = -\frac{1}{\omega_n R} \frac{1}{|x-y|^n} \sum_{j=1}^n y_j \left(y_j - x_j - |x|^2 \frac{y_j}{R^2} + x_j\right),$$

ahonnan $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = |y|^2 = R^2$ alapján adódik

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = -\frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}.$$

Az $x = 0$ esetben pedig

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = \partial_{|y|} E(y) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{R}{|y|^n},$$

tehát ekkor is érvényes az állítás. □

A 8.87. Állításbeli összefüggést a (8.56) képletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{S(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma_y \quad (x \in B(0,R)). \tag{8.57}$$

A (8.57) előállítást szokás a $B(0,R)$ gömbre vonatkozó *Poisson-formulának* nevezni, a

$$K(x,y) := \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \frac{1}{|x-y|^n}$$

függvényt pedig gömbre vonatkozó *Poisson-magnak* hívni. Rögtön felvetődik a kérdés, hogy a Poisson-formulával értelmezett u függvény vajon tetszőleges $\varphi \in C(S(0,R))$ esetén kielégíti-e a (8.52) peremérték-feladatot? Erre ad választ a következő tétel.

8.88. Tétel (Poisson-formula a $B(0,R)$ gömbön)**.** *Legyen $\varphi \in C(S(0,R))$ tetszőleges. Ekkor a* (8.57) *Poisson-formulával értelmezett u függvényre teljesül, hogy $u \in C^2(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$ (sőt valójában $u \in C^\infty(B(0,R))$), továbbá*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad B(0,R)\text{-ben,} \\ u|_{S(0,R)} = \varphi. \end{cases}$$

Bizonyítás. A Poisson-formulára alkalmazhatjuk a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tételt tetszőleges olyan zárt gömbön, amely $B(0,R)$-ben van, hiszen $y \in S(0,R)$ miatt az integrandusnak a paraméter szerinti tetszőleges rendű deriváltja folytonos bármely ilyen zárt gömbön (a felszíni integrál a definíció szerint valójában Lebesgue-integrállá írható át, így alkalmazható a 2.19. Tétel). Ebből következően $u \in C^\infty(B(0,R))$. A paraméteres integrál deriválása az integráljel mögött végezhető el, ezért

$$\Delta u(x) = -\int_{S(0,R)} \Delta_x \big(\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\big)\, d\sigma_y. \tag{8.58}$$

A $\mathscr{G}$ függvény parciális deriváltjai folytonosak $x \neq y$ esetén, így a deriválások sorrendje felcserélhető, tehát

$$\Delta_x \big(\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\big) = \big(\partial_\nu^y \Delta_x \mathscr{G}(x,y)\big)\,\varphi(y),$$

ahol a Green-függvény 8.72. Állításban foglalt (i) tulajdonsága és a Green-függvény szimmetriatétele miatt

$$\Delta_x \mathscr{G}(x,y) = \Delta_x \mathscr{G}(y,x) = 0.$$

Végeredményben tehát a (8.58) jobb oldalán szereplő integrandus 0-val egyenlő, tehát $\Delta u = 0$.

A bizonyítás további részében megmutatjuk, hogy tetszőleges $x_0 \in S(0,R)$ pontot rögzítve a (8.57) formulával értelmezett függvényre

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B(0,R)}} u(x) = \varphi(x_0), \tag{8.59}$$

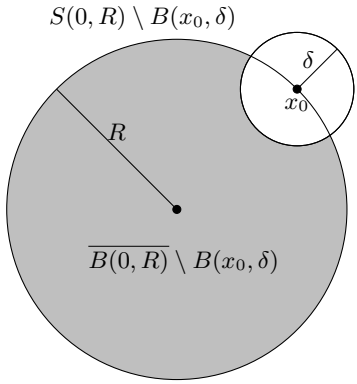
amiből $\varphi \in C(\overline{B(0,R)})$ folytán $u \in C(\overline{B(0,R)})$ és $u|_{S(0,R)} = \varphi$ adódik. Mivel a $v = 1$ függvényre $\Delta v = 0$ és $v|_{S(0,R)} = 1$, ezért Green reprezentációs tételéből következően

$$1 = -\int_{S(0,R)} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\, d\sigma_y \quad (x \in B(0,R)). \tag{8.60}$$

Következésképpen

$$u(x) - \varphi(x_0) = \int_{S(0,R)} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)(\varphi(x_0) - \varphi(y))\, d\sigma_y. \tag{8.61}$$

A (8.61) egyenlőség jobb oldalán szereplő integrált két részre bontjuk: egyrészt $y \in S(0,R) \setminus B(x_0,\delta)$ esetén $\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)$ lesz kicsi, másrészt a maradék $S(0,R) \cap B(x_0,\delta)$ halmazon $|\varphi(y) - \varphi(x_0)|$ kicsi (a gömbfelület felbontását a 8.10. ábra szemlélteti két dimenzióban).



8.10. ábra. Peremfelbontás

Legyen tehát $\varepsilon > 0$ adott, ekkor a φ függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$|y - x_0| < \delta,\ y \in S(0,R) \quad \text{esetén} \quad |\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon. \tag{8.62}$$

Ezenkívül a $\partial_\nu^y \mathscr{G}$ függvénynek a 8.87. Állításban szereplő alakjából láthatóan $y \in S(0,R) \setminus B(x_0,\delta)$ és $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ esetén

$$|\partial_\nu \mathscr{G}(x,y)| \le \frac{2^n}{\omega_n R \delta^n} \left(R^2 - |x|^2\right).$$

Ebből következően létezik $\mu > 0$ szám úgy, hogy

$$\begin{gathered} |x - x_0| < \mu,\ x \in \overline{B(0,R)},\ y \in S(0,R) \setminus B(x_0,\delta) \\ \text{esetén}\ \ |\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)| \le \varepsilon. \end{gathered} \tag{8.63}$$

Ekkor a (8.61) összefüggésből, a (8.63) és (8.62) becslések, továbbá $\partial_\nu^y \mathscr{G}$ negativitásának (amely a konkrét alakból nyilvánvaló), valamint a φ folytonos függvény $S(0,R)$ korlátos zárt halmazon való korlátosságának (legyen például $|\varphi| \le K$) felhasználásával a következő becslést nyerhetjük $|x - x_0| < \mu$ esetén:

$$|u(x) - \varphi(x_0)| \le -\varepsilon \int_{S(0,R) \cap B(x_0,\varepsilon)} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\, d\sigma_y +$$

$$+ 2K \int_{S(0,R)\setminus B(x_0,\delta)} \varepsilon \, d\sigma_y.$$

Ebből a (8.60) azonosság és az $S(0,R)$ gömbfelület $\omega_n R^{n-1}$ felszínének figyelembevételével végül azt kapjuk, hogy $|x - x_0| < \mu$ esetén

$$|u(x) - u(x_0)| \le \varepsilon \left(2K\omega_n R^{n-1} + 1\right).$$

Ez éppen a kívánt (8.59) konvergenciát eredményezi. □

8.89. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a Poisson-formulát az $u = 1$ függvényre alkalmazva

$$1 = \int_{S(x_0,R)} K(x,y) \, d\sigma_y$$

adódik minden $x \in B(x_0,R)$ esetén.

A 8.88. Tételt másképpen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a (8.57) Poisson-formula az $S(0,R)$ gömbfelületen folytonos φ függvénynek a $\overline{B(0,R)}$ gömbön folytonos és a gömb belsejében harmonikus kiterjesztését adja meg (a kiterjesztés egyértelműségét a 8.59. Tétel biztosítja). A formulát nem nehéz a $B(0,R)$ gömb helyett tetszőleges $B(x_0,R)$ gömbre felírni. Legyen ugyanis $\varphi \in C(S(x_0,R))$, akkor az $\tilde{x} \mapsto \varphi(\tilde{x} + x_0)$ függvény folytonos az $S(0,R)$ gömbfelületen, így a $B(0,R)$ gömbre vonatkozó $\tilde{u}$ harmonikus kiterjesztése:

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \frac{R^2 - |\tilde{x}|^2}{R\omega_n} \int_{S(0,R)} \frac{\varphi(\tilde{y} + x_0)}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^n} \, d\sigma_{\tilde{y}} \quad (\tilde{x} \in B(0,R)).$$

Ha most $x = \tilde{x} + x_0$, $y = \tilde{y} + x_0$, akkor egyrészt $\tilde{x} = x - x_0$ és $\tilde{x} - \tilde{y} = x - y$, másrészt $\tilde{y} \in S(0,R)$ esetén $y \in S(x_0,R)$, továbbá az eltolás miatt $d\sigma_{\tilde{y}} = d\sigma_y$, ezért az $u(x) = \tilde{u}(x - x_0)$ jelöléssel kapjuk, hogy az

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{S(x_0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x - y|^n} \, d\sigma_y \quad (x \in B(x_0,R)), \tag{8.64}$$

függvény a φ függvénynek a $B(x_0,R)$ gömbre vonatkozó harmonikus kiterjesztését szolgáltatja. Érdemes ezt külön tételként is kimondanunk.

8.90. Tétel (Poisson-formula a $B(x_0,R)$ gömbön)**.** *Legyen $\varphi \in C(S(x_0,R))$ tetszőleges. Ekkor a* (8.64) *Poisson-formulával értelmezett u függvényre teljesül, hogy $u \in C^2(B(x_0,R)) \cap C(\overline{B(x_0,R)})$ (sőt valójában $u \in C^\infty(B(x_0,R))$), továbbá*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & B(x_0,R)\text{-ben,} \\ u|_{S(x_0,R)} = \varphi. \end{cases}$$

8.91. *Megjegyzés.* A Poisson-formulából $x = x_0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{S(x_0,R)} \varphi(y)\, d\sigma_y,$$

ami éppen a (8.52) probléma u harmonikus megoldására vonatkozó középértéktétel a gömbfelületen.

Érdemes két dimenzióban a $B(0,R)$ körlapra vonatkozó Poisson-formulát polárkoordináták segítségével is felírni. Ha

$$x = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta) \quad \text{és} \quad y = (R\cos t, R\sin t),$$

akkor

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= (\varrho\cos\vartheta - R\cos t)^2 + (\varrho\sin\vartheta - R\sin t)^2 \\ &= R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho(\cos\vartheta\cos t + \sin\vartheta\sin t) \\ &= R^2 - 2R\varrho\cos(t-\vartheta) + \varrho^2, \end{aligned}$$

továbbá a körvonalon vett „felszíni integrál" nem más, mint ívhossz szerinti vonalintegrál, így $d\sigma = R\,dt$. Ezért a Poisson-formula az alábbi alakot ölti:

$$u(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(R\cos t, R\sin t)\frac{R^2-\varrho^2}{\varrho^2 - 2R\varrho\cos(t-\vartheta)+R^2}\,dt.$$

Megjegyezzük, hogy ezt a képletet megkaphattuk volna a reguláris függvényekre vonatkozó Cauchy-integrálformulából (vagyis tulajdonképpen a harmonikus függvényekre vonatkozó középérték-tulajdonságból), ha a kört önmagára képezzük úgy, hogy az x pont a kör középpontjába menjen át.

8.92. *Történeti megjegyzés.* A Poisson-formulát 1833-ban égi mechanikai vizsgálódásai során írta fel Siméon Denis Poisson (1781–1840), méghozzá a gömbfelületen elhelyezett tömegeloszlás által a gömb belsejében meghatározott potenciálfüggvényként.

A gömbre vonatkozó Poisson-formulának számos fontos következménye van harmonikus függvényekre nézve. Ezek közül kettőt említünk meg most. Az egyik a Harnack-egyenlőtlenség (ezzel kapcsolatban lásd a 8.30. és a 8.31. Feladatot), amelyet Carl Gustav Axel von Harnack (1851–1888) német matematikus igazolt 1887-ben. A másik pedig az akárhányszor való differenciálhatóság.

8.93. Következmény. *Ha $u \in C^2(\Omega)$ harmonikus valamely nyílt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, akkor ott akárhányszor differenciálható.*

Bizonyítás. Legyen $\overline{B(x_0,R)} \subset \Omega$ tetszőleges. Ekkor a $\varphi := u|_{S(x_0,R)}$ választással felírt (8.64) Poisson-formula magát az u függvényt állítja elő a

gömbön, hiszen a 8.59. Tétel alapján a harmonikus kiterjesztés egyértelmű. Mivel a 8.90. Tétel szerint a formulával értelmezett függvény akárhányszor differenciálható, ezért u ilyen tulajdonságú a gömbön, és így az egész Ω halmazon. □

8.94. *Megjegyzés.* Megemlítjük, hogy a harmonikus függvények simaságára vonatkozó tétel messzemenően általánosítható. Hermann Weyl (1885–1955) egy 1940-es cikkében a következő lemmát fogalmazta meg (amelyet azóta Weyl-lemmának hívnak): ha az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt hamazon az $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvényre minden $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = 0, \tag{8.65}$$

akkor u akárhányszor differenciálható és harmonikus Ω-n. (A disztribúciók nyelvén a (8.65) összefüggés valójában azt jelenti, hogy $\Delta u = 0$ disztribúció értelemben, lásd a 11. fejezetet.)

8.6.4. További példák Green-függvényekre

Tekintsük továbbra is a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladatot:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

Az $\Omega = B(0,R)$ esetben alkalmazott tükrözés módszere lehetőséget nyújt számos más tartomány Green-függvényének meghatározására. Az alábbiakban a féltér, a negyedtér és a félgömb példáján keresztül mutatjuk be a módszer hatékonyságát.

Féltér Green-függvénye

Tekintsük az

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

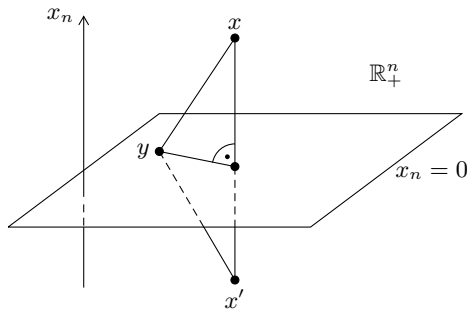
félteret és ezen a következő peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \mathbb{R}^n_+\text{-ban}, \\ u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = \varphi. \end{cases}$$

Állítsuk elő a féltér Green-függvényét, és ennek segítségével írjuk fel a féltérre vonatkozó Poisson-formulát!

A féltér esetében a gömbfelületre való tükrözés szerepét a

$$\partial\mathbb{R}^n_+ = \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\big\}$$



8.11. ábra. Tükrözés hipersíkra

hipersíkra való tükrözés veszi át (lásd a 8.11. ábrát):

$$x \mapsto x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).$$

Ekkor $y \in \mathbb{R}^n_+$ esetén nyilván $|x - y| = |x' - y|$, így a $v(y) = E(x' - y)$ függvény kielégíti a Green-függvény 8.70. Definíciójában megfogalmazott segédfeladatot: minden rögzített $x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $\Delta_y E(x' - y) = 0$ az $\mathbb{R}^n_+$ féltéren és $\mathscr{G}(x, y) = 0$ a $\partial\mathbb{R}^n_+$ hipersíkon. Következésképpen a féltér Green-függvénye (első peremfeltétel mellett):

$$\mathscr{G}(x, y) = E(x - y) - E(x' - y).$$

A féltér peremén bármely y pontban $\nu = (0, \dots, 0, -1)$, ezért $\partial_\nu = -\partial_{y_n}$, így

$$\partial_\nu \mathscr{G}(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{y_n - x_n}{|x - y|^n} - \frac{y_n - x'_n}{|x' - y|^n} \right) = -\frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{|x - y|^n}. \tag{8.66}$$

Feltételezve, hogy a 8.74. Tétel állítása az u függvényre érvényes a nem korlátos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ féltéren, azt kapjuk, hogy

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\varphi(y)}{|x - y|^n} \, d\sigma_y. \tag{8.67}$$

A (8.67) előállítást szokás féltérre vonatkozó *Poisson-formulának* nevezni, a

$$K(x, y) := \frac{2x_n}{\omega_n} \frac{1}{|x - y|^n}$$

függvényt pedig az $\mathbb{R}^n_+$ féltérre vonatkozó *Poisson-magnak* hívni. A gömbre vonatkozó Poisson-formula esetéhez hasonlóan igazolható a következő eredmény.

8.95. Tétel (Poisson-formula az $\mathbb{R}^n_+$ féltéren)**.** *Ha* $\varphi \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, *akkor a* (8.67) *Poisson-formulával értelmezett u függvényre teljesül, hogy*

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$$

(sőt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$*), továbbá*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \mathbb{R}^n_+\text{-ban,} \\ u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = \varphi. \end{cases}$$

8.96. *Megjegyzés.* A tétel bizonyítását a 8.42. Feladatban tűztük ki. Egy kulcsfontosságú összefüggés az (lásd a 8.41. Feladatot), hogy a féltér $K(x, y)$ Poisson-magfüggvényére

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} K(x, y)\, d\sigma_y = 1,$$

amit a gömbre vonatkozó Poisson-mag esetében a 8.89. Megjegyzésben láttunk. Érdemes megemlíteni, hogy a féltérre vonatkozó (8.67) formulát formális határátmenettel a gömbre vonatkozó (8.64) formulából is megkaphatjuk, ha a $\partial\mathbb{R}^n_+$ félteret az $x_0 = (0, \dots, 0, R)$ középpontú R sugarú gömbök határhelyzetének képzeljük, a féltér határát pedig az $S(0, R)$ gömbfelületek határhelyzetének („végtelen sugarú gömbfelület a végtelen távoli középpont körül"). Ekkor ugyanis

$$|x - x_0|^2 = |x|^2 - 2Rx_n + R^2,$$

így

$$\frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} = \frac{2x_n}{\omega_n} - \frac{|x|^2}{R\omega_n} \xrightarrow{R\to\infty} \frac{2x_n}{\omega_n}.$$

Negyedtér Green-függvénye

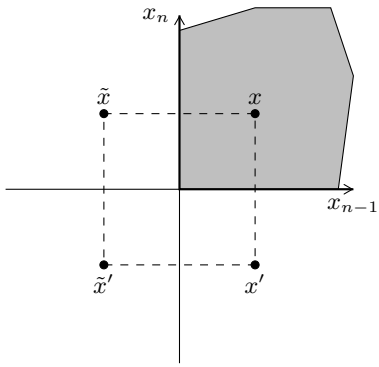
A féltér esetéhez hasonlóan, hipersíkokra való tükrözés segítségével adható meg az

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} > 0, x_n > 0\}$$

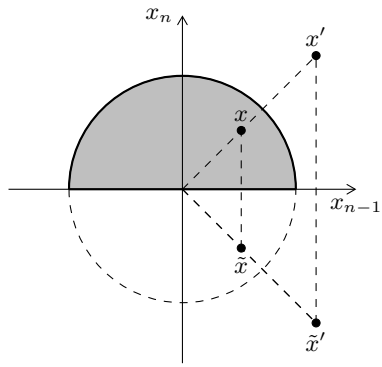
negyedtér Green-függvénye. Legyen $x \in \Omega$ tetszőleges, és jelölje x' az x pontnak az $x_n = 0$ hipersíkra, $\tilde{x}$ pedig az $x_{n-1} = 0$ hipersíkra való tükörképét, továbbá $\tilde{x}'$ az $\tilde{x}$ pontnak az x_n hipersíkra való tükörképét (lásd a 8.12. ábrát). Ekkor könnyen láthatóan a

$$\mathscr{G}(x, y) = E(x - y) - E(x' - y) - E(\tilde{x} - y) + E(\tilde{x}' - y) \tag{8.68}$$

függvény teljesíti a Green-függvénnyel szemben támasztott elvárásokat (lásd a 8.43. Feladatot).



8.12. ábra. Tükrözés negyedtéren



8.13. ábra. Tükrözés félgömbön

Félgömb Green-függvénye

Az $\Omega = B(0,R) \cap \mathbb{R}^n_+$ félgömbtartomány Green-függvényének meghatározásához az $S(0,R)$ gömbfelületre vonatkozó inverziót és a $\partial\mathbb{R}^n_+$ hipersíkra való tükrözést egyszerre kell alkalmaznunk. Legyen $x \in \Omega$ esetén x' az x pontnak az $S(0,R)$ gömbfelületre vonatkozó inverzió által adott képe, továbbá az x és x' pontoknak a $\partial\mathbb{R}^n_+$ hipersíkra való tükörképe $\tilde{x}$, illetve $\tilde{x}'$ (lásd a 8.13. ábrát). Ekkor könnyen láthatóan a

$$\mathscr{G}(x,y) = E(x-y) - E(\tilde{x}-y) - E\left(\frac{|x|}{R}(x'-y)\right) + E\left(\frac{|\tilde{x}|}{R}(\tilde{x}'-y)\right) \quad (8.69)$$

függvény teljesíti a Green-függvénytől elvárt tulajdonságokat (lásd a 8.43. Feladatot).

8.7. Feladatok

8.1. Igazoljuk közvetlen deriválással, hogy az alábbi kétváltozós függvények mindegyike kielégíti a Laplace-egyenletet az értelmezési tartományán. Írjuk fel a függvényeket alkalmas $f(x+\mathrm{i}y)$ komplex függvény valós vagy képzetes részének segítségével is!

a) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$,

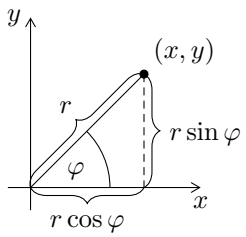
b) $u(x,y) = \log(x^2+y^2) \quad ((x,y) \neq (0,0))$,

c) $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0)$,

d) $u(x,y) = e^x(\cos y + \sin y)$.

8.2. Írjuk fel a Δ operátor polárkoordinátás alakját két dimenzióban! Legyen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ahol $r > 0$ és $0 \le \varphi < 2\pi$ (lásd a 8.14. ábrát). Mutassuk meg ekkor, hogy $u(x, y) = U(r, \varphi)$ esetén

$$\Delta u = \frac{1}{r}\left(\partial_r(r\partial_r U) + \frac{1}{r}\partial_\varphi^2 U\right).$$



8.14. ábra. Polárkoordináták

8.3. A 8.2. Feladatban szereplő összefüggés segítségével igazoljuk közvetlen deriválással, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ szám esetén a polárkoordinátás alakban adott

$$U_1(r, \varphi) = r^t \cos t\varphi \quad \text{és} \quad U_2(r, \varphi) = r^t \sin t\varphi$$

függvények kielégítik a Laplace-egyenletet az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tartományon. Írjuk fel a függvényeket alkalmas $f(x + \mathrm{i}y)$ komplex függvény valós és képzetes részeinek segítségével is!

8.4. A Laplace-egyenlet kétváltozós n-edfokú polinomfüggvény alakú megoldásait szokás kétváltozós *harmonikus polinomoknak* nevezni.

a) Keressük meg az n-edfokú homogén kétváltozós harmonikus polinomokat, vagyis azon harmonikus polinomokat, amelyekben minden tag foka n.

b) Igazoljuk, hogy minden n-re a legfeljebb n-edfokú kétváltozós harmonikus polinomok vektortere $(2n + 1)$ dimenziós. Adjuk meg a tér egy bázisát!

8.5. Legyen $p(x, y) = \mathrm{Re}(x + \mathrm{i}y)^n$ és $q(x, y) = \mathrm{Im}(x + \mathrm{i}y)^n$, ahol $n \ge 0$ egész szám. Igazoljuk, hogy $\Delta(p^2 - q^2) = 0$ és $\Delta(pq) = 0$.

8.6. Adjuk meg az összes olyan egész együtthatós kétváltozós p polinomot, amelyre $\Delta p = 1$ a síkon.

8.7. Legyen $\Omega = \{x^2 - x + y^2 < 2\} \subset \mathbb{R}^2$, és keressük meg a következő peremérték-feladat $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldását!

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 6x + 8y \quad ((x,y) \in \Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = x^3. \end{cases}$$

8.8. Legyen $B(0,1)$ a háromdimenziós egységgömb, és keressük meg a következő peremérték-feladat $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ megoldását!

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = x + z \quad ((x,y,z) \in B(0,1)), \\ u|_{\partial B(0,1)} = y. \end{cases}$$

8.9. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, és tekintsük az alábbi peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha \quad \Omega\text{-n}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 1. \end{cases}$$

Milyen α esetén van a feladatnak $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása, és melyek azok, ha

a) $\Omega = B(0,1)$ az origó középpontú, egység sugarú nyílt körlap;

b) $\Omega = B(0,2) \setminus \overline{B(0,1)}$ egy körgyűrű;

c) $\Omega = (0,1)^2$ az egységnégyzet.

8.10. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg az $Lu = -u''$ operátor klasszikus sajátértékeit és sajátfüggvényeit, ha az operátor $D(L)$ értelmezési tartománya a következő:

a) $D(L) = \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u(0) = 0,\ u'(a) = 0\}$;

b) $D(L) = \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u'(0) = u(0),\ u'(a) = u(a)\}$;

c) $D(L) = \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u(0) = u(a),\ u'(0) = u'(a)\}$.

Mely esetben alkalmazható az operátorra a 8.40. Tétel?

8.11. Legyen $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$, és tegyük fel, hogy (f_k) $(k = 1, 2, \dots)$ teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_1)$-ben, (g_ℓ) $(\ell = 1, 2, \dots)$ teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_2)$-ben. Tekintsük az $f_k \times g_\ell \colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, $(f_k \times g_\ell)(x,y) := f_k(x) g_\ell(y)$ függvényeket $(k, \ell = 1, 2, \dots)$. Igazoljuk, hogy $(f_k \times g_\ell)$ teljes ortonormált rendszer $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$-ben.

8.12. Legyen $T = (0,a) \times (0,b) \subset \mathbb{R}^2$, és $\Gamma_1 := \{a\} \times [0,b)$, $\Gamma_2 := (0,a] \times \{b\}$, $\Gamma_3 := \{0\} \times (0,b]$, $\Gamma_4 := [0,a) \times \{0\}$, továbbá legyenek $g, h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre (lásd a 8.15. ábrát)

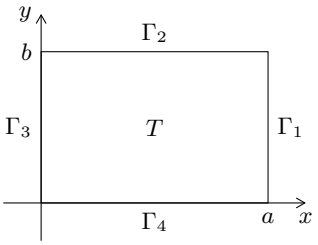
$$g|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 1, \quad g|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0,$$

valamint

$$h|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0, \quad h|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 1.$$

Keressük meg a változók szétválasztásának módszerével az $Lu = -\Delta u$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit, ha

$$D(L) = \left\{ u \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T}) : (gu + h\partial_\nu u)|_{\partial T} = 0 \right\}.$$



8.15. ábra. Vegyes peremfeltétel

8.13. Legyen $T = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$, és keressük meg az alábbi peremérték-feladat $u \in C^2(T) \cap C(\overline{T})$ megoldását!

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \sin x \sin 2y - \sin 3x \sin y & ((x,y) \in T), \\ u|_{\partial T} = 0. \end{cases}$$

8.14. Legyen $T = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$, és keressük meg az alábbi peremérték-feladat $u \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$ megoldásait!

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \cos x \cos y + 2 \cos 2x \cos 3y & ((x,y) \in T), \\ \partial_\nu u|_{\partial T} = 0. \end{cases}$$

8.15. Legyen $T = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$, és tekintsük a 8.12. Feladatban szereplő Γ_j $(j = 1,2,3,4)$ halmazokat, valamint g, h függvényeket. Keressük meg ekkor az alábbi peremérték-feladat $u \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$ megoldását!

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \sin x \cos 3y - 5 \sin 3x \cos 4y & ((x,y) \in T), \\ (gu + h\partial_\nu u)|_{\partial T} = 0. \end{cases}$$

8.16. Bizonyítsuk be, hogy ha u harmonikus függvény, akkor $|\operatorname{grad} u|$ szubharmonikus (azon a halmazon, ahol kétszer differenciálható).

8.17. Tegyük fel, hogy $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható konvex függvény. Mutassuk meg, hogy ha $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonikus függvény, akkor $\Phi(u)$ szubharmonikus.

8.18. Deriválással igazoljuk, hogy ha az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon u és u^2 is harmonikus függvény, akkor u szükségképpen konstansfüggvény. (Ezzel kapcsolatban lásd még a 8.19. és a 8.23. Feladatot.)

8.19. Igazoljuk az erős maximumelv (vagy minimumelv) segítségével, hogy ha u és u^2 harmonikus függvények az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, akkor u szükségképpen konstansfüggvény. (Ezzel kapcsolatban lásd még a 8.18. és a 8.23. Feladatot.)

8.20. Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ függvényre $\Delta u = -4$ az $\mathbb{R}^2$ síkon. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\max_{B(0,1)} u \le \max_{\partial B(0,1)} u + 1.$$

8.21. Igazoljuk, hogy a 8.55. Tétel a $-\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) + qu$ operátor helyett a következő általánosabb L operátorokra is igaz:

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j u + qu,$$

ahol $a_{jk}, b_j, q \in C(\overline{\Omega})$ $(j,k = 1,\dots,n)$ és $q \ge 0$, továbbá az a_{jk} együtthatókra teljesül az egyenletes ellipticitás 7.5. Definícióban megfogalmazott feltétele.

8.22. Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ függvényre $\Delta u = 8$ az $\mathbb{R}^2$ síkon és $u(0,0) = 1$. Számítsuk ki az $\int_{B(0,2)} u$ integrál értékét!

8.23. A középérték-tulajdonság segítségével igazoljuk, hogy ha u és u^2 harmonikus függvények az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, akkor u szükségképpen konstansfüggvény. (Ezzel kapcsolatban lásd még a 8.18, 8.19. Feladatokat.)

8.24. A középérték-tulajdonság segítségével bizonyítsuk be, hogy ha u harmonikus és korlátos $\mathbb{R}^n$-en, akkor konstans. (Ezt szokás *Liouville tételének* is hívni. Lásd még a 8.32. Feladatot is.)

8.25. Adjunk meg az $\Omega = \{(x,y) : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt felső félsíkban korlátos, nem konstans harmonikus függvényt!

8.26. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $u \in C(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy a (8.36) összefüggés pontosan akkor teljesül minden $\overline{B(x_0, R)}$ gömbre, amikor a (8.37) összefüggés.

8.27. Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\Omega)$ szubharmonikus függvény az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, azaz $-\Delta u \leq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor tetszőleges $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ gömb esetén

$$u(x_0) \leq \frac{1}{V(B(x_0, R))} \int_{B(x_0,R)} u(x)\, dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{A(S(x_0, R))} \int_{\partial B(x_0,R)} u(x)\, d\sigma_x,$$

ahol $V(B(x_0, R)) = \omega_n R^n/n$ és $A(S(x_0, R)) = \omega_n R^{n-1}$ az n dimenziós R sugarú gömb térfogata, illetve a gömbfelület felszíne.

8.28. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon az $u \in C(\Omega)$ függvényre a (8.36) és a (8.37) összefüggések valamelyike minden $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ gömbön teljesül, akkor u harmonikus Ω-n.

8.29. Bizonyítsuk be, hogy ha $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ szubharmonikus függvény, akkor teljesül rá az erős maximumelv.

8.30. Tegyük fel, hogy u harmonikus a $B(x_0, R)$ gömbön, folytonos a $\overline{B(x_0, R)}$ zárt gömbön és $u \geq 0$. Igazoljuk a Poisson-formula alapján, hogy ekkor tetszőleges $x \in B(x_0, R)$ esetén

$$R^{n-2} \frac{R - |x - x_0|}{(R + |x - x_0|)^{n-1}} u(x_0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x - x_0|}{(R - |x - x_0|)^{n-1}} u(x_0).$$

(Ezt szokás gömbre vonatkozó *Harnack-egyenlőtlenségnek* hívni, amelyet Carl Gustav Axel von Harnack (1851–1888) német matematikus igazolt 1887-ben.)

8.31. Tegyük fel, hogy az u függvény harmonikus az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, és legyen $K \subset \Omega$ összefüggő kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik (a K halmaztól függő) $C > 0$ konstans, hogy tetszőleges, nemnegatív értékű, Ω-ban harmonikus u függvényre minden $x, y \in K$ esetén érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$u(x) \leq C u(y).$$

(Ezt az egyenlőtlenséget is szokás *Harnack-egyenlőtlenségnek* hívni, lásd még a 8.30. Feladatot.)

8.32. A 8.30. Feladatban szereplő Harnack-egyenlőtlenség segítségével mutassuk meg, hogy ha u harmonikus és korlátos $\mathbb{R}^n$-en, akkor konstans. (Ezt szokás *Liouville tételének* hívni. Lásd még a 8.24. Feladatot is.)

8.33. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, és tegyük fel, hogy az $u_j \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ $(j = 1, 2, \dots)$ függvények harmonikusak Ω-ban, és $g_j := u_j|_{\partial\Omega}$. Mutassuk meg, hogy amennyiben a (g_j) függvénysorozat egyenletesen konvergál $\partial\Omega$-n egy g függvényhez, akkor az (u_j) függvénysorozat egyenletesen konvergál $\overline{\Omega}$-on egy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonikus függvényhez, amelyre $u|_{\partial\Omega} = g$. (Ezt szokás *Harnack első konvergenciatételének* hívni, amelyet Carl Gustav Axel von Harnack (1851–1888) német matematikus igazolt 1887-ben.)

8.34. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, és tegyük fel, hogy $u_j \in C^2(\Omega)$ $(j = 1, 2, \dots)$ harmonikus függvények Ω-ban, amelyekre $u_1 \le u_2 \le u_3 \le \dots$. Mutassuk meg, hogy ekkor az alábbi két eset valamelyike teljesül:

(i) $u_j(x) \to \infty$ minden $x \in \Omega$ esetén;

(ii) létezik az Ω-n harmonikus u függvény úgy, hogy tetszőleges $K \subset \Omega$ kompakt halmazon az (u_j) függvénysorozat egyenletesen konvergál u-hoz.

(Ez *Harnack második konvergenciatétele* vagy más néven *Harnack-elv*, amelyet Carl Gustav Axel von Harnack (1851–1888) német matematikus igazolt 1887-ben.)

8.35. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tartomány, amelyet az $S(0, R) = \partial B(0, R)$ gömbfelületre vonatkozó inverzió az Ω' tartományba visz. Ha $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, akkor értelmezzük a $v\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$v(x') = \frac{R^{n-2}}{|x'|^{n-2}} u\left(\frac{R^2}{|x'|^2} x'\right) \quad (x' \in \Omega).$$

a) Mutassuk meg, hogy $u \in C^2(\Omega$ esetén

$$\Delta v(x') = \frac{R^{n+2}}{|x'|^{n+2}} \Delta u\Big(\frac{R^2}{|x'|^2} x'\Big), \tag{8.70}$$

következésképpen ha u harmonikus Ω-ban, akkor v harmonikus Ω'-ben.

b) Igazoljuk az előző (8.70) összefüggéstől függetlenül, Green harmadik formulájának segítségével, hogy ha u harmonikus Ω-ban, akkor v harmonikus Ω'-ben.

Az u függvényhez a fenti v függvényt hozzárendelő leképezést *Kelvin-transzformációnak* nevezzük, amelyet William Thomson (későbbi nevén Lord Kelvin) (1824–1907) vezetett be 1845-1846-ban Joseph Liouville (1809–1882) francia matematikusnak írt három levelében.

8.36. Mutassuk meg, hogy ha u harmonikus a $B(x_0, R) \setminus \{x_0\}$ kipontozott gömbön, továbbá

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{E(x - x_0)} = 0,$$

ahol E a $(-\Delta)$ operátor 8.15. Definícióban értelmezett alapmegoldása, akkor u harmonikusan kiterjeszthető a $B(x_0, R)$ gömbre. (Ezt szokás harmonikus függvényekre vonatkozó *megszüntethető szingularitás tételének* is hívni.)

8.37. Legyen $n \geq 2$ és $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Bizonyítsuk be, hogy ha az $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvény korlátos megoldása a $-\Delta u = f$ egyenletnek $\mathbb{R}^n$-ben, akkor alkalmas C konstanssal

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x - y) f(y)\, dy + C,$$

ahol E a Laplace-egyenlet alapmegoldása.

8.38. Bizonyítsuk be a 8.79. Tételt, vagyis a Green-féle reprezentáció alakját harmadik peremfeltétel mellett.

8.39. Bizonyítsuk be, hogy a Poisson-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat Green-függvényére teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$0 < \mathscr{G}(x, y) < \begin{cases} E(x - y) + C, & \text{ha } n = 2, \\ E(x - y), & \text{ha } n \geq 3, \end{cases}$$

ahol $x \in \Omega, y \in \Omega, x \neq y$ és C az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartománytól függő konstans, továbbá E a Laplace-egyenlet alapmegoldása.

8.40. A Poisson-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat Green-függvénye az Ω_1 tartományon legyen $\mathscr{G}_1$, az $\Omega_2 \subset \Omega_1$ tartományon pedig $\mathscr{G}_2$. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathscr{G}_2 \leq \mathscr{G}_1$ az Ω_2-n.

8.41. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ esetén

$$\int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{2x_n}{\omega_n |x - y|^n}\, d\sigma_y = 1,$$

ahol ω_n az n dimenziós egységgömb felületének felszíne.

8.42. Bizonyítsuk be a féltérre vonatkozó Poisson-formuláról szóló 8.95. Tételt!

8.43. Ellenőrizzük, hogy a (8.68) és (8.69) formulák teljesítik a Green-függvényre vonatkozó feltételeket!

9. fejezet

A hővezetési egyenlet

A matematika az emberi elme azon képessége, amelynek célja, hogy kárpótoljon az élet rövidségéért és érzékszerveink tökéletlenségéért.

Joseph Fourier (1768–1830)

A fejezet tartalma. Először röviden felidézzük a hővezetési egyenlethez kapcsolódó fogalmakat. Ezt követően hasonlósági meggondolások alapján levezetjük a hővezetési egyenlet alapmegoldását, és megvizsgáljuk néhány tulajdonságát. Az alapmegoldás segítségével formulát adunk a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok megoldására, majd a megoldás egyértelműségének kérdéséről ejtünk szót. Ezután a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatokat tárgyaljuk, amelyek kapcsán részletesen foglalkozunk a maximum- és minimumelvekkel és a Fourier-módszert is bemutatjuk.

9.1. Fizikai motiváció

A fizikai példákkal foglalkozó 6. fejezet 6.2. szakaszában megismerkedtünk az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományban elhelyezkedő inhomogén közegben végbemenő *hővezetés* folyamatával. Ha a tartomány pontjainak térben és időben változó hőmérsékletét az $u\colon \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ függvény adja meg, $k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a közeg hővezetési tényezője, $c\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a közeg fajhője, $\varrho\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a közeg sűrűségfüggvénye, akkor a folyamatot a következő parciális differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$c(x)\varrho(x)\partial_t u(x,t) - \operatorname{div}\big(k(x)\operatorname{grad} u(x,t)\big) = F(x,t) \quad \Omega \times \mathbb{R}^+\text{-ban},$$

ahol a Δ operátor csak az első n változóban (a térváltozókban) hat, és $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a forrástag, amely a tartományban lévő hőforrások és nyelők eloszlását és intenzitását adja meg ($F > 0$ esetén az adott pont hőforrásként, $F < 0$ esetén hőnyelőként viselkedik). Forrásra gondolhatunk például úgy, mint egy szobában elhelyezett fűtőtestre, vagy valamilyen kémiai reakció során felszabaduló vagy elnyelődő hőre.

A hőmérséklet egyértelmű meghatározásához szükségünk van a kezdeti hőmérséklet-eloszlás ismeretére, vagyis az $u(x,0)$ értékekre, ha $x \in \Omega$. Továbbá az Ω tartomány peremén is meg kell adnunk a hőmérséklet időbeni változását valamilyen peremfeltétel formájában. A kezdeti és peremfeltételekkel kapjuk a *hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatokat*. Előfordulhat, hogy $\Omega = \mathbb{R}^n$, ekkor peremfeltételre nincs szükség, így *Cauchy-feladatokról* vagy *kezdetiérték-feladatokról* beszélünk.

A fejezetben fő célunk a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy- és vegyes feladatok vizsgálata. Az egyszerűség kedvéért gyakran feltesszük, hogy a c, ϱ, k függvények mind állandók, ekkor a következő egyenletet nyerjük:

$$\partial_t u(x,t) - a\Delta u(x,t) = f(x,t), \tag{9.1}$$

ahol $a = k/c\varrho$ a *hőmérséklet-vezetési tényező* és $f = F/c\varrho$. Emellett gyakran azzal az egyszerűsítő feltételezéssel élünk, hogy $a = 1$. Ez az általánosságot nem csorbítja, hiszen ha az u függvény eleget tesz a (9.1) egyenletnek, akkor az $\tilde{u}(x,t) = u(\sqrt{a}x,t)$ függvényt bevezetve

$$\partial_t \tilde{u}(x,t) = \partial_t u(\sqrt{a}x,t) \quad \text{és} \quad \partial^2_{x_j} \tilde{u}(x,t) = a\partial^2_{x_j} u(\sqrt{a}x,t),$$

így

$$\partial_t \tilde{u}(x,t) - \Delta\tilde{u}(x,t) = \partial_t u(\sqrt{a}x,t) - a\Delta u(\sqrt{a}x,t) = f(\sqrt{a}x,t),$$

tehát az $\tilde{f}(x,t) = f(\sqrt{a}x,t)$ jelöléssel az $\tilde{u}$ függvény kielégíti a

$$\partial_t \tilde{u}(x,t) - \Delta\tilde{u}(x,t) = \tilde{f}(x,t)$$

egyenletet, amelyben a hőmérséklet-vezetési tényező értéke már 1.

9.2. Speciális megoldások

A stacionárius hővezetés esetét leíró Laplace-egyenlet kapcsán láttuk, hogy lényeges szerepe van az egyenlet bizonyos speciális alakú, úgynevezett radiális megoldásainak. Ezekből nyertük az alapmegoldást, amely a peremértékfeladatok megoldásainak előállításában fontos segédeszközként került elő. A hővezetési egyenlet esetében hasonló elv mentén járunk el, speciális alakú megoldásokból állítjuk elő a Cauchy-feladatok megoldásait.

9.2.1. Hasonlósági megoldások

A Laplace-egyenlet esetében az egybevágóságra való invariancia jelentette a kiindulási pontot, ez a

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

hővezetési egyenlet esetében továbbra is érvényes a térváltozóban. Ezenkívül a hővezetési egyenlet a koordinátatengelyek megfelelő *átskálázására* nézve szintén invariáns, pontosabban, hogy ha $u(x,t)$ megoldása a homogén jobb oldalú hővezetési egyenletnek, akkor az $\tilde{u}(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ függvény ugyancsak megoldás, hiszen

$$\partial_t \tilde{u}(x,t) - \Delta \tilde{u}(x,t) = \lambda^2 \big(\partial_t u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)\big) = 0.$$

Ha egy megoldás invariáns az előbbi átskálázásra nézve, akkor

$$u(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t),$$

ahonnan $\lambda = 1/\sqrt{t}$ választással kapjuk, hogy

$$u(x,t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Amennyiben a megoldás ezenfelül a térváltozóban radiális, akkor egy ilyen speciális megoldás

$$u(x,t) = v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$$

alakban írható, ahol $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Megkereshetnénk az iménti alakú megoldásokat, ehelyett azonban figyelembe veszünk még egy fizikai feltételt. Vegyük észre, hogy az $y = |x|/\sqrt{t}$ helyettesítéssel

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) dx = t^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} v(|y|)\, dy,$$

amit úgy is írhatunk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(|y|)\, dy.$$

Ez azt jelenti, hogy az u megoldást

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$$

alakúnak választva az

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, dx$$

„összhőmennyiség” időben állandó. Célszerű ezért a $\partial_t u - \Delta u = 0$ egyenlet

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$$

alakú megoldásait megkeresni, vagy legalábbis egy nemtriviális ilyen megoldást. A rövidség kedvéért vezessük be a $z = |x|/\sqrt{t}$ jelölést, ekkor

$$\partial_t u(x,t) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} v(z) + t^{-\frac{n}{2}} v'(z) \frac{|x|}{-2t^{\frac{3}{2}}} = -\frac{t^{-\frac{n}{2}-1}}{2}\big(nv(z) + zv'(z)\big).$$

Másrészt

$$\partial_{x_j} u(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} v'(z) \frac{x_j}{|x|\sqrt{t}},$$

ezért

$$\partial_{x_j}^2 u(x,t) = t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \left(v''(z) \frac{x_j^2}{|x|^2\sqrt{t}} + v'(z) \frac{|x| - \frac{x_j^2}{|x|}}{|x|^2} \right),$$

így

$$\begin{aligned} \Delta u(x,t) &= t^{-\frac{n}{2}-1} \left(v''(z) + \sqrt{t} v'(z) \frac{\sum_{j=1}^n \big(|x|^2 - x_j^2\big)}{|x|^3} \right) \\ &= t^{-\frac{n}{2}-1} \left(v''(z) + \frac{n-1}{z} v'(z) \right). \end{aligned}$$

Ekkor

$$0 = \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = -t^{-\frac{n}{2}-1} \left(v''(z) + \left(\frac{z}{2} + \frac{n-1}{z} \right) v'(z) + \frac{n}{2} v(z) \right)$$

adódik, ahonnan rendezés után végül a következő egyenletet kapjuk:

$$2zv''(z) + \big(z^2 + 2(n-1)\big)v'(z) + nzv(z) = 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} &2zv''(z) + \big(z^2 + 2(n-1)\big)v'(z) + nzv(z) \\ &= z\big(2v''(z) + zv'(z) + v(z)\big) + (n-1)\big(2v'(z) + zv(z)\big) \\ &= z\big(2v' + zv(z)\big)' + (n-1)\big(2v' + zv(z)\big), \end{aligned}$$

ezért a $w(z) = 2v'(z) + zv(z)$ függvény bevezetésével a

$$zw'(z) + (n-1)w = 0$$

elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenletet nyerjük. Ezt természetesen meg tudjuk oldani, azonban mi csupán egy fizikailag észszerű megoldást

szeretnénk meghatározni, ezért például elvárjuk, hogy v és v' folytonosan kiterjedjen a $z = 0$ pontba is, következésképpen a w-re vonatkozó egyenlet $z = 0$ esetén ugyancsak érvényes legyen. Ekkor $n > 1$ esetén $w(0) = 0$ szükséges, és az egyenletnek egyetlen ilyen megoldása a $w = 0$ konstansfüggvény, ami az $n = 1$ esetben is megoldás. A v függvényre visszatérve ez azt jelenti, hogy

$$2v'(z) + zv(z) = 0,$$

és így

$$v(z) = Ce^{-\frac{z^2}{4}}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a $\partial_t u - \Delta u = 0$ egyenletnek megoldása az

$$u(x,t) = C\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

függvény. Amennyiben a

$$\partial_t u - a\Delta u = 0$$

egyenletet tekintjük, akkor (ahogy a fejezet bevezetőjében utaltunk rá) ezt az $\tilde{u}(x,t) = u(\sqrt{a}x, t)$ helyettesítéssel vezethetjük vissza az $a = 1$ esetre, így ennek egy megoldása

$$u(x,t) = C\frac{1}{(at)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4at}}.$$

Válasszuk meg a C konstans értékét úgy, hogy az „összhőmennyiség” időben állandó, mégpedig egységnyi legyen, azaz

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx.$$

Ekkor

$$1 = C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(at)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4at}}\,dx = C\int_{\mathbb{R}^n} 2^n e^{-|y|^2}\,dy = C\cdot 2^n(\sqrt{\pi}\,)^n, \qquad (9.2)$$

tehát $C = 1/(2\sqrt{\pi}\,)^n$. Érdemes most összefoglalnunk az így nyert függvény tulajdonságait.

9.1. Következmény. *Legyen $a > 0$ tetszőleges. Ekkor az*

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4at}} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

függvény kielégíti a

$$\partial_t u - a\Delta u = 0$$

homogén hővezetési egyenletet, továbbá

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = 1 \quad (t > 0).$$

9.2.2. Alapmegoldás

Az előbbiekben levezetett speciális megoldás – pontosabban egy megfelelő kiterjesztettje – fontos szerepet tölt be a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok megoldásainak előállításában.

9.2. Definíció. Legyen $a > 0$ konstans. Ekkor az $E\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi a t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\dfrac{|x|^2}{4at}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^n, t \le 0 \end{cases}$$

függvényt a

$$\partial_t u(x,t) - a\Delta u(x,t) = 0$$

hővezetési egyenlet *alapmegoldásának* nevezzük.

Az alábbi állításban összefoglaljuk az alapmegoldás főbb tulajdonságait (amelyek közül néhányat már valójában igazoltunk is).

9.3. Állítás. *Legyen $E\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ a hővezetési egyenlet alapmegoldása. Ekkor*

a) $\lim\limits_{t\to 0+} E(x,t) = 0$, *ha* $x \neq 0$, *és* $\lim\limits_{t\to 0+} E(0,t) = +\infty$;

b) *minden* $t > 0$ *esetén* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\,dx = 1$;

c) $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$;

d) $\partial_t E(x,t) - a\Delta E(x,t) = 0$, *ha* $x \in \mathbb{R}^n$ *és* $t \neq 0$.

Bizonyítás. Az a) rész igazolásához legyen $s = 1/t$, ekkor $t \to 0+$ egyenértékű az $s \to +\infty$ határértékkel, így $x \neq 0$ esetén

$$\lim_{t\to 0+} E(x,t) = \lim_{s\to+\infty} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(4\pi a)^{\frac{n}{2}} e^{s\frac{|x|^2}{4a}}} = 0,$$

mert a nevezőben lévő exponenciális nagyságrendű kifejezés gyorsabban tart végtelenhez, mint a számlálóban lévő polinomiális nagyságrendű kifejezés. Ha $x = 0$, akkor pedig

$$\lim_{t\to 0+} E(t,0) = \lim_{s\to+\infty} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(4\pi a)^{\frac{n}{2}}} = +\infty.$$

A b) tulajdonságot már a 9.1. Következményben is megfogalmaztuk, hiszen a (9.2) egyenlőségben éppen úgy választottuk a C-t, hogy az integrál értéke minden $t > 0$ esetén 1 legyen.

Hasonlóan, a d) részt sem kell bizonyítanunk, mert $t \le 0$ esetén nyilvánvaló, $t > 0$ esetén pedig a a 9.1. Következményben igazoltuk.

Az E függvény lokális integrálhatósága pedig következik a b) részből, ugyanis ha $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ korlátos halmaz, akkor létezik $T > 0$, amelyre $K \subset \mathbb{R}^n \times [-T, T]$, így mivel $E(x,t) \ge 0$ és $t < 0$ esetén $E(x,t) = 0$, ezért

$$\int_K |E|\,dx\,dt = \int_K E\,dx\,dt \le \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\,dx \right) dt = T < \infty. \qquad \square$$

9.4. *Megjegyzés.* A 9.3. Állítás a) és b) része szemléletesen azt jelenti, hogy az $E(x,t)$ alapmegoldás $t \to 0+$ esetén mindenhol 0-vá válik, kivéve az origót, ahol végtelenhez tart. Azonban az E függvénynek minden rögzített $t > 0$ esetén az egész $\mathbb{R}^n$ téren vett integrálja 1, tehát „határátmenettel kapjuk", hogy $E(x,0)$ integrálja is 1. Ez lényegében azt fejezi ki, hogy

$$E(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}^n} E(x,0)\,dx = 1,$$

vagyis $E(x,0)$ a Dirac-delta „függvény", $E(x,0) = \delta(x)$ (lásd a 8.2.2. alszakaszban szereplő 8.17. Megjegyzést). Tehát E formálisan „megoldása" a következő feladatnak:

$$\begin{cases} \partial_t E - \Delta E = 0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ E(x,0) = \delta(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ha most $g \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, és a

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{9.3}$$

feladat megoldását keressük, akkor formálisan

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t)g(y)\,dy \tag{9.4}$$

megoldása a feladatnak, „hiszen" $t > 0$ esetén

$$\partial_t u(x,t) - a\Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_t E(x-y,t) - \Delta E(x-y,t)\big) g(y)\,dy = 0,$$

valamint (a 8.17. Megjegyzés gondolatmenetének mintájára)

$$u(x,0) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,0)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x(y)g(y)\,dy = g(x).$$

A következő szakaszban megmutatjuk, hogy az iménti formális okoskodás matematikailag precízzé tehető, és a (9.4) képlet valóban megoldást szolgáltat a (9.3) feladatra.

9.3. Cauchy-feladatok

Ebben a szakaszban a hővezetési egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatokkal foglalkozunk, célunk a megoldások előállítása. Látni fogjuk, hogy a megoldás általában nem egyértelmű, csak ha a térváltozóban megfelelő növekedési feltételt írunk elő.

9.3.1. A klasszikus Cauchy-feladatok kitűzése

Először a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatok (más szóval kezdetiérték-feladatok) fogalmát értelmezzük. Az egyszerűség kedvéért a

$$\partial_t u - \Delta u = f \tag{9.5}$$

hővezetési egyenletből indulunk ki, amelynek teljesülését az $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nyílt féltéren követeljük meg, és ehhez hozzáveszünk egy kezdeti feltételt, tehát formálisan:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \mathbb{R}_+^{n+1}\text{-ban}, \\ \text{kezdeti feltétel} & \mathbb{R}^n \times \{0\}\text{-on}. \end{cases}$$

Az egyenletnek olyan $u\colon \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} \to \mathbb{R}$ megoldását keressük, amely az $\mathbb{R}_+^{n+1}$ nyílt féltéren az $(n+1)$-edik t változóban egyszer, a többi változóban pedig kétszer folytonosan differenciálható. Célszerű bevezetnünk egy jelölést a megfelelő függvénytérre.

9.5. Definíció. Tekintsük azon $u\colon \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek az első n változójukban kétszer, az $(n+1)$-edik változójukban pedig egyszer folytonosan differenciálhatók. Jelölje az ilyen tulajdonságú függvények halmazát $C^{2,1}(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Legyen továbbá $C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ azon $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ függvények halmaza, amelyeknek a definíció szerint létező legfeljebb másodrendű parciális deriváltjai (beleértve magát a függvényt is) folytonosan kiterjednek $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$-ra.

A peremfeltétel értelmességéhez megköveteljük, hogy az u függvény folytonosan terjedjen ki az $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ zárt féltérre, tehát $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Az előbbi függvényterek segítségével már pontosan definiálhatjuk a klasszikus Cauchy-feladat fogalmát.

9.6. Definíció. A (9.5) *hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatban* (más szóval *kezdetiérték-feladatban*) olyan $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (9.5) egyenletet $f \in C(\mathbb{R}_+^{n+1})$ esetén, továbbá $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$, valamint teljesül az $u(x,0) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltétel, ahol $g \in C(\mathbb{R}^n)$ adott függvény:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \mathbb{R}_+^{n+1}\text{-ban}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{9.6}$$

A hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatok megoldását a linearitásra alapozva állítjuk elő. A feladatot ugyanis két részfeladatra bonthatjuk, az egyikben $f = 0$, tehát az egyenlet homogén, azaz

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta u_1 = 0 & \mathbb{R}^{n+1}_+\text{-ban}, \\ u_1(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

a másikban pedig $g = 0$, vagyis a peremfeltétel homogén, tehát

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - \Delta u_2 = f & \mathbb{R}^{n+1}_+\text{-ban}, \\ u_2(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

A Cauchy-feladat linearitásából fakadóan világos, hogy ha u_1 és u_2 az egyes részfeladatok megoldásai, akkor $u_1 + u_2$ az eredeti feladat megoldása. Célszerű tehát a részfeladatok megoldásainak előállításával foglalkoznunk, és azok összegeként az eredeti feladat megoldását nyerjük. A részfeladatok közül az első megoldásával kezdjük, ezt követően a második részfeladatot egy ügyes trükkel, az úgynevezett *Duhamel-elv* segítségével visszavezetjük az első részfeladatra.

9.3.2. A homogén egyenlet megoldása

Tekintsük a homogén hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^{n+1}_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{9.7}$$

A 9.4. Megjegyzésben egy heurisztikus gondolatmenet segítségével azt kaptuk, hogy a (9.7) feladat egy megoldása várhatóan

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy. \tag{9.8}$$

A következő tétel mutatja, hogy a heurisztikus úton nyert formula valóban megoldást ad.

9.7. Tétel. *Legyen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény, és értelmezzük az u függvényt a (9.8) formulával. Ekkor*

(i) *$u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, sőt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$;*

(ii) *$\partial_t u - \Delta u = 0$ az $\mathbb{R}^{n+1}_+$ nyílt féltéren;*

(iii) *$\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,\, t>0}} u(x,t) = g(x_0)$ minden $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén.*

Bizonyítás. Az (i) részhez megmutatjuk, hogy alkalmazható a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tétel, és a (9.8) integrállal értelmezett u függvény tetszőleges rendű parciális deriváltja úgy nyerhető, hogy az integrandust deriváljuk a megfelelő változó szerint. Egyrészt nyilvánvaló, hogy az

$$(x,t) \mapsto E(x-y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

függvény végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$-on. Másrészt belátjuk, hogy az iménti függvény tetszőleges rendű parciális deriváltjainak megfelelő értelemben létezik az (x,t) paraméterektől független, integrálható majoránsa. Ehhez először (például ismételt deriválással) gondoljuk meg, hogy a szóban forgó $(x,t) \mapsto E(x-y,t)$ függvény tetszőleges rendű parciális deriváltja

$$H(x,t,y) = Ct^{-\beta} p(x) q(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$$

alakú kifejezések véges összegeként áll elő, ahol $C > 0$, $\beta > 0$ valamilyen konstansok és p, q alkalmas (n változós) polinomok. Rögzítsünk most egy tetszőleges $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ pontot, és legyenek $R > 0$ és $0 < \delta < t_0$ számok. Ekkor azt állítjuk, hogy a $\overline{B(x_0,R)} \times [\delta,\infty) \times \mathbb{R}^n$ halmazon a H függvénynek létezik az (x,t) paraméterektől független, integrálható majoránsa, és emiatt az $(x,t) \mapsto E(x-y,t)$ függvény megfelelő deriváltjának is létezik ilyen majoránsa, tehát a paraméteres integrálok differenciálhatósági tételének feltételeit garantáltuk. A H függvény becslését két részletben végezzük el. Egyrészt a $\overline{B(x_0,R)} \times \overline{B(t_0,\delta)} \times \overline{B(x_0,2R)}$ korlátos és zárt halmazon a folytonosságból adódóan H korlátos, tehát integrálható. Másrészt, ha

$$(x,t,y) \in \overline{B(x_0,R)} \times \overline{B(t_0,\delta)} \times (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0,2R)}),$$

akkor $t > 1/\delta$, és

$$|x-y| \geq |y| - |x| \geq |y| - R \geq |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2},$$

így a p polinom $\overline{B(x_0,R)}$ gömbön való korlátosságának figyelembevételével adódik, hogy

$$|H(x,t,y)| \leq \text{const} \cdot \delta^{-\beta} |q(y)| \exp\left(-\frac{|y|^2}{16\delta}\right),$$

ahol a jobb oldal $|y| \to \infty$ esetén exponenciális nagyságrendben tart 0-hoz, ezért integrálható $\mathbb{R}^n$-en. Végeredményben tehát a H függvénynek a

$\overline{B(x_0,R)}\times\overline{B(t_0,\delta)}\times\mathbb{R}^n$ halmazon nyertük az (x,t) paraméterektől független integrálható majoránsát.

Alkalmazható tehát a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tétel, és így

$$\partial_t u(x,t)-\Delta u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\big(\partial_t E(x-y,t)-\Delta_x(E(x-y,t))\big)g(y)\,dy=0,$$

hiszen E a hővezetési egyenlet alapmegoldása, ezért a 9.3. Állításból következően $\partial_t E(x-y,t)-\Delta_x(E(x-y,t))=0$ minden $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t>0$ esetén.

Legyen most $x_0\in\mathbb{R}^n$ rögzített, ekkor a 9.3. Állítás b) része alapján

$$g(x_0)=\int_{\mathbb{R}^n}E(x-y,t)g(x_0)\,dy,$$

ezért

$$|u(x_0,t)-g(x_0)|\le\int_{\mathbb{R}^n}\big|E(x-y,t)(g(y)-g(x_0))\big|\,dy. \tag{9.9}$$

Megmutatjuk, hogy a (9.9) egyenlőtlenség jobb oldali integrálja „kicsi", ha (x,t) és $(x_0,0)$ elég közel van egymáshoz. Ehhez az integrált két résztartományon vett integrálra bontjuk, az egyiken g folytonossága miatt $|g(y)-g(x_0)|$ kicsi, a másik tartományon pedig $E(x-y,t)$ kicsi, amennyiben t elég közel van a 0-hoz.

Legyen tehát $\varepsilon>0$ adott, ekkor a g függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt választhatunk $\delta>0$ számot úgy, hogy $|y-x_0|<\delta$, $y\in\mathbb{R}^n$ esetén $|g(y)-g(x_0)|<\varepsilon$. Ebből következően

$$\int_{B(x_0,\delta)}\big|E(x-y,t)(g(y)-g(x_0))\big|\,dy\le\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}|E(x-y,t)|\,dy=\varepsilon. \tag{9.10}$$

A „maradék" integrál becsléséhez legyen $x\in\mathbb{R}^n$ tetszőleges olyan pont, amelyre $|x-x_0|\le\delta/2$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján bármely $y\in\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)$ esetén

$$|y-x|\ge|y-x_0|-|x_0-x|\ge|y-x_0|-\frac{1}{2}|y-x_0|=\frac{1}{2}|y-x_0|,$$

így g korlátosságának felhasználásával

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)}\big|E(x-y,t)(g(y)-g(x_0))\big|\,dy \le\frac{C}{t^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)}e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\,dy. \tag{9.11}$$

Azonban

$$\begin{aligned}\frac{C}{t^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\,dy &= \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}}\int_\delta^\infty \int_{B(x_0,r)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\,d\sigma_y\,dr\\ &= \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}}\int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}}\omega_n r^{n-1}\,dr\\ &= \tilde{C}\sqrt{t}\int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{s^2}{16}}s^{n-1}\,ds,\end{aligned}$$

ahol az integrandusra elegendően kis $t>0$ választással $s>\delta/\sqrt{t}$ esetén az

$$e^{-\frac{s^2}{16}}s^{n-1}\le e^{-s}$$

becslés teljesül, így

$$\sqrt{t}\int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{s^2}{16}}s^{n-1}\,ds \le \sqrt{t}\int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-s}\,ds = \sqrt{t}\left[-e^{-s}\right]_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^\infty = \sqrt{t}e^{-\frac{\delta}{\sqrt{t}}} \xrightarrow{t\to 0+} 0.$$

Mindez azt jelenti, hogy ha $|x-x_0|<\delta/2$ és $t>0$ elég kicsi, akkor a (9.11) egyenlőtlenség jobb oldala ε-nál kisebb, amit összevetve a (9.10) és (9.9) egyenlőtlenségekkel azt kapjuk, hogy

$$|u(x,t)-g(x_0)|<2\varepsilon.$$

Ezzel a (iii) tulajdonságot is beláttuk. □

9.8. *Megjegyzés.* A 9.7. Tételből következik, hogy a (9.7) Cauchy-feladatnak a (9.8) formulával értelmezett u megoldása g simaságától függetlenül minden rögzített $t>0$ esetén végtelen sokszor differenciálható (sőt valójában analitikus is). A hővezetési egyenlet eme tulajdonságát szokás *parabolikus simításnak* nevezni.

A (9.8) integrált a gyakorlati számolásokban célszerű egy könnyebben kezelhető alakba írni. A transzformáció egy egyszerű $\eta=(x-y)/2\sqrt{t}$ helyettesítés, ekkor $dy=(4t)^{\frac{n}{2}}d\eta$. Így kapjuk a következő hasznos összefüggést, amelyet lemmaként fogalmazunk meg

9.9. Lemma. *Legyen $g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ korlátos és folytonos függvény. Ekkor*

$$\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}g(y)\,dy = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}g(x-2\sqrt{t}\eta)\,d\eta.$$

A 9.9. Lemma segítségével a 9.7. Tétel (iii) részének bizonyítása folytonos g esetén egy egyszerű következménnyé válik. Sőt, a g függvényre kissé több simasági feltételt megkövetelve az u megoldás erősebb simaságát igazolhatjuk.

9.10. Tétel. *Legyen $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ olyan függvény, amelyre g, $\partial_j g$, $\partial_j^2 g$ $(j = 1, \dots, n)$ korlátosak, és értelmezzük az u függvényt a (9.8) formulával. Ekkor*

(i) $u \in C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$;

(ii) $\partial_t u - \Delta u = 0$ *az* $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ *zárt féltéren;*

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x_t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,\, t>0}} u(x,t) = g(x_0)$ *minden* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *esetén.*

Bizonyítás. A 9.9. Lemma alapján

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta.$$

Mivel g korlátos, ezért az u függvényt definiáló integrálban szereplő integrandusnak létezik az (x,t) paraméterektől független, integrálható majoránsa, nevezetesen az $e^{-|\eta|}$ függvény konstansszorosa, továbbá az integrandus folytonos az (x,t) paraméterekben, így a paraméteres integrálok folytonosságáról szóló tételből következően u folytonos függvény $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$-on. Hasonlóan, a paraméteres integrálok differenciálásáról szóló tétel alapján az $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ zárt féltéren

$$\partial_t u(x,t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \frac{\eta_j}{\sqrt{t}}\, d\eta,$$

ahonnan parciális integrálással

$$\begin{aligned}
&\pi^{\frac{n}{2}} \partial_t u(x,t) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[-\frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \right]_{\eta_j=-\infty}^{\infty} d\eta_1 \dots d\eta_{j-1}\, d\eta_{j+1} \dots d\eta_n \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\eta|^2} \partial_j^2 g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta_j\, d\eta_1 \dots d\eta_{j-1}\, d\eta_{j+1} \dots d\eta_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \Delta g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta
\end{aligned}$$

adódik. Ez utóbbi paraméteres integrál ismét folytonos $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$-on, hiszen Δg korlátos függvény. A paraméteres integrálok deriválhatósági tételét az x_j változókban szintén alkalmazhatjuk, hiszen a $\partial_j g$ és $\partial_j^2 g$ függvények korlátosak, így az $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ zárt féltéren

$$\Delta u(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \Delta g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta,$$

amit a $\partial_t(x,t)$ függvényre nyert kifejezéssel összevetve adódik, hogy $\partial_t u - \Delta u = 0$ a $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ halmazon. □

9.11. *Megjegyzés.* Világos, hogy ha g korlátos függvény, akkor a homogén hővezetési egyenletet tartalmazó oldalú Cauchy-feladat (9.8) formulával értelmezett megoldása is korlátos. Ha $\partial_j g$ és $\partial_j^2 g$ $(j = 1, \dots, n)$ is korlátosak, akkor u megfelelő deriváltjai ugyancsak korlátosak.

A 9.7. és 9.10. Tétel bizonyításából az is kitűnik, hogy a 9.7. Tételben g korlátossága helyett elegendő feltételezni, hogy g nem nő túlságosan gyorsan $|x| \to \infty$ esetén. Pontosabban, elég feltenni, hogy léteznek olyan $K \geq 0$ és $0 \leq \alpha < 2$ konstansok, amelyekre

$$|g(x)| \leq K e^{|x|^\alpha} \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A 9.10. Tételben hasonló jellegű feltételeket elegendő megkövetelni a g, $\partial_j g$ és $\partial_j^2 g$ $(j = 1, \dots, n)$ függvényekre.

9.12. Példa. Adjuk meg a következő Cauchy-feladatnak a (9.8) formulával meghatározott megoldását!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Használjuk a 9.9. Lemmában szereplő integrálátalakítást, ekkor

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} (x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} x\, d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} 2t\eta\, d\eta = x, \end{aligned}$$

hiszen $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = 1$ és a második integrandus páratlan függvény, ezért az integrálja nullával egyenlő. Tehát $u(x,t) = x$, ami valóban megoldás.

9.3.3. Duhamel-elv és az inhomogén egyenlet

Tekintsük az inhomogén hővezetési egyenletre vonatkozó homogén kezdeti feltételű klasszikus Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \mathbb{R}^{n+1}_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{9.12}$$

Ezt a feladatot egy ügyes fogással visszavezetjük a (9.7) feladatra. A trükk, amelyet szokás *Duhamel-elvnek* hívni, a későbbiekben más típusú Cauchy-feladatok esetében is működni fog. A lényege a következő: az f jobb oldali

függvényt rögzített $t = \tau$ esetén kezdeti feltételnek tekintve megoldások egy családját nyerjük, amelyet a τ paraméter szerint integrálva a (9.12) feladat egy megoldását kapjuk.

9.13. Állítás (Duhamel-elv)**.** *Legyen $f \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, és rögzített $\tau \in \mathbb{R}^+_0$ paraméter mellett tekintsük az alábbi klasszikus Cauchy-feladatot:*

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^{n+1}_+\text{-ban}, \\ v(x,0) = f(x,\tau) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{9.13}$$

Tegyük fel, hogy minden rögzített $\tau \in \mathbb{R}^+_0$ esetén az iménti feladatnak létezik $(x,t) \mapsto v(x,t;\tau)$ megoldása úgy, hogy $v \in C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, továbbá minden $T > 0$ esetén a $v, \partial_t v, \partial_j^2 v$ $(j = 1,\dots,n)$ függvényeknek létezik a τ paramétertől független korlátja, ha $\tau \in [0,T]$. Ekkor az

$$u(x,t) := \int_0^t v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau \tag{9.14}$$

formulával értelmezett függvényre $u \in C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, továbbá u megoldása a (9.12) *klasszikus Cauchy-feladatnak.*

A bizonyításhoz a 2.20. Tételt használjuk, amelyet most lemmaként újra kimondunk és be is bizonyítunk.

9.14. Lemma. *Legyen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $\partial_1 g$ létezik és folytonos $\mathbb{R}^2$-en. Rögzített $a \in \mathbb{R}$ esetén értelmezzük a $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $G(x) = \int_a^x g(x,y)\,dy$. Ekkor G differenciálható és*

$$G'(x) = g(x,x) + \int_a^x \partial_1 g(x,y)\,dy.$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy

$$H(x,z) = \int_a^x g(z,y)\,dy.$$

Ekkor $G(x) = H \circ h$, ahol $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (x,x)$. Világos, hogy h folytonosan differenciálható, deriváltja $h'(x) = (1,1)$, továbbá $\partial_1 g$ folytonosságából adódóan H is folytonosan differenciálható, és

$$H'(x,z) = \left(g(z,x), \int_a^x \partial_1 g(z,y)\,dy \right).$$

Ekkor az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva kapjuk, hogy

$$G'(x) = H'(h(x)) \cdot h'(x) = \left(g(x,x), \int_a^x \partial_1 g(x,y)\,dy \right) \cdot (1,1)$$

$$= g(x,x) + \int_a^x \partial_1 g(x,y)\,dy. \qquad \square$$

A 9.13. Állítás bizonyítása. Nyilván $u(x,0) = \int_0^0 (\dots) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Másrészt a 9.14. Lemmában szereplő deriválási szabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\partial_t u(x,t) = v(x,0;t) + \int_0^t \partial_t v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau,$$

amely folytonos függvény az $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ zárt féltéren. Mivel v megoldása a (9.13) Cauchy-feladatnak $\tau = t$ paraméter mellett, ezért $v(x,0;t) = f(x,t)$. Ezenkívül a v függvényre és parciális deriváltjaira vonatkozó folytonossági és korlátossági feltétel miatt alkalmazhatjuk a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tételt az x változóban is, azaz

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \partial_x^2 v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau,$$

amely folytonos függvény az $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ halmazon. A fenti összefüggéseket összevetve kapjuk, hogy $u \in C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, és

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \big(\partial_t v(x,t-\tau;\tau) - \Delta v(x,t-\tau;\tau)\big)\,d\tau,$$

ahol a jobb oldali integrál értéke 0, hiszen $\partial_t v - \Delta v = 0$ minden $\tau \in \mathbb{R}^+_0$ paraméter mellett, mert v megoldása a (9.13) Cauchy-feladatnak. Következésképpen $\partial_t u - \Delta_t u = f$, amit igazolni akartunk. $\square$

9.15. *Történeti megjegyzés.* Jean-Marie Constant Duhamel (1797–1872) francia fizikus és matematikus, aki többek között a hővezetés kapcsán foglalkozott differenciálegyenletekkel. A nevét viselő elvet valószínűleg nem ő fedezte fel, de a hővezetésről szóló munkái nyomán később róla nevezték el.

9.16. Példa. Alkalmazzuk a Duhamel-elvet a következő Cauchy-feladat egy megoldásának meghatározására!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x + t & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

A Duhamelv-elvhez kapcsolódó segédfeladat a következő:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v = 0 & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ v(x,0;\tau) = x + \tau & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

A segéd Cauchy-feladat megoldása

$$v(x,t;\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} (x + \tau - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta$$
$$= \frac{x+\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \eta\, d\eta = x + \tau,$$

hiszen a második integrálban páratlan függvényt integrálunk, tehát az integrál nullával egyenlő. Így az eredeti Cauchy-feladat megoldása:

$$u(t,x) = \int_0^t (x + t - \tau)\, d\tau = tx + \frac{t^2}{2}.$$

A Duhamel-elv és a 9.10. Tétel segítségével a (9.6) klasszikus Cauchy-feladat megoldására vonatkozóan a következő összefüggést nyerjük.

9.17. Tétel. *Legyen $g \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátos, továbbá $f \in C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, amelyre az $f, \partial_t f, \partial_j f, \partial_j^2 f$ $(j = 1, \dots, n)$ függvények minden $T > 0$ esetén korlátosak az $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ végtelen sávra megszorítva. Ekkor az inhomogén hővezetési egyenletre vonatkozó* (9.6) *klasszikus Cauchy-feladatnak létezik olyan*

$$u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$$

megoldása, amely minden $T > 0$ esetén korlátos az $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ sávra megszorítva, mégpedig

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi,\tau) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau$$
$$+ \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \tag{9.15}$$

9.18. *Megjegyzés.* A 9.9. Lemmát alkalmazva a (9.15) formulát az alábbi alakba is átírhatjuk:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} f(x - 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau)\, d\eta\, d\tau$$
$$+ \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta.$$

A konkrét feladatokban a fenti képlet közvetlen alkalmazása helyett természetesen eljárhatunk a részfeladatokra bontás módszerével, felhasználva a (9.8) formulának a 9.9. Lemmában foglalt alakját és a Duhamel-elvet.

9.19. Példa. Keressük meg a következő Cauchy-feladat egy megoldását!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x + t & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

A 9.12. Példa alapján a

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \partial_x^2 u_1 = 0 & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ u_1(x,0) = x & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

feladat egy megoldása $u_1(x,t) = x$, továbbá a 9.16. Példa alapján a

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - \partial_x^2 u_2 = x + t & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ u_2(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

feladat egy megoldása $u_2(x,t) = tx + \frac{t^2}{2}$, így az eredeti Cauchy-feladat egy megoldása

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = x + tx + \frac{t^2}{2}.$$

További konkrét Cauchy-feladatok szerepelnek a 9.3–9.6. Feladatokban.

9.3.4. A megoldás egyértelműsége

Az előző alszakasz 9.17. Tétele alapján azt gondolhatnánk, hogy a (9.15) formulával értelmezett u függvény a hővezetési egyenletre vonatkozó (9.6) klasszikus Cauchy-feladat egyértelmű megoldását szolgáltatja. Ez azonban sajnos nem igaz, a homogén jobb oldalú hővezetési egyenletre vonatkozó, homogén peremfeltételű

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^{n+1}_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

klasszikus Cauchy-feladatnak végtelen sok 0-tól különböző megoldása van. Ezek a megoldások gyorsan nőnek $|x| \to \infty$ esetén. Egy lehetséges konstrukciót végtelen sok megoldás előállítására a 9.3.5. alszakaszban mutatunk. Ha azonban a megoldások növekedésére megfelelő feltételt szabunk, akkor az iménti feladat megoldása egyértelmű. A következő tételt igazoljuk az alábbiakban.

9.20. Tétel. *Legyen $g \in C(\mathbb{R}^n)$ és $f \in C(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Ekkor az inhomogén hővezetési egyenletre vonatkozó* (9.6) *klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy olyan*

$$u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$$

megoldása van, amely minden $T > 0$ esetén korlátos az $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ sávra megszorítva.

Az előbbi tétel bizonyítása a hővezetési egyenletre vonatkozó maximumelven fog múlni, amelynek motivációja a Laplace-operátorra vonatkozó maximumelv esetéhez hasonló. Képzeljük el, hogy az u függvény írja le az Ω korlátos tartomány pontjainak időben változó hőmérsékletét a $[0,T]$ időintervallumon, és tegyük fel, hogy a tartományban egyetlen időpillanatban sincsenek hőforrások. Ekkor szemléletesen világos, hogy az Ω tartomány tetszőleges pontjának hőmérséklete bármely $0 \le t \le T$ időpontban legfeljebb akkora, mint a $\partial\Omega$ perem pontjainak a $[0,T]$ időintervallumon vett maximális hőmérséklete és az Ω pontjainak kezdeti maximális hőmérséklete közül a nagyobbik. Ahhoz, hogy ezt matematikailag megfogalmazzuk, célszerű bevezetnünk az előbbi halmazokra két elnevezést és jelölést.

9.21. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0 < T < \infty$. Ekkor *parabolikus hengeren* a $Q_T = \Omega \times (0,T]$ halmazt értjük, *parabolikus peremen* pedig a $\Gamma_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$ halmazt.

A korábbiakban bevezetett $C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ és $C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}})$ függvényterek mintájára értelmezzük a $C^{2,1}(Q_T)$ és $C^{2,1}(\overline{Q_T})$ tereket.

9.22. Definíció. Tekintsük azon $u\colon Q_T \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek a Q_T henger belsejében az első n változójukban kétszer, az $(n+1)$-edik változójukban pedig egyszer folytonosan differenciálhatók, továbbá ezeknek a parciális deriváltaknak létezik folytonos kiterjesztése Q_T-re. Jelölje az ilyen tulajdonságú függvények halmazát $C^{2,1}(Q_T)$. Legyen továbbá $C^{2,1}(\overline{Q_T})$ azon $u \in C^{2,1}(Q_T)$ függvények halmaza, amelyeknek a definíció szerint létező legfeljebb másodrendű parciális deriváltjai (beleértve magát a függvényt is) folytonosan kiterjednek a $\overline{Q_T}$-ra.

9.23. Tétel (Gyenge maximumelv $\partial_t u - \Delta u$ operátorra)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Ha az $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u \le 0$ a Q_T hengeren, akkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Bizonyítás. A Laplace-operátorra vonatkozó gyenge maximumelv (8.50. Tétel) bizonyításához hasonlóan járunk el.

Először tegyük fel, hogy

$$\partial_t u - \Delta u < 0 \tag{9.16}$$

a Q_T hengeren. Megmutatjuk, hogy ekkor u a $\overline{Q_T}$-beli maximumát csak a Γ_T parabolikus peremen veszi fel. Ellenkező esetben ugyanis lenne egy olyan

$(x_0, t_0) \in Q_T$ pont, amelyre

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u.$$

Ha $0 < t_0 < T$, akkor az (x_0, t_0) pont lokális maximumhely, következésképpen $\partial_t u(x_0, t_0) = 0$, továbbá $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$, hiszen minden $j = 1, \ldots, n$ esetén $\partial_j^2 u(x_0, t_0) \leq 0$. Ekkor azonban $\partial_t u(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) \geq 0$, ami ellentmond a (9.16) feltevésnek. Amennyiben pedig $t_0 = T$ volna, akkor $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$, és továbbra is $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$, vagyis $\partial_t u(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) \geq 0$, ami ismét ellentmondás.

Az általános esethez legyen $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$, ahol $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = \partial_t u - \Delta u - \varepsilon < 0,$$

így az előzőek alapján $\max_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u_\varepsilon$. Mivel $\varepsilon \to 0+$ esetén $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\overline{Q_T}$-on, így a 8.51. Lemma alapján határátmenettel adódik az állítás. □

9.24. *Megjegyzés.* Ahogy a Laplace-egyenlet kapcsán, úgy most a hővezetési egyenlet esetében is érvényes a gyenge maximumelv párja, a gyenge minimumelv, sőt mindkettőnél valójában erősebb állítás érvényes (erős maximum- és minimumelv). Ezekkel a 9.4.1. szakaszban foglalkozunk részletesen.

A gyenge maximumelv birtokában készen állunk a 9.20. Tétel igazolására.

A 9.20. Tétel bizonyítása. Ha a Cauchy-feladatnak u_1 és u_2 megoldásai, akkor a feladat linearitása folytán az $u = u_1 - u_2$ függvény megoldása a homogén egyenletet és homogén peremfeltételt tartalmazó Cauchy-feladatnak. Elég tehát igazolnunk, hogy ha a tétel feltételeinek megfelelő simaságú u függvényre $\partial_t u - \Delta u = 0$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ halmazon, és $u(x, 0)$, ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor szükségképpen $u = 0$ az $\overline{\mathbb{R}^{n+1}}$ halmazon. Ehhez elegendő belátnunk, hogy tetszőleges rögzített $T > 0$ esetén $u = 0$ az $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ sávban. Legyen $T > 0$ és ezenkívül $R > 0$ egyelőre rögzített szám. Tegyük fel, hogy $|u| \leq M$ az $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ sávban, és tekintsük ekkor a

$$v(x, t) = \frac{2nM}{R^2} \left(\frac{|x|^2}{2n} + t \right)$$

függvényt. Meg fogjuk mutatni, hogy a $Q_T = B(0, R) \times (0, T]$ parabolikus henger lezártján érvényes a

$$-v(x, t) \leq u(x, t) \leq v(x, t) \tag{9.17}$$

közrefogás, ahonnan rögzített (x, t) mellett $R \to \infty$ határátmenettel adódik majd a kívánt $u = 0$ összefüggés.

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $\partial_t v - \Delta v = 0$ az egész $\mathbb{R}^{n+1}$ téren, így az $u - v$ függvényre alkalmazható a gyenge maximumelv a Q_T parabolikus hengeren:

$$\max_{\overline{Q_T}}(u - v) = \max_{\Gamma_T}(u - v). \tag{9.18}$$

A Γ_T parabolikus perem $\overline{B(0,R)} \times \{0\}$ részén $u = 0$ és $v \geq 0$, így

$$\max_{\overline{B(0,R)}\times\{0\}} (u - v) \leq 0.$$

A parabolikus perem $S(0,R) \times [0,T]$ részén pedig $u \leq M$ és $v(x,t) = M + \frac{t}{R^2} \geq M$, így

$$\max_{S(0,R)\times[0,T]} (u - v) \leq 0.$$

Végeredményben

$$\max_{\Gamma_T}(u - v) \leq 0,$$

ezért a (9.18) egyenlőség alapján $u \leq v$ a $\overline{Q_T}$ hengeren, tehát a (9.17) közrefogás egyik oldalát igazoltuk.

Most alkalmazzuk a gyenge maximumelvet a $-u - v$ függvényre a Q_T hengeren. Ekkor az előbbiekhez hasonlóan

$$\max_{\overline{Q_T}}(-u - v) = \max_{\Gamma_T}(-u - v). \tag{9.19}$$

A $\overline{B(0,R)} \times \{0\}$ peremdarabon $u = 0$ és $v \geq 0$, így

$$\max_{\overline{B(0,R)}\times\{0\}} (-u - v) \leq 0.$$

Az $S(0,R)\times[0,T]$ peremdarabon pedig $u \geq -M$ és $v(x,t) = M + \frac{2nMt}{R^2} \geq M$, így

$$\max_{S(0,R)\times[0,T]} (-u - v) \leq 0.$$

Végső soron tehát

$$\max_{\Gamma_T}(-u - v) \leq 0,$$

ezért a (9.19) összefüggés alapján $-v \leq u$ a $\overline{Q_T}$ hengeren, és ezzel a (9.17) közrefogás másik oldalát igazoltuk. □

Az előbbi bizonyítás megfelelő finomításával a korlátos Q_T hengeren érvényes maximumelvet kiterjeszthetjük az $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ végtelen sávra, ezt szokás Cauchy-feladatra vonatkozó maximumelvnek is nevezni.

9.25. Tétel (Maximumelv Cauchy-feladatra)**.** *Tegyük fel, hogy az*

$$u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$$

függvény korlátos az $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ *sávban, továbbá* $\partial_t u - \Delta u \le 0$ *az* $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ *sávban. Ekkor*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0).$$

Bizonyítás. Elegendő igazolnunk, hogy

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0),$$

hiszen a fordított irányú egyenlőtlenség nyilvánvaló. Az előbbihez pedig elég, hogy tetszőleges rögzített $(x_0,t_0) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ pontra

$$u(x_0,t_0) \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0). \tag{9.20}$$

Tegyük fel, hogy $|u| \le M$ az $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ sávban, és rögzített $R > 0$ esetén tekintsük a

$$v(x,t) = \frac{|x|^2}{2n} + t$$

segédfüggvényt, továbbá vezessük be a $Q_T = B(x_0,R) \times (0,T]$ jelölést. Megmutatjuk, hogy tetszőleges rögzített $(x_0,t_0) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ pontra és $\mu > 0$ számra

$$u(x_0,t_0) - \mu v(x_0,t_0) \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0). \tag{9.21}$$

Ekkor készen leszünk, hiszen $\mu \to 0+$ határátmenettel adódik a (9.20) becslés. A (9.21) egyenlőtlenséghez viszont elegendő, hogy

$$\max_{\overline{Q_T}}(u - \mu v) \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0). \tag{9.22}$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy $\partial_t v - \Delta v = 0$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ téren, így a $v - u$ függvényre alkalmazható a gyenge maximumelv a Q_T parabolikus hengeren:

$$\max_{\overline{Q_T}}(u - \mu v) = \max_{\Gamma_T}(u - \mu v). \tag{9.23}$$

A Γ_T parabolikus perem $\overline{B(0,R)} \times \{0\}$ darabján $v \ge 0$ folytán

$$\max_{\overline{B(0,R)} \times \{0\}} (u - \mu v) \le \max_{x \in B(0,R)} u(x,0) \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0).$$

A parabolikus perem $S(0,R)\times[0,T]$ darabján pedig $v(x,t)=\frac{R^2}{2n}+t\geq\frac{R^2}{2n}$, így

$$\max_{S(0,R)\times[0,T]}(u-\mu v)\leq M-\frac{R^2}{2n},$$

ahol a jobb oldal $R\to\infty$ esetén $-\infty$-hez tart, ezért elég nagy R esetén

$$\max_{S(0,R)\times[0,T]}(u-\mu v)\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^n}u(x,0).$$

Végeredményben tehát

$$\max_{\Gamma_T}(u-\mu v)\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^n}u(x,0),$$

ezért a (9.23) egyenlőség alapján adódik a kívánt (9.22) összefüggés. □

9.26. *Megjegyzés.* Megemlítjük, hogy a 9.20. és a 9.25. Tételben az u függvényre vonatkozó korlátossági feltevés gyengíthető. Nevezetesen (erről bővebben lásd például a [46, 83] könyveket), a 9.25. Tétel esetében elegendő, hogy vannak olyan $C_T,\gamma_T>0$ konstansok, amelyekkel az $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ sávban fennáll

$$|u(x,t)|\leq C_Te^{\gamma_T|x|^2}\quad(x\in\mathbb{R}^n,\ 0\leq t\leq T).$$

A 9.20. Tételben az u függvényre elég megkövetelni, hogy az iménti feltétel minden $T>0$ esetén érvényes (ahol a $C_T,\gamma_T>0$ konstansok T-től függhetnek). A következő alszakaszban látni fogjuk, hogy ha a 9.20. Tételben az u függvény x változóbeli növekedésére semmilyen feltételt nem szabunk, akkor a Cauchy-feladat megoldásának egyértelműsége nem feltétlenül marad igaz.

Bár a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatnak végtelen sok megoldása van, ezek közül a (9.15) formula a fizikailag reális megoldást szolgáltatja. Érdekességként megjegyezzük, hogy a végtelen sok megoldás ellenére David Widder (1898–1990) amerikai matematikus 1944-es eredménye szerint ([212]) legfeljebb egy nemnegatív megoldás létezhet. Ez a fizikai alkalmazások szempontjából ugyancsak észszerű, például ha u az abszolút hőmérsékletet jelenti.

A hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat (9.15) képlettel meghatározott megoldásának egyértelműsége mellett egy másik fontos tulajdonsága a folytonos függés, amelynek pontos megfogalmazása a 9.9. Feladatban szerepel. A Cauchy-feladatok témakörének lezárásaként az alábbiakban egy további tulajdonságot igazolunk, ez a kezdeti érték nemnegativitásának megőrzése (további megőrzési tulajdonságokat tartalmaz a 9.8. Feladat).

9.27. Állítás. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 9.17. Tétel feltételei, és legyen u a* (9.6) *Cauchy-feladat* (9.15) *képlettel adott megoldása. Ekkor*

a) *ha f és g nemnegatív függvények, akkor u is nemnegatív;*

b) *ha f nemnegatív és $g \geq 0, g \neq 0$, akkor $u(t,x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ és $t > 0$ esetén.*

Bizonyítás. Az a) rész nyilvánvalóan következik a megoldás formulájából és abból, hogy nemnegatív függvények integrálja ugyancsak nemnegatív. A b) részhez pedig annyit kell megjegyeznünk, hogy egy nemnegatív, nem azonosan 0 folytonos függvény integrálja $\mathbb{R}^n$-en pozitív. □

9.28. *Megjegyzés.* A 9.27. Állítás azt jelenti, hogy a hővezetési egyenlet olyan jelenséget ír le, amelyben a hatás végtelen sebességgel terjed. Ha a kezdeti hőmérséklet nemnegatív és egy pont körül pozitív, akkor bármilyen későbbi időpillanatban már mindenhol pozitív a hőmérséklet. A kezdeti pozitív hőmérséklet tehát végtelen sebességgel szétterjed. Ez természetesen fizikailag nem valósul meg, ezért a hővezetési egyenlet nem teljesen valósághű leírását adja meg a hőterjedésnek. Gyakran ehelyett a porózus közeg egyenletét (lásd a 6.4.2. paragrafust) tekintik, amely véges sebességű hatásterjedést ír le.

9.3.5. Tyihonov példája

Az előző szakaszban a 9.20. Tételben igazoltuk, hogy a hővezetési egyenletre vonatkozó (9.6) klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy megoldása lehet, ha a megoldásnak a térváltozókban való növekedésére megfelelő feltételt szabunk. Amennyiben a növekedésre vonatkozóan semmilyen feltételt nem követelünk meg, a Cauchy-feladat megoldása nem feltétlenül egyértelmű, pontosabban a homogén egyenletet és homogén peremfeltételt tartalmazó feladatnak végtelen sok különböző, nem azonosan 0 megoldása van. Az első ilyen jellegű konstrukciót Andrej Nyikolajevics Tyihonov (1906–1993) orosz matematikus írta le egy 1935-ben megjelent cikkében. Tyihonov végtelen sok olyan $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ nem azonosan 0 függvényt adott meg, amelyekre $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ az $\mathbb{R}^2$ térben és $u(x,0) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az alábbiakban ezt a konstrukciót ismertetjük a [83] könyv nyomán.

Legyen $\alpha > 1$ és értelmezzük az alábbi $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$h(t) := \begin{cases} \exp(-t^{-\alpha}), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0. \end{cases} \tag{9.24}$$

A Tyihonov-féle példában olyan u megoldását keressük a homogén egyenletet és homogén peremfeltételt tartalmazó Cauchy-feladatnak, amelyre még az is teljesül, hogy $u(0,t) = h(t)$ és $\partial_x u(0,t) = 0$, ha $t \in \mathbb{R}$. Az u függvényt függvénysor alakban fogjuk keresni, amihez először egy technikai jellegű segédállításra van szükségünk a h deriváltjainak nagyságrendjével kapcsolatban.

9.29. Lemma. *Tetszőleges $\alpha > 1$ számhoz található olyan (α-tól függő) $\theta = \theta(\alpha) > 0$ konstans, hogy a (9.24) formulával értelmezett h függvényre minden k nemnegatív egész és $t > 0$ esetén:*

$$\left|h^{(k)}(t)\right| \le \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right).$$

A 9.29. Lemma bizonyítása. Mindenekelőtt gondoljuk meg, hogy a h függvény kiterjeszthető a jobb nyílt félsíkra holomorf komplex függvénnyé. Valóban, a nyílt jobb félsíkon holomorf módon értelmezhető a komplex logaritmusfüggvény, nevezetesen legyen $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, ahol $r > 0$ és $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, ekkor $\log z = \log r + \mathrm{i}\varphi$ holomorf a nyílt jobb félsíkon. Ekkor

$$z^{-\alpha} = e^{-\alpha \log z} = r^{-\alpha} e^{-\alpha \mathrm{i}\varphi}$$

ugyancsak holomorf függvény a nyílt jobb félsíkon, és ezáltal a h is. Legyen most $t \in \mathbb{R}^+$ rögzített, továbbá $0 < \theta < 1$, és alkalmazzuk a h függvényre a Cauchy-integrálformulát az $S(t, \theta t)$ körvonalon, amely a $\overline{B(t, \theta t)}$ körlappal együtt része a nyílt jobb félsíknak. Ekkor

$$h^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{S(t,\theta t)} \frac{g(z)}{(z-t)^{k+1}}\, dz. \tag{9.25}$$

Ha $z \in S(t, \theta t)$, akkor $|z| \le |z - t| + t = (1 + \theta)t$, ezért

$$\operatorname{Re} z^{-\alpha} = (1+\theta)^{-\alpha} \cdot t^{-\alpha},$$

így elég kis pozitív θ számot (konkrétan $\theta < 2^{1/\alpha} - 1$) választva fennáll, hogy

$$\operatorname{Re} z^{-\alpha} \ge \frac{1}{2} t^{-\alpha}.$$

Ezt felhasználva a (9.25) integrálformulából a kívánt becslést nyerjük:

$$\left|h^{(k)}(t)\right| \le \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right).$$

Az előbbi becslésből az is következik, hogy $t \to 0+$ esetén $h^{(k)}(t) \to 0$, hiszen a jobb oldal nagyságrendjét az exponenciális nagyságrendben 0-hoz tartó tényező határozza meg (mellette a t^{-k} tényező csupán polinom nagyságrendben tart ∞-hez). Ez azt eredményezi, hogy a h függvény a 0 pontban is akárhányszor differenciálható, és $h^{(k)}(0) = 0$. (Ez viszont azt is jelenti egyúttal, hogy a h függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora nem állítja elő h-t, így h nem analitikus 0 körül). □

Ezek után térjünk vissza a Tyihonov-féle konstrukcióra, és keressük a

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \overline{\mathbb{R}^2_+}\text{-ban}, \\ u(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}), \\ u(0,t) = h(t) & (t \in \mathbb{R}), \\ \partial_x u(0,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}) \end{cases} \tag{9.26}$$

feladat megoldását formálisan

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(t) x^j$$

alakban előállítva, ahol a $h_j \colon \mathbb{R}$ függvényeket szeretnénk alkalmasan megválasztani. Az $u(0,t) = h(t)$ és a $\partial_x u(0,t) = 0$ feltételekből adódóan

$$h_0(t) = h(t), \quad h_1(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{9.27}$$

Másrészt (egyelőre formális) deriválással a $\partial_t u = \partial_x^2 u$ egyenletből kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} h_j'(t) x^j = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) h_j(t) x^{j-2},$$

ahonnan az együtthatókat összehasonlítva:

$$h_{j+2}(t) = \frac{h_j'(t)}{(j+1)(j+2)} \quad (j = 2, 3, \dots).$$

Ekkor az előbbi rekurzióból a (9.27) kezdőértékeket figyelembe véve

$$h_{2j+1}(t) = 0, \quad h_{2j}(t) = \frac{h^{(j)}(t)}{(2j)!} \quad (t \in \mathbb{R}_0^+)$$

adódik, így formálisan

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^{(j)}(t)}{(2j)!} x^{2j}. \tag{9.28}$$

A $k!\,/((2k)!) < 1/k!$ egyenlőtlenség figyelembevételével a 9.29. Lemma alapján alkalmas $0 < \theta < 1$ számmal $t > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{h^{(j)}(t)}{(2j)!} x^{2j} \right| &\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^{2j}}{j!\,(\theta t)^j} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-\alpha}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{t}\left[\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2} t^{1-\alpha}\right]\right). \end{aligned} \tag{9.29}$$

A fenti becslésből egyrészt következik, hogy a (9.28) sor minden $t > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, sőt nyilvánvalóan $t \leq 0$ esetén is, hiszen ekkor $h^{(j)}(t) = 0$. Másrészt $t \to 0$ esetén $u(x,t) \to 0$ egyenletesen x-ben az $\mathbb{R}$ minden korlátos részhalmazán, ugyanis $\alpha > 1$ folytán $|x| \leq K$ esetén

$$\frac{1}{t}\left[\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha}\right] \leq \frac{1}{t}\left[\frac{K^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha}\right] \xrightarrow{t\to 0+} -\infty.$$

Ezenkívül a (9.29) becslés azt is mutatja, hogy minden rögzített $t > 0$ esetén az $x \mapsto u(x,t)$ függvény hatványsorát tagonként majorálja az

$$U(x,t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t}\left[\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha}\right]\right), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0 \end{cases}$$

függvény hatványsora, sőt a majorálás $t \leq 0$ esetén is igaz, hiszen ekkor $h^{(j)}(t) = 0$, így $u(x,t) = 0$. Mivel minden rögzített $t \in \mathbb{R}$ mellett az $x \mapsto U(x,t)$ függvény hatványsora egyenletesen konvergens az $\mathbb{R}$ korlátos részhalmazain, továbbá ugyanez igaz az összes deriváltjára, ezért speciálisan az x szerinti második derivált

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^{(j)}(t)}{(2j-2)!}x^{2j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^{(j+1)}(t)}{(2j)!}x^{2j}$$

sor is egyenletesen konvergens. Azonban a fenti sor jobb oldalát formálisan t szerinti deriválással is nyerhetjük u sorából, így a t szerinti tagonkénti deriválás jogos, továbbá $\partial_t u = \partial_x^2 u$ az $\mathbb{R}^2$ téren. Az eljárást folytatva u sorának x szerinti negyedik deriváltja egyenletesen konvergens, ez viszont megegyezik a t szerinti formális második deriválttal, ezért $\partial_t^2 u = \partial_x^4 u$, és így tovább. Végeredményben tehát $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, amely a fenti konstrukció alapján kielégíti a (9.26) feladatot.

9.4. Vegyes feladatok

Ebben a szakaszban a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatokkal foglalkozunk. Ehhez legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0 < T < \infty$. Ekkor a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatban olyan u függvényt keresünk, amely kielégíti az egyenletet a $Q_T = \Omega \times (0,T]$ parabolikus hengeren, továbbá u-ra valamilyen kezdeti feltétel adott az $\overline{\Omega} \times \{0\}$ alaplapon, illetve valamilyen peremfeltétel teljesül a $\partial\Omega \times (0,T]$ palástonː

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & Q_T\text{-n}, \\ \text{kezdeti feltétel} & \overline{\Omega} \times \{0\}\text{-n}, \\ \text{peremfeltétel} & \partial\Omega \times (0,T]\text{-n}. \end{cases}$$

Az egyszerűség kedvéért a peremfeltételt válasszuk Dirichlet-félének, ekkor a klasszikus vegyes feladat így írható:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & Q_T\text{-n}, \\ u(x,0) = \varphi_1(x) & (x \in \overline{\Omega}), \\ u(x,t) = \varphi_2(x,t) & (x \in \partial\Omega,\ 0 < t \leq T). \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy a kezdeti és peremfeltételt összevonhatjuk a

$$\Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$$

parabolikus peremen megadott peremfeltétellé. Nevezetesen, $u|_{\Gamma_T} = g$, ahol $g = \varphi_1$ az $\overline{\Omega} \times \{0\}$ halmazon és $g = \varphi_2$ a $\partial\Omega \times (0,T]$ halmazon. Világos, hogy ha a vegyes feladatnak olyan megoldását keressük, amely folytonos a Q_T henger lezártján, akkor g folytonos, így a φ_1, φ_2 függvényekre a $\varphi_1(x) = \lim_{t\to 0+} \varphi_2(x,t)$ *csatlakozási feltételnek* kell teljesülnie minden $x \in \partial\Omega$ esetén. Érdemes most pontosan megfogalmaznunk, mit is értünk a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus vegyes feladat megoldásán első peremfeltétel mellett.

9.30. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0 < T < \infty$. Ekkor a (9.5) *hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus vegyes feladatban* (vagy *kezdeti-peremértékfeladatban*) első peremfeltétel mellett olyan $u \in C^{2,1}(Q_T)$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (9.5) egyenletet $f \in C(Q_T)$ esetén, továbbá $u \in C(\overline{Q_T})$, valamint teljesül az $u|_{\Gamma_T} = g$ feltétel, ahol $g \in C(\Gamma_T)$ adott függvény:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = g. \end{cases} \tag{9.30}$$

A következőkben a maximum- és minimumelvek segítségével igazoljuk, hogy a vegyes feladatnak legfeljebb egy megoldása van, és ha létezik, akkor folytonosan függ az adatoktól. Ezután a Laplace-egyenlet esetében már megismert Fourier-módszernek a hővezetési egyenletre vonatkozó általánosítását mutatjuk be a vegyes feladatok megoldásainak sor alakban való előállítására.

9.4.1. Maximum- és minimumelvek

Az alábbiakban a Laplace-egyenletre vonatkozó maximum- és minimumelveknek a hővezetési egyenletre vonatkozó megfelelőit tárgyaljuk. A motiváció a stacionárius hővezetés esetéhez, a Laplace-egyenlethez hasonló. Ha az Ω tartományban nincsenek források, akkor bármely időpillanatban a tartomány pontjaiban a hőmérséklet nem lehet nagyobb, mint a kezdeti maximumhőmérséklet és a perem adott időintervallumbeli maximumhőmérséklete közül

a nagyobbik. Ezt a gyenge maximumelvet már megfogalmaztuk és beláttuk a Cauchy-feladat egyértelműségével foglalkozó 9.3.4. szakaszban. A teljesség kedvéért most újra kimondjuk.

9.31. Tétel (Gyenge maximumelv $\partial_t u - \Delta u$ operátorra)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0 < T < \infty$. Ha az $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ a Q_T hengeren, akkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

9.32. *Megjegyzés.* Az előbbi tétel bizonyítása szinte szóról szóra átvihető némileg általánosabb, $u \mapsto \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ alakú operátorokra is, ahol $p \in$ $\in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$, tehát a megfogalmazott maximumelv ekkor is érvényben marad. A gyenge maximumelvben az Ω halmaz összefüggőségének valójában nincs szerepe.

Ha az Ω összefüggő, akkor a stacionárius hővezetés esetéhez hasonló módon (lásd a 8.63. Tételt) a gyenge maximumelvnél valójában erősebb állítás is igaz: ha az $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ a Q_T hengeren, ahol Ω korlátos tartomány (fontos az összefüggőség!), továbbá u felveszi $\overline{Q_T}$-beli maximumát Q_T egy (x_0, t_0) pontjában, akkor u konstansfüggvény a Q_{t_0} hengeren. Más szóval, ha u valamilyen $0 < t_0 \leq T$ időpillanatban Ω belsejében felveszi a maximumát, akkor minden korábbi időpillanatban ezzel a maximummal kell megegyeznie. Ez a későbbi időpillanatokra már nem feltétlenül igaz, ott a peremfeltételtől függően u „bármi" lehet. Az erős maximumelv bizonyítása a harmonikus függvények középértéktételének a hővezetési egyenletre vonatkozó megfelelője segítségével történhet (a részleteket lásd a [46] könyvben).

A gyenge maximumelvet a $(-u)$ függvényre alkalmazva (a Laplace-egyenlet esetében már igazolt 8.53. Tétel mintájára) nyerjük az $u \mapsto \partial_t u - \Delta u$ operátorra vonatkozó *gyenge minimumelvet* (amely valójában az

$$u \mapsto \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$$

alakú operátorokra is érvényes, ha $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$).

9.33. Tétel (Gyenge minimumelv $\partial_t u - \Delta u$ operátorra)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0 < T < \infty$. Ha az $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre*

$$\partial_t u - \Delta u \geq 0$$

a Q_T hengeren, akkor

$$\min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

9.34. *Megjegyzés.* Hasonlóan az erős maximumelvhez, érvényes az erős minimumelv is: ha az $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ a Q_T hengeren, ahol Ω korlátos tartomány (fontos az összefüggőség!), továbbá u felveszi $\overline{Q_T}$-beli maximumát Q_T egy (x_0, t_0) pontjában, akkor u konstansfüggvény a Q_{t_0} hengeren.

Ahogy a $-\Delta$ operátor esetében a maximumelvet az

$$u \mapsto -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$

operátorra általánosítottuk, úgy most ugyanezt megtehetjük az $u \mapsto \partial_t u - \Delta u$ operátorról az

$$u \mapsto \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$

alakú operátorra is, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$.

9.35. Tétel (Gyenge maximumelv $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ operátorra)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < \infty$, $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$. Ha az $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre*

$$\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)u + qu \leq 0$$

a Q_T hengeren, akkor

$$\max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+,$$

ahol $u^+(x,t) = \max\{u(x,t), 0\}$ az u függvény pozitív része.

Bizonyítás. Használjuk a tömör $Lu = \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ jelölést. Először azt látjuk be, hogy ha $Lu < 0$ a Q_T hengeren, akkor u-nak nem lehet nemnegatív értékű maximuma, és ebből következni fog a bizonyítandó összefüggés ebben a speciális esetben. Ha az $(x_0, t_0) \in Q_T$ pontban u-nak nemnegatív maximuma volna, akkor ott $u(x_0, t_0) \geq 0$, továbbá $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$, valamint $\partial_j u(x_0, t_0) = 0$ és $\partial_j^2 u(x_0, t_0) \leq 0$ minden j-re, így p és q előjele miatt

$$\begin{aligned}(Lu)(x_0, t_0) = &-p(x_0, t_0)\Delta u(x_0, t_0) \\ &- \sum_{j=1}^{n} \partial_j p(x_0, t_0)\partial_j u(x_0, t_0) + q(x_0, t_0)u(x_0, t_0) \geq 0,\end{aligned}$$

ami ellentmond az $Lu < 0$ feltevésnek. Ha u a Q_T hengeren nem vehet fel nemnegatív értékű maximumot, akkor az u^+ függvény a Γ_T peremen veszi fel a $\overline{Q_T}$-beli maximumát, azaz

$$\max_{\overline{Q_T}} u^+ = \max_{\Gamma_T} u^+.$$

Mivel $u \le u^+$, ezért az előbbi összefüggés egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u^+,$$

vagyis az $Lu < 0$ esetben igaz a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Második lépésben tegyük fel, hogy $Lu \le 0$, és legyen $u_\varepsilon(x,t) = u(x) - \varepsilon t$, ahol $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$Lu_\varepsilon = Lu - L(\varepsilon t) = Lu - \varepsilon < Lu \le 0,$$

tehát az első lépés alapján

$$\max_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon \le \max_{\Gamma_T} u_\varepsilon^+.$$

Ezenkívül $0 \le t \le T$ folytán $u - \varepsilon T \le u_\varepsilon \le u$, így végső soron

$$\max_{\overline{Q_T}} u - \varepsilon T \le \max_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon \le \max_{\Gamma_T} u_\varepsilon^+ \le \max_{\Gamma_T} u^+.$$

Az egyenlőtlenségláncolat elején és végén található kifejezésekből $\varepsilon \to 0+$ határátmenettel adódik a bizonyítandó összefüggés. □

9.36. *Megjegyzés.* A 9.35. Tételt a $(-u)$ függvényre alkalmazva (a stacionárius eset 8.56. Tételével analóg módon) nyerjük a következő minimumelvet: ha az $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre

$$\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \ge 0$$

a Q_T hengeren, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \ge 0$, akkor

$$\min_{\overline{Q_T}} u \ge -\min_{\Gamma_T} u^-,$$

ahol

$$u^- := (-u)^+ = -\min\{u, 0\}$$

az u függvény *negatív része*. Amennyiben pedig $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$, akkor a maximum- és minimumelv is érvényes, így (a stacionárius eset 8.57. Következményének mintájára)

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|.$$

9.37. Következmény. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és nyílt halmaz, $0 < T < \infty$, továbbá $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \ge 0$. Ha az $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre a Q_T hengeren $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)u + qu \le 0$ teljesül, akkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \le \max_{\Gamma_T} |u|.$$

9.38. *Megjegyzés.* Az elliptikus esettől eltérően a parabolikus esetben megfogalmazhatók a maximum- és minimumelv bizonyos formái abban az esetben is, ha q nem feltétlenül állandó előjelű, de alulról korlátos függvény. Nevezetesen ha $q \geq \gamma \in \mathbb{R}$, akkor ez például a $v(t,x) = e^{\gamma t}u(t,x)$ helyettesítés segítségével vezethető vissza a $q \geq 0$ esetre.

9.4.2. A megoldás egyértelműsége

A maximum- és minimumelvnek több fontos következménye van a vegyes feladat megoldásaira nézve: a megoldás egyértelműsége és folytonos függése.

9.39. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < \infty$, továbbá $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$. Ha a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladatnak létezik $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ megoldása, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a vegyes feladat megoldásai, ekkor az $u = u_1 - u_2$ függvényre $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$ a Q_T hengeren, továbbá $u|_{\Gamma_T} = 0$. Így a 9.36. Megjegyzés miatt $\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u| = 0$, tehát $u_1 = u_2$ a $\overline{Q_T}$-on. □

9.40. Tétel (Folytonos függés)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < \infty$, továbbá $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$. Ekkor létezik (csak Ω-tól, T-től, p-től és q-tól függő) $C > 0$ konstans, hogy ha $f \in C(\overline{Q_T})$ és $g \in C(\Gamma_T)$ esetén $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\Gamma_T)$ a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladat (egyértelmű) megoldása, akkor

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \leq \max_{\Gamma_T} |g| + C \max_{\overline{Q_T}} |f|.$$

Bizonyítás. Legyen $Lu = \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$, és vezessük be a $\Phi(t) = T - t$ segédfüggvényt. Ekkor a Q_T hengeren $\Phi \geq 0$ és $L\Phi = -1$. Tekintsük ezek után a

$$v(x,t) = u(x,t) + \Phi(t) \max_{\overline{Q_T}} |Lu|$$

függvényt. Mivel

$$Lv = Lu + L\Phi \max_{\overline{Q_T}} |Lu| = Lu - \max_{\overline{Q_T}} |Lu| \leq 0,$$

ezért a v függvényre érvényes a 9.35. Tételben megfogalmazott gyenge maximumelv, tehát

$$u(x,t) \leq v(x,t) \leq \max_{\overline{Q_T}} v \leq \max_{\Gamma_T} v^+ \leq \max_{\Gamma_T} |u| + (\max_{\overline{Q_T}} \Phi)(\max_{\overline{Q_T}} |Lu|),$$

így

$$u(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} |u| + (\max_{\overline{Q_T}} \Phi)(\max_{\overline{Q_T}} |Lu|). \tag{9.31}$$

Az iménti egyenlőtlenségben u helyére $(-u)$-t írva, $|L(-u)| = |Lu|$ figyelembevételével kapjuk, hogy

$$-u(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} |u| + (\max_{\overline{Q_T}} \Phi)(\max_{\overline{Q_T}} |Lu|). \tag{9.32}$$

A (9.31) és (9.32) egyenlőtlenségekből a $C = \max_{\overline{\Omega}} \Phi$ konstanssal a bizonyítandó

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \leq \max_{\Gamma_T} |u| + C \max_{\overline{Q_T}} |Lu| = \max_{\Gamma_T} |g| + C \max_{\overline{Q_T}} |f|$$

becslést nyerjük. □

A maximum- és minimumelvek mellett a megoldás egyértelműsége igazolható a Green-formulák segítségével is, ahogy ezt a stacionárius hővezetés esetében tettük a 8.26. Tételben. Ekkor azonban csak erősebb simaságú megoldás egyértelműségét tudjuk garantálni a Green-tétel alkalmazhatósági feltételei miatt.

9.41. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < \infty$, továbbá $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$. A*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladatnak legfeljebb egy $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ megoldása lehet, azaz a megoldás egyértelmű.

Bizonyítás. A feladat linearitása miatt elegendő belátnunk, hogy ha az $u \in \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ függvényre

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0 & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = 0, \end{cases}$$

akkor $u = 0$. Legyen

$$E(t) := \int_\Omega u^2(x,t)\,dx \quad (0 \le t \le T),$$

ami nem más, mint a megoldás t időpontbeli potenciális energiája (pontosabban annak konstansszorosa). Megmutatjuk, hogy E monoton csökkenő függvény, vagyis az energia az időben nem növekedhet, ha nincsenek források. Ekkor $E(0) = 0$ és $0 \ge E(t)$ folytán $E(t) = 0$ következik minden t esetén, ahonnan pedig $u = 0$ adódik. Az energia monoton csökkenő voltának igazolásához elég igazolnunk, hogy $E'(t) \le 0$ minden $0 < t < T$ esetén. A simasági feltételek miatt alkalmazható a paraméteres integrálok differenciálhatóságáról szóló tétel, ezért

$$E'(t) = \int_\Omega \partial_t\big(u^2(x,t)\big)\,dx = 2\int_\Omega u\partial_t u = 2\int_\Omega u\left(\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) - qu\right),$$

ahonnan az első Green-formula és a homogén peremfeltétel alapján adódik, hogy

$$E'(t) = -2\int_\Omega \Big(p\,|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2\Big) \le 0,$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani. □

A hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladat megoldásának egyértelműségét egy másik esetben is igazolhatjuk, nevezetesen ha nem egy kezdeti feltételt, hanem egy „végfeltételt" szabunk a megoldásra. Ez azt jelenti, hogy a peremfeltétel mellett $u(x,0) = \varphi_1(x)$ helyett $u(x,T) = \varphi_1(x)$ feltétel adott. Ekkor „fordított irányú" vegyes feladatról beszélhetünk. A megoldás egyértelműségének igazolásához az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy p és q nem függ t-től.

9.42. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < \infty$, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \ge 0$. Ekkor a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n}, \\ u = g & (\partial\Omega \times [0,T]) \cup \big(\overline{\Omega} \times \{T\}\big) \end{cases}$$

„fordított irányú" vegyes feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\overline{Q_T})$ megoldása lehet.

Bizonyítás. Elegendő belátnunk, hogy $f = 0, g = 0$ esetén a „fordított irányú" vegyes feladat egyetlen megoldása $u = 0$. Legyen tehát $u \in C^2(\overline{Q_T})$ megoldása a homogén feladatnak, és (a 9.41. Tétel bizonyításában látott módon) vezessük be a következő, energia jellegű mennyiséget:

$$E(t) := \int_\Omega u^2(x,t)\,dx \quad (0 \le t \le T).$$

Megmutatjuk, hogy $E(t) = 0$ minden $0 \le t \le T$ esetén, amihez először belátjuk, hogy

$$(E'(t))^2 \le E(t)E''(t). \tag{9.33}$$

A paraméteres integrálok differenciálhatósági tételét alkalmazva egyrészt

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\int_\Omega u(x,t)\partial_t u(x,t)\,dx = 2\int_\Omega u\big(\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) - qu\big) \\ &= -2\int_\Omega \left(p\,|\operatorname{grad}u|^2 + qu^2\right), \end{aligned}$$

és így a

$$\partial_t\,|\operatorname{grad}u|^2 = \partial_t\left(\sum_{j=1}^n(\partial_j u)^2\right) = 2\sum_{j=1}^n \partial_j u\partial_j\partial_t u = 2\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}\partial_t u$$

összefüggés felhasználásával

$$E''(t) = -4\int_\Omega (p(x)\operatorname{grad}u(x,t)\cdot\operatorname{grad}\partial_t u(x,t) + q(x)u(x,t)\partial_t u(x,t))\,dx\,dt.$$

Most alkalmazzuk első Green-formulát és a homogén peremfeltételt:

$$\begin{aligned} E''(t) &= -4\int_\Omega \big(p\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}\partial_t u + qu\partial_t u\big) \\ &= 4\int_\Omega \big(\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) - qu\big)\partial_t u \\ &= 4\int_\Omega \big(\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) - qu\big)^2. \end{aligned}$$

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\left(2\int_\Omega u\big(\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) - qu\big)\right)^2 \le \int_\Omega u^2\cdot 4\int_\Omega \big(\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) - qu\big)^2,$$

ami az E, E' és E'' függvények előbbi alakjának figyelembevételével éppen a (9.33) egyenlőtlenséget adja.

Tegyük fel most indirekt módon, hogy $E(t) > 0$ valamely nem üres $[t_1, t_2) \subset$ $\subset [0, T]$ intervallumon. Az E függvény folytonossága és $E(T) = 0$ miatt t_2 megválasztható úgy, hogy $E(t_2) = 0$. Tekintsük ekkor a $[t_1, t_2)$ intervallumon az $F(t) = \log E(t)$ függvényt, amelyre a (9.33) egyenlőtlenség alapján teljesül, hogy

$$F''(t) = \frac{E''(t)}{E(t)} - \frac{(E'(t))^2}{E^2(t)} \ge 0.$$

Így F konvex függvény, ezért tetszőleges $\tau \in (0,1)$ esetén

$$F\big((1-\tau)t_1+\tau t\big) \le (1-\tau)F(t_1)+\tau F(t).$$

Következésképpen

$$0 \le E\big((1-\tau)t_1+\tau t\big) \le E(t_1)^{1-\tau}E(t)^{\tau},$$

ahonnan $t \to t_2$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$0 = E\big((1-\tau)t_1+\tau t_2\big)$$

minden $0 < \tau < 1$ esetén. Ez viszont azt jelenti, hogy $E(t) = 0$ a $[t_1, t_2)$ intervallumon, ami ellentmond az indirekt feltevésnek. □

9.4.3. Fourier-módszer

A Laplace-egyenlet esetében a 8.4.3. alszakaszban ismertettünk egy eljárást, amelynek segítségével a különböző peremérték-feladatok megoldásait előállíthatjuk a megfelelő operátor sajátfüggvényeiből alkotott Fourier-sor alakjában. Ezt a módszert a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatra is általánosíthatjuk. Az egyszerűség kedvéért csak a homogén Dirichlet-peremfeltétel esetével foglalkozunk, tekintsük tehát a következő vegyes feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & Q_T\text{-n}, \\ u = g & \overline{\Omega}\times\{0\}\text{-on}, \\ u = 0 & \partial\Omega\times(0,T]\text{-n}. \end{cases}$$

A 8.4.1. alszakaszban szót ejtettünk arról, hogy korlátos Ω Lipschitz-tartomány esetén a $(-\Delta)$ operátorra vonatkozó klasszikus sajátérték-feladatnak megszámlálhatóan végtelen sok nemnulla λ_k sajátértéke van, és ehhez tartozó u_k sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak (bővebben lásd még a [175] könyvet), és a 8.4.2. alszakaszban speciális tartományok esetén meg is határoztuk a sajátértékeket és sajátfüggvényeket. Tegyük ezért most fel, hogy már ismerjük a homogén Dirichlet-peremfeltételű $(-\Delta)$ operátornak az Ω tartományhoz tartozó λ_k sajátértékeit és u_k $(k = 1, 2, \dots)$ sajátfüggvényeit, azaz

$$\begin{aligned} -\Delta u_k &= 0 \quad \Omega\text{-ban}, \\ u_k|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor a vegyes feladat megoldását célszerű

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)u_k(x)$$

alakban keresni. A sor megfelelő konvergenciája mellett a homogén peremfeltétel automatikusan teljesül (hiszen az u_k sajátfüggvényekre is homogén peremfeltétel vonatkozik), másrészt pedig a sor tagonkénti formális deriválásával

$$\partial_t u - \Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi'(t) - \xi_k \Delta u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k) u_k.$$

Az $x \mapsto f(t,x)$ függvényt minden rögzített t esetén a sajátfüggvények bázisában felírva

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) u_k(x),$$

ahonnan a $\partial_t u - \Delta u = f$ egyenlet két oldalán lévő sorok együtthatóinak egyenlőségéből szükségképpen

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = c_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ezenkívül a kezdeti feltételt is célszerű a sajátfüggvények bázisában sorba fejteni:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_k(x),$$

így az $u(x,0) = g(x)$ kezdeti feltétel két oldalán lévő sorfejtések együtthatóinak egyenlősége alapján

$$\xi_k(0) = d_k.$$

Tehát mindegyik ξ_k függvényre a következő, elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenletet tartalmazó kezdetiérték-feladatot nyertük:

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = c_k(t) \quad (0 < t \le T), \tag{9.34}$$

$$\xi_k(0) = d_k. \tag{9.35}$$

A kezdetiérték-feladatok egyértelmű ξ_k megoldásainak segítségével adódik a vegyes feladat u megoldása Fourier-sor alakban. Fontos kiemelni, hogy a kapott sor általában csak $L^2(Q_T)$-ben konvergens. Azt, hogy a sor összege valóban kielégíti a klasszikus vegyes feladatot, ellenőrizni kell (alkalmas elegendő feltételek szerepelnek a [175] könyvben).

Ugyanakkor igazolható, hogy alkalmas feltételek teljesülése esetén a Fourier-módszerrel nyert sor összege bizonyos „gyenge értelemben" kielégíti a vegyes feladatot (l. a 17. fejezetet és a [175] tankönyvet).

A fentiek alapján igazolhatjuk a következő tételt.

9.43. Tétel. *Tegyük fel, hogy a ξ_k függvények kielégítik a* (9.34), (9.35) *kezdetiérték-feladatot, és az ezekkel felírt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) u_k(x) \tag{9.36}$$

sor, valamint a t szerinti első és x_j szerinti legfeljebb másodrendű tagonkénti deriválással nyert sorok egyenletesen konvergensek az $\overline{\Omega} \times [0,T]$ halmazon. Ekkor a sor $u(x,t)$ összegére teljesül $u \in C^{2,1}\left(\overline{Q_T}\right)$, és u kielégíti a vegyes feladatot az első peremfeltétel esetén. Továbbá ekkor az f, g függvények szükségképpen kielégítik az

$$f(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T], \tag{9.37}$$

$$g(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{9.38}$$

és

$$\Delta g(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{9.39}$$

peremfeltételeket.

Bizonyítás. Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor a (9.36) sor t szerinti első és x_j szerinti legfeljebb második parciális deriváltjai tagonkénti deriválással számolhatók, és az összegre nyilván $u \in C^{2,1}\left(\overline{Q_T}\right)$ teljesül, továbbá

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k'(t)u_k(x) - \xi_k(t)\Delta u_k(x)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k'(t) - \lambda_k\xi_k(t)\right] u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)u_k(x) = f(x,t).\end{aligned}$$

Mivel a (9.36) sor és a t szerinti első deriváltakból képzett sor egyenletesen konvergens az $\overline{\Omega} \times [0,T]$ halmazon, azért

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(0)u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_k(x) = g(x), \qquad x \in \Omega_0.$$

Mivel $u \in C^{2,1}(Q_T)$, azért

$$g(x) = u(x,0) = 0 \quad x \in \partial\Omega \text{ esetén}, \tag{9.40}$$

hiszen $u(x,t) = 0$ ha $x \in \partial\Omega, t \in [0,T]$.

A (9.37) összefüggéshez felhasználjuk a tagonkénti deriválással nyert sorok egyenletes konvergenciáját:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k'(t) - \lambda_k\xi_k(t)\right] u_k(x) = 0,$$

ha $x \in \partial\Omega, t \in [0,T]$, hiszen a sor minden tagjára teljesül

$$\xi_k'(t) - \lambda_k\xi_k(t) = 0, \qquad \text{ha } x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T].$$

Végül a tagonkénti kétszeres deriválhatóság miatt

$$\Delta g(x) = \Delta u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(0)\Delta u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(0)\lambda_k u_k(x) = 0, \quad \text{ha } x \in \partial\Omega,$$

hiszen a sor minden tagjára teljesül

$$\xi_k(0)\lambda_k u_k(x) = 0, \quad \text{ha } x \in \partial\Omega. \qquad \square$$

9.44. *Megjegyzés.* A 9.43. Tételhez hasonló tétel igazolható a harmadik peremfeltétel esetén.

A ξ_k függvényekre vonatkozó (9.34), (9.35) kezdetiérték-feladatot úgy is levezethetjük, hogy nem használjuk $u(x,t)$ sorának tagonkénti differenciálhatóságát. Nevezetesen igaz a következő tétel.

9.45. Tétel. *Tegyük fel, hogy $u \in C^{2,1}\left(\overline{Q_T}\right)$ kielégíti a vegyes feladatot a harmadik („általános") peremfeltétel esetén. Ekkor az $x \mapsto u(x,t)$ függvényt sorba fejtve rögzített $t \in [0,T]$ mellett a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszere szerint:*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)u_k(x),$$

a ξ_k függvények kielégítik a (9.34), (9.35) *kezdetiérték-feladatot.*

Bizonyítás. Feltevésünk szerint

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad x \in \overline{\Omega}, t \in [0,T],$$

ahol rögzített t esetén minden tag folytonos $\overline{\Omega}$-n, tehát az $L^2(\Omega)$ térben van. Szorozzuk a differenciálegyenletet $u_k(t)$-vel, és integráljuk x szerint Ω-n:

$$\int_\Omega \partial_t u(x,t)u_k(x)dx - \int_\Omega \Delta u(x,t)u_k(x)dx = \int_\Omega f(x,t)u_k(x)dx. \qquad (9.41)$$

Mivel $u \in C^{2,1}\left(\overline{Q_T}\right)$, ezért alkalmas c_0 állandóra

$$|\partial_t u(x,t)u_k(x)| \le c_0 |u_k(x)|, \qquad x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T],$$

így

$$\int_\Omega \partial_t u(x,t)u_k(x)dx = \partial_t \int_\Omega u(x,t)u_k(x)dx = \xi_k'(t).$$

Továbbá a második Green-formula (8.5. Tétel) szerint (felhasználva, hogy $u_k \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ és kielégíti a homogén (harmadik) peremfeltételt),

$$\int_\Omega \Delta u(x,t)u_k(x)dx = \int_\Omega u(x,t)\Delta u_k(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left[(\partial_\nu u)u_k - u(\partial_\nu u_k)\right] d\sigma_x$$

$$= \lambda_k \int_\Omega u(x,t)u_k(x)dx + \int\limits_{\substack{\partial\Omega,\\ h(x)\neq 0}} \left[\left(-\frac{g}{h}u\right)u_k - u\left(-\frac{g}{h}u_k\right)\right] d\sigma_x$$

$$= \lambda_k \int_\Omega u(x,t)u_k(x)dx = \lambda_k \xi_k(t).$$

Így (9.41) alapján megkapjuk a (9.34) differenciálegyenletet.

Végül a kezdeti feltételt $u_k(x)$-szel szorozva és x szerint integrálva Ω-n:

$$\xi_k(0) = \int_\Omega u(x,0)u_k(x)dx = \int_\Omega g(x)u_k(x)dx = d_k,$$

így megkaptuk a (9.35) kezdeti feltételt. □

9.46. *Megjegyzés.* A 9.45. Tételből következik, hogy a vegyes feladatnak legfeljebb egy $u \in C^{2,1}\left(\overline{Q_T}\right)$ megoldása lehet. Vegyük észre, hogy a korábbi egyértelműségi tétel bizonyítása során nem használtuk fel, hogy a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2(\Omega)$-ban.

9.47. *Megjegyzés.* Természetesen homogén Dirichlet-peremfeltétel helyett az ismert peremfeltételek bármelyikét vehetjük, ekkor az operátor megfelelő peremfeltételhez tartozó sajátfüggvényei szerint kell sorba fejtenünk a megoldást. Végül homogén peremfeltétel helyett inhomogén peremfeltétel is vehető, ekkor célszerű először olyan függvényt keresni, amelyik az inhomogén peremfeltételt kielégítő, és annak segítségével a feladat visszavezethető a homogén peremfeltétel esetére.

Az alábbiakban két egyszerű példát mutatunk a Fourier-módszer alkalmazására.

9.48. Példa. Keressük meg az alábbi vegyes feladat megoldását Fourier-módszerrel!

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = \sin 2x \cos 2x & ((x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty)), \\ u(x,0) = \sin 3x - 4\sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

Először is vegyük észre, hogy $\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$. Bontsuk szét a feladatot két részproblémára:

$$\begin{cases} \partial_t v_1(x,t) - \partial_x^2 v_1(x,t) = \dfrac{1}{2}\sin 4x & ((x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty)), \\ v_1(x,0) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ v_1(0,t) = v_1(\pi,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+) \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} \partial_t v_2(x,t) - \partial_x^2 v_2(x,t) = 0 & ((x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)), \\ v_2(x,0) = \sin 3x - 4 \sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ v_2(0,t) = v_2(\pi,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

A linearitás miatt az eredeti vegyes feladat u megoldása az előbbi két részfeladat megoldásainak összegeként adódik.

Az első részfeladat esetében fejtsük Fourier-sorba a $\sin 4x$ függvényt:

$$\sin 4x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cdot \sin kx.$$

Világos, hogy $c_k = 1$, ha $k = 4$, különben pedig $c_k = 0$. Ekkor a v_1 megoldást

$$v_1(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin kx$$

alakban keresve, az egyenlet és a kezdeti feltétel felhasználásával kapjuk, hogy $k \neq 4$ esetén

$$\begin{aligned} \xi_k'(t) &= 0 \quad (t > 0), \\ \xi_k(0) &= 0, \end{aligned}$$

valamint $k = 4$ esetén

$$\begin{aligned} \xi_4'(t) + 16\xi_4(t) &= \frac{1}{2}, \\ \xi_4(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor $\xi_k = 0$, ha $k \neq 4$, továbbá az utóbbi elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet mindkét oldalát e^{16t}-vel szorozva

$$e^{16t}\xi_4'(t) + 16e^{16t}\xi_4(t) = \frac{1}{2}e^{16t},$$

azaz $(e^{16t}\xi_4(t))' = \frac{1}{2}e^{16t}$, így

$$\xi_4(t) = \frac{1}{32}(1 - e^{-16t}).$$

Tehát

$$v_1(t,x) = \frac{1}{32}(1 - e^{-16t}) \sin 4x,$$

amiről egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy valóban megoldása az első részfeladatnak. (Mivel a nyert sor valójában egy véges összeg, azért a

módszer szükségszerűen egy megoldást ad, nem kell ellenőriznünk a sor konvergenciájának tulajdonságait.)

Tekintsük most a második részfeladatot! Mivel a kezdeti függvény a homogén Dirichlet-féle peremfeltétellel adott mínusz Laplace-operátor sajátfüggvénye, ezért keressük a megoldást

$$v_2(t,x) = d_1(t)\sin 3x + kd_2(t)\sin 5x$$

alakban. Ekkor az egyenletbe helyettesítve és a kezdeti feltételt figyelembe véve (az előző rész gondolatmenetére támaszkodva) d_1-re és d_2-re a következő egydimenziós kezdetiérték-feladat adódik: $d_1'(t) = -9d_1(t), d_1(0) = 1$ és $d_2'(t) = -25d_2, d_2(0) = -4$. Ezek megoldásai $d_1(t) = e^{-9t}$ és $d_2(t) = -4e^{-25t}$, így

$$v_2(t,x) = e^{-9t}\sin 3x - 4e^{-25t}\sin 5x,$$

ami valóban megoldás (mert ismét véges összegről van szó).

A vegyes feladat megoldása a linearitás miatt a két részfeladat megoldásának összege, vagyis

$$u(t,x) = \frac{1}{32}(1 - e^{-16t})\sin 4x + e^{-9t}\sin 3x - 4e^{-25t}\sin 5x.$$

Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása bármely $[0,T]$ intervallumon egyértelmű.

9.49. Példa. Oldjuk meg a következő vegyes feladatot a Fourier-módszerrel!

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = t\cos x & ((x,t) \in \times(0,\pi)\times(0,\infty)), \\ u(x,0) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

Keressük most az u megoldást $u(t,x) = d(t)\cos x$ alakban, hiszen Neumann-típusú peremfeltétel adott, és ebben az esetben a $(-\Delta)$ operátornak a $(0,\pi)$ intervallumon sajátfüggvénye a $\cos x$ függvény. Ekkor a kezdeti feltételből $d(0) = 0$ adódik, továbbá u-t az egyenletbe helyettesítve a $d'(t) + d(t) = t$ közönséges differenciálegyenletet kapjuk. A differenciálegyenlet mindkét oldalát e^t-vel szorozva $e^t d'(t) + e^t d(t) = te^t$, így $(e^t d(t))' = te^t$, tehát (mivel $(te^t - e^t)' = te^t$, ezért) $d(t) = t - 1 + ce^{-t}$, így a kezdeti feltétel alapján $d(t) = t - 1 + e^{-t}$. Tehát $u(x,t) = (e^{-t} + t - 1)\cos x$, és ez valóban megoldás. Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása bármely $[0,T]$ intervallumon egyértelmű, így $[0,\infty)$-en is az.

9.5. Feladatok

9.1. Igazoljuk, hogy ha az $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u = 0$ teljesül, továbbá $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ konvex függvény, akkor a $v = \Phi(u)$ függvényre $\partial_t v - \Delta v \leq 0$.

9.2. Mutassuk meg, hogy ha az $u \in C^4(\mathbb{R}^{n+1})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u = 0$, akkor a $v = |\operatorname{grad} u|^2 + (\partial_t u)^2$ függvényre $\partial_t v - \Delta v \leq 0$.

9.3. Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = tx^3 & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = e^x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

9.4. Keressük meg a következő Cauchy-feladat megoldását úgy, hogy megfelelő új ismeretlen függvény bevezetésével az egyenletet a hővezetési egyenletre transzformáljuk!

$$\begin{cases} \partial_t u - 4\partial_x^2 u + u = e^x & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

9.5. a) Legyenek $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ konstansok. Igazoljuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} \cos by \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

b) Az előző részben szereplő integrál felhasználásával keressük meg a következő Cauchy-feladat megoldását!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ u(x,0) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

9.6. Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = txy & \mathbb{R}^3_+\text{-ban}, \\ u(x,y,0) = xy & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

9.7. Mutassuk meg, hogy az egydimenziós hővezetési egyenletre vonatkozó alábbi típusú feladatnak végtelen sok megoldása van:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

9.8. Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R})$ korlátos függvény, és legyen u a

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}_+^2\text{ban}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Cauchy-feladat (9.15) képlettel adott megoldása. Igazoljuk, hogy

a) ha g páratlan függvény, akkor minden rögzített $t \in \mathbb{R}_0^+$ esetén az $x \mapsto u(x,t)$ függvény is páratlan;

b) ha g monoton függvény, akkor minden rögzített $t \in \mathbb{R}_0^+$ esetén az $x \mapsto u(x,t)$ függvény is monoton;

c) ha g konvex (konkáv) függvény, akkor minden rögzített $t \in \mathbb{R}_0^+$ esetén az $x \mapsto u(x,t)$ függvény is konvex (konkáv).

9.9. Legyen $g \in C(\mathbb{R})$ korlátos függvény, valamint $f \in C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ korlátos függvény, amelyre $\partial_t f, \partial_x f, \partial_x^2 f$ korlátosak. Igazoljuk, hogy a

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = f & \mathbb{R}_+^2\text{ban}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Cauchy-feladat megoldása folytonosan függ f-től és g-től a következő értelemben: minden $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén

$$|u(x,t)| \le \sup_{\mathbb{R}} |g| + t \cdot \sup_{(\xi,\tau)\in[0,t]\times\mathbb{R}} |f(\xi,\tau)|.$$

9.10. Tekintsük az alábbi, nem korlátos tartományon értelmezett vegyes feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}_0^+), \\ u(0,t) = \varphi(t) & (t \in \mathbb{R}_0^+), \end{cases}$$

ahol $\varphi \in C(\mathbb{R}_0^+)$ korlátos függvény, amelyre $\varphi(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor a következő formulával értelmezett u függvény megoldása az előbbi feladatnak:

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} \varphi(s)\, ds.$$

9.11. Oldjuk meg a következő egydimenziós vegyes feladatokat!

a)
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = \sin t \sin x & ((x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)), \\ u(x,0) = \sin 2x & (x \in [0,\pi]), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = t\sin x & ((x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty)), \\ u(x,0) = x & (x \in [0,\pi]), \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = \pi & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = \cos 2x & ((x,t) \in \times(0,\pi)\times(0,\infty)), \\ u(x,0) = \cos x & (x \in [0,\pi]), \\ u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

9.12. Legyen $\Omega = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Oldjuk meg a következő kétdimenziós vegyes feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = \sin x \sin 2y & (\Omega\times(0,\infty)\text{-en}), \\ u(x,y,0) = \sin 2x \sin 3y & ((x,y) \in [0,\pi]^2), \\ u(x,y,t) = 0 & ((x,y) \in \partial[0,\pi]^2,\ t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

10. fejezet

A hullámegyenlet. Állandó együtthatós hiperbolikus egyenlet

Soha nem leszel más, mint filozófus; és mi az a filozófus! — egy őrült, aki élete során kínozza magát, hogy majd beszéljenek róla, ha már nem lesz.

Etiennette Gabrielle Ponthieux (kb. 1683–1775) szánalommal teli szavai nevelt fiához, Jean le Rond d'Alembert-hez.

A fejezet tartalma. Röviden emlékeztetünk a hullámegyenlet fizikai motivációjára. Ezután az egydimenziós hullámegyenlet általános megoldását felhasználva megoldjuk az egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatot. Ezt követően az n dimenziós hullámegyenletre és az állandó együtthatós hiperbolikus egyenletre vonatkozó vegyes feladatot tárgyaljuk: bebizonyítjuk a megoldás egyértelműségét, és bemutatjuk a megoldás előállítására szolgáló Fourier-módszert.

10.1. Fizikai motiváció

A fizikai példákkal foglalkozó 6.3. szakaszban foglalkoztunk a kis kitéréseket végző húrban lejátszódó hullámmozgással. Ha a húr x koordinátájú pontjának kitérését a t időpontban $u(x,t)$-vel jelöljük, akkor az u függvény az alábbi differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\partial_t^2 u - \frac{T}{\mu}\partial_x^2 u = \frac{F}{\mu}, \tag{10.1}$$

ahol T jelöli a húrban ébredő állandó nagyságú, érintő irányú feszítőerőt, μ a húr (állandó) lineáris sűrűségét, F pedig a húrra merőleges irányú külső erő sűrűségét.

Az u függvény meghatározásához szükségünk van a húr kezdeti kitérésének és sebesség-eloszlásának ismeretére, továbbá a húr végpontjaiban meg kell adnunk valamilyen peremfeltételt. Ha a húr az egész számegyenest elfoglalja, akkor nincs szükség peremfeltételre, és akkor a Cauchy-feladatról van szó. A 7.2. szakaszban beláttuk, hogy a (10.1) egyenlet a

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f$$

kanonikus alakra hozható, ezt nevezzük egydimenziós hullámegyenletnek.

A 6.3. szakaszban láttunk egy kétdimenziós példát: egy vékony homogén lemez vagy membrán rezgéseit. Ha a membrán pontjait (x, y) koordinátákkal, az (x, y) pontbeli függőleges kitérését a t időpontban $u(x, y, t)$-vel jelöljük, akkor a

$$\partial_t^2 u - \frac{S}{\sigma}\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right) = 0 \tag{10.2}$$

differenciálegyenletet nyerjük, ahol S a membrán felületi feszültségét, σ pedig a membrán egységnyi területű tömegét jelöli. Ezt az egyenletet a 7.2. szakasz szerint a

$$\partial_t^2 u - \left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right) = 0$$

kanonikus alakra transzformálhatjuk, amit kétdimenziós (homogén) hullámegyenletnek nevezünk. Általában az n dimenziós hullámegyenletnek nevezzük a

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0$$

egyenletet. Ennek egyértelmű megoldhatóságához elő kell írnunk kezdeti feltételeket és peremfeltételeket, illetve ha az x változó tartománya $\mathbb{R}^n$, akkor csak kezdeti feltételeket kell megadnunk. Az utóbbi esetben Cauchy-feladatról beszélünk.

10.2. Az egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat

10.2.1. A klasszikus Cauchy-feladat kitűzése

Tekintsük az egydimenziós

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f \tag{10.3}$$

hullámegyenletet, ahol a keresett $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény első változóját x-szel, a második változóját t-vel jelöljük. A fenti egyenletre vonatkozó

Cauchy-feladatban olyan u függvényt keresünk, amely kielégíti a (10.3) hullámegyenletet az $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ féltérben, és $t=0$ esetén u-ra valamilyen kezdeti feltétel teljesül, azaz

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben,} \\ \text{kezdeti feltétel} & \mathbb{R}\times\{0\}\text{-n.} \end{cases}$$

Klasszikus Cauchy-feladat esetében olyan megoldást keresünk, amely mindkét változójában kétszer folytonosan differenciálható. Pontosabban:

10.1. Definíció. A (10.3) hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatban (kezdetiérték-feladatban) olyan $u\in C^2(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (10.3) egyenletet valamely megadott $f\in C(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ esetén, továbbá $u\in C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, $\partial_t u\in C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, és teljesül az $u(x,0)=g(x)$, $\partial_t u(x,0)=h(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ kezdeti feltétel, ahol $g,h\in C(\mathbb{R})$ adott függvények:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben,} \\ u(x,0)=g(x), \quad \partial_t u(x,0)=h(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{10.4}$$

A (10.3) hullámegyenletre vonatkozó (10.4) klasszikus Cauchy-feladatot két részfeladatra bontjuk, az egyikben $f=0$, azaz

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \partial_x^2 u_1 = 0 & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben,} \\ u_1(x,0)=g(x), \quad \partial_t u_1(x,0)=h(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

a másikban pedig $g=0$ és $h=0$, vagyis

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_2 - \partial_x^2 u_2 = f & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben,} \\ u_2(x,0)=0, \quad \partial_t u_2(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

A feladat linearitásából következően világos, hogy ha u_1 és u_2 a részfeladatok megoldásai, akkor u_1+u_2 az eredeti (10.4) feladat megoldása. Célszerű először a részfeladatok megoldásának előállításával foglalkoznunk, így az eredeti feladat megoldását is meg fogjuk kapni. Az első részfeladat megoldását a homogén hullámegyenlet általános megoldásának felhasználásával fogjuk nyerni, a második részfeladatot pedig a 9. fejezetben használt Duhamel-elv alkalmazásával fogjuk megoldani.

10.2.2. A homogén egyenlet megoldása

Tekintsük tehát a homogén egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben,} \\ u(x,0)=g(x), \quad \partial_t u(x,0)=h(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{10.5}$$

Az 5.10. Példában láttuk, hogy az egydimenziós hullámegyenlet megoldásai

$$u(x,t) = C(t+x) + D(t-x) \tag{10.6}$$

alakúak, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

Nézzük meg, milyen C és D esetében elégíti ki a (10.6) függvény a kezdeti feltételeket. A kezdeti feltételek akkor és csak akkor teljesülnek, ha

$$C(x) + D(-x) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{10.7}$$

$$C'(x) + D'(-x) = h(x) \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10.8}$$

A második egyenletet integrálva kapjuk:

$$C(x) - D(-x) = \int_0^x h(\xi)\, d\xi + c, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10.9}$$

A (10.7)–(10.8) rendszerből

$$C(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) + \int_0^x h(\xi)\, d\xi\right] + \frac{c}{2}, \tag{10.10}$$

$$D(-x) = \frac{1}{2}\left[g(x) - \int_0^x h(\xi)\, d\xi\right] - \frac{c}{2},$$

azaz

$$D(x) = \frac{1}{2}\left[g(-x) - \int_0^{-x} h(\xi)\, d\xi\right] - \frac{c}{2}. \tag{10.11}$$

(10.10) és (10.11) alapján a (10.6) alakú u függvény pontosan akkor elégíti ki a kezdeti feltételeket, ha

$$\begin{aligned} 2u(x,t) &= \left[g(x+t) - \int_0^{x+t} h(\xi)\, d\xi\right] + c + \left[g(x-t) - \int_0^{x-t} h(\xi)\, d\xi\right] - c \\ &= [g(x+t) + g(x-t)] + \int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

A fentiek alapján a klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy megoldása lehet, hiszen $g = 0$, $h = 0$, $f = 0$ esetén $u = 0$. Továbbá $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ esetén a fenti C és D függvények kétszer folytonosan differenciálhatók, és azokat éppen úgy határoztuk meg, hogy u kielégítse a kezdeti feltételeket. Kaptuk tehát a következő tételt.

10.2. Tétel. *A* (10.4) *klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy megoldása lehet. Ha* $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, $f = 0$, *akkor a klasszikus Cauchy-feladatnak létezik* $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ *megoldása, mégpedig:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi.$$

10.2.3. Az inhomogén egyenlet megoldása

Tekintsük az inhomogén egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot homogén kezdeti feltételek mellett:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben}, \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = 0, & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{10.12}$$

Ennek megoldását a 9. fejezetben használt Duhamel-elvvel visszavezetjük a (10.5) feladatra. Tekintsük ugyanis rögzített $\tau \geq 0$ esetén az alábbi kezdetiérték-feladatot a v függvényre:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = 0 & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben}, \\ v(x,0) = 0, \quad \partial_t v(x,0) = f(x,\tau), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{10.13}$$

Legyen ennek megodlása $v(x,t;\tau)$.

10.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Ekkor a (10.13) feladatnak létezik $(x,t)\to v(x,t;\tau)$ megoldása, amely x és t szerint kétszer folytonosan differenciálható.*

Továbbá az

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau, \quad x\in\mathbb{R}, t\geq 0 \tag{10.14}$$

képlettel értelmezett függvényre $u\in C^2\left(\overline{\mathbb{R}^2_+}\right)$, és u kielégíti a (10.12) problémát.

Bizonyítás. A 10.2. Tétel szerint a (10.13) feladatnak (egyértelműen meghatározott) v megoldása

$$v(x,t;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(\xi,\tau)\,d\xi, \quad x\in\mathbb{R}, t\geq 0, \tau\geq 0, \tag{10.15}$$

ez x és t szerint kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}\times[0,\infty)$-en, továbbá τ szerint egyszer folytonosan deriválható $[0,\infty)$-en. Ezért a 2.20. Tétel és (10.15) szerint a (10.14) által definiált u függvényre $u\in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, továbbá

$$\partial_t u(x,t) = v(x,0;t) + \int_0^t \partial_t v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau = \int_0^t \partial_t v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau, \tag{10.16}$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) &= \partial_t v(x,0;t) + \int_0^t \partial_t\partial_t v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau \\ &= f(x,t) + \int_0^t \partial_t^2 v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{10.17}$$

illetve

$$\partial_x^2 u(x,t) = \int_0^t \partial_t^2 v(x,t-\tau;\tau)\, d\tau. \tag{10.18}$$

Így (10.17), (10.18) és (10.13) alapján

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) &= f(x,t) + \int_0^t \left[\partial_t^2 v(x,t-\tau;\tau) - \partial_x^2 v(x,t-\tau;\tau)\right]\, d\tau \\ &= f(x,t).\end{aligned}$$

Végül (10.14) és (10.16) szerint $u(x,0) = 0$, $\partial_t u(x,0) = 0$. □

Tehát a (10.12) Cauchy-feladatra kaptuk:

10.4. Tétel. *Legyen $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Ekkor a* (10.12) *Cauchy-feladat (egyértelműen meghatározott) $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ megoldására:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi\right]\, d\tau.$$

Végül a (10.4) Cauchy-feladat megoldására a következő tételt nyertük:

10.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Ekkor a* (10.4) *klasszikus Cauchy-feladatnak létezik egyetlen $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ megoldása, mégpedig*

$$\begin{aligned}u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi\right]\, d\tau.\end{aligned} \tag{10.19}$$

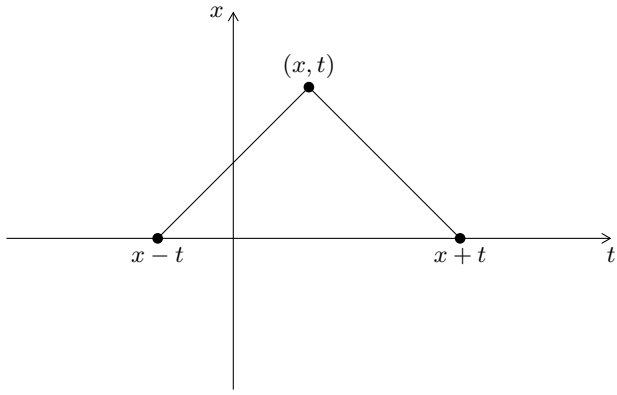
A (10.19) *képletet d'Alembert-formulának nevezzük.*

10.6. *Történeti megjegyzés.* A d'Alembert-formula Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) francia matematikus és filozófus nevét viseli. D'Alembert 1747-ben írt két cikkével kezdődött a rezgő húr problémakörének vizsgálata a parciális differenciálegyenletek segítségével (lásd [34, 35]). A probléma Brook Taylor (1685–1731) angol matematikustól ered (akiről a Taylor-sor is a nevét kapta), és ő az első, aki tulajdonképpen a hullámegyenletet először felírta. D'Alembert cikkében adott kezdeti kitérés és kezdeti sebesség mellett meghatározta a húr alakját, megadva a (12.11) formulát is. A cikk egy új területet nyitott meg, d'Alembert-t követve Euler és Daniel Bernoulli foglalkozott e témakörrel. Érdemes megjegyezni, hogy d'Alembert a matematika

más területein is meghatározót alkotott, lásd például a d'Alembert-féle hányadoskritériumot, illetve a fizikában a d'Alembert-féle elv viseli a nevét, de foglalkozott a folyadékok mechanikájával és a fénytöréssel is. Ezenkívül részt vett a francia Enciklopédia szerkesztésében is.

Végül érdekességként megemlítjük, hogy születésekor anyja a (Notre Dame melletti egykori) Saint Jean le Rond kápolna lépcsőin hagyta, és innen kapta keresztnevét, a d'Alembert vezetéknevet pedig később vette fel.

10.7. *Megjegyzés.* A d'Alembert-formulából leolvasható, hogy a hullám véges (egységnyi) sebességgel terjed. Ez azt jelenti, hogy a Cauchy-feladat megoldása egy (x,t) pontban $(t>0)$ a g,h,f függvényeknek csak az (x,t) pontban átmenő 1, illetve -1 iránytangensű egyenesek és a $t=0$ egyenes által határolt háromszögben felvett értékeitől függ (l. az ábrát). Ezzel kapcsolatban lásd a 10.6. Feladatot.



10.1. ábra. A 10.7. Megjegyzés szemléltetése (a hullámterjedés sebessége)

A többváltozós hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladattal a 12. fejezetben foglalkozunk.

10.3. Vegyes feladatok

Ebben a szakaszban az állandó együtthatós lineáris hiperbolikus egyenletekre és ezen belül az n dimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes (kezdeti-peremérték-) feladatokkal foglalkozunk. Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0<T<\infty$. A 7.2.2. pontban láttuk, hogy az állandó együtthatós lineáris hiperbolikus egyenletek kanonikus alakja

$$\partial_t^2 u-\Delta u+cu=f. \tag{10.20}$$

Az erre az egyenletre vonatkozó vegyes feladatban olyan u függvényt keresünk, amely kielégíti a differenciálegyenletet az $\Omega \times (0,T]$ hengerben, u-ra valamilyen kezdeti feltétel teljesül az $\overline{\Omega} \times \{0\}$ alaplapon, és valamilyen peremfeltétel teljesül a $\partial\Omega \times [0,T]$ palláston:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + cu = f & \Omega \times (0,T]\text{-ben}, \\ \text{kezdeti feltétel} & \overline{\Omega} \times \{0\}\text{-n}, \\ \text{peremfeltétel} & \partial\Omega \times [0,T]\text{-n}. \end{cases}$$

A továbbiakban (az első és második peremfeltételt speciális esetként tartalmazó) harmadik peremfeltételt fogjuk tekinteni, ekkor a klasszikus vegyes feladat így írható:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + cu = f & \Omega \times (0,T]\text{-ben}, \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \partial_t u(x,0) = \varphi_2(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ g(x) + u(x,t) + h(x)\partial_\nu u(x,t) = \psi(x), & x \in \partial\Omega, \quad 0 \le t \le T, \end{cases}$$

ahol $g, h \in C(\partial\Omega)$ adott függvények, amelyekre $gh \ge 0$, $g + h \ne 0$.

Most pontosan megfogalmazzuk, mit értünk a fenti vegyes feladat klasszikus megoldásán.

10.8. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0 < T < \infty$. A (10.20) egyenletre vonatkozó klasszikus vegyes feladatban olyan $u \in C^2(\Omega \times (0,T])$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (10.20) differenciálegyenletet $\Omega \times (0,T]$-n $f \in C(\Omega \times (0,T])$ jobb oldal esetén, továbbá $u \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$, és teljesülnek a kezdeti és peremfeltételek:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + cu = f & \Omega \times (0,T]\text{-ben}, \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \partial_t u(x,0) = \varphi_2(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ g(x)u(x,t) + h(x)\partial_\nu u(x,t) = \psi(x), & x \in \partial\Omega, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{10.21}$$

ahol $g, h \in C(\partial\Omega)$ adott függvények, amelyekre $gh \ge 0$, $g + h \ne 0$.

10.3.1. Egyértelműség

Megmutatjuk, hogy a (10.21) klasszikus vegyes feladatnak legfeljebb egy megoldása lehet a definícióban szereplő függvényosztálynál szűkebb $C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ függvényosztályban.

10.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $g, h \in C(\partial\Omega)$ függvényekre $gh \ge 0$, $g + h \ne 0$ minden $x \in \Omega$ pontra. Ekkor a* (10.21) *vegyes feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ megoldása lehet.*

Bizonyítás. Célszerű bevezetni valamely $a > 0$ mellett az $\tilde{u}(t) = e^{-at}u(t)$ képlet segítségével az $\tilde{u}$ függvényt. Egyszerű számolással nyerjük, hogy $u \in \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ akkor és csak akkor elégíti ki a (10.21) vegyes feladatot, ha az $\tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ függvényre

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} + a\partial_t \tilde{u} + (a^2 + c)\tilde{u} = e^{-at} f & \Omega \times (0,T]\text{-ben}, \\ \tilde{u}(x,0) = \varphi_1(x), \quad \partial_t \tilde{u}(x,0) = \varphi_2(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ g(x)\tilde{u}(x,t) + h(x)\partial_\nu \tilde{u}(x,t) = e^{-at}\psi(x), & x \in \partial\Omega, \quad 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{10.22}$$

Elég belátnunk, hogy elég nagy $a > 0$ számot választva $f = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\psi = 0$ esetén a (10.22) feladatot csak az $\tilde{u} = 0$ függvény elégíti ki a $C^2(\overline{\Omega} \times$ $\times [0,T])$ függvényosztályból, vagyis a (10.22) feladat megoldása egyértelmű a $C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ függvényosztályban.

Tegyük fel, hogy $\tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ a (10.22) feladat megoldása $f = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\psi = 0$ esetén. Értelmezzük a v függvényt a következőképpen: tetszőleges rögzített $s \in [0,T]$ esetén legyen

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_t^s u(x,\tau)d\tau, & 0 \le t \le s, \\ 0, & s < t \le T. \end{cases} \tag{10.23}$$

Ekkor a $Q_s = \Omega \times (0,s)$ halmazon $v \in C^1(\overline{Q_s})$, és $\partial_t v \in C^1(\overline{Q_s})$, továbbá

$$\partial_t v = -u \qquad Q_s\text{-en}. \tag{10.24}$$

Szorozzuk ezzel a v függvénnyel a (10.22) differenciálegyenletet, majd integráljuk a Q_s hengeren, így a Fubini-tétellel, parciális integrálással és az első Green-tétellel (8.3 Tétel) kapjuk (10.24) felhasználásával:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Q_s} \left(\partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u}\right) v + a \int_{Q_s} (\partial_t \tilde{u})\, v + (a^2 + c) \int_{Q_s} \tilde{u} v \\ &= \int_0^s \left\{ \int_\Omega \left[\partial_t^2 \tilde{u}(x,t) - \Delta \tilde{u}(x,t)\right] v(x,t)\, dx \right\} dt \\ &\quad + \int_0^s \left\{ \int_\Omega \left[a\partial_t \tilde{u}(x,t) + (a^2 + c)\tilde{u}(x,t)\right] v(x,t)\, dx \right\} dt \\ &= -\int_0^s \left[\int_\Omega (\partial_t \tilde{u})\, (\partial_t v)\, dx \right] dt + \int_0^s \left[\int_\Omega \operatorname{grad} \tilde{u} \cdot \operatorname{grad} v\, dx \right] dt \\ &\quad - \int_{\partial\Omega \times [0,s]} v\, (\partial_\nu \tilde{u})\, d\sigma - a \int_0^s \left[\int_\Omega \tilde{u}\, (\partial_\nu v)\, dx \right] dt \\ &\quad + (a^2 + c) \int_0^s \left[\int_\Omega \tilde{u} v\, dx \right] dt \end{aligned} \tag{10.25}$$

$$= \int_{Q_s} [(\partial_t \tilde{u})\, \tilde{u} - \mathrm{grad}\partial_t v \cdot \mathrm{grad} v] - \int_{\partial\Omega\times[0,s]} v\, (\partial_\nu \tilde{u})\, d\sigma$$
$$+ a \int_0^s \left[\int_\Omega \tilde{u}^2 dx \right] dt - (a^2 + c) \int_0^s \left[\int_\Omega (\partial_t v)\, v dx \right] dt,$$

ahol felhasználtuk, hogy az $\overline{\Omega} \times \{0\}$ alaplapon $\partial_t \tilde{u} = 0$, az $\overline{\Omega} \times \{s\}$ fedőlapon pedig $v = 0$.

Most vizsgáljuk meg a (10.25) összefüggés jobb oldalának egyes tagjait. A jobb oldal első tagja így írható a Fubini-tétel és a Newton–Leibniz-formula alapján:

$$\int_{Q_s} [(\partial_t \tilde{u})\, \tilde{u} - \mathrm{grad}\partial_t v \cdot \mathrm{grad} v] = \frac{1}{2} \int_{Q_s} \partial_t \left[\tilde{u}^2 - |\mathrm{grad} v|^2 \right]$$
$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \tilde{u}^2(x,s)\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathrm{grad} v(x,0)|^2\, dx, \quad (10.26)$$

mivel $u = 0$ az $\overline{\Omega} \times \{0\}$ alaplapon és $\mathrm{grad} v = 0$ az $\overline{\Omega} \times \{s\}$ fedőlapon.

Ezután belátjuk, hogy (10.25) jobb oldalának második tagja nemnegatív a zérus peremfeltétel miatt:

$$- \int_{\partial\Omega\times[0,s)} v\, (\partial_\nu \tilde{u})\, d\sigma \geq 0. \quad (10.27)$$

Ugyanis $\tilde{u}$ kielégíti a zérus peremfeltételt, így

$$\partial_\nu \tilde{u}(x,t) = -\frac{g(x)}{h(x)} \tilde{u}(x,t), \qquad \text{ha } h(x) \neq 0,\ x \in \partial\Omega, \quad (10.28)$$

és v (10.23) definíciója alapján

$$g(x) v(x,t) + h(x) \partial_\nu v(x,t) = 0, \qquad \text{ha } x \in \partial\Omega,\ 0 \leq t \leq s,$$

tehát

$$\partial_\nu v(x,t) = -\frac{g(x)}{h(x)} v(x,t), \qquad \text{ha } h(x) \neq 0,\ 0 \leq t \leq s,$$

és

$$v(x,t) = 0, \qquad \text{ha } h(x) = 0, \quad (0 \leq t \leq s),$$

hiszen $g(x)$ ekkor nem lehet 0. Ezért

$$\int_{\partial\Omega\times[0,s]} v\, (\partial_\nu \tilde{u})\, d\sigma = \int_0^s \left[\int_{\partial\Omega} v\, (\partial_\nu \tilde{u})\, d\sigma_x \right] dt$$
$$= \int_0^s \left[\int_{\substack{\partial\Omega \\ h(x)\neq 0}} v\, \frac{g}{h}\, \partial_t v\, d\sigma_x \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\substack{\partial\Omega \\ h(x)\neq 0}} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \int_0^s v(x,t)\partial_t v(x,t) dt \right] d\sigma_x$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\substack{\partial\Omega \\ h(x)\neq 0}} \frac{g(x)}{h(x)} \left[-v^2(0,x) \right] d\sigma_x \leq 0.$$

A (10.25) összefüggés jobb oldalának harmadik tagja

$$a \int_0^s \left[\int_\Omega \tilde{u}^2 dx \right] dt \geq 0, \tag{10.29}$$

végül a negyedik tagra $v(x,s) = 0$ alapján kapjuk:

$$-(a^2+c) \int_0^s \left[\int_\Omega (\partial_t v)\, v\, dx \right] dt = -\frac{a^2+c}{2} \int_\Omega \left[\int_0^s \partial_t \left(v^2 \right) dt \right] dx$$
$$= \frac{a^2+c}{2} \int_\Omega v^2(x,0)\, dx. \tag{10.30}$$

Válasszuk az $a > 0$ számot úgy, hogy $a^2 + c \geq 0$ teljesüljön, így (10.25)–(10.30) alapján

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \tilde{u}^2(x,s)\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathrm{grad} v(x,0)|^2\, dx + a \int_{Q_s} \tilde{u}^2 + \frac{a^2+c}{2} \int_\Omega v^2(x,0)\, dx \leq 0,$$

amiből $a^2 + c \geq 0$ esetén következik, hogy

$$\int_\Omega \tilde{u}^2(x,s)\, dx = 0 \qquad \text{minden } s \in [0,T] \text{ esetén,}$$

így $\tilde{u}$ folytonossága révén $\tilde{u}(x,s) = 0$ $x \in \overline{\Omega}$, $s \in [0,T]$ esetén. □

A fenti gondolatmenet módosításával nyerhetjük az alábbi tételt arról, hogy a vegyes feladat megoldása folytonosan függ az f, φ_1, φ_2 függvényektől. (Lásd a 10.8. Feladatot!)

10.10. Tétel. *A* (10.22) *vegyes feladat megoldása folytonosan függ az* f, φ_1, φ_2 *függvényektől a következő értelemben: ha* $\tilde{u}_j$ *kielégíti a* (10.22) *feladatot* $f = f_j$, $\varphi_1 = \varphi_1^j$, $\varphi_2 = \varphi_2^j$ $(j = 1,2)$, $\psi = 0$ *esetén, akkor a* $w = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ *függvényre elég nagy* $a > 0$ *esetén*

$$\int_\Omega [w(x,s)]^2\, dx + \int_\Omega \left| \int_0^s \mathrm{grad} w\, d\tau \right|^2 dx$$
$$\leq \|e^{-at}(f_1 - f_2)\|^2_{L^2(Q_s)} + \|\varphi_2^1 - \varphi_2^2\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ (a+1)\|\varphi_1^1 - \varphi_1^2\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

10.11. *Megjegyzés.* Ennek alapján természetesen megfogalmazható és bizonyítható az állítás, amely szerint a (10.21) vegyes feladat megoldása is folytonosan függ az f, φ_1, φ_2 függvényektől.

10.3.2. Fourier-módszer

Az állandó együtthatós hiperbolikus egyenletre vonatkozó vegyes feladat megoldásának előállítására is használhatjuk a hővezetési egyenletre alkalmazott Fourier-módszert a homogén peremfeltétel esetén.

Tekintsük tehát a következő vegyes feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + cu = f \qquad \Omega \times (0,T]\text{-ben}, \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \partial_t u(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in \overline{\Omega} \\ g(x)u(x,t) + h(x)\partial_\nu u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy ismerjük a $(-\Delta)$ operátornak az Ω tartományon vett harmadik peremfeltételhez tartozó λ_k sajátértékeit és $w_k \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sajátfüggvényeit. A 8.40. Tétel szerint a $(-\Delta)$ operátornak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke lehet, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények ortogonálisak az $L^2(\Omega)$ térben. Továbbá a 8.41. Megjegyzés szerint bizonyos feltételek mellett igazolható, hogy pontosan megszámlálhatóan végtelen sok λ_k sajátérték létezik, ezek véges rangúak, csak a $(+\infty)$-ben torlódnak, és az alkalmasan megválasztott sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak az $L^2(\Omega)$ térben (Lásd a 15. fejezetet és a [175] tankönyvet.)

A hővezetési egyenlethez hasonlóan a homogén peremfeltételű vegyes feladat megoldását célszerű

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) w_k(x) \tag{10.31}$$

alakban keresni, ahol a w_k sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2(\Omega)$-ben. A sor megfelelő konvergenciája esetén a homogén peremfeltétel automatikusan teljesül, másrészt (ha a sor tagonként deriválható)

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u + cu &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k''(t) w_k(x) - \xi_k(t)(\Delta w_k)(x) + c\xi_k(t) w_k(x)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k''(t) + (c - \lambda_k)\xi_k(t)\right] w_k(x). \end{aligned} \tag{10.32}$$

Írjuk fel az f függvényt minden rögzített t esetén a sajátfüggvények bázisában:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(t), \tag{10.33}$$

így (10.32) alapján

$$\xi_k''(t) + (c - \lambda_k)\xi_k(t) = c_k(t), \qquad k = 1,2,\dots,\ 0 < t \le T, \tag{10.34}$$

hiszen a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak.

Felírhatjuk a kezdeti függvényeket is a sajátfüggvények bázisában:

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k(x), \qquad \varphi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k w_k(x).$$

Így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(0) w_k(x) = u(x,0) = \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k(x),$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k'(0) w_k(x) = \partial_t u(x,0) = \varphi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k w_k(x),$$

feltéve, hogy a sor „elég jól" konvergens.

Ezért szükségképpen

$$\xi_k(0) = d_k, \qquad \xi_k'(0) = e_k, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{10.35}$$

A ξ_k függvényekre nyertük tehát a (10.34), (10.35) kezdetiérték-feladatokat, ezek egyértelmű megoldásaként kapjuk a ξ_k függvényeket és az u megoldás (10.31) Fourier-sor alakját.

Azt, hogy a sor összege kielégíti-e a klasszikus vegyes feladatot, ellenőrizni kell, hiszen nem tudjuk, hogy a levezetés során tett feltevések a sor konvergenciájáról teljesülnek-e. Ugyanakkor igazolható, hogy alkalmas feltételek teljesülése esetén a Fourier-módszerrel nyert sor összege bizonyos „gyenge értelemben" kielégíti a vegyes feladatot. (L. a 17. fejezetet és a [175] tankönyvet.)

A fentiek alapján igazolhatjuk a következő tételt.

10.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy a ξ_k függvények kielégítik a* (10.34), (10.35) *kezdetiérték-feladatot, és az ezekkel felírt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) w_k(x) \tag{10.36}$$

sor, valamint a t és x_j szerinti legfeljebb másodrendű tagonkénti deriválással nyert sorok egyenletesen konvergensek az $\overline{\Omega} \times [0,T]$ halmazon. Ekkor a sor $u(x,t)$ összegére teljesül $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$, és u kielégíti a vegyes feladatot az első peremfeltétel esetén. Továbbá ekkor az első peremfeltétel esetében az f, φ_1, φ_2 függvények szükségképpen kielégítik az

$$f(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T], \tag{10.37}$$
$$\varphi_1(x) = 0, \qquad \varphi_2(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{10.38}$$

és

$$\Delta\varphi_1(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{10.39}$$

peremfeltételeket.

Bizonyítás. Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor a (10.36) sor első és második parciális deriváltjai tagonkénti deriválással számolhatók, és az összegre nyilván $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ teljesül, továbbá

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) + cu(x,t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k''(t) w_k(x) - \xi_k(t)\Delta w_k(x) + c\xi_k(x) w_k(x)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k''(t) + (-\lambda_k + c)\xi_k(t)\right] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x) = f(x,t).\end{aligned}$$

Mivel a (10.36) sor és a t szerinti deriváltakból képzett sor egyenletesen konvergens az $\overline{\Omega} \times [0,T]$ halmazon, azért

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k(x) = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega,$$

és

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k'(0) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k w_k(x) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega.$$

Mivel $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$, ezért

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x) = u(x,0) = 0, \text{ ha } x \in \partial\Omega, \text{hiszen az első perem-} \\ &\text{feltétel esetében } u(x,t) = 0 \text{ ha } x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T].\end{aligned} \tag{10.40}$$

Továbbá

$$\varphi_2(x) = \partial_t u(x,0) = 0, \qquad \text{ha } x \in \partial\Omega,$$

mert (10.40) miatt

$$\partial_t u(x,t) = 0, \qquad \text{ha } x \in \partial\Omega, t \in [0,T].$$

A (10.37) összefüggéshez felhasználjuk a tagonkénti deriválással nyert sorok egyenletes konvergenciáját:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k''(t) + (-\lambda_k + c)\xi_k(t)\right] w_k(x) = 0,$$

ha $x \in \partial\Omega$, $t \in [0,T]$, hiszen a sor minden tagjára teljesül

$$[\xi_k''(t) + (-\lambda_k + c)\xi_k(t)]\, w_k(x) = 0, \quad \text{ha} \quad x \in \partial\Omega, t \in [0,T].$$

Végül a tagonkénti kétszeres differenciálhatóság miatt

$$\Delta\varphi_1(x) = \Delta u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(0)\Delta w_k(x)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(0)\lambda_k w_k(x) = 0, \quad \text{ha} \quad x \in \partial\Omega,$$

hiszen a sor minden tagjára teljesül

$$\xi_k(0)w_k(x) = 0, \quad \text{ha} \quad x \in \partial\Omega. \qquad \square$$

10.13. *Megjegyzés.* A 10.12. Tételhez hasonló tétel igazolható a harmadik peremfeltétel esetén.

A ξ_k függvényekre vonatkozó (10.34), (10.35) kezdetiérték-feladatot úgy is levezethetjük, hogy nem használjuk fel $u(x,t)$ sorának tagonkénti differenciálhatóságát, viszont felhasználjuk, hogy a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak. Nevezetesen igaz a következő tétel.

10.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ kielégíti a vegyes feladatot a harmadik („általános") peremfeltétel esetén. Ekkor az $x \mapsto u(x,t)$ függvényt sorba fejtve rögzített $t \in [0,T]$ mellett a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszere szerint:*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)w_k(x),$$

a ξ_k függvények kielégítik a (10.34), (10.35) *kezdetiérték-feladatot.*

Bizonyítás. Feltevésünk szerint

$$\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) + cu(x,t) = f(x,t), \qquad x \in \overline{\Omega}, t \in [0,T],$$

ahol rögzített t esetén minden tag folytonos $\overline{\Omega}$-n, tehát az $L^2(\Omega)$ térben van. Szorozzuk a differenciálegyenletet $w_k(x)$-szel és integráljuk x szerint Ω-n:

$$\int_\Omega \partial_t^2 u(x,t)w_k(x)dx - \int_\Omega \Delta u(x,t)w_k(x)dx + c\int_\Omega u(x,t)w_k(x)dx$$
$$= \int_\Omega f(x,t)w_k(x)dx. \quad (10.41)$$

Mivel $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$, ezért alkalmas c_0 állandóra

$$|\partial_t u(x,t)w_k(x)| \le c_0\,|w_k(x)| \quad \text{és} \quad \left|\partial_t^2 u(x,t)w_k(x)\right| \le c_0\,|w_k(x)|\,, \qquad x\in\overline{\Omega},\ t\in[0,T],$$

így

$$\int_\Omega \partial_t^2 u(x,t)w_k(x)dx = \partial_t^2 \int_\Omega u(x,t)w_k(x)dx = \xi_k''(t).$$

Továbbá a második Green-formula (8.5. Tétel) szerint (felhasználva, hogy $w_k \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ és kielégíti a homogén (harmadik) peremfeltételt),

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u(x,t)w_k(x)dx &= \int_\Omega u(x,t)\Delta w_k(x)dx + \int_{\partial\Omega}\left[(\partial_\nu u)\,w_k - u\partial_\nu w_k\right]d\sigma_x\\ &= \lambda_k\int_\Omega u(x,t)w_k(x)dx + \int_{\substack{\partial\Omega\\ h(x)\neq 0}}\left[\left(-\frac{g}{h}u\right)w_k - u\left(-\frac{g}{h}w_k\right)\right]d\sigma_x\\ &= \lambda_k\int_\Omega u(x,t)w_k(x)dx = \lambda_k\xi_k(t).\end{aligned}$$

Így a (10.41) alapján megkapjuk a (10.34) differenciálegyenletet.

Végül a kezdeti feltételeket $w_k(x)$-szel szorozva és x szerint Ω-n integrálva:

$$\begin{aligned}\xi_k(0) &= \int_\Omega u(x,0)w_k(x)dx = \int_\Omega \varphi_1(x)w_k(x)dx = d_k,\\ \xi_k'(0) &= \left[\partial_t\int_\Omega u(x,t)w_k(x)dx\right]_{t=0} = \int_\Omega \partial_t u(x,0)w_k(x)dx\\ &= \int_\Omega \varphi_2(x)w_k(x)dx = e_k,\end{aligned}$$

így megkapjuk a (10.35) kezdeti feltételeket. □

10.15. *Megjegyzés.* A 10.14. Tételből következik, hogy a vegyes feladatnak legfeljebb egy $u\in C^2(\overline{\Omega}\times[0,T])$ megoldása lehet. Vegyük észre, hogy a korábbi egyértelműségi tétel bizonyítása során nem használtuk fel, hogy a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2(\Omega)$-ban.

10.16. *Megjegyzés.* Homogén peremfeltétel helyett inhomogén peremfeltételű problémát is vizsgálhatunk a következő módon. Keressünk olyan (elég sima) u_0 függvényt, amely kielégíti az inhomogén peremfeltételt, majd tekintsük a $v = u - u_0$ új ismeretlen függvényre a zérus peremfeltételű vegyes feladatot.

10.17. Példa. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatot:

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = x(\pi - x), & (x,t)\in(0,\pi)\times(0,\infty),\\ u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = 0, & x\in[0,\pi]\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t\in[0,\infty).\end{cases}$$

A Fourier-módszernek megfelelően keressük az u megoldást

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin(kx) \tag{10.42}$$

alakban, hiszen a Dirichlet-típusú peremfeltétel adott, a megfelelő sajátfüggvények a $(0,\pi)$ intervallumon az $x \mapsto \sin(kx)$ $(k = 1,2,\dots)$ függvények és a sajátértékek $\lambda_k = k^2$. Mint ismeretes, ezek teljes ortogonális rendszert alkotnak az $L^2(0,\pi)$ térben. Fejtsük sorba a differenciálegyenlet jobb oldalát az $x \mapsto \sin(kx)$ függvényekből álló teljes ortogonális rendszer szerint! Parciális integrálással adódik:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} (x\pi - x^2)\sin(kx)dx \\
&\qquad = -\left[(x\pi - x^2)\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi} (\pi - 2x)\frac{\cos(kx)}{k}dx \\
&\qquad = \left[(\pi - 2x)\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{x=0}^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k^2}dx \\
&\qquad = \frac{2}{k^2}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{k^3}\left[1 - (-1)^k\right].
\end{aligned}$$

Mivel

$$\int_0^{\pi} \sin^2(kx)dx = \frac{\pi}{2},$$

ezért az egyenlet jobb oldalának sorfejtése:

$$x(\pi - x) = \frac{2}{\pi}\frac{2}{k^3}\left[1 - (-1)^k\right]\sin(kx) = \frac{4}{\pi k^3}\left[1 - (-1)^k\right]\sin(kx).$$

Feltéve, hogy a (10.42) sor tagonként kétszer differenciálható x és t szerint, a differenciálegyenlet akkor áll fenn, ha

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k''(t)\sin(kx) + \xi_k(t)k^2\sin(kx)\right] = \frac{4}{\pi k^3}\left[1 - (-1)^k\right]\sin(kx).$$

Mivel az $x \mapsto \sin(kx)$ függvények $(k = 1,2,\dots)$ teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2(0,\pi)$-ben, ezért ebből a ξ_k függvényekre az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\xi_k''(t) + k^2\xi_k(t) = \frac{4}{\pi k^3}\left[1 - (-1)^k\right], \qquad k = 1,2,\dots,\ 0 < t < \infty. \tag{10.43}$$

Továbbá az u-ra vonatkozó kezdeti feltételekből

$$\xi_k(0) = \xi_k'(0) = 0. \tag{10.44}$$

A (10.43), (10.44) kezdetiérték-feladat megoldása

$$\xi_k(t) = \frac{4}{\pi k^5}\left[1-(-1)^k\right]\left[1-\cos(kt)\right],$$

tehát a keresett u függvény:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k^5}\left[1-(-1)^k\right]\left[1-\cos(kt)\right]\sin(kx).$$

A Weierstrass-kritérium alapján könnyen belátható, hogy a most kapott sor tagonként kétszer differenciálható t és x szerint, hiszen a tagonként deriváltakból képzett sorok abszolút és egyenletesen konvergensek. Így a kapott függvényre $u \in C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$, és u klasszikus értelemben kielégíti a vegyes feladatot.

10.4. Feladatok

10.1. Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatokat:

a)
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 6 & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben},\\ u(x,0) = x^2, \quad \partial_t u(x,0) = 4x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - 4\partial_x^2 u = tx & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben},\\ u(x,0) = x^2, \quad \partial_t u(x,0) = x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

10.2. Tekintsük a következő klasszikus Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben},\\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) = h(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy ha g és h páratlan függvények, akkor a feladat megoldása is páratlan függvény minden rögzített t esetén.

10.3. Legyenek $g\in C^2([0,a])$, $h\in C^1([0,a])$ olyan függvények, amelyekre

$$g(0) = g(a) = h(0) = h(a) = 0, \qquad g''(0) = g''(a) = 0.$$

Adjuk meg a $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ differenciálegyenlet olyan megoldását az $N = (0,a)\times(0,\infty)$ tartományon, amelyre $u\in C^2(\overline{N})$,

$$u(x,0) = g(x), \qquad \partial_t u(x,0) = h(x), \qquad x\in[0,a],$$

továbbá

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \qquad t\in[0,\infty].$$

10.4. Legyen $\varphi \in C^2(a,b)$, $\varphi' \neq 0$, $c = \inf \varphi$, $d = \sup \varphi$, továbbá $u_0 \in C^2(a,b)$, $u_1 \in C^1(a,b)$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{cases} \partial_x \partial_y u = 0 & (a,b)\times(c,d)\text{-ben}, \\ u(x,\varphi(x)) = u_0(x), \quad \partial_y u(x,\varphi(x)) = u_1(x), & x \in (a,b) \end{cases}$$

Cauchy-feladatnak egyetlen $u \in C^2((a,b)\times(c,d))$ megoldása létezik, és

$$u(x,y) = u_0(x) + \int_x^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi, \qquad (x,y) \in (a,b)\times(c,d).$$

10.5. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{cases} \partial_x \partial_y u = 0 & \mathbb{R}^2\text{-ben}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_y u(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cauchy-feladatnak akkor és csak akkor létezik $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldása, ha $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ és u_1 állandó. Továbbá ekkor a feladat megoldása nem egyértelmű, és a feladat összes megoldása

$$u(x,y) = u_0(x) + f(y) - f(0) + y\,[u_1(0) - f'(0)]$$

alakú, ahol $f \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény.

10.6. A d'Alembert-formula segítségével mutassuk meg, hogy az egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat megoldásának (x,t) pontbeli értéke $(t>0)$ csak a g,h,f függvényeknek az (x,t) ponton átmenő 1 és (-1) iránytangensű egyenesek és a $t=0$ egyenes által határolt háromszögben felvett értékeitől függ (a hullám egységnyi sebességgel terjed).

10.7. Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\overline{\Omega}\times(t_1,t_2))$ függvény kielégíti a

$$\partial_t^2 u - \Delta u + cu = 0$$

differenciálegyenletet az $\Omega\times(t_1,t_2)$ tartományon $(0 \le t_1 < t_2 \le +\infty)$, és a

$$[\partial_t u(x,t)]\,[\partial_\nu u(x,t)] = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t \in (t_1,t_2)$$

peremfeltételt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\mathrm{grad} u(x,t)|^2 + c\,(u(x,t))^2 + (\partial_t u(x,t))^2\right] dx$$

képlettel értelmezett, úgynevezett energia függvény állandó $t \in (t_1,t_2)$ esetén.

10.8. Bizonyítsuk be a 10.10. Tételt, amely szerint a (10.22) vegyes feladat megoldása folytonosan függ az f, φ_1, φ_2 függvényektől.

10.9. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + 4u = 0, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = x^2 - x, \quad \partial_t u(x,0) = 0, & x \in [0,1], \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

10.10. Oldjuk meg a következő vegyes feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 1, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = 0, & x \in [0,1], \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

10.11. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = x, & x \in [0,1], \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \sin t, & t \geq 0. \end{cases}$$

10.12. Adjuk meg az alábbi vegyes feladat megoldását:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = (x^2 - x)(y^2 - y)t, \\ \qquad (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \ t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, \quad \partial_t u(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \\ \qquad x \in [0,1], \ y \in [0,1] \ t \geq 0. \end{cases}$$

III. rész

Disztribúcióelmélet

11. fejezet

Disztribúcióelmélet

Utasítsak vissza egy finom vacsorát csupán azért, mert nem teljesen értem az emésztés folyamatát?

Oliver Heaviside (1850–1925)

A fejezet tartalma. Bevezetjük a disztribúció fogalmát, a disztribúciókkal kapcsolatos műveleteket, a deriváltat, direkt szorzatot és a konvolúciót.

11.1. Motiváció

A matematikában számtalan helyen találkozunk olyan problémával, amelyet az addig megalkotott eszközeink segítségével nem tudunk kezelni. Gondoljunk például arra a folyamatra, ahogy a természetes számok halmazát fokozatosan kibővítettük, először bevezetve a negatív egészeket, majd a racionális számokat, aztán a valós számokat és végül a komplex számokat (amelyet még tovább bővíthetünk).

Mindenki számára világos, hogy ezek a bővítések korántsem öncélúak, hiszen a természetes számok halmazán kisebb számból nagyobb szám kivonásának nincs értelme, enélkül a mindennapi életünk is megállna, a legegyszerűbb műveleteket sem tudnánk elvégezni. A racionális számokra többek között az osztás elvégzése miatt van szükség, de valós számok nélkül nem tudnánk megadni egy egység oldalú négyzet átlójának hosszát. Végül a komplex számokra (sok egyéb ok mellett) például a harmadfokú egyenletek megoldóképlete kapcsán van nagy szükség, ugyanis csak a valós számok segítségével a képlet nem adja vissza az egyenlet három különböző valós gyökét (ez az úgynevezett casus irreducibilis). Másfelől, aki már használta a komplex számokat, az tudja, hogy rengeteg, a valós számok körében nehéznek látszó vagy kevésbé világos

(például közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatos) probléma komplex számokra áttérve sokszor könnyedén kezelhető.

Ez utóbbi bővítések látszólag a mindennapi életben már szinte alig, hanem kizárólag a matematikusok számára lehetnek fontosak. Azonban a fent említettekhez hasonló problémákkal számos igen egyszerű fizikai probléma, például pontszerű töltések vagy egységnyi impulzusok matematikai megfogalmazása során is szembesülünk. Az egységnyi impulzus leírására például Paul Dirac Nobel-díjas fizikus a következő, úgynevezett Dirac-delta „függvényt" vezette be 1927-ben:

$$\delta(x) := \begin{cases} \infty, & \text{ha } x = 0, \\ 0, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1. \tag{11.1}$$

Világos, hogy a Dirac-delta klasszikus értelemben nem függvény, azonban meglepő módon ennek segítségével számos fizikai összefüggés levezethető. Vegyük észre, hogy meg tudunk adni a „Dirac-deltához közelítő" függvénysorozatot. A 3. fejezetben tárgyalt egységapproximációt generáló η_ε függvények (3.3) tulajdonságából következően $\varepsilon \to +0$ esetén η_ε egy (11.1) alakú „függvényhez" tart megfelelő értelemben.

A Dirac-delta a fizikai összefüggésekben általában egy függvénnyel vett szorzat integráljaként fordul elő, és az érvelések gyakran az alábbi „tulajdonságára" támaszkodnak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0). \tag{11.2}$$

A matematikai „képtelenségeket" fokozandó megjegyezzük, hogy Dirac a fenti „függvényt" a következő, úgynevezett Heaviside-függvény deriváltjának tekintette:

$$H(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

Ezt a függvényt (ez valóban az) Oliver Heaviside angol villamosmérnök, matematikus és fizikus vezette be elektromágnesességi vizsgálódásai során (egyébként rengeteg, az elektromágnesesség témakörében használatos kifejezés, például impedancia, permeabilitás stb. Heaviside-tól ered). Heaviside a deriválás műveletét operátorként kezelte, és az általa kidolgozott operátorkalkulust közönséges differenciálegyenletek megoldására alkalmazta. Azonban munkáiban sokszor nélkülözte a matematikai precizitást, amiért kortársai gyakran kritikával illették, amelyre ő egyszerűen csak a következőképpen felelt:

> *Utasítsak vissza egy finom vacsorát csupán azért, mert nem teljesen értem az emésztés folyamatát?*

A Dirac-delta „függvény”, annak deriválása és egyéb hasonló furcsaságok feloldásának irányában az első lépést Szergej Lvovics Szoboljev (1908–1989) orosz matematikus tette meg 1935–36-ban (lásd [178]) az *általánosított derivált* fogalmának bevezetésével. Általánosított (vagy gyenge) értelemben már nem feltétlenül sima függvényeknek is létezhet deriváltja, amely sima esetben megegyezik a klasszikus deriválttal, tehát ennek a fogalomnak egy kiterjesztése. Az általánosított deriváltakat Szoboljev parciális differenciálegyenletek tanulmányozására alkalmazta, a klasszikus megoldások helyett *általánosított (vagy gyenge) megoldások* fogalmát bevezetve.

A Dirac-delta problémájának végső megoldását az *általánosított függvények* vagy *disztribúciók* elmélete hozta meg. Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002) francia matematikus 1944 novemberében egy éjszaka alatt (ahogy ő fogalmazott) „fedezte fel” a disztribúciók elméletét, amelyért 1950-ben megkapta az egyik legnagyobb matematikai elismerést, a Fields-medált. Schwartz saját bevallása szerint élete két legnagyszerűbb pillanata közül az egyik a disztribúciók felfedezésének estéje volt, a másik, amikor egy éjszaka alatt 450 különleges lepkét sikerült begyűjtenie (Schwartz egyik kedvenc időtöltése lepkék gyűjtése volt).

A disztribúciók elméletének alapötlete az volt, hogy függvények általánosítását bizonyos speciális függvények terén értelmezett folytonos lineáris funkcionálokként definiáljuk, amely tulajdonképpen természetesen adódik, hiszen például a (11.2) összefüggés is azt fejezi ki, hogy a Dirac-delta az f függvényre ható funkcionál. Az ötlet Riesz Frigyes nevezetes 1909-es dolgozatához vezet vissza, aki [154]-ben a folytonos függvények terén értelmezett folytonos lineáris funkcionálokat jellemezte. Schwartznál az alaptér a végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvények tere lesz, és az így nyert disztribúciók tere részhalmazként tartalmazni fogja a klasszikus függvények egy elég nagy osztályát, a lokálisan integrálható függvényeket, ezért valóban általánosított függvényeknek tekinthetjük őket. Azzal, hogy a végtelen sokszor differenciálható függvények terén értelmezett funkcionálokként definiáljuk a disztribúciókat, a deriválás művelete korlátlanul elvégezhető lesz. Így minden lokálisan integrálható függvénynek értelmezhetjük akármilyen rendű általánosított (vagy disztribúció értelemben vett) deriváltját. Azok az L^p-beli függvények, amelyek általánosított deriváltjai egy bizonyos rendig megfelelő L^p térbeli függvények, úgynevezett Szoboljev-tereket alkotnak (L. a 15. fejezetet). A témában Schwartz első cikke (lásd [167]) már tulajdonképpen a teljesen kidolgozott elméletet tartalmazta, amelyet a későbbiekben mi is tárgyalni fogunk.

A sima függvények egyébként már az általánosított derivált kapcsán Szoboljevnél is megjelentek, később Kurt Otto Friedrichs német-amerikai matematikus alkalmazta a sima függvényekre épülő egységapproximációt, amely végül a disztribúciók és a Szoboljev-terek elméletének egyik alappillére lett

(az egységosztás mellett). Később Laurent Schwartznak a disztribúcióelméletről, illetve Szoboljevnek az általánosított derivált matematikai fizikai alkalmazásairól szóló könyve ugyanabban az évben, 1950-ben jelent meg (lásd [168, 180]).

Megjegyezzük, hogy a disztribúció elnevezés a francia *distribution* szóból származik, amelynek jelentése eloszlás. A név abból ered, hogy a lokálisan integrálható függvények, illetve a Dirac-delta tömegeloszlást vagy töltéseloszlást stb. írnak le.

A következőkben (a történeti sorrenddel ellentétben) először rövid betekintést adunk a disztribúcióelméletbe (lásd még a [168, 175] könyveket, illetve a [80] cikket), majd ezt követően a Szoboljev-terek elméletébe (lásd még az [1, 13, 46, 175] könyveket, illetve a [96] jegyzetet). A disztribúcióelmélet az általánosított Cauchy-feladatok megoldása során (lásd a 12. és a 13. fejezeteket), a Szoboljev-terek pedig peremérték-feladatok, illetve vegyes feladatok általánosított (vagy más szóval gyenge) megoldásával kapcsolatban játszanak fontos szerepet (lásd a 16. és 17. fejezetet). Az általánosított megoldásokra vonatkozó eredményeket a klasszikus megoldásokkal kapcsolatban is alkalmazhatjuk, ezáltal az általánosított függvények köréből visszalépve a függvények körébe.

A fenti történeti áttekintéssel remélhetőleg sikerült motivációt adnunk a következő, kissé idegennek tűnő fogalmak megértéséhez. Akinek ez nem lenne elég, annak zárásképpen álljon itt Dirac egy kedves feladata (lásd a [63] jegyzetet) és a hozzá kapcsolódó szellemes megoldása, amely kiválóan érzékelteti az előbbiekben megfogalmazott gondolatokat.

Hat ember elmegy kókuszdiót gyűjteni. Rengeteg diót szednek össze, de rájuk esteledik, s így az osztozkodást másnapra halasztják. Éjszaka azonban az egyikük felébred, és nem bízván a társaiban, hatfelé osztja a készletet. Ezt meg is tudja tenni úgy, hogy marad egy dió, amelyet a közeli fáról figyelő majomnak dob, a készlet egyhatodát pedig eldugja. Társai sem bíznak jobban egymásban, és az éjszaka során mindegyikük megismétli a szétosztást. Mindig marad egy dió a majomnak, s mindegyikük eldugja az általa szétosztott diók egyhatodát. Végül reggel szétosztják a megmaradt készletet, és a maradék egyetlen diót a majomnak adják. Kérdés: hány diót gyűjtöttek az előző nap?

A feladat nyilván határozatlan, mert ha n egy megoldás, akkor $n + k \cdot 6^7$ is megoldás (k egész), hiszen a két megoldás különbsége hétszer egymás után hatfelé osztható kell, hogy legyen. Elegendő tehát egyetlen megoldását meghatároznunk. Dirac azt vette észre, hogy $n = -5$ jó megoldás, hiszen ebből egyet elvéve -6 marad, ez osztható 6-tal, és az öthatoda, -5 ismét a kezdeti szám, tehát az eljárás akárhányszor ismételhető. Fizikailag azonban az $n = -5$ dió teljesen értelmetlen, a megoldás csupán formálisan jó. Mivel azonban $n + k \cdot 6^7$ is jó megoldás, a legkisebb reális megoldás a $6^7 - 5$.

11.2. A disztribúció fogalma, példák

11.2.1. A disztribúció fogalma

A bevezetőben említettük, hogy az általánosított függvényeket egy függvénytéren értelmezett folytonos lineáris funkcionálokként fogjuk definiálni. Ez a függvénytér a végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvények tere lesz, azaz $C_0^\infty(\Omega)$. Azonban $C_0^\infty(\Omega)$ egyelőre csak egy vektortér, így ahhoz, hogy ezen a téren értelmezett lineáris funkcionálok folytonosságáról tudjunk beszélni, szükségünk van valamilyen konvergenciafogalom bevezetésére. A fejezet további részében a jelölések egyszerűsítése céljából az alábbi megállapodással élünk.

11.1. Megállapodás. A továbbiakban, ha másképp nem jelezzük, Ω mindig egy tetszőleges, $\mathbb{R}^n$-beli ($n \geq 1$) nemüres nyílt halmazt jelöl.

11.2. Definíció. Tekintsük a $C_0^\infty(\Omega)$ vektorteret a függvények közötti szokásos összeadással és valós számmal való szorzással. Azt mondjuk, hogy a $(\varphi_j) \subset C_0^\infty(\Omega)$ függvénysorozat tart a $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ függvényhez, ha az alábbi két feltétel teljesül:

(i) létezik olyan $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, hogy $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén;

(ii) minden α multiindexre $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$ egyenletesen az Ω halmazon.

A fenti konvergenciával ellátott teret $\mathscr{D}(\Omega)$-val jelöljük, a tér elemeit *alapfüggvényeknek* (vagy *tesztfüggvényeknek*) nevezzük. A konvergenciára a továbbiakban a $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ tömör jelölést használjuk.

11.3. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az (i)–(ii) feltételekből $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ következik.

A $\mathscr{D}(\Omega)$ tér valójában egy lokálisan konvex topologikus tér, amelyet a $C_0^\infty(\Omega)$ téren egy alkalmas félnormacsalád generál. A fenti konvergenciafogalmat éppen úgy vezettük be, hogy ezen a lokálisan konvex téren pontosan azok a funkcionálok legyenek folytonosak, amelyek a fenti konvergenciára nézve sorozatfolytonosak (lásd a [164] könyvet).

Emlékeztetünk arra, hogy korábban a 3.22. Példában már találkoztunk a következő igen fontos $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-beli függvényekkel:

$$\eta_{a,r}(x) := \begin{cases} \exp(1/(r^2 - |x-a|^2)), & \text{ha } |x| < r, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq r, \end{cases} \tag{11.4}$$

ahol $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ tetszőleges. A fenti hozzárendeléssel $a = 0$, $r = 1$ esetén nyert $\eta_{0,1}$ függvény segítségével elkészíthetjük a 3.23. Példában tárgyalt η_ε

függvényeket, nevezetesen amelyek $\eta_{0,1}$ tartójának az egységkörről az ε sugarú körre kicsinyítésével adódnak az $\tilde{\eta}_\varepsilon(x) = \eta_{0,1}(\frac{x}{\varepsilon})$ hozzárendelés alapján. A $C_\varepsilon = \varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{0,1}$ jelölést bevezetve, az $\tilde{\eta}_\varepsilon$ függvények integrálját egységnyivé normálhatjuk, és így kapjuk az $\eta_\varepsilon(x) = \tilde{\eta}_\varepsilon / C_\varepsilon$ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \eta_\varepsilon \geq 0, \quad \operatorname{supp} \eta_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1.$$

A fenti tulajdonságú függvényekről azt mondtuk, hogy egységapproximációt generálnak, és a 3.26. Tételben megmutattuk, fontos szerepük van $L^p(\Omega)$-beli függvények sima függvényekkel való közelítésében. Ezek az eredmények hamarosan igen hasznos eszközként kerülnek elő a disztribúciókkal kapcsolatban.

A fenti előkészületek után rátérhetünk a disztribúció fogalmának bevezetésére.

11.4. Definíció. A $\mathscr{D}(\Omega)$-n értelmezett valós értékű lineáris és a 11.2. Definícióban bevezetett konvergenciára nézve sorozatfolytonos funkcionálokat *disztribúcióknak* (vagy *általánosított függvényeknek*) nevezzük. (A sorozatfolytonosságon a szokásos fogalmat értjük: ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$, akkor $u(\varphi_j) \to u(\varphi)$.)

11.5. *Megjegyzés.* Megjegyezzük, hogy léteznek olyan $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok, amelyek nem folytonosak a 11.2. Definícióban megfogalmazott konvergenciára nézve, ennek bizonyítása a kiválasztási axiómára épül.

A 11.2. Definícióban megfogalmazott konvergencia ellenőrzése sokszor nehézkes, ezért az alábbiakban egy azzal ekvivalens és gyakran egyszerűbben kezelhető feltételt bizonyítunk be.

11.6. Tétel. *Egy $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos, ha bármely $K \subset \Omega$ kompakt halmazhoz található $C_K > 0$ valós és $m_K \geq 0$ egész szám úgy, hogy*

$$|u(\varphi)| \leq C_K \cdot \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \quad \textit{minden} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \tag{11.5}$$

alapfüggvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$.

Bizonyítás. Az elégségesség igazolásához tegyük fel, hogy u-ra teljesül a (11.5) feltétel. Megmutatjuk, hogy ekkor u sorozatfolytonos. Ehhez be kell látni, hogy ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$, akkor $u(\varphi_j) \to u(\varphi)$. A $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia definíciója miatt létezik $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, hogy $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ minden j-re (ekkor a 11.3. Megjegyzés miatt $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ is teljesül), továbbá minden α multiindexre $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial \varphi$ egyenletesen Ω-n. Ekkor a (11.5) feltételt a K

kompakt halmazra és a $(\varphi_j - \varphi)$ függvényekre alkalmazva, u és a deriválás linearitását felhasználva kapjuk, hogy

$$|u(\varphi_j) - u(\varphi)| = |u(\varphi_j - \varphi)| \le C_K \cdot \sum_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi|.$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldala nullához tart a (φ_j) sorozat $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergenciája miatt, ezért a bal oldalnak is nullához kell tartania, és éppen ezt akartuk igazolni.

A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy u sorozatfolytonos, és lássuk be, hogy ekkor teljesül a (11.5) feltétel. Ellenkező esetben létezne $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, amelyre minden $C > 0$ valós és $m \ge 0$ egész szám esetén található olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, hogy $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ és

$$u(\varphi) > C \cdot \sum_{|\alpha| \le m} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

Ekkor a $C = m = j \in \mathbb{N}$ választással nyerünk olyan $(\varphi_j) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ sorozatot, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$, továbbá

$$u(\varphi_j) > j \cdot \sum_{|\alpha| \le j} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j|. \tag{11.6}$$

Bevezetve a $\psi_j = \varphi_j / u(\varphi_j)$ függvényeket $(u(\varphi_j) \neq 0)$, ezek ugyancsak $\mathscr{D}(\Omega)$-beliek, tartójuk a K kompakt halmaznak részhalmaza, $u(\psi_j) = 1$, valamint (11.6) alapján

$$1 = u(\psi_j) > j \sum_{|\alpha| \le j} \sup_K |\partial^\alpha \psi_j|.$$

Ha α tetszőleges rögzített multiindex, akkor a fenti egyenlőtlenségből következően $j \ge |\alpha|$ esetén $\sup_K |\partial^\alpha \psi_j| < 1/j$, és így $j \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $\partial^\alpha \psi_j \to$ egyenletesen K-n. Az előbbi konvergencia minden multiindexre teljesül, továbbá $\operatorname{supp} \psi_j \subset K$, következésképpen $\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$. Ekkor az u sorozatfolytonossága miatt $u(\psi_j) \to 0$, ami ellentmondás, hiszen $u(\psi_j) = 1$ minden j-re. □

11.7. *Megjegyzés.* A (11.5) feltételben a szuprémumot K helyett az egész $\mathbb{R}^n$ téren vehetjük, sőt szuprémum helyett maximumot is írhatunk, hiszen csak kompakt tartójú végtelen sokszor differenciálható φ függvényeket tekintünk.

11.2.2. Példák

11.8. Példa. A disztribúciókat általánosított függvényeknek is neveztük, ezzel jelezve, hogy a klasszikus függvények vagy legalábbis azok egy elég bő osztályának általánosításáról van szó. Megmutatjuk, hogy ez az osztály $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

($f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ azt jelenti, hogy f Ω minden kompakt részhalmazán integrálható). Pontosabban, minden $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ térbeli függvénynek megfeleltethetünk egy disztribúciót, a hozzá tartozó úgynevezett *reguláris disztribúciót.*

11.9. Definíció. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tetszőleges. Ekkor tekintsük a következő $T_f \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált:

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f\varphi \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)). \tag{11.7}$$

A T_f funkcionált az f lokálisan integrálható függvényhez tartozó *reguláris disztribúciónak* nevezzük.

A T_f funkcionál linearitása nyilvánvaló, a folytonosságát az alábbiakban igazoljuk.

11.10. Állítás. *A $T_f \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál folytonos a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergenciára nézve, tehát valóban disztribúció.*

Bizonyítás. Világos, hogy T_f jól definiált, hiszen $f\varphi$ integrálható függvény, mert f lokálisan integrálható, φ pedig kompakt tartójú korlátos függvény. A (11.7) integrálban Ω helyett a $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt halmazt vehetjük. Ha adott $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, akkor $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ esetén

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f\varphi\right| = \left|\int_K f\varphi\right| \le \sup|\varphi| \cdot \int_K |f|,$$

vagyis a $C_K = \int_K |f|$ és $m_K = 0$ választással teljesül a (11.5) feltétel, tehát T_f folytonos. □

Felmerül a kérdés, előfordulhat-e, hogy különböző függvényekhez ugyanaz a reguláris disztribúció tartozik? Ezt válaszolja meg az alábbi állítás.

11.11. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvényekre $T_f = T_g$, azaz $T_f(\varphi) = T_g(\varphi)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. Ekkor $f = g$ m.m. Ω-n.*

Bizonyítás. Legyen $h = f - g$, ekkor $T_h = T_f - T_g = 0$, és azt kell belátni, hogy $h = 0$ m.m. Ω-n. Vegyük észre, hogy utóbbi helyett elegendő igazolni, hogy tetszőleges $K \subset \Omega$ halmazt véve $h = 0$ m.m. K-n. Valóban, hiszen Ω előáll megszámlálható sok kompakt halmaz (speciálisan zárt gömb) uniójaként, és megszámlálható sok nullmértékű halmaz (tudniillik, ahol h nem nulla az adott gömbön) uniója is nullmértékű. Legyen $d := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Ekkor az 1.35. Állítás szerint $d > 0$. Tekintsük most azt a $\tilde{h}$ függvényt, amely a K halmaz $d/2$ sugarú környezetében megegyezik h-val, egyébként pedig nullával egyenlő:

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & \text{ha } x \in K_{\frac{d}{2}}, \\ 0, & \text{ha } x \in \Omega \setminus K_{\frac{d}{2}}. \end{cases}$$

Nyilvánvalóan $\tilde{h} \in L^1(\Omega)$, amely nullával egyenlő Ω egy kompakt részhalmazán (nevezetesen $K_{\frac{d}{2}}$-n) kívül. A 3. fejezet alapján elkészíthetjük a $(\tilde{h}_\varepsilon) \subset$ $\subset L^1(\Omega)$ függvényeket, amelyekre $\varepsilon \to 0+$ esetén $\tilde{h}_\varepsilon \to \tilde{h}$ az $L^1(\Omega)$ normája szerint. Megmutatjuk, hogy $\tilde{h}_\varepsilon(x) = 0$, ha $x \in K$ és $\varepsilon < d/2$. Ekkor készen leszünk, hiszen határátmenettel $h(x) = 0$ adódik minden $x \in K$-ra. Legyen tehát $x \in K$, ekkor $\varepsilon < d/2$ esetén $B_\varepsilon(x) \subset K_{\frac{d}{2}}$, így a $\tilde{h}_\varepsilon$ függvények definíciója (lásd a 3. fejezetet) és a $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$ tartalmazás alapján:

$$\tilde{h}_\varepsilon(x) = \int_\Omega \tilde{h}(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{K_{\frac{d}{2}}} h(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy$$

$$= \int_\Omega h(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = T_h(y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)) = 0,$$

hiszen a feltevés miatt $T_h(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. □

11.12. Következmény. *A* (11.7) *összefüggés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvények és a T_f reguláris disztribúciók között (a m.m. egyenlő $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvényeket azonosaknak tekintjük).*

11.13. Példa. A következő példánk a bevezetőben szereplő (11.1) Dirac-delta „függvény”, amelyet most már disztribúcióként definiálunk.

11.14. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ rögzített, ekkor a $\delta_a \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$ összefüggéssel értelmezett funkcionált az a pontra koncentrált (vagy az a ponthoz tartozó) *Dirac-delta disztribúciónak* nevezzük.

11.15. Állítás. *A 11.14. Definícióval értelmezett δ_a funkcionál disztribúció.*

Bizonyítás. Ha $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, olyan, hogy $\operatorname{supp} \varphi \subset K \subset \mathbb{R}^n$, ahol K kompakt, akkor

$$|\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \le \sup_K |\varphi|,$$

tehát $C_K = 1, m_K = 0$ választással teljesül a folytonosság ekvivalens feltétele. □

Vegyük észre, hogy a 11.14. Definíció egybevág a Dirac-delta „függvény” (11.2) tulajdonságával. Végül megjegyezzük (lásd a 11.14. Feladatot), hogy δ_a nem reguláris disztribúció, azaz nem létezik olyan $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén $\delta_a(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$.

11.16. Példa. A reguláris disztribúciók mintájára értelmezhetjük a következő típusú disztribúciót. Rögzítsünk egy α multiindexet, amelyre $|\alpha| \ge 1$, továbbá legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Értelmezzük ekkor az $u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) = \int_\Omega f\partial^\alpha\varphi \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

Egyszerűen igazolható, hogy u disztribúció, azonban a reguláris disztribúciókkal ellentétben az u disztribúció nem határozza meg m. m. egyértelműen az f függvényt, lásd a 11.10. Feladatot.

11.17. Példa. Legyen $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$, és definiáljuk az $u\colon \mathscr{D}(0,2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(0,2)). \tag{11.8}$$

Egyszerűen igazolható, hogy u disztribúció, lásd a 11.15. Feladatot.

11.18. *Megjegyzés.* A korábbi példákkal ellentétben a (11.8) úgynevezett *végtelen rendű disztribúciót definiál.* Ez azt jelenti, hogy nem létezik olyan univerzális m egész szám, amelyre a (11.5) feltétel minden K kompakt halmaz esetén $m_k = m$ választással teljesülne. Amennyiben létezik ilyen univerzális egész szám, akkor a legkisebb ilyet a disztribúció *rendjének* nevezzük. A fenti példák közül a Dirac-delta és a reguláris disztribúciók nulladrendűek, mert a 11.15. és 11.10. Állítások bizonyítása alapján az $m_K = 0$ választás minden K kompakt halmazhoz megfelel.

11.3. Algebrai műveletek, disztribúció tartója

11.3.1. Algebrai műveletek

Természetes módon értelmezhetünk a disztribúciókkal kapcsolatos bizonyos algebrai műveleteket.

11.19. Definíció. Legyen u és v disztribúció Ω-n. Ekkor az $u+v$ disztribúciót az $(u+v)(\varphi) = u(\varphi)+v(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ összefüggéssel értelmezzük. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a λu disztribúciót $(\lambda u)(\varphi) = \lambda \cdot u(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ módon definiáljuk.

Nyilvánvaló, hogy $u + v$ és λu lineáris és folytonos, tehát valóban disztribúció. Könnyen belátható a következő állítás.

11.20. Állítás. *A 11.19. Definícióban bevezetett műveletekkel a $\mathscr{D}(\Omega)$-n értelmezett disztribúciók vektorteret alkotnak. Ezt a vektorteret a továbbiakban $\mathscr{D}'(\Omega)$-val jelöljük.*

11.21. *Megjegyzés.* A $\mathscr{D}'(\Omega)$ térben szokás bevezetni a *gyenge konvergencia* alábbi fogalmát. Az $(u_j) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúciósorozat gyengén konvergál az $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúcióhoz, ha minden rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alapfüggvényre $u_j(\varphi) \to u(\varphi)$ (mint valós számsorozat). A továbbiakban a $\mathscr{D}'(\Omega)$-beli gyenge konvergenciára a tömörebb $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} u$ jelölést használjuk.

A 11.19. Definícióban megfogalmazott algebrai műveletek mellett disztribúció sima függvénnyel való szorzása is természetes módon értelmezhető.

11.22. Definíció. Legyen $\psi \in C^\infty(\Omega)$ és $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Ekkor a ψu disztribúciót a $(\psi u)(\varphi) = u(\psi\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ összefüggéssel értelmezzük.

Vegyük észre, hogy ha $\psi \in C^\infty(\Omega)$ és $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, akkor $\psi\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, így a fenti definíció korrekt. Másrészt pedig egyszerűen igazolható (lásd a 11.17. Feladatot), hogy ψu valóban disztribúció. Érdemes megvizsgálni, hogy speciális esetben, nevezetesen reguláris u esetén a ψu disztribúció milyen alakot ölt.

11.23. Példa. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ és $\psi \in C^\infty(\Omega)$. A 11.22. Definíció alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén

$$(\psi T_f)(\varphi) = T_f(\psi\varphi) = \int_\Omega f(\psi\varphi) = \int_\Omega (f\psi)\varphi = T_{f\psi}(\varphi).$$

Ez azt jelenti, hogy ψT_f a ψf függvényhez tartozó reguláris disztribúció, vagyis disztribúciók $C^\infty(\Omega)$-beli függvénnyel való szorzása a függvények körében végzett $C^\infty(\Omega)$-beli függvénnyel való szorzás általánosításának tekinthető.

11.24. *Megjegyzés.* A $\mathscr{D}'(\Omega)$ és a $C^\infty(\Omega)$ terek elemei közötti szorzás nem terjeszthető ki a $\mathscr{D}'(\Omega)$ térre úgy, hogy a szorzás kommutatív és asszociatív maradjon. Egyfelől két lokálisan integrálható függvény szorzata sem feltétlenül lokálisan integrálható, gondoljunk csak $\mathbb{R}$-en az $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ lokálisan integrálható függvény önmagával vett szorzatára, amely az $x \mapsto 1/x$ függvény, és erről tudjuk, hogy a 0 semmilyen környezetében sem integrálható. Másrészt pedig a 11.25. Feladat szerint vannak olyan $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúciók és $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ függvény, amelyekre $(\psi u)v \neq (\psi v)u$.

11.3.2. Disztribúció tartója

Az előzőekben már többször használtuk azt a kézenfekvő gondolatot, hogy két disztribúciót akkor tekintünk egyenlőnek, ha minden alapfüggvényen megegyezik az értékük. Két disztribúció ilyenfajta egyenlőségét nevezhetjük *globális egyenlőségnek*.

11.25. Definíció. Legyen u és v két disztribúció Ω-n, továbbá $G \subset \Omega$ nyílt halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy $u = v$ a G halmazon (vagy u és v *globálisan egyenlő* G-n), ha minden $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ alapfüggvényre $u(\varphi) = v(\varphi)$.

A globális egyenlőség mellett értelmezhetjük disztribúciók *lokális egyenlőségét* is az alábbi módon.

11.26. Definíció. Legyen u és v két disztribúció Ω-n, továbbá $G \subset \Omega$ nyílt halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy $u = v$ *lokálisan* a G halmazon, ha minden $x \in G$ pontnak van olyan $U_x \subset G$ nyílt környezete, ahol $u = v$ globálisan.

Világos, hogy két disztribúció globális egyenlőségéből következik a lokális egyenlőségük, azonban a lokális egyenlőség első látásra gyengébb fogalomnak tűnik. Valójában viszont a két definíció ekvivalens egymással.

11.27. Állítás. *Legyen $u, v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és $G \subset \Omega$ nyílt. Amennyiben $u = v$ lokálisan a G halmazon, akkor $u = v$ globálisan is teljesül G-n.*

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy $G = \Omega$. Meg kell mutatnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alapfüggvényre $u(\varphi) = v(\varphi)$. Rögzítsünk először egy $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alapfüggvényt, és legyen $K = \operatorname{supp}\varphi$, amely nyilván Ω kompakt részhalmaza. A két disztribúció lokális egyenlőségéből következően minden $x \in \Omega$ pontnak van olyan $U_x \subset \Omega$ nyílt környezete, amelyen $u = v$ globálisan. Világos, hogy $K \subset \bigcup_{x\in\Omega} U_x$, és így K kompaktsága folytán kiválasztható véges sok x_j, hogy $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{x_j}$. Az előbbi véges nyílt fedésre az egységosztás tételét (lásd a 3.32. Tételt) alkalmazva léteznek $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ $(j = 1, \dots, m)$ függvények, amelyekre $\operatorname{supp}\varphi_j \subset U_{x_j}$ és $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1$ minden x-re a K halmaz egy nyílt környezetében. Ekkor nyilván $\varphi = \varphi \sum_{j=1}^m \varphi_j = \sum_{j=1}^m \varphi\varphi_j$, továbbá $\operatorname{supp}\varphi\varphi_j \subset U_{x_j}$, ezért u és v lokális egyenlőségéből következően

$$u(\varphi) = u\left(\sum_{j=1}^m \varphi\varphi_j\right) = \sum_{j=1}^m u(\varphi\varphi_j) = \sum_{j=1}^m v(\varphi\varphi_j) = v\left(\sum_{j=1}^m \varphi\varphi_j\right) = v(\varphi). \quad \square$$

11.28. Következmény. *Ha $u = 0$ lokálisan Ω-n, akkor $u = 0$ globálisan Ω-n.*

A fenti 11.28 Következmény lehetőséget nyújt arra, hogy függvények tartójához hasonlóan értelmezhessük disztribúciók tartóját.

11.29. Definíció. Legyen $u \in \mathscr{D}(\Omega)$. Ekkor u *tartója*

$$\operatorname{supp} u := \Omega \setminus \{x \in \Omega : \text{ van olyan } U_x \subset \Omega \text{ nyílt halmaz, hogy } u = 0 \text{ az } U_x\text{-en}\}.$$

11.30. *Megjegyzés.* A fenti definíció azt jelenti, hogy $u = 0$ lokálisan az $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ halmazon, de ekkor a 11.28. Következmény alapján $u = 0$ globálisan is az $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ halmazon.

A definícióból következően (ahogy függvények esetében is) $\operatorname{supp} u$ relatív zárt halmaz Ω-ban.

Érdemes megemlíteni disztribúciók tartójával kapcsolatban az alábbi hasznos tulajdonságot, amely számos helyen fel fog bukkanni.

11.31. Állítás. *Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúció, továbbá $\psi \in C^\infty(\Omega)$ tetszőleges függvény, amely* $\operatorname{supp} u$ *egy környezetében* 1*-gyel egyenlő. Ekkor $\psi u = u$, azaz minden $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre $u(\psi\chi) = u(\chi)$.*

Bizonyítás. Az u disztribúció linearitásából következően

$$u(\psi\chi) - u(\chi) = u(\chi(1-\psi)) = 0,$$

mert $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}(1-\psi) = \emptyset$. □

11.32. *Megjegyzés.* A 11.31. Állításban a $\psi = 1$ egyenlőség $\operatorname{supp} u$ egy környezetében való teljesülésének feltétele nem gyengíthető, lásd a 11.23. Feladatot.

A későbbiekben fontos szerephez jutnak azok disztribúciók, amelyek *kompakt tartójúak*.

11.33. Definíció. Egy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúciót *kompakt tartójú* disztribúciónak nevezünk, ha $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ kompakt halmaz.

Példaképpen meghatározzuk két speciális disztribúció tartóját.

11.34. Példa. Tekintsük a δ_a Dirac-delta disztribúciót tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ekkor $\operatorname{supp}\delta_a = \{a\}$, hiszen $x \neq a$ esetén létezik $U_x \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz úgy, hogy $a \notin U_x$, és így $\delta_a(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$. Az is világos, hogy a-nak minden U nyílt környezetéhez létezik olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U$ és $\varphi(a) \neq 0$. Valóban, elég kis $r > 0$ számra $B(a,r) \subset U$, és ekkor a (11.4) függvény megfelel. Mindezek alapján szükségképpen $\operatorname{supp}\delta_a = \{a\}$.

11.35. Példa. Legyen $f \in C(\Omega)$. Ekkor könnyen igazolható (lásd a 11.24. Feladatot, hogy $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

11.36. Következmény. *A Dirac-delta disztribúció, továbbá kompakt tartójú folytonos függvényhez tartozó reguláris disztribúció kompakt tartójú.*

11.4. Disztribúció deriváltja

A disztribúciókkal kapcsolatos alapvető fogalmak és tulajdonságok után rátérhetünk az általánosított függvények körében az egyik legfontosabb művelet, a deriválás bevezetésére. Most is úgy járunk el, ahogy eddig, vagyis a függvények körében végzett deriválás művelet általánosításaként szeretnénk definiálni. A kapcsolatot a disztribúciók és a függvények között természetesen a reguláris disztribúciók jelentik, ezért érdemes megfogalmaznunk a függvények körében végzett deriválás egy fontos tulajdonságát, amelyet mindenképpen szeretnénk a disztribúciókra átörökíteni.

11.37. Állítás. *Legyen $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Ekkor $T_{\partial_j f}(\varphi) = -T_f(\partial_j \varphi)$ minden $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ esetén.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy $j = 1$. Írjuk ekkor az $x \in \mathbb{R}^n$ vektorokat $x = (x_1, x')$ alakban, ahol $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Világos, hogy $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ esetén $f, \partial_1 f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (sőt folytonosak is), így a hozzájuk tartozó reguláris disztribúció értelmes. A kompakt tartójú lokálisan integrálható $(\partial_1 f)\varphi$ függvényre az x_1 változójában parciális integrálást végrehajtva, felhasználva, hogy φ kompakt tartójú $\mathbb{R}^n$-ben, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_{\partial_1 f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 f)\varphi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x_1, x')\varphi(x_1, x')\, dx_1\, dx' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x')\partial_1 \varphi(x_1, x')\, dx_1\, dx' = -\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_1 \varphi \\ &= -T_f(\partial_1 \varphi). \end{aligned}$$

□

11.38. *Megjegyzés.* Egyszerűen belátható, hogy a fenti állítás $\mathbb{R}^n$ helyett tetszőleges Ω tartományra is igaz, ebben az esetben parciális integrálás helyett a Gauss–Osztrogradszkij-tételt használhatjuk.

A 11.37. Állítás egymás utáni alkalmazásával adódik az alábbi

11.39. Következmény. *Legyen $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ $(m \in \mathbb{N})$ és α tetszőleges multiindex, amelyre $|\alpha| \leq m$. Ekkor $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi)$ minden $\varphi \in \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén.*

A fenti 11.37. Állítás alapján kézenfekvő disztribúció parciális deriváltjait a következőképpen értelmezni.

11.40. Definíció. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Ekkor a $\partial_j u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *parciális deriváltat* a $\partial_j u(\varphi) := -u(\partial_j \varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ összefüggéssel értelmezzük.

11.41. Állítás. *A 11.40. Definícióban értelmezett $\partial_j u$ funkcionál lineáris és sorozatfolytonos, tehát disztribúció.*

Bizonyítás. A linearitás nyilvánvaló, egyedül a sorozatfolytonosságot kell bizonyítani. Vegyük észre, hogy $\partial_j u = u \circ \partial_j$, ahol $u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ disztribúció, tehát lineáris és sorozatfolytonos, továbbá $\partial_j \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ a kompakt tartójú sima függvények körében végzett parciális deriválás művelete, amely lineáris és nyilván sorozatfolytonos a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergenciára nézve (ez a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia 11.2. Definíciója alapján nyilvánvaló, valójában ezért vezettük be így a konvergenciát). Az előbbiekből következően a $\partial_j u = u \circ \partial_j$ kompozíció is lineáris és sorozatfolytonos. □

11.42. *Megjegyzés.* A 11.37. Állítás alapján $f \in C^1(\Omega)$ esetén $\partial_j T_f = T_{\partial_j f}$.

A parciális deriválás definícióját többször egymás után alkalmazva a 11.39. Következmény mintájára természetes módon értelmezhetjük disztribúciók többszörös parciális deriváltjait.

11.43. Definíció. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és α multiindex. Ekkor a $\partial^\alpha u$ deriváltat a $\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ összefüggéssel értelmezzük.

11.44. *Megjegyzés.* A Young-tétel miatt $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén $\partial^\alpha \varphi$ nem függ a deriválások sorrendjétől, így $\partial^\alpha u$ sem függ a deriválások sorrendjétől, tehát a 11.43. Definíció korrekt. Vegyük észre továbbá, hogy a disztribúciók körében a deriválás korlátlanul végezhető művelet, valójában éppen ezért definiáltuk a végtelen sokszor differenciálható függvények terén ezeket a funkcionálokat.

11.45. Állítás. *Legyen $u, v \in \mathscr{D}'(\Omega)$, ekkor a következők teljesülnek:*

$$\begin{aligned}
&\partial_j(u+v) = \partial_j u + \partial_j v,\\
&\partial_j(\lambda u) = \lambda \partial_j u \qquad (\lambda \in \mathbb{R}),\\
&\partial_j(\psi u) = (\partial_j \psi) u + \psi \partial_j u \qquad (\psi \in C^\infty(\Omega)),\\
&\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v).
\end{aligned}$$

Bizonyítás. A parciális deriválás 11.40. Definíciója, illetve az általános Leibniz-szabály (3.11. Állítás) alapján az állítás nyilvánvaló. □

A következőkben kiszámoljuk néhány konkrét disztribúció deriváltját, amelyekre később a másodrendű parciális differenciálegyenletek tanulmányozása során visszatérünk.

11.46. Példa. Kezdjük rögtön a fejezet bevezetőjében a (11.3) hozzárendeléssel értelmezett Heaviside-függvénnyel, amelyről azt szeretnénk igazolni, hogy a deriváltja a Dirac-delta. Emlékeztetőül: a Heaviside-függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \ge 0,\\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \tag{11.9}$$

A függvény 0-beli értéke valójában nem lényeges számunkra, ugyanis a hozzá tartozó reguláris disztribúciót nem befolyásolja, mert a 11.11. Állításban láttuk, hogy m. m. egyenlő függvényekhez ugyanaz a reguláris disztribúció tartozik. A deriválás definíciója alapján (egy változóban a deriválást az egyszerűség kedvéért ∂ helyett vesszővel jelölve)

$$T_H'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} H\varphi' = -\int_0^\infty \varphi' = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Ezért $T_H' = \delta_0$, aminek tehát sikerült matematikailag korrekt és precíz értelmet adnunk.

11.47. *Megjegyzés.* Gyakran a reguláris disztribúciók esetében az egyszerűség kedvéért a disztribúció helyett magukról a lokális integrálható függvényekről és azok általánosított vagy *disztribúció értelemben vett deriváltjáról* beszélünk, például $H' = \delta_0$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges lokálisan integrálható függvény disztribúció értelemben korlátlanul differenciálható. Természetesen a derivált nem feltétlenül lesz reguláris disztribúció, mint azt a 11.46. Példa is mutatja.

Megmutatható, hogy általában minden disztribúció lokálisan előáll, mint egy integrálható függvény valamilyen deriváltja, ha pedig a disztribúció kompakt tartójú, akkor az előállítás globális, lásd a [175] könyvet.

Azoknak a lokálisan integrálható, vagy valamilyen L^p térbeli függvényeknek, amelyeknek disztribúció értelemben vett deriváltjai egy megfelelő L^p térbeli függvényhez tartozó reguláris disztribúcióként írhatók fel, kitüntetett szerepük lesz később a 15. fejezetben, ahol az ilyen típusú függvények segítségével definiáljuk az úgynevezett *Szoboljev-féle függvénytereket*.

11.48. Példa. A Heaviside-függvény mintájára tetszőleges szakaszonként folytonosan differenciálható függvény általánosított deriváltját is ki tudjuk számolni.

11.49. Állítás. *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (véges vagy végtelen) intervallum, továbbá $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} = b$, és tegyük fel, hogy $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, amelyre $f \in C^1(a_k, a_{k+1})$ $(k = 0, \dots, m)$, valamint f-nek létezik jobb és bal oldali határértéke az $a_1, \dots, a_m$ pontokban, továbbá $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$. Ekkor*

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{m} (f(a_k + 0) - f(a_k - 0))\delta_{a_k},$$

ahol f' az f függvény szakaszonkénti (klasszikus) deriváltja, amely az $a_1, ..., a_m$ pontokban nincs értelmezve.

Bizonyítás. A feltételekből következően $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$, így T_f értelmes. A disztribúció értelemben vett deriválás definíciójából kiindulva a parciális integrálás tételének alkalmazásával kapjuk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ esetén

$$\begin{aligned} T_f'(\varphi) &= -T_f(\varphi') = -\int_a^b f\varphi' \\ &= -\sum_{k=0}^{m} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\varphi' = -\sum_{k=0}^{m} \left([f\varphi]_{a_k}^{a_{k+1}} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'\varphi \right) \\ &= \int_a^b f'\varphi + (f\varphi)|_{a+0} - (f\varphi)|_{b-0} \end{aligned}$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\big(f(a_k+0)\varphi(a_k)-f(a_k-0)\varphi(a_k)\big)$$
$$=T_{f'}(\varphi)+\sum_{k=1}^{m}(f(a_k+0)-f(a_k-0))\delta_{a_k}(\varphi),$$

felhasználva, hogy φ kompakt tartójú, ezért $(f\varphi)|_{a+0}=(f\varphi)|_{b-0}=0$. □

11.50. *Megjegyzés.* A fenti állítás általánosítható magasabb dimenzióra is „darabonként" sima függvényekre, lásd a 11.51. Feladatot.

11.51. Példa (Közönséges differenciálegyenlet alapmegoldása)**.** Tegyük fel, hogy az $y\in C^m(0,\infty)$ függvény első $(m-1)$ deriváltja folytonos a $[0,\infty)$ intervallumon, továbbá y klasszikus értelemben kielégíti az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$y^{(m)}+c_{m-1}y^{(m-1)}+\cdots+c_1y'+c_0y=0 \quad \text{a } (0,\infty)\text{-en}, \tag{11.10}$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\dots,\ y^{(m-1)}(0)=1. \tag{11.11}$$

Definiáljuk az $E\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ függvényt az alábbi hozzárendeléssel:

$$E(x):=\begin{cases}y(x), & \text{ha } x>0,\\ 0, & \text{ha } x\le 0.\end{cases}$$

Hasonlóan a Heaviside-függvény esetéhez, a fenti függvény 0-beli értéke sem lényeges számunkra, mert E mindig ugyanazt a reguláris disztribúciót fogja meghatározni.

11.52. Állítás. *Az E-hez tartozó T_E reguláris disztribúció disztribúció értelemben kielégíti a következő differenciálegyenletet:*

$$T_E^{(m)}+c_{m-1}T_E^{(m-1)}+\cdots+c_1T_E'+c_0T_E=\delta_0 \quad \mathbb{R}\text{-}en.$$

Bizonyítás. Mivel az y függvény $(m-1)$-szer folytonosan differenciálható a $[0,\infty)$ intervallumon, ezért a (11.11) kezdeti feltételek miatt E is ugyanilyen tulajdonságú $\mathbb{R}$-en, tehát az egész $\mathbb{R}$-en klasszikus értelemben létezik $E^{(j)}$ $(j=0,\dots,m-1)$. Ez viszont azt jelenti, hogy $T_E^{(j)}=T_{E^{(j)}}$ minden $j=0,\dots,m-1$ esetén. Vegyük észre, hogy $E^{(m-1)}$ folytonosan differenciálható a $(-\infty,0)$ intervallumon, hiszen ott azonosan 0, továbbá ugyancsak folytonosan differenciálható a $(0,\infty)$ intervallumon, mert ott megegyezik $y^{(m-1)}$-gyel, amely folytonos. Ezenkívül $y^{(m-1)}$-nek a 0-ban a jobb oldali határértéke 0, a bal oldali határértéke pedig a (11.11) kezdeti feltételből adódóan 1. Alkalmazhatjuk tehát a 11.49. Állítást az $(a,b)=(-\infty,\infty)$ intervallummal és az $a_1=0$ szereposztással, így

$$T_E^{(m)}=((T_E)^{(m-1)})'=(T_{E^{(m-1)}})'=T_{E^{(m)}}+\delta_0.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} T_E^{(m)} + c_{m-1}T_E^{(m-1)} + \cdots + c_1 T_E' + c_0 T_E \\ = \delta_0 + T_{E^{(m)}} + c_{m-1}T_{E^{(m-1)}} + \cdots + c_1 T_E' + c_0 T_E \\ = \delta_0 + T_{E^{(m)}+c_{m-1}E^{(m-1)}+\cdots+c_1E'+c_0E} = \delta_0, \end{aligned}$$

hiszen a $(0,\infty)$ intervallumon

$$\begin{aligned} E^{(m)} + c_{m-1}E^{(m-1)} + \cdots + c_1 E' + c_0 E \\ = y^{(m)} + c_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = 0, \end{aligned}$$

a $(-\infty,0)$ intervallumon pedig definíció szerint

$$E^{(m)} + c_{m-1}E^{(m-1)} + \cdots + c_1 E' + c_0 E = 0. \qquad \square$$

11.53. *Megjegyzés.* Általában az olyan disztribúciót, amely egy, a (0-hoz tartozó) Dirac-delta jobb oldallal adott differenciálegyenletnek disztribúció értelemben vett megoldása, az adott egyenlet *alapmegoldásának* nevezzük.

11.54. Példa (A hullámegyenlet alapmegoldása egy dimenzióban)**.** A most következő példával a 12. fejezetben a hullámegyenlet általánosított megoldásával kapcsolatban részletesebben fogunk foglalkozni. Tekintsük az alábbi hozzárendeléssel értelmezett $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ függvényt:

$$E(x_0,x_1) := \frac{1}{2}H(x_0 - |x_1|), \tag{11.12}$$

ahol H a Heaviside-függvény.

11.55. Állítás. *A* (11.12) *formulával értelmezett függvény alapmegoldása az egydimenziós hullámegyenletnek, azaz disztribúció értelemben kielégíti a Dirac-delta jobb oldallal adott egydimenziós hullámegyenletet:*

$$\partial_0^2 T_E - \partial_1^2 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^2\text{-ben.}$$

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$\partial_0^2 T_E(\varphi) - \partial_1^2 T_E(\varphi) = \delta_0(\varphi).$$

A fenti egyenlet bal oldala a disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján a következő alakot ölti:

$$\partial_0^2 T_E(\varphi) - \partial_1^2 T_E(\varphi) = T_E(\partial_0^2\varphi) - T_E(\partial_1^2\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} E\partial_0^2\varphi - \int_{\mathbb{R}^2} E\partial_1^2\varphi. \tag{11.13}$$

A (11.13) egyenlet jobb oldalán álló integrálokat a Newton–Leibniz-tétel alkalmazásával, és φ kompakt tartójú voltának felhasználásával alakíthatjuk. Ekkor egyfelől

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} E\partial_0^2\varphi &= \int_{\mathbb{R}}\int_{|x_1|}^{\infty}\frac{1}{2}\partial_0^2\varphi(x_0,x_1)\,dx_0\,dx_1 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_0\varphi(|x_1|,x_1)\,dx_1\\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\partial_0\varphi(-x_1,x_1)\,dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\partial_0\varphi(x_1,x_1)\,dx_1\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\partial_0\varphi(x_1,-x_1)\,dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\partial_0\varphi(x_1,x_1)\,dx_1,\end{aligned} \tag{11.14}$$

másrészt pedig

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} E\partial_1^2\varphi &= \int_0^{\infty}\int_{-x_0}^{x_0}\frac{1}{2}\partial_1^2\varphi(x_0,x_1)\,dx_1\,dx_0\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\partial_1\varphi(x_0,x_0)-\partial_1\varphi(x_0,-x_0))\,dx_0.\end{aligned} \tag{11.15}$$

Most a (11.14) és a (11.15) összefüggéseket egybevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\partial_0^2 T_E - \partial_1^2 T_E)(\varphi) &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\partial_0\varphi(x_0,-x_0)-\partial_1\varphi(x_0,-x_0))\,dx_0\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\partial_0\varphi(x_0,x_0)+\partial_1\varphi(x_0,x_0))\,dx_0\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dx_0}\varphi(x_0,-x_0)\,dx_0 - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dx_0}\varphi(x_0,x_0)\,dx_0\\ &= \frac{1}{2}\varphi(0{,}0)+\frac{1}{2}\varphi(0{,}0) = \varphi(0{,}0) = \delta_0(\varphi),\end{aligned}$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani. □

11.56. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a (11.12) függvényhez tartozó reguláris disztribúció tartója része az $\{x_0 \geq |x_1|\}$ konvex körkúpnak. A 11.1. ábrán az x_0 és x_1 tengelyek azért vannak felcserélve, mert az x_0 változót gyakran az időnek tekintjük (és t-vel jelöljük), és hagyományosan az időtengely mutat mindig „felfelé”.

A fentiekben említett állítás magasabb dimenzióban is igaz: a hullámegyenlet alkalmas alapmegoldásának tartója része egy konvex körkúpnak. Ennek következménye, hogy a hullámegyenlet véges sebességű hullámterjedést ír le, lásd a 12.7. Következményt.

11.57. Példa (A hővezetési egyenlet alapmegoldása)**.** A következőkben bemutatásra kerülő disztribúciót a 13. fejezetben a parabolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok tanulmányozása során részletesebben fogjuk tárgyalni (lásd még a 9.2. Definíciót). Az E függvényt definiáljuk a következő hozzárendeléssel:

$$E(x_0,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi x_0})^n} \cdot \exp(-|x|^2/(4x_0)), & \text{ha } x_0 > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } x_0 \le 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{11.16}$$

11.58. Állítás. *A* (11.16) *formulával értelmezett függvényre* $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$*, továbbá az* E*-hez tartozó reguláris disztribúció alapmegoldása az* n *dimenziós hővezetési egyenletnek, azaz*

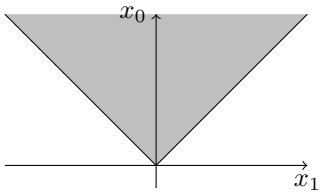
$$\partial_0 T_E - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben.}$$

Bizonyítás. Lásd a 11.113. Állítást. □

11.59. *Megjegyzés.* A fentiek alapján a hővezetési egyenlet alapmegoldásának tartója egy féltér része. Ennek eredményeképpen a hővezetési egyenlet végtelen sebességgel történő hőterjedést modellez, lásd a 13.13. Megjegyzést.

11.5. Disztribúciók direkt szorzata

A most következő szakaszban disztribúciók direkt szorzatával foglalkozunk. E fogalom tárgyalására azért is van szükség, hogy később ennek segítségével tudjuk értelmezni disztribúciók konvolúcióját, amely az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása kapcsán rendkívül fontos szerepet fog játszani (ezzel a 11.7. szakaszban foglalkozunk).



11.1. ábra. Az $\{x_0 \ge |x_1|\}$ konvex körkúp

11.5.1. A direkt szorzat definíciója

Először, ahogy ezt a deriválásnál is tettük, nézzük meg, hogy függvények esetén mit is értünk direkt szorzaton.

11.60. Definíció. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Ekkor f és g *direkt szorzatát* az $(f \times g)(x,y) = f(x)g(y)$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m)$ összefüggéssel értelmezzük.

11.61. *Megjegyzés.* A Fubini-tétel alapján világos, hogy $f \times g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Korábban láttuk, hogy a disztribúciók és a klasszikus függvények közötti kapcsolat a reguláris disztribúciókon keresztül valósul meg. Érdemes tehát a függvények körében értelmezett direkt szorzat disztribúciókra való általánosítása előtt megvizsgálni, hogy az $f \times g$ függvényhez tartozó reguláris disztribúció milyen kapcsolatban áll az f-hez, illetve g-hez tartozó reguláris disztribúciókkal. Az így kapott összefüggés alapján a direkt szorzat definíciója kézenfekvő módon fog adódni.

11.62. Állítás. *Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Ekkor*

$$T_{f\times g}(\varphi) = T_f\{x \mapsto T_g[y \mapsto \varphi(x,y)]\} \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})).$$

Bizonyítás. Definíció alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ esetén

$$\begin{aligned} T_{f\times g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f\times g)\varphi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\varphi(x,y)\,dy\,dx \\ &= T_f\{x \mapsto T_g[y \mapsto \varphi(x,y)]\}. \end{aligned}$$

□

A 11.62. Állítás alapján kézenfekvő lenne az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ disztribúciók direkt szorzatát az

$$(u \times v)(\varphi) = u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\} \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})) \tag{11.17}$$

összefüggéssel definiálni. Világos, hogy rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén az $y \mapsto \varphi(x,y)$ függvény $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$-beli, így $v[y \mapsto \varphi(x,y)]$ értelmes, ám az $x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]$ függvényről nem látszik azonnal, hogy $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli lenne, ami viszont mindenképpen szükséges ahhoz, hogy a fenti (11.17) formula értelmes legyen. A következő állítás garantálja, hogy a (11.17) definíció valóban korrekt.

11.63. Tétel. *Legyen $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, és definiáljuk a $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt a $\psi(x) = v[y \to \varphi(x,y)]$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ hozzárendeléssel. Ekkor $\psi \in$ $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, továbbá az $A\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $[A(\varphi)](x) = \psi(x) = v[y \to$ $\varphi(x,y)]$ formulával értelmezett operátor lineáris és folytonos (a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ terekbeli konvergenciára nézve).*

Bizonyítás. A $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ állítás igazolását több lépésben végezzük el. Először megmutatjuk, hogy ψ kompakt tartójú, folytonos, ezt követően ψ folytonos differenciálhatóságát látjuk be, végül mindezekből következni fog a végtelen sokszor differenciálhatóság.

1. lépés. A ψ függvény definíciója alapján világos, hogy $\operatorname{supp}\psi$ a $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt halmaz vetülete $\mathbb{R}^n$-re, tehát kompakt.

Tegyük fel most, hogy az $(x^{(k)}) \subset \mathbb{R}^n$ sorozatra $x^{(k)} \to x$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\psi(x^{(k)}) \to \psi(x)$. Az egyszerűség kedvéért legyen $\chi_k(y) = \varphi(x^{(k)}, y)$ és $\chi(y) = \varphi(x, y)$ (x rögzített). Elég belátnunk, hogy $\chi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \chi$, hiszen ψ definíciója és v folytonossága alapján $\psi(x^{(k)}) = v[y \to \chi_k] \to v[y \to \chi(y)] = \psi(x)$. Nyilvánvaló, hogy a χ_k függvények tartója részhalmaza a $\operatorname{supp}\varphi$ halmaz $\mathbb{R}^m$-re vett vetületének, ezenkívül tetszőleges α multiindexet véve $\partial_y^\alpha \chi_k(y) \to \partial_y^\alpha \chi(y)$ egyenletesen $\mathbb{R}^m$-ben. Valóban, a kompakt tartójú φ függvény Heine tétele miatt egyenletesen folytonos, ezért

$$|\partial_y^\alpha \chi_k(y) \to \partial_y^\alpha \chi(y)| = |\partial_y^\alpha \varphi(x^{(k)}, y) - \partial_y^\alpha \varphi(x, y)| < \varepsilon,$$

amennyiben $|x^{(k)} - x|$ elég kicsi. Ezzel beláttuk, hogy $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

2. lépés. Most megmutatjuk, hogy $j = 1, \dots, n$ esetén

$$\partial_j \psi(x) = v[y \mapsto \partial_{x_j}^\alpha \varphi(x, y)],$$

amiből következik $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ rögzített, és válasszunk egy tetszőleges (h_k) valós sorozatot úgy, hogy $h_k \to 0$ és $h_k \neq 0$. Jelölje $h_k^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ azt a vektort, amelynek minden koordinátája 0, kivéve a j-ediket, amely h_k-val egyenlő. Ekkor v linearitása miatt

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x + h_k^{(j)}) - \psi(x)}{h_k} &= \frac{1}{h_k}\big(v[y \mapsto \varphi(x + h_k^{(j)}, y)] - v[y \mapsto \varphi(x, y)]\big) \\ &= v\left[y \mapsto \frac{\varphi(x + h_k^{(j)}, y) - \varphi(x, y)}{h_k}\right]. \end{aligned} \tag{11.18}$$

A Lagrange-középértéktételből következően létezik (x-től és y-tól is függő) $0 < \theta_k < 1$ valós szám úgy, hogy

$$\varphi(x + h_k^{(j)}, y) - \varphi(x, y) = h_k \partial_{x_j} \varphi(x + \theta_k h_k^{(j)}, y),$$

ezért (11.18) alapján

$$\frac{\psi(x + h_k^{(j)}) - \psi(x)}{h_k} = v[y \mapsto \partial_{x_j} \varphi(x + \theta_k h_k^{(j)}, y)] = v[y \mapsto \kappa_k(y)], \tag{11.19}$$

ahol $\kappa_k(y) = \partial_{x_j}\varphi(x+\theta_k h_k^{(j)}, y)$. A bizonyítás 1. lépéséhez hasonló módon igazolhatjuk, hogy $\kappa_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \kappa$, ahol $\kappa = \partial_{x_j}\varphi(x,y)$. Ekkor v folytonossága miatt a (11.19) egyenletből kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(x+h_k^{(j)}) - \psi(x)}{h_k} = v[y \mapsto \partial_{x_j}\varphi(x,y)],$$

amit igazolni akartunk.

3. lépés. A 2. lépés eredményét egymás után alkalmazva

$$\partial^\alpha \psi(x) = v[y \mapsto \partial_x^\alpha \varphi(x,y)]$$

adódik, ahol α tetszőleges multiindex. Ebből következően $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

4. lépés. Most megmutatjuk, hogy a tétel feltételei mellett az A operátor folytonos. Ehhez igazolnunk kell, hogy ha $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})} \varphi$, akkor $A\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} A\varphi$. A φ_k függvények $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-beli konvergenciájából következően létezik $K_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ kompakt halmaz úgy, hogy $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K_0$. Legyen K a K_0 halmaz vetülete $\mathbb{R}^m$-re, ekkor K kompakt és $\operatorname{supp}\chi_k \subset K$, ahol $\chi_k(y) = \varphi_k(x,y)$ (x rögzített). Mivel $A\varphi_k = v(\chi_k) = v[y \mapsto \varphi_k(x,y)]$, ezért $\operatorname{supp} A\varphi_k \subset K_0$. Be kell még látnunk, hogy minden α multiindex esetén $\partial^\alpha(A\varphi_k) \to \partial^\alpha(A\varphi)$ egyenletesen. A 3. lépésben bizonyítottak alapján

$$\partial^\alpha(A\varphi_k)(x) = v[y \mapsto \partial_x^\alpha \varphi_k(x,y)],$$

így v folytonosságának a 11.6. Tételben megfogalmazott tulajdonságát, valamint a φ_k függvények $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli konvergenciáját felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\big|\partial^\alpha(A\varphi_k)(x) - \partial^\alpha(A\varphi)(x)\big| \\
&\quad = \big|v[y \mapsto \partial_x^\alpha\varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha\varphi(x,y)]\big| \\
&\quad \le C_K \sum_{|\beta|\le m_K} \sup_{y\in K} \big|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha\partial_y^\beta\varphi(x,y)\big| \\
&\quad \le C_K \sum_{|\beta|\le m_K} \sup_{(x,y)\in K_0} \big|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\varphi_k(x,y) - \partial_x^\alpha\partial_y^\beta\varphi(x,y)\big| \to 0.
\end{aligned}$$

Ebből következően $(\partial^\alpha(A\varphi_k) - \partial^\alpha(A\varphi)) \to 0$ egyenletesen. Ezzel az állítás bizonyítása teljes. □

A fenti tétel alapján tehát korrekt a következő definíció.

11.64. Definíció. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Ekkor u és v *direkt szorzatát* az

$$(u\times v)(\varphi) := u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\} \qquad \big(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})\big)$$

összefüggéssel értelmezzük.

11.65. Következmény. *A 11.63. Tétel alapján $u \times v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ jól definiált disztribúció.*

11.66. Következmény. *A 11.62. Állítás alapján $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és $g \in$ $\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ esetén $T_{f\times g} = T_f \times T_g$.*

11.5.2. Műveleti tulajdonságok

11.67. Állítás. *Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Ekkor*

$$\begin{aligned}(u \times v)(\varphi) &= u\big\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\big\} \\ &= v\big\{y \mapsto u[x \mapsto \varphi(x,y)]\big\} \qquad \big(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})\big).\end{aligned}$$

A bizonyítás előtt szükségünk van egy lemmára, amelynek bizonyítása megtalálható a [175] könyvben.

11.68. Lemma. *Tekintsük a következő alakú függvényeket:*

$$\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\chi_j(y), \tag{11.20}$$

ahol $\psi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\chi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ $(j = 1,\dots,N)$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek. Ekkor a fenti alakban felírható függvények sűrűn vannak a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ térben (a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-beli konvergenciára nézve).

A 11.67. Állítás bizonyítása. A bizonyítást két lépésben végezzük el, első lépésként a (11.20) speciális alakú φ függvényekre látjuk be. Mivel az ilyen típusú függvények sűrűn vannak $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-ben, így határátmenettel tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-re nyerjük az állítást.

1. lépés. Tekintsük a

$$\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\chi_j(y) \tag{11.21}$$

alakú függvényeket, ahol $\psi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\chi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ $(j = 1,\dots,N)$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek. Megmutatjuk, hogy az ilyen speciális alakú φ függvényekre igaz az állítás. Valóban, a disztribúciók linearitását felhasználva

$$u\left\{x \mapsto v\left[y \mapsto \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\chi_j(y)\right]\right\} = u\left\{x \mapsto \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)v(\chi_j)\right\} = \sum_{j=1}^{N} v(\chi_j)u(\psi_j),$$

valamint

$$v\left\{y \mapsto u\left[x \mapsto \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\chi_j(y)\right]\right\} = v\left\{y \mapsto \sum_{j=1}^{N} \chi_j(x)u(\psi_j)\right\} = \sum_{j=1}^{N} u(\psi_j)v(\chi_j),$$

amiből az állítás a (11.21) alakban felírható függvényekre következik.

2. lépés. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ tetszőleges. A 11.68. Lemma alapján létezik (11.21) alakú függvényekből álló $(\varphi_k) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ sorozat úgy, hogy $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})} \varphi$. Ekkor az 1. lépés alapján

$$u\big\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi_k(x,y)]\big\} = v\big\{y \mapsto u[x \mapsto \varphi_k(x,y)]\big\}.$$

A 11.65. Következmény szerint a fenti egyenlet jobb oldala disztribúció $\mathbb{R}^{n+m}$-en, ekkor nyilván a bal oldal is disztribúció ugyanezen a téren (hiszen u és v, valamint x és y szerepcseréjével kapjuk), így a (φ_k) sorozat $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-beli konvergenciájának felhasználásával $k \to \infty$ határátmenet esetén

$$u\big\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\big\} = v\big\{y \mapsto u[x \mapsto \varphi(x,y)]\big\}$$

adódik. □

11.69. Állítás (linearitás)**.** *Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v_1, v_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in$ $\in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$u \times (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1(u \times v_1) + \lambda_2(u \times v_2).$$

Bizonyítás. A disztribúciókra vonatkozó direkt szorzat definíciója alapján nyilvánvaló. □

11.70. Állítás. *Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Ekkor tetszőleges α multiindexre*

$$\partial_y^\alpha(u \times v) = u \times \partial^\alpha v \quad \text{és} \quad \partial_x^\alpha(u \times v) = \partial^\alpha u \times v.$$

Bizonyítás. Lásd a 11.56. Feladatot. □

11.71. Állítás. *Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Ekkor*

$$\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v.$$

Bizonyítás. Lásd a 11.53. Feladatot. □

11.6. Disztribúciók konvolúciója

Az előző szakaszban bevezetett direkt szorzat fogalom segítségével az alábbiakban értelmezni fogjuk disztribúciók konvolúcióját. A konvolúciónak az általánosított Cauchy-feladatokkal kapcsolatban (lásd a 12. és a 13. fejezeteket) igen fontos alkalmazása van. Ugyanis ha ismerjük egy disztribúció értelemben vett Cauchy-feladatnak a Dirac-delta jobb oldalhoz tartozó megoldását, vagyis a differenciálegyenlet alapmegoldását (ilyeneket már láttunk a 11.51., 11.54. és 11.57. Példákban), akkor a konvolúció segítségével a Cauchy-feladat bármilyen jobb oldalhoz tartozó disztribúció értelemben vett megoldását meg tudjuk adni.

11.6.1. Függvények konvolúciója

Mindenekelőtt vizsgáljuk meg, hogy mit is értünk $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ térbeli függvények konvolúcióján.

11.72. Definíció. Legyenek $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvények, és tegyük fel, hogy

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \tag{11.22}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy f és g *konvolúciója* létezik, mégpedig

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{11.23}$$

11.73. *Megjegyzés.* Gondoljuk meg, hogy a (11.23) definíció korrekt, hiszen a jobb oldalon szereplő integrál a (11.22) feltétel miatt m.m. $x \in \mathbb{R}^n$ esetén véges. Jegyezzük meg, hogy csak $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$-beli függvények konvolúcióját értelmeztük, az $\mathbb{R}^n$ tér szerepe lényeges. A (11.22) feltétel alapján $f * g \in$ $\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Végül a Fubini-tétel alapján világos, hogy ha $f * g$ létezik, akkor $g * f$ is létezik, továbbá $g * f = f * g$.

Világosan érzékelhető, hogy a 11.72. Definíció feltételei nehézkesen ellenőrizhetők, ezért érdemes néhány elégséges (és könnyebben kezelhető) feltételt megfogalmazni két függvény konvolúciójának létezésére.

11.74. Állítás. *Ha $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $f * g$ létezik és $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben van.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Fubini-tételt az $(x, y) \mapsto |f(y)g(x-y)|$ nemnegatív függvényre, és használjuk fel, hogy az f, g függvények $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben vannak. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,dy \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.\end{aligned}$$

Ebből következően

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

így $f * g$ létezik és $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben van. □

11.75. Állítás. *Ha $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, és valamelyikük egy kompakt halmazon kívül* 0*-val egyenlő, akkor $f * g$ értelmes.*

Bizonyítás. Ha például az f függvény a P kompakt halmazon kívül nulla, akkor az $y \mapsto f(y)g(x-y)$ függvény is nulla P-n kívül (minden rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén). Ekkor tetszőleges K kompakt halmazt véve f és g lokális integrálhatósága, valamint a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}\int_K \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy\,dx &\le \int_P |f(y)| \int_K |g(x-y)|\,dy\,dx \\ &\le \|f\|_{L^1(P)} \cdot \|g\|_{L^1(K-P)},\end{aligned}$$

ahol a $K - P := \{x - y : x \in K, y \in P\}$ halmaz korlátos, hiszen K és P is korlátos. □

11.76. Állítás. *Ha $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, és létezik $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = g(x) = 0$ majdnem minden $x < a$ esetén, akkor $f * g$ értelmes.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a feltételekből adódóan az $y \mapsto f(y)g(x-y)$ függvény minden rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén csak $a \le y \le x - a$ esetén lehet nem nulla (hiszen különben $f(y) = 0$ vagy pedig $g(x-y) = 0$). Emiatt, ha x eleme a $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaznak, akkor a Fubini-tétel felhasználásával

$$\begin{aligned}\int_K \int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)\,dy\,dx &= \int_a^{\max K - a} |f(y)| \int_K |g(x-y)|\,dy\,dx \\ &\le \|f\|_{L^1([a,\max K - a])} \cdot \|g\|_{L^1(K-[a,\max K-a])},\end{aligned}$$

ahol a $K - [a, \max K - a] = \{x - y : x \in K,\ y \in [a, \max K - a]\}$ halmaz kompakt, mert K is az. □

A konvolúció egy fontos műveleti tulajdonsága a linearitás.

11.77. Állítás (linearitás)**.** *Legyenek $f_1, f_2, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olyan függvények, amelyekre $f_1 * g$ és $f_2 * g$ létezik. Ekkor minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1 (f_1 * g) + \lambda_2 (f_2 * g).$$

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy ha

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)g(x-y)|\,dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \ \text{ és } \ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(y)g(x-y)|\,dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

akkor

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |(\lambda_1 f_1(y) + \lambda_2 f_2(y))g(x-y)|\,dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Másrészt pedig

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1 f_1(y) + \lambda_2 f_2(y))g(x-y)\,dy &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)g(x-y)\,dy \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^n} f_2(y)g(x-y)\,dy,\end{aligned}$$

ami éppen a kívánt összefüggés. □

11.6.2. Disztribúciók konvolúciója: definíció, példák

A függvények körében értelmezett konvolúció műveletének disztribúciókra való általánosításának céljából vizsgáljuk meg, hogy két függvény konvolúciójához tartozó reguláris disztribúció milyen kapcsolatban áll a függvényekhez tartozó reguláris disztribúciókkal.

11.78. Állítás. *Legyenek $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, és tegyük fel, hogy $f * g$ értelmes. Ekkor*

$$T_{f*g}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)\varphi(y+z)\,dy\,dz \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)). \tag{11.24}$$

Bizonyítás. A Fubini-tétel alapján (itt használjuk egyedül a (11.22) feltételt)

$$\begin{aligned} T_{f*g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(x)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_{\mathbb{R}^n} g(z)\varphi(y+z)\,dz\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)\varphi(y+z)\,dy\,dz. \end{aligned}$$

□

A (11.24) egyenlet jobb oldalán látszólag $(T_f \times T_g)[(y,z) \mapsto \varphi(y+z)]$ áll, ám vegyük észre, hogy az $(y,z) \mapsto \varphi(y+z)$ függvény nem feltétlenül kompakt tartójú, így nem feltétlenül van $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$-ben. Valóban, például vegyünk egy olyan sima függvényt, amelynek tartója a $B(0,1)$ gömb (ilyen van, lásd például a (11.4) alakú függvényeket). Ekkor az $(y,z) \mapsto \varphi(y+z)$ függvény tartója az $\{(y,z) \in \mathbb{R}^{2n} : |y+z| \le 1\}$ végtelen sáv, tehát nem korlátos.

Az előbb említett problémát a következőképpen oldhatjuk fel: az $(y,z) \mapsto \varphi(y+z)$ függvényt kompakt tartójú sima függvényekkel közelítjük, ezekre alkalmazható $T_f \times T_g$, és ebből határátmenettel nyerjük disztribúciók konvolúciójának definícióját.

11.79. Definíció. Legyen $(\zeta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ függvénysorozat. Azt írjuk, hogy $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$, ha az alábbi két feltétel teljesül:

(i) minden α multiindexre $\partial^\alpha(\zeta_k - 1) \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$ minden kompakt részhalmazán;

(ii) minden α multiindex esetén létezik C_α konstans úgy, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{\mathbb{R}^{2n}} |\partial^\alpha \zeta_k| \le C_\alpha.$$

Első látásra nem teljesen világos, hogy egyáltalán léteznek-e a 11.79. Definícióban megfogalmazott feltételeknek eleget tevő ζ_k függvények.

11.80. Állítás. *Léteznek a 11.79. Definícióban szereplő* (i)–(ii) *feltételeket kielégítő függvények.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ függvényt, amelyre $\zeta(y,z) = 1$, ha $|(y,z)| \le 1$, egyébként pedig $|\zeta(y,z)| \le 1$ (ilyen létezik, lásd például a (11.4) alakú függvényeket). Legyen ekkor $\zeta_k(y,z) = \zeta(\frac{y}{k}, \frac{z}{k})$ $(k \in \mathbb{N})$. Világos, hogy az így nyert ζ_k függvények $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$-beliek, továbbá $\zeta_k(y,z) = 1$, ha $|(y,z)| \le$ $\le k$, egyébként pedig $|\zeta_k(y,z)| \le 1$. Tetszőleges α multiindexet véve $\partial^\alpha \zeta_k =$ $= k^{-|\alpha|} \partial^\alpha \zeta$, amiből következően a (ζ_k) sorozat egyenletesen korlátos, továbbá $\partial^\alpha(\zeta_k - 1) \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$ minden kompakt részhalmazán. □

A ζ_k függvények segítségével a (11.24) összefüggés jobb oldalát tovább alakíthatjuk.

11.81. Állítás. *Legyenek $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, és tegyük fel, hogy $f * g$ értelmes. Ha $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$, akkor*

$$T_{f*g}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)\varphi(y+z)\,dy\,dz$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)\,dy\,dz \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\zeta_k \to 1$ pontonként $\mathbb{R}^{2n}$-ben, továbbá a 11.79. Definícióban szereplő (ii) feltétel miatt a (ζ_k) sorozat egyenletesen korlátos, így az állítás a Lebesgue-tételből következik. □

Mivel az $(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)$ függvény már kompakt tartójú, ezért (11.24) alapján

$$T_{f*g}(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (T_f \times T_g)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Ennek alapján kézenfekvő disztribúciók konvolúcióját a következőképpen értelmezni.

11.82. Definíció. Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ olyanok, hogy minden rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ és $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ sorozat esetén létezik és véges az alábbi határérték:

$$\lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)], \tag{11.25}$$

továbbá folytonos φ függvényében a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli konvergenciára nézve. Ekkor az u és v disztribúciók *konvolúciója* értelmes, mégpedig

$$(u * v)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)).$$

11.83. *Megjegyzés.* Vigyázzunk, hogy a direkt szorzattal ellentétben csak azonos térbeli disztribúciók konvolúcióját értelmeztük: definíció szerint két $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli disztribúció konvolúciója $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli. Könnyű látni, hogy ha minden (ζ_k) sorozatra létezik a (11.25) határérték, akkor az nem függ a (ζ_k) sorozat választásától, hiszen összefésülhetjük a sorozatokat. Az is világos, hogy ez a határérték φ-től lineárisan függ. Sőt, valójában megmutatható, hogy a határérték folytonos a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli konvergenciára nézve, ezt mi csak az egyszerűség kedvéért tettük fel a definícióban. A folytonosság belátása általánosan nehéz (lásd a [205] könyvet), de – mint a továbbiakban látni fogjuk – konkrét disztribúciók esetében viszonylag egyszerűen igazolható.

A következőkben meghatározzuk néhány speciális típusú disztribúció egymással vett konvolúcióját, amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

11.84. Állítás. *Tegyük fel, hogy $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, amelyekre $f * g$ (függvény értelemben) létezik. Ekkor $T_f * T_g$ értelmes, és $T_f * T_g = T_{f*g}$.*

Bizonyítás. A konvolúció definíciója és a 11.81. Állítás alapján nyilvánvaló (valójában ezért definiáltuk így a konvolúciót). □

11.85. Állítás. *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, és tegyük fel, hogy v kompakt tartójú. Ekkor $u * v$ értelmes, és*

$$(u * v)(\varphi) = (u \times v)[(y, z) \mapsto \psi(z)\varphi(y + z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)), \tag{11.26}$$

ahol $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\psi(z) = 1$, ha z a $\operatorname{supp} v$ halmaz egy nyílt környezetének eleme.

Bizonyítás. Legyen ψ a kívánt tulajdonságú függvény. Először is gondoljuk meg, hogy ekkor az $(y, z) \mapsto \psi(z)\varphi(y + z)$ $(y, z \in \mathbb{R}^n)$ hozzárendeléssel értelmezett függvény egyrészt végtelen sokszor differenciálható, másrészt pedig kompakt tartójú. Valóban, $\psi(z)\varphi(y + z)$ pontosan akkor nem nulla, ha $z \in \operatorname{supp}\psi$, amely kompakt halmaz, és $y + z \in \operatorname{supp}\varphi$, azaz $y = (y + z) - z \subset \subset \operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp}\psi$, amely ugyancsak kompakt halmaz. Ez alapján (11.26) jobb oldala jól definiált. A disztribúciókra vonatkozó konvolúció definíciója alapján minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\begin{aligned}(u * v)(\varphi) &= \lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y, z) \mapsto \zeta_k(y, z)\varphi(y + z)] \\ &= \lim_{k\to\infty} u\{y \mapsto v[z \mapsto \zeta_k(y, z)\varphi(y + z)]\},\end{aligned} \tag{11.27}$$

ahol $(\zeta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, amelyre $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$. Mivel $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} v$ halmaz egy környezetében, ezért a 11.31. Állítás felhasználásával a (11.27) összefüggés alapján

$$(u * v)(\varphi) = u\{y \mapsto v[z \mapsto \zeta_k(y, z)\varphi(y + z)]\}$$

$$\begin{aligned}&= u\{y \mapsto v[z \mapsto \zeta_k(y,z)\psi(z)\varphi(y+z)]\}\\&= (u\times v)[(y,z)\mapsto \zeta_k(y,z)\psi(z)\varphi(y+z)]\\&= (u\times v)(\chi_k),\end{aligned}$$

ahol $\chi_k(y,z)=\zeta_k(y,z)\psi(z)\varphi(y+z)$. Elég belátnunk, hogy $\chi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})} \chi$, ahol $\chi(y,z)=\psi(z)\varphi(y+z)$, ugyanis ekkor az $u\times v$ disztribúció folytonossága miatt

$$(u\times v)(\chi_k)\to(u\times v)(\chi),$$

vagyis a (11.27) egyenlet jobb oldalán lévő határérték minden $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényre létezik és megegyezik a (11.26) jobb oldalán lévő kifejezéssel.

A ζ_k függvények definíciójából világosan látható, hogy $\operatorname{supp}\chi_k\subset\operatorname{supp}\chi$, amely kompakt halmaz $\mathbb{R}^{2n}$-ben. Most legyen α tetszőleges multiindex, és mutassuk meg, hogy $\partial^\alpha\chi_k\to\partial^\alpha\chi$ egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$-en. Mivel $\chi_k=\zeta_k\chi$, ezért a Leibniz-szabály alapján

$$\partial^\alpha\chi_k=\zeta_k\partial^\alpha\chi+\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\|\beta|>0}} c_\beta\partial^\beta\zeta_k\partial^\gamma\chi. \tag{11.28}$$

A $\zeta_k \xrightarrow{(*)} \zeta$ konvergencia folytán $\zeta_k\to 1$, $\partial^\beta\zeta_k\to 0$ ($|\beta|\neq 0$) egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$ minden kompakt részhalmazán, speciálisan $\operatorname{supp}\chi$-n is, amelynek következtében a (11.28) egyenlőség jobb oldala $\partial^\alpha\chi$-hez tart egyenletesen. Ezzel beláttuk, hogy a (11.27) egyenlőségben szereplő határérték minden $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén létezik és megegyezik a (11.26) egyenlet jobb oldalán álló kifejezéssel.

Már csak annak igazolása van hátra, hogy a kérdéses határérték folytonosan függ φ-től. Ehhez $u\times v$ folytonossága miatt elég belátni, hogy ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} \varphi$, akkor a $\vartheta_j(y,z)=\psi(z)\varphi_j(y+z)$ függvényekből álló sorozat tart a $\vartheta(y,z)=\psi(z)\varphi(y+z)$ függvényhez a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli konvergencia szerint. Ennek igazolása teljesen hasonlóan történik, mint az előbbiekben a $\chi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})} \chi$ konvergenciáé, a bizonyítást nem részletezzük. □

Érdemes a fenti állítást a legegyszerűbb kompakt tartójú disztribúcióra, a nulla pontra koncentrált Dirac-deltára alkalmazni.

11.86. Példa. Legyen $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges, továbbá $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, amely 1-gyel egyenlő a 0 egy környezetében. Ekkor a 11.85. Állítás alapján minden $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\begin{aligned}(u*\delta_0)(\varphi)&=(u\times\delta_0)[(y,z)\mapsto\psi(z)\varphi(y+z)]\\&=u\{y\mapsto\delta_0[z\mapsto\psi(z)\varphi(y+z)]\}\\&=u\{y\mapsto\psi(0)\varphi(y)\}=u\{y\mapsto\varphi(y)\}=u(\varphi).\end{aligned}$$

Következésképpen $u*\delta_0=u$.

11.87. *Megjegyzés.* A fenti példával matematikailag értelmet adtunk a disztribúciók motivációjával kapcsolatban említett (11.2) összefüggésnek.

Vizsgáljuk meg egy újabb speciális esetben a konvolúció létezését, nevezetesen amikor mindkét disztribúciónak speciális halmaz a tartója. Ezt az esetet később a hullámegyenlethez tartozó általánosított Cauchy-feladat megoldásában fogjuk alkalmazni.

11.88. Állítás. *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ olyanok, hogy* $\operatorname{supp} u$ *része egy F féltérnek, továbbá* $\operatorname{supp} v$ *része egy P ($90°$-nál kisebb félnyílásszögű) konvex körkúpnak, amelynek tengelye párhuzamos a félsík normálisával, és a két halmaz metszete nem korlátos. Ekkor $u * v$ értelmes, mégpedig*

$$(u * v)(\varphi) = (u \times v)[(y, z) \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y + z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

ahol $\psi, \chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyekre a következő teljesül:

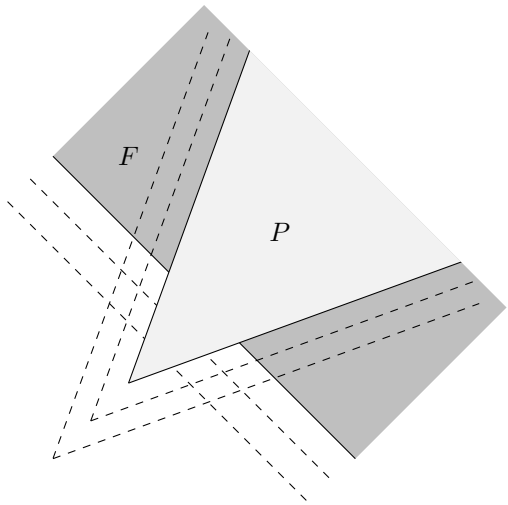
(i) $\psi = 1$ egy, az F-et (valódi részhalmazként) tartalmazó, F normálisával párhuzamos normálisú $\tilde{F}$ féltérben, továbbá $\psi = 0$ egy, az $\tilde{F}$-ot (valódi részhalmazként) tartalmazó, és annak normálisával párhuzamos normálisú $\tilde{\tilde{F}}$ féltéren kívül;

(ii) $\chi = 1$ egy, a P-t (valódi részhalmazként) tartalmazó, azzal egybevágó $\tilde{P}$ körkúpban, továbbá $\chi = 0$ egy, a $\tilde{P}$-ot (valódi részhalmazként) tartalmazó, azzal egybevágó $\tilde{\tilde{P}}$ körkúpon kívül (lásd a 11.2. ábrát).

Bizonyítás. Az állítás bizonyítása teljesen hasonló a 11.85. Állítás bizonyításához, ezért nem részletezzük, lásd a 11.58. Feladatot. □

11.89. *Megjegyzés.* Jogosan vetődik fel a kérdés, léteznek-e egyáltalán a 11.88. Állításban megfogalmazott tulajdonsággal rendelkező $\psi, \chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvények. Természetesen bárki „el tud képzelni" ilyen függvényeket, azonban a pontos leírásuk egyáltalán nem triviális. A félsík esetében viszonylag könnyű ilyet megadni, elég egy, a félsík normálisának irányával párhuzamos egyenesen meghatározni a függvényt, és az erre merőleges irányban konstansként kiterjeszteni a függvényt. A kúp esetében célszerű a csúcsot „lekerekíteni", és az így kapott halmazhoz megkonstruálni a függvényt, amelyet például a féltérhez tartozó függvény „behajtásával" nyerhetünk. A pontos megvalósítás kissé technikás, és a részletes bizonyítás hiánya egyáltalán nem megy a precizitás rovására. Az érdeklődőknek a [175] könyvet ajánljuk ezzel kapcsolatban.

11.90. *Megjegyzés.* A 11.88. Állítás feltételeinek eleget tevő disztribúciókkal már találkoztunk. Az egydimenziós hullámegyenlet 11.54. Példában szereplő alapmegoldásának tartója része az $\{x_0 \geq |x_1|\}$ körkúpnak (ahogy ezt



11.2. ábra. A 11.88 Állítás szemléltetése (konvolúció)

a 11.56. Megjegyzésben is említettük). Ez egyébként nemcsak egy dimenzióban, hanem általában is igaz (lásd a 12.5. Tételt), a hullámegyenlet alkalmasan választott alapmegoldásának tartója mindig része egy hasonló körkúpnak. Az n dimenziós hővezetési egyenlet 11.57. Példában szereplő alapmegoldásának tartója pedig része az $\{x_n \geq 0\}$ féltérnek.

11.6.3. Műveleti tulajdonságok

A függvények körében végzett konvolúció műveleti tulajdonságai öröklődnek az általánosított függvények körében vett konvolúció műveletére, így disztribúciók konvolúciója kommutatív, lineáris művelet.

11.91. Állítás (kommutativitás)**.** *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre $u * v$ értelmes. Ekkor $v * u$ is értelmes és $v * u = u * v$.*

Bizonyítás. A disztribúciók körében vett konvolúció definíciója szerint minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(u * v)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y, z) \mapsto \zeta_k(y, z)\varphi(y + z)],$$

ahol $(\zeta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$. A disztribúciók direkt szorzatára vonatkozó 11.67. Állítás alapján

$$\begin{aligned}(u\times v)[(y,z)\mapsto\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] &= u\{y\mapsto v[z\mapsto\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\}\\ &= v\{z\mapsto u[y\mapsto\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\}\\ &= v\{y\mapsto u[z\mapsto\zeta_k(z,y)\varphi(z+y)\}]\\ &= (v\times u)[(y,z)\mapsto\zeta_k(z,y)\varphi(y+z)].\end{aligned} \tag{11.29}$$

Világos, hogy ha $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$, akkor a $\tilde{\zeta}_k(y,z) = \zeta_k(z,y)$ függvényekre is teljesül, hogy $\tilde{\zeta}_k \xrightarrow{(*)} 1$. Az állítás feltételei szerint létezik $u * v$, ebből következően (11.29) bal oldala $k \to \infty$ esetén $(u * v)(\varphi)$-hez tart, így a jobb oldalnak is van határértéke, tehát $v * u$ is létezik ($\tilde{\zeta}_k \xrightarrow{(*)} 1$ tetszőleges sorozat), így szükségképpen $(u * v)(\varphi) = (v * u)(\varphi)$. □

11.92. Állítás (linearitás)**.** *Legyenek $u_1, u_2, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre $u_1 * v$ és $u_2 * v$ létezik. Ekkor minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) * v = \lambda_1(u_1 * v) + \lambda_2(u_2 * v).$$

Bizonyítás. A disztribúciókra vonatkozó konvolúció definíciója, illetve a határérték linearitása alapján az állítás nyilvánvaló. □

11.93. Állítás. *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre létezik $u * v$. Ekkor*

$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v},$$

ahol $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v = \{y + z \in \mathbb{R}^n : y \in \operatorname{supp} u, z \in \operatorname{supp} v\}$.

Bizonyítás. Lásd a 11.60. Feladatot. □

Végezetül vizsgáljuk meg, hogyan viszonyul egymáshoz a konvolúció és a deriválás művelete.

11.94. Állítás. *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre $u * v$ létezik. Ekkor minden α multiindexre*

$$\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v).$$

Bizonyítás. Nyilván elég belátni, hogy minden $j = 1, \dots, n$ esetén $\partial_j(u * v) = \partial_j u * v = u * \partial_j v$. Ezt egymás után ismételve adódik az állítás tetszőleges α multiindexre.

A deriválás definíciója szerint minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\begin{aligned}\partial_j(u*v)(\varphi) &= -(u*v)(\partial_j\varphi) = -\lim_{k\to\infty}(u\times v)[(y,z)\mapsto \zeta_k(y,z)\partial_j\varphi(y+z)]\\ &= -\lim_{k\to\infty} u\{y\mapsto v[z\mapsto \zeta_k(y,z)\partial_j\varphi(y+z]\},\end{aligned} \tag{11.30}$$

ahol $(\zeta_k)\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$. A szorzatfüggvény deriválási szabályából következően

$$\begin{aligned}\zeta_k(y,z)\partial_j\varphi(y+z) &= \zeta_k(y,z)\partial_{z_j}\varphi(y+z)\\ &= \partial_{z_j}(\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)) - \partial_{z_j}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z).\end{aligned}$$

Ezt a (11.30) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_j(u*v)(\varphi) &= \lim_{k\to\infty}\big(-u\{y\mapsto v[z\mapsto \partial_{z_j}(\zeta_k(y,z)\varphi(y+z))]\}\\ &\qquad - u\{y\mapsto v[z\mapsto \partial_{z_j}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\}\big)\\ &= \lim_{k\to\infty}\big(u\{y\mapsto \partial_j v[z\mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\}\\ &\qquad - (u\times v)[(y,z)\mapsto \partial_{z_j}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\big).\end{aligned} \tag{11.31}$$

Vegyük észre, hogy $\partial_{z_j}\zeta_k = (\partial_{z_j}\zeta_k+\zeta_k)-\zeta_k$ és $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ folytán

$$(\partial_{z_j}\zeta_k+\zeta_k)\xrightarrow{(*)} 1.$$

Ebből a konvolúció definícióját felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&(u\times v)[(y,z)\mapsto \partial_{z_j}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\\ &= (u\times v)[(y,z)\mapsto (\partial_{z_j}\zeta_k(y,z)+\zeta_k(y,z))\varphi(y+z)]\\ &\quad - (u\times v)[(y,z)\mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\\ &\xrightarrow{k\to\infty}(u*v)(\varphi)-(u*v)(\varphi)=0.\end{aligned} \tag{11.32}$$

Ezért a (11.31) összefüggés jobb oldalán az első tag határértéke is létezik, és így

$$\begin{aligned}&u\{y\mapsto \partial_j v[z\mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\}\\ &= (u\times\partial_j v)[(y,z)\mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\xrightarrow{k\to\infty}(u*\partial_j v)(\varphi).\end{aligned} \tag{11.33}$$

A (11.32), (11.33) összefüggéseket (11.31) jobb oldalába visszahelyettesítve

$$\partial_j(u*v)(\varphi) = u*\partial_j v. \qquad \square$$

A 11.86. Példa alapján adódik a

11.95. Következmény. *Legyen $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ekkor tetszőleges α multiindexre*

$$\partial^\alpha u = \partial^\alpha(u*\delta) = u*\partial^\alpha\delta.$$

11.7. Alapmegoldások

A következőkben röviden bemutatjuk a disztribúcióknak egy alkalmazását differenciálegyenletek megoldására. Korábban a 11.6. szakasz bevezetőjében említettük, hogy kitüntetett szerepük van egy adott differenciálegyenlet esetén a Dirac-delta jobb oldalhoz tartozó disztribúció értelemben vett megoldásnak: ennek segítségével az egyenlet – bizonyos feltételeket kielégítő – jobb oldalhoz tartozó megoldása megkapható. Néhány speciális egyenlet, nevezetesen közönséges differenciálegyenletek, az egydimenziós hullámegyenlet és az n dimenziós hővezetési egyenlet alapmegoldásával már a 11.51., a 11.54., a 11.57. Példákban találkoztunk. Ebben a szakaszban az előbbiek mellett ismertetjük a Laplace-egyenlet és a hullámegyenlet magasabb dimenziós alapmegoldásait, amelyek a későbbi fejezetekben újra elő fognak kerülni. Mindezek előtt azonban ismerkedjünk meg az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek alapmegoldásával kapcsolatos fontos alkalmazással.

11.96. Definíció. Legyen P egy n változós k-adfokú polinom, amelyet

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \xi^\alpha$$

alakban írunk, ahol $a_\alpha \in \mathbb{R}$, és $\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n})$. Ekkor a $P(\partial)\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *állandó együtthatós lineáris differenciáloperátort* a

$$P(\partial)u := \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha u$$

hozzárendeléssel értelmezzük.

A fenti differenciáloperátor segítségével tekinthetjük a következő *állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet*:

$$P(\partial)u = F,$$

ahol $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ adott és $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ keresendő. Megjegyezzük, hogy a fenti egyenlet nemcsak $a_\alpha \in \mathbb{R}$, hanem $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén is értelmezhető lenne, de a következő, 11.98. Tétel nem lenne érvényes ebben az esetben. Az $F = \delta_0$-hoz tartozó megoldásnak az alábbiakban kitüntetett szerepe lesz.

11.97. Definíció. Legyen $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ olyan, hogy $P(\partial)E = \delta_0$ $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor E-t a $P(\partial)$ operátor (vagy kevésbé pontosan a $P(\partial)u = F$ egyenlet) *alapmegoldásának* nevezzük.

11.98. Tétel. *Legyen E a $P(\partial)u = F$ differenciálegyenlet egy alapmegoldása. Ha $E*F$ létezik, ahol $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, akkor $P(\partial)(E*F) = F$ $\mathbb{R}^n$-ben. Ezenkívül a $P(\partial)u = F$ egyenletnek legfeljebb egy olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ megoldása lehet, amelyre $u * E$ értelmes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $E*F$ értelmes, ekkor a 11.92. és 11.94. Állítások, továbbá E alapmegoldás voltának felhasználásával kapjuk, hogy

$$P(\partial)(E*F) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha (E*F) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha [(\partial^\alpha E)*F]$$
$$= \left(\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha E\right) * F = (P(\partial)E)*F = \delta_0 * F = F.$$

Most tegyük fel, hogy $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ olyanok, hogy $P(\partial)u_j = F$ $(j = 1, 2)$. Legyen $u := u_1 - u_2$, így a differenciáloperátor linearitása miatt $P(\partial)u = 0$, továbbá a 11.92. Állításból következően $u * E$ létezik, mégpedig $u * E = u_1 * E - u_2 * E$. Megmutatjuk, hogy $u = 0$. Valóban, a 11.92., 11.94. Állítások és $P(\partial)u = 0$ felhasználásával

$$u = u * \delta_0 = u * (P(\partial)E) = u * \left(\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha E\right) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha (u * \partial^\alpha E)$$
$$= \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha (u*E) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha (\partial^\alpha u * E) = \left(\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha u\right) * E$$
$$= 0 * E = 0. \qquad \square$$

11.7.1. Példák alapmegoldásra

11.99. Példa (Közönséges differenciálegyenlet alapmegoldása)**.** Ezzel az alapmegoldással a 11.51. példában már találkoztunk, ezért csak röviden emlékeztetünk rá.

Tegyük fel, hogy az $y \in C^m(0,\infty)$ függvény első $(m-1)$ deriváltja folytonos a $[0,\infty)$ intervallumon, továbbá y klasszikus értelemben kielégíti az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{aligned} &y^{(m)} + c_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = 0 \quad \text{a } (0,\infty)\text{-en,} \\ &y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \ldots,\ y^{(m-1)}(0) = 1. \end{aligned} \tag{11.34}$$

Definiáljuk az $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ függvényt az alábbi hozzárendeléssel:

$$E(x) := \begin{cases} y(x), & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

Ekkor a 11.52. Állítás szerint

11.100. Állítás. *Az E-hez tartozó T_E reguláris disztribúció disztribúció értelemben kielégíti a* (11.34) *differenciálegyenletet $\mathbb{R}$-en, azaz*

$$T_E^{(m)} + c_{m-1}T_E^{(m-1)} + \cdots + c_1 T_E' + c_0 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}\text{-en.}$$

A következőkben a hullámegyenlet és hővezetési egyenlet alapmegoldásai kapcsán áttérünk a klasszikus jelölésekre, és a változókat (x,t)-vel jelöljük, t-vel jelezve, hogy az időről van szó. Ennek megfelelően, ha nem okoz félreértést, a t változó szerinti parciális deriválást ∂_t-vel jelöljük, az x_i változó szerinti deriválást pedig ∂_{x_i}-vel.

11.101. Példa (A hullámegyenlet alapmegoldása egy dimenzióban)**.** A most következő alapmegoldással is találkoztunk már a 11.54. Példában. Tekintsük az alábbi hozzárendeléssel értelmezett $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ függvényt:

$$E(x,t) := \frac{1}{2} H(t-|x|), \tag{11.35}$$

ahol H a Heaviside-függvény. Ekkor a 11.55. Állítás alapján adódik

11.102. Állítás. *A* (11.35) *formulával értelmezett függvény alapmegoldása az egydimenziós hullámegyenletnek, azaz disztribúció értelemben kielégíti a Dirac-delta jobb oldallal adott egydimenziós hullámegyenletet:*

$$\partial_t^2 T_E - \partial_x^2 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^2\text{-}ben.$$

11.103. *Megjegyzés.* Amint azt a 11.56. Megjegyzésben említettük, a (11.35) függvényhez tartozó reguláris disztribúció tartója része az $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq \geq |x|\}$ konvex körkúpnak.

A fenti megjegyzés magasabb dimenziókban való érvényességének érzékeltetése céljából az alábbiakban bizonyítás nélkül megadjuk a két- és háromdimenziós hullámegyenlet alapmegoldását.

11.104. Példa (A hullámegyenlet alapmegoldása két dimenzióban)**.** Tekintsük a következő hozzárendeléssel értelmezett E függvényt:

$$E(x,t) := \frac{H(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}, \tag{11.36}$$

ahol $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ és H a Heaviside-függvény.

11.105. Állítás. *A* (11.36) *hozzárendeléssel definiált függvényre* $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$*, továbbá* E *a kétdimenziós hullámegyenlet alapmegoldása, azaz*

$$\partial_t^2 T_E - \partial_{x_1}^2 T_E - \partial_{x_2}^2 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^3\text{-}ben.$$

11.106. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^3 : t \geq |x|\}$, amely egy konvex körkúp.

11.107. Példa (A hullámegyenlet alapmegoldása három dimenzióban)**.** Az hullámegyenlet egy- és kétdimenziós alapmegoldásával szemben a háromdimenziós alapmegoldás már nem reguláris disztribúció. Definiáljuk ugyanis az alábbi E funkcionált a következő hozzárendeléssel:

$$E(\varphi) := \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{S(0,t)} \varphi(x,t)\, d\sigma_x \right) dt \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)), \tag{11.37}$$

ahol $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $S(0,t)$ az origó középpontú t sugarú gömbfelület, valamint σ_x a felszíni mértéket jelöli.

11.108. Állítás. *A* (11.37) *formulával értelmezett funkcionálra* $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$*, továbbá* E *alapmegoldása a háromdimenziós hullámegyenletnek, azaz*

$$\partial_t^2 E - \partial_{x_1}^2 E - \partial_{x_2}^2 E - \partial_{x_3}^2 E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^4\text{-ben.}$$

11.109. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy $\operatorname{supp} E \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 : t = |x|\}$, amely része a $\{(x,t) \in \mathbb{R}^4 : t \geq |x|\}$ konvex körkúpnak.

11.110. *Megjegyzés.* A fentiek alapján tehát a hullámegyenlet alapmegoldásának tartója egy, két és három dimenzióban része egy konvex körkúpnak. Ebből az következik (lásd a 12.7. Következményt), hogy a hullámegyenlet véges sebességű hullámterjedést ír le. Megjegyezzük, hogy az alábbi tétel szerint ez nemcsak az említett dimenziókban és nemcsak a hullámegyenletre, hanem általánosan a kanonikus alakú hiperbolikus egyenletekre is igaz. A tétel bizonyítása a disztribúciókra vonatkozó Fourier-transzformáció segítségével történik, részletesen lásd a [175] könyvet.

11.111. Tétel. *Az* n *dimenziós* $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ *egyenletnek létezik olyan* E *alapmegoldása, amelyre* $\operatorname{supp} E \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$*, mégpedig*

$$E(x,t) := \begin{cases} \dfrac{H(t)}{2\pi \cdot \pi^{(n-3)/2}} \left(\dfrac{d}{dt^2} \right)^{(n-3)/2} \left(\dfrac{1}{2t} \delta_{S(0,t)} \right), & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \dfrac{(-1)^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{(n+1)/2}} \cdot \dfrac{H(t-|x|)}{(t^2-|x|^2)^{(n-1)/2}}, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$$

ahol $\delta_{S(0,t)}(\varphi) = \int_{S(0,T)} \varphi\, d\sigma$ *(*$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$*) az úgynevezett* 1 *sűrűségű* egyszerű réteg*, valamint* Γ *a gamma-függvény, azaz* $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dz$*.*

A hővezetési egyenlet alapmegoldását a 11.57. Példában már felírtuk, most részletesen igazoljuk, hogy valóban alapmegoldás. Érdekes módon a fentiekkel ellentétben a hővezetési egyenlet alapmegoldására egy általános, tetszőleges n-re érvényes formula adható.

11.112. Példa (A hővezetési egyenlet alapmegoldása)**.** Az E függvényt definiáljuk a következő hozzárendeléssel:

$$E(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \cdot \exp(-|x|^2/(4t)), & \text{ha } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{11.38}$$

11.113. Állítás. *A* (11.16) *formulával értelmezett függvényre* $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$*, valamint az* E*-hez tartozó reguláris disztribúció alapmegoldása az* n *dimenziós hővezetési egyenletnek, azaz*

$$\partial_t T_E - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben.}$$

A bizonyítás előtt emlékeztetünk arra, hogy az E függvény néhány tulajdonságát már korábban a 9.3. Állításban igazoltuk:

- minden $t > 0$ esetén $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\,dx = 1$;
- $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$;
- $\partial_t E(x,t) - \Delta E(x,t) = 0$, ha $x \in \mathbb{R}^n$ és $t \neq 0$.

Ennyi előkészület után rátérhetünk a 11.113. Állítás igazolására.

A 11.113. Állítás bizonyítása. Mivel $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, így a disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján már csak annyit kell látnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ esetén

$$-T_E(\partial_t \varphi) - T_E(\Delta \varphi) = \delta_0(\varphi). \tag{11.39}$$

Tegyük fel, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset (-T,T) \times B(0,R)$. A továbbiakban a (11.39) egyenlet bal oldalának (-1)-szeresét alakítjuk át úgy, hogy végül a jobb oldal (-1)-szeresét kapjuk, és ezzel készen leszünk. Először vegyük észre, hogy φ kompakt tartója és E definíciója miatt

$$\begin{aligned} T_E(\partial_t \varphi) + T_E(\Delta \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (E\partial_t \varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt \\ &= \int_0^T \int_{B(0,R)} (E\partial_t \varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} (E\partial_t \varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{11.40}$$

Vizsgáljuk meg egyenként a (11.40) egyenlőség jobb oldalán szereplő integrandusokat! Az első tagban az integrálás sorrendjét felcserélve, majd parciálisan integrálva és felhasználva, hogy φ kompakt tartójú, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} E\partial_t\varphi\,dx\,dt &= \int_{B(0,R)} \int_\varepsilon^T E\partial_t\varphi\,dt\,dx \\ &= \int_{B(0,R)} \left[[E\varphi]_{t=\varepsilon}^T - \int_\varepsilon^T \partial_t E\varphi\,dt \right] dx \qquad (11.41) \\ &= \int_{B(0,R)} \left(-E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon) - \int_\varepsilon^T \partial_t E\varphi\,dt \right) dx.\end{aligned}$$

Most (11.40) jobb oldali integráljának második integrandusát vegyük szemügyre, a második Green-formulát (8.5. Tétel) alkalmazva, valamint kihasználva, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset (-T,T)\times B(0,R)$ miatt a peremintegrál nullával egyenlő,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} E\Delta\varphi\,dx\,dt &= \int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} \Delta E\,\varphi\,dx\,dt \\ &\quad + \int_\varepsilon^T \int_{S(0,R)} (E\partial_\nu\varphi - \partial_\nu E\,\varphi)\,d\sigma\,dt \qquad (11.42) \\ &= \int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} \Delta E\varphi\,dx\,dt\end{aligned}$$

adódik.

A (11.41), a (11.42) összefüggéseket a (11.40) egyenletbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned}&T_E(\partial_t\varphi) + T_E(\Delta\varphi) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\int_{B(0,R)} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx - \int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} (\partial_t E - \Delta E)\varphi\,dx\,dt \right) \qquad (11.43) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\varphi(0,\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(0,\varepsilon))E(x,\varepsilon)\,dx \right),\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset (-T,T)\times B(0,R)$ folytán az integrálási tartományokban $B(0,R)$ helyett $\mathbb{R}^n$ is írható, továbbá E kielégíti a $\partial_t E(x,t) - \Delta E(x,t) = 0$ differenciálegyenletet, ha $t>0$ és $x\in\mathbb{R}^n$. Vegyük észre, hogy φ folytonossága miatt $\varepsilon\to 0+$ esetén $\varphi(0,\varepsilon)\to\varphi(0,0)$, továbbá $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\,dx = 1$. Ezenkívül a (11.43) egyenlőség második integrálja a Lagrange-egyenlőtlenség segítségével a következő módon becsülhető:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(0,\varepsilon))E(x,\varepsilon)\,dx \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |x|\cdot\sup_{\mathbb{R}^n}|\varphi'|\cdot E(x,\varepsilon)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&\le \text{const} \int_{\mathbb{R}^n} |x| E(x,\varepsilon)\, dx \\
&= \text{const} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{\pi\varepsilon}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x| \exp(-|x|^2/4\varepsilon)\, dx \\
&= \text{const} \cdot \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta| e^{-|\eta|^2}\, d\eta,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az $\eta = x/(2\sqrt{\varepsilon})$ helyettesítést hajtottuk végre. Világos, hogy a fenti egyenlőség jobb oldala $\text{const} \cdot \sqrt{\varepsilon}$ nagyságrendű, így $\varepsilon \to 0+$ esetén 0-hoz tart. Mindezek alapján

$$T_E(\partial_t \varphi) + T_E(\Delta \varphi) = -\varphi(0{,}0) = -\delta_0(\varphi),$$

és éppen ezt akartuk belátni. □

11.114. *Megjegyzés.* A hővezetési egyenlet fenti alapmegoldásának tartója része egy féltérnek. Ez azt eredményezi, hogy a hővezetési egyenlet végtelen sebességgel történő hőterjedést modellez, lásd a 13.13. Megjegyzést.

Végezetül az elliptikus egyenletek alapmegoldásával foglalkozunk.

11.115. Példa (A Poisson-egyenlet alapmegoldása)**.** Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n \ge 3,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ -\dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{ha } n = 2,\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \end{cases} \tag{11.44}$$

ahol ω_n jelöli az egység sugarú n dimenziós gömb felszínét (lásd a 2.15. Állítást).

Első látásra az sem világos, hogy E lokálisan integrálható függvény, természetesen ez csak a 0 körül kérdéses.

11.116. Állítás. *Minden $n \ge 2$ esetén $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

Bizonyítás. Lásd a 8.14. Állítás bizonyítását. □

11.117. *Megjegyzés.* A 11.116. Állítás mintájára könnyen igazolható, hogy ha $0 \le \alpha < n$, akkor az $x \mapsto 1/|x|^\alpha$ függvény lokálisan integrálható $\mathbb{R}^n$-en (ebből az $n = 1$ eset jól ismert a klasszikus analízisből).

A hővezetési egyenlet alapmegoldásának esetéhez hasonlóan a (11.44) hozzárendeléssel értelmezett függvények kielégítik a Laplace-egyenletet a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon.

11.118. Állítás. *A (11.44) hozzárendeléssel definiált E függvényre minden $n \ge 2$ esetén $\Delta u = 0$ az $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon.*

Bizonyítás. Lásd a 8.13. Következményt. □

11.119. Állítás. *A* (11.44) *hozzárendeléssel értelmezett E függvény alapmegoldása a Poisson-egyenletnek, azaz $-\Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben az $\mathbb{R}^n$ téren minden $n \geq 2$ esetén.*

Bizonyítás. Tekintsük először az $n \geq 3$ esetet! Be kell látnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén $-\Delta T_E(\varphi) = \delta_0$. Green második tételének felhasználásával

$$\begin{aligned} \Delta T_E(\varphi) = E(\Delta\varphi) &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} E\Delta\varphi \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \varphi\Delta E + \int_{S(0,\varepsilon)} (E\partial_\nu\varphi - \varphi\partial_\nu E)\, d\sigma \right]. \end{aligned} \tag{11.45}$$

A 11.118. Állítás szerint $\Delta E = 0$ az $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ halmazon, így $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \varphi\Delta E = 0$. Ezenkívül vegyük észre, hogy az $S(0,\varepsilon)$ gömbfelületen a normális irányú derivált valójában a sugár szerinti derivált (-1)-szerese (hiszen a normális a gömb középpontja felé mutat), azaz

$$\partial_\nu E = -\partial_r E = -\partial_{|x|} E = 1/(|x|^{1-n}\omega_n).$$

Ezért a (11.45) összefüggésből következően

$$\begin{aligned} -\Delta T_E(\varphi) = &\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,\varepsilon)} (\varphi - \varphi(0))\, d\sigma \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,\varepsilon)} \varphi(0)\, d\sigma \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{S(0,\varepsilon)} E\partial_\nu\varphi\, d\sigma. \end{aligned} \tag{11.46}$$

Vegyük észre, hogy $\varepsilon^{n-1}\omega_n$ éppen $S(0,\varepsilon)$ felszíne, és így φ folytonossága miatt

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,\varepsilon)} (\varphi - \varphi(0))\, d\sigma \right| \leq \sup_{S(0,\varepsilon)} |\varphi - \varphi(0)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0, \tag{11.47}$$

valamint

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,\varepsilon)} \varphi(0)\, d\sigma = \varphi(0). \tag{11.48}$$

Továbbá E definíciója alapján

$$\left| \int_{S(0,\varepsilon)} E\partial_\nu\varphi\, d\sigma \right| \leq |\sup \partial_\nu\varphi| \cdot \varepsilon^{n-2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0. \tag{11.49}$$

A (11.47)–(11.49) összefüggéseket a (11.46) egyenletbe helyettesítve minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén $-\Delta T_E(\varphi) = \varphi(0)$ adódik, ami éppen azt jelenti, hogy $-\Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben.

A fenti bizonyítás szinte teljesen érvényben marad az $n=2$ esetre is, csak annyit kell megjegyeznünk, hogy a gömbfelületen $\partial_\nu E = -\partial_{|x|} E = |x|^{-1}/\omega_2$, tehát a (11.46)–(11.48) összefüggések most is teljesülnek. Ezenkívül (11.49) továbbra is fennáll, mert a klasszikus analízisből ismert $x \log x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ összefüggés folytán

$$\left| \int_{S(0,\varepsilon)} E \partial_\nu \varphi \, d\sigma \right| \le \sup |\partial_\nu \varphi| \cdot \varepsilon |\log \varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} 0. \qquad \square$$

11.120. *Megjegyzés.* A fentiekben tárgyalt függvényekhez tartozó disztribúciók alapmegoldás voltának ellenőrzése, ha már ismerjük a függvényeket, mint láttuk, könnyen megy. Felmerül a kérdés, vajon hogyan lehet megtalálni ezeket a függvényeket? A három alapegyenletről szóló fejezetekben heurisztikus gondolatmenetet mutattunk az alapmegoldások meghatározására. Létezik azonban szisztematikus módszer is, ennek alapját a disztribúciók körében értelmezett Fourier-transzformáció képezi, ezzel kapcsolatban bővebben lásd a [175] könyvet.

Végül megemlítjük, hogy a Malgrange–Ehrenpreis-tétel szerint minden konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletnek van alapmegoldása. Ezt a tételt Leon Ehrenpreis (1930–2010) amerikai és Bernard Malgrange (1928–2024) francia matematikus (aki Laurent Schwartz tanítványa) egymástól függetlenül igazolta 1954–55-ben. A tételt illetően lásd a [79] monográfiát vagy a [208] cikket.

11.8. Feladatok

Az alábbiakban, ha másképp nem jelezzük, Ω mindig $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges nem üres nyílt részhalmazát jelöli.

11.1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$ és α ($|\alpha| \geq 1$) multiindex esetén található olyan $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ függvény, amelyre $\partial^\alpha \varphi(a) = c$, továbbá minden $\beta \neq \alpha$ esetén $\partial^\beta \varphi(a) = 0$. Sőt, igazoljuk, hogy olyan φ függvény is van, amely rendelkezik az előbbi tulajdonságokkal és ezenkívül $\sup_\Omega |\partial^\beta \varphi| \leq 1$ minden $|\beta| < |\alpha|$ multiindex esetén.

11.2. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy φ-nek pontosan akkor van $\mathscr{D}(\mathbb{R})$-beli primitív függvénye, ha $\int \varphi \, dx = 0$.

11.3. a) Ha $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi(a) = 0$, akkor $\dfrac{\varphi(x)}{x-a} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Pontosabban, a tört kiterjeszthető $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-ról egy $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ függvénnyé.

b) Ha $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi(a) = 0$, akkor $\dfrac{\varphi(x)}{x-a} \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ az előbbi értelemben.

11.4. Ha $\varphi, \eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ és $\eta(a) = 1$, akkor $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)\eta(x)}{x-a} \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

11.5. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ adott nem azonosan 0 függvény.

a) Igazoljuk, hogy a $\varphi_j(x) := \varphi(x)/j$ ($x \in \Omega, j = 1,2\dots$) hozzárendeléssel értelmezett sorozatra $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$.

b) Legyen $\Omega := \mathbb{R}^n$ és $\varphi_j(x) := \varphi(x/j)/j$ ($x \in \mathbb{R}^n, j = 1,2,\dots$). Konvergens-e a (φ_j) sorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben?

c) Legyen $\Omega := \mathbb{R}^n$ és $\varphi_j(x) := \varphi(jx)/j$ ($x \in \mathbb{R}^n, j = 1,2,\dots$). Konvergens-e a (φ_j) sorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben?

11.6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges α multiindexre a $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi$ leképezés $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-et folytonos lineáris módon önmagába képezi.

11.7. Mutassuk meg, hogy tetszőlegesen adott $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvény esetén a $\varphi \mapsto \psi\varphi$ leképezés $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-et folytonos lineáris módon önmagába képezi.

11.8. Igaz-e, hogy ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ és $\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \psi$, akkor $\varphi_j\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi\psi$?

11.9. Bizonyítsuk be, hogy ha $u\colon C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál (a folytonosságot a C_0-beli maximumnormában értve), akkor $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Igaz-e a megfordítás, azaz ha $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, akkor u folytonos-e a maximumnormára nézve?

11.10. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény, továbbá β multiindex, és értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált az $u(\varphi) := \int_\Omega f\partial^\beta\varphi$ hozzárendeléssel. Bizonyítsuk be, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és véges rendű! Meghatározza-e u m.m. egyértelműen az f függvényt?

11.11. Mutassuk meg, hogy ha egy disztribúció tartója nem üres megszámlálható halmaz, akkor a disztribúció nem lehet reguláris.

11.12. Legyen $u, v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{supp}(u+v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v,$$
$$\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u.$$

Adjunk meg konkrét u és v disztribúciókat, továbbá ψ függvényt, amelyek esetében szigorú tartalmazás áll fenn. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség teljesül!

11.13. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ és α multiindex. Hogyan hat egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényre $\partial^\alpha\delta_a \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$? Határozzuk meg $\partial^\alpha\delta_a$ tartóját! Bizonyítsuk be, hogy $\partial^\alpha\delta_a$ rendje $|\alpha|$.

11.14. Legyen $a \in \Omega$ és mutassuk meg, hogy a δ_a Dirac-delta disztribúció nem reguláris, azaz nem létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény, amelyre $\delta_a = T_f$.

11.15. Legyen $\Omega = (0{,}2)$, és értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$! Mutassuk meg, hogy u végtelen rendű! Lehet-e egy végtelen rendű disztribúció reguláris?

11.16. Adjunk meg tetszőleges k nemnegatív egész számra k-adrendű disztribúciót!

11.17. Legyen $\psi \in C^\infty(\Omega)$ és $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$(\psi u)(\varphi) := u(\psi\varphi) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$

összefüggéssel értelmezett $\psi u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionál disztribúció, és az $u \mapsto \psi u$ leképezés folytonos lineáris $\mathscr{D}'(\Omega)$-ból önmagába!

11.18. Igazoljuk, hogy ha $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$, akkor minden α multiindexre

$$\partial^\alpha u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} \partial^\alpha u.$$

11.19. Mutassuk meg, hogy ha $a \in \Omega$ és $\psi \in C^\infty(\Omega)$, akkor $\psi\delta_a = \psi(a)\delta_a$.

11.20. Legyen $\psi(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy $\psi\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}$, $n = 1,2,\dots$.

11.21. Mutassuk meg a Leibniz-formula következő általánosítását: $(\psi u)' = \psi' u + \psi u'$ minden $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ és $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ esetén.

11.22. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f(x) = x - a$, $x \in \mathbb{R}$. . Igazoljuk, hogy az $fu = 0$ egyenlet $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-beli megoldásai a δ_a Dirac-delta függvény konstansszorosai.

11.23. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, és tegyük fel, hogy $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} u$ halmazon. Következik-e ebből, hogy $\psi u = u$?

11.24. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

11.25. Értelmezzük a $\mathscr{P}_1 \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő hozzárendeléssel:

$$\mathscr{P}_1(\varphi) = \mathscr{P}\frac{1}{x}(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx =: \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

amelyet az (amúgy esetleg értelmetlen) integrál ún. *Cauchy-féle főértékének* (valeur principale) nevezünk. Igazoljuk, hogy $\mathscr{P}_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, továbbá $\mathscr{P}_1 = (x \mapsto \log|x|)'$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}$-en. Határozzuk meg $\mathscr{P}_1$ rendjét! Lehet-e $\mathscr{P}_1$ reguláris disztribúció? Legyen $\psi(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, mutassuk meg, hogy $\psi\mathscr{P}_1 = T_1$ reguláris disztribúció, és hogy $(\psi\delta_0)\mathscr{P}_1 \neq (\psi\mathscr{P}_1)\delta_0$.

11.26. Számítsuk ki $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}\frac{1}{x}$ deriváltját $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben.

11.27. ($|x|^\alpha$ főértéke) Számítsuk ki $|x|^\alpha$ deriváltját $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben az $\alpha > -1$ esetben.

11.28. Vezessük be a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket: $\operatorname{abs}(x) := |x|$,

$$r(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

(az előjelfüggvény), valamint H a Heaviside-függvény. Igazoljuk, hogy

a) $T_r' = T_H$,

b) $T_{\mathrm{abs}}' = T_{\mathrm{sgn}}$,

c) $T_{\mathrm{sgn}}' = 2\delta_0$.

11.29. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u' = \delta_{-1} + \delta_1$?

11.30. Bizonyítsuk be, hogy az $u(x) = H(x)\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény disztribúció értelemben megoldása az $u'' + u = \delta_0$ differenciálegyenletnek $\mathbb{R}$-en!

11.31. Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2$. Keressünk olyan $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $f'' + f + g = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}$-en!

11.32. Adjunk meg olyan $y \in L^1_{\mathrm{loc}}\mathbb{R}$ függvényt, amelyre $y'' - 4y = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}$-en!

11.33. Adjunk meg az $(a_j) \subset \Omega$ pontsorozatra vonatkozó szükséges és elégséges feltételt ahhoz, hogy $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_j}$ disztribúció legyen Ω-n!

11.34. Van-e olyan nem reguláris $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amely nulladrendű, kompakt tartójú és nem áll elő $u = \sum_{j=1}^{m} \delta_{s_j}$ alakban, ahol $s_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$?

11.35. Tegyük fel, hogy az $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúció nulladrendű és $\operatorname{supp} u = \{a\}$, ahol $a \in \Omega$. Mutassuk meg, hogy ekkor $u = c \cdot \delta_a$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal.

11.36. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $v' = u$, továbbá ha $v_1' = v_2' = u$, akkor $v_1 - v_2$ konstans függvényhez tartozó reguláris disztribúció.

11.37. Tegyük fel, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ rendje $k \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor u' rendje $k + 1$.

11.121. *Megjegyzés.* Tetszőlegesen adott $c \in \mathbb{C}$ szám esetén, a 11.21, 11.36 feladatokból a

$$v' + cv = u \iff (e^{cx}v)' = e^{cx}u$$

ekvivalencia alapján következik, hogy a $v' + cv = u$ egyenlet megoldható $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben, és a megoldások egy egydimenziós affin alteret alkotnak.

Felhasználva a polinomok $\mathbb{C}$ feletti faktorizációját, innen teljes indukcióval kapjuk, hogy egy n-edrendű állandó (komplex) együtthatós

$$a_n v^{(n)} + \dots + a_1 v' + a_0 v = u$$

differenciálegyenlet ($a_n \neq 0$) bármely adott $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ esetén megoldható $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben, és a megoldások egy n dimenziós affin alteret alkotnak.

Következésképpen, ha u reguláris disztribúció (például ha $u = 0$), akkor a differenciálegyenletnek $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben sincsenek a klasszikusoktól különböző megoldásaik.

11.38. Oldjuk meg $\mathscr{D}'$-ben a következő egyenleteket:

a) $(x-1)T = 0$,
b) $x(x-1)T = 0$,
c) $x^2T = 0$,
d) $xT = 1$.

11.39. Oldjuk meg $\mathscr{D}'$-ben a következő egyenleteket:

a) $T' - \alpha T = 0$,
b) $T'' - 3T' + 2T = 0$,
c) $xT' = 1$,
d) $x(x-1)T' = 0$,
e) $(x+1)T'' = 0$,
f) $(x+1)^2T'' = 0$.

11.40. Legyen $(a_k) \subset \mathbb{R}$, $\lim |a_k| = \infty$, és $(c_k) \subset \mathbb{C}$. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{a_k}$ végtelen sor konvergál $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben.

11.41. Legyen $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\in f\ dx = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$nf(nx) \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R})} \delta_0.$$

11.42. Legyen $g_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\varepsilon(x) := \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén $T_{g_\varepsilon} \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R})} \delta_0$.

11.43. Legyen α multiindex, $|\alpha| \geq 1$, és $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{supp} \partial^\alpha u \subset \operatorname{supp} u$. Adjunk meg olyan u disztribúciót, amely esetében szigorú tartalmazás áll fenn. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség teljesül.

11.44. Legyen $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, amelyre

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } xy \geq 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Adjuk meg a $\partial_{12} T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

11.45. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, amelyre

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x, y \le 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Adjuk meg a $\partial_{21} T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

11.46. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, amely 1-gyel egyenlő az (1,0), (0,1), (−1,0),(0, −1) csúcspontok által meghatározott négyzeten, és azon kívül 0. Adjuk meg a $\partial_1^2 T_f - \partial_2^2 T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

11.47. Értelmezzük az n dimenziós $\tilde{H}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Heaviside-függvényt a következőképpen:

$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_i \ge 0 \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_n \tilde{H} = \delta_0$.

b) Mutassuk meg, hogy $\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_n r = \tilde{H}$, ahol

$$r(x) = \begin{cases} x_1 x_2 \cdots x_n, & \text{ha } x_i \ge 0 \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

11.48. Definiáljuk az $u\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált az $u(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(0,y)dy$ ($\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$) hozzárendeléssel. Igazoljuk, hogy

a) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_2 u = \delta_{(0,0)}$,

c) van olyan $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, amelyre $u = \partial_1 T_f$.

11.49. Definiáljuk az $u\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált az $u(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(x,-x)\,dx$ ($\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$) hozzárendeléssel. Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$. Adjuk meg a $\partial_1 u - \partial_2 u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

11.50. Egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúcióról azt mondjuk, hogy nem függ a j-edik változótól, ha tetszőleges $h \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén $u(x \mapsto \varphi(x)) = u(x \mapsto \varphi(x + he_j))$, ahol $e_j = (0, \dots, 0,1,0, \dots, 0)$ a j-edik bázisvektor. Mutassuk meg, hogy az u disztribúció pontosan akkor nem függ a j-edik változótól, ha $\partial_j u = 0$.

11.51. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges tartomány, továbbá $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ korlátos tartomány, amelynek pereme folytonosan differenciálható. Tegyük fel, hogy $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, amelyre $f|_U \in C^1(\overline{U})$ és $f|_{\Omega \setminus \overline{U}} \in C^1(\Omega \setminus U)$. Jelölje

$$f_+(x) := \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega \setminus \overline{U}}} f(y), \qquad f_-(x) := \lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} f(y)$$

az f függvénynek az U határán kívülről, illetve belülről vett határértékét. Mutassuk meg, hogy ekkor $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ és $j = 1, \dots, n$ esetén

$$\partial_j T_f(\varphi) = T_{\partial_j f}(\varphi) + \int_{\partial U} (f_+ - f_-)(\varphi)\nu_j \, d\sigma,$$

ahol ν az U-ból kifelé mutató normális egységvektor.

11.52. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Hogyan hatnak egy $\varphi \in \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ függvényre a $\delta_a \times \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ és $\delta_a \times T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók?

11.53. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v.$$

11.54. Igaz-e, hogy ha az $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók előállnak egy $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és egy $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$-beli disztribúció direkt szorzataként, akkor ugyanez igaz az $u + v$ disztribúcióra?

11.55. Tegyük fel, hogy $u \times v = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = 0$ vagy $v = 0$?

11.56. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α (n hosszú) és β (m hosszú) multiindexre

$$\partial_x^\alpha (u \times v) = (\partial^\alpha u) \times v \quad \text{és} \quad \partial_y^\beta (u \times v) = u \times (\partial^\beta v).$$

11.57. Mutassuk meg, hogy a direkt szorzat a tényezőknek külön-külön folytonos függvénye, pontosabban, ha $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, akkor

$$u_j \times v \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})} u \times v \quad \text{és} \quad v \times u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})} v \times u.$$

11.58. Igazoljuk a 11.88. Állítást!

11.59. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Hogyan hatnak egy $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ függvényre a $\delta_a * \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $\delta_a * T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók?

11.60. Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre létezik $u * v$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v},$$

ahol $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v = \{y + z \in \mathbb{R}^n : y \in \operatorname{supp} u, z \in \operatorname{supp} v\}$. Adjunk meg olyan u és v disztribúciókat, amelyek esetében szigorú tartalmazás teljesül. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség áll fenn!

11.61. Legyenek $u, v, w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a következő disztribúciók: $u = T_H$ (ahol H a Heaviside-függvény), $v = \delta_0'$, $w = T_1$ (ahol T_1 az azonosan 1 függvényhez tartozó reguláris disztribúció). Bizonyítsuk be, hogy

$$(u * v) * w \quad \text{és} \quad u * (v * w)$$

léteznek, de nem egyenlőek.

11.62. Legyen $u = v = T_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ahol T_1 az azonosan 1 függvényhez tartozó reguláris disztribúció) és $w = \delta_0' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Igazoljuk, hogy $u * (v * w)$ értelmes, de $(u * v) * w$ nem létezik.

11.63. Tegyük fel, hogy $u * v = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = 0$ vagy $v = 0$?

11.64. Mutassuk meg, hogy a konvolúció folytonosan függ a tényezőktől a következő értelemben: ha $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ kompakt tartójú, akkor

$$u_j * v \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u * v \quad \text{és} \quad v * u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} v * u.$$

12. fejezet

Állandó együtthatójú lineáris hiperbolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok

Az értelem és felfedezések birodalma nem túl kiterjedt; és gyakran ahelyett, hogy megtanulnánk azt, amit nem tudunk, csak arra jövünk rá, hogy nem igaz, amit eddig tudni véltünk.

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

A fejezet tartalma. Értelmezzük az állandó együtthatójú lineáris hiperbolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok fogalmát és igazoljuk a megoldások létezését. Az általánosított megoldásokból a klasszikus megoldásokra következtetünk.

Ahogy a bevezetőben jeleztük, ebben a fejezetben a hiperbolikus egyenletekre vonatkozó klasszikus kezdetiérték-feladatok (vagy Cauchy-feladatok) fogalmát szeretnénk kiterjeszteni a disztribúciók körére, és ezáltal értelmezni az általánosított Cauchy-feladatokat. Később az általánosított Cauchy-feladatok megoldásából tudunk következtetni a klasszikus feladatok megoldásaira.

12.1. Az általánosított Cauchy-feladat

Először emlékeztetünk a hiperbolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatok megfogalmazására. A 7. fejezetében láttuk, hogy az állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek kanonikus alakja hiperbolikus esetben a következő:

$$\partial_t^2 u - \Delta u + cu = f, \tag{12.1}$$

ahol c konstans. Ebben a fejezetben a korábbiaktól eltérő módon a változókat (t, x) jelöli, ahol t az időnek felel meg, a Δ operátor pedig csak az $x = (x_1, \dots, x_n)$ térváltozókban hat.

12.1. Definíció. A (12.1) differenciálegyenletre vonatkozó *klasszikus Cauchy-feladat megoldásán* olyan $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ függvényt értünk, amely (klasszikus értelemben) kielégíti a (12.1) egyenletet, továbbá $u, \partial_t u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, valamint teljesülnek az $u(0, x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ és $\partial_t u(0, x) = h(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltételek, ahol $g, h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott függvények.

Kérdés, hogy a fenti definíció hogyan terjeszthető ki a disztribúciók körére. Ahhoz, hogy az u megoldáshoz tartozó reguláris disztribúcióról tudjunk beszélni, terjesszük ki az u és f függvény értelmezési tartományát $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$-ról $\mathbb{R}^{n+1}$-re, a szokásos módon 0-ként definiálva:

$$\tilde{u}(t, x) := \begin{cases} u(t, x), & \text{ha } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t < 0, x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \tag{12.2}$$

$$\tilde{f}(t, x) := \begin{cases} f(t, x), & \text{ha } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t < 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{12.3}$$

Világos, hogy ekkor $\tilde{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, hiszen $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Ahhoz, hogy az $\tilde{f}$ függvényhez tartozó reguláris disztribúcióról beszélhessünk, fel kell tennünk, hogy $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, ehhez elegendő például, ha $f \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Most már beszélhetünk az $\tilde{u}$ és $\tilde{f}$ függvényekhez tartozó $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$-beli reguláris disztribúciókról.

12.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy az u függvény kielégíti a hiperbolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot, továbbá a* (12.3) *alapján értelmezett $\tilde{f}$ függvényre $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ teljesül. Ekkor a* (12.2) *hozzárendeléssel értelmezett $\tilde{u}$ függvényre*

$$\partial_t^2 T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} + c T_{\tilde{u}} = T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-}ben. \tag{12.4}$$

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ tetszőleges, ekkor disztribúciók deriválásának definíciója szerint

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} + cT_{\tilde{u}})(\varphi) &= T_{\tilde{u}}(\partial_t^2\varphi) - T_{\tilde{u}}(\Delta\varphi) + cT_{\tilde{u}}(\varphi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{u}(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \tilde{u}(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi).\end{aligned} \tag{12.5}$$

Most vizsgáljuk meg a (12.5) összefüggés jobb oldalán álló integrált, az integrandusokat külön-külön kezelve. Parciális integrálást végrehajtva egyrészt

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty u(t,x)\partial_t^2 u(t,x)\,dt &= -u(\varepsilon,x)\partial_t\varphi(\varepsilon,x) - \int_\varepsilon^\infty \partial_t u(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dt\\ &= -u(\varepsilon,x)\partial_t\varphi(\varepsilon,x) + \partial_t u(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\\ &\quad + \int_\varepsilon^\infty \partial_t^2 u(t,x)\varphi(t,x)\,dt,\end{aligned} \tag{12.6}$$

másrészt pedig a második Green-tételt alkalmazva

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)\varphi, \tag{12.7}$$

ahol a peremintegrálok φ kompakt tartójú volta miatt tűnnek el. A (12.6) és (12.7) összefüggések alapján

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}^n} u(\varepsilon,x)\partial_t\varphi(\varepsilon,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\partial_t u(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,dx\\ &\quad + \int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t^2 u - \Delta u + cu)\varphi,\end{aligned}$$

mivel pedig u kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot, ezért $\partial_t^2 u - \Delta u + cu = f$ $\mathbb{R}^{n+1}_+$-on, így a $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ feltételből, valamint a kezdeti feltételekből adódóan

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} u(0,x)\partial_t(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\partial_t u(0,x)\varphi(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} f\varphi\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\partial_t\varphi(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} f\varphi,\end{aligned} \tag{12.8}$$

ahol a határátmenetet a Lebesgue-tétel miatt végezhettük el, hiszen az integrandusok kompakt tartójú folytonos függvények. A 11.65. Állítás szerint

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(0,x)\,dx &= T_h\{x\mapsto\varphi(0,x)\} = T_h\{x\mapsto\delta[t\mapsto\varphi(t,x)]\}\\ &= \delta\{t\mapsto T_h[x\mapsto\varphi(t,x)]\} = (\delta\times T_h)(\varphi),\end{aligned}\tag{12.9}$$

a 11.70. Állítás alapján pedig

$$\begin{aligned}(\delta'\times T_g)(\varphi) = \partial_t(\delta\times T_g)(\varphi) &= -(\delta\times T_g)(\partial_t\varphi)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\partial_t\varphi(0,x)\,dx,\end{aligned}\tag{12.10}$$

így a (12.8) és (12.5) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$(\partial_t^2 T_{\tilde u} - \Delta T_{\tilde u} + cT_{\tilde u})(\varphi) = (\delta'\times T_g)(\varphi) + (\delta\times T_h)(\varphi) + T_{\tilde f}(\varphi),$$

amit bizonyítani kellett. □

A (12.4) egyenlet lehetőséget nyújt a klasszikus Cauchy-feladat fogalmának disztribúciókra való kiterjesztésére. Jegyezzünk meg még annyit, hogy a (12.4) egyenlet jobb oldalán álló disztribúcióra a 11.35. Példa és a 11.71. Állítás alapján

$$\operatorname{supp}(T_{\tilde f} + \delta'\times T_g + \delta\times T_h) \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}.$$

Ennek alapján kézenfekvő a következő definíció.

12.3. Definíció. Legyen $F\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ adott, amelyre $\operatorname{supp} F\subset\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. A hiperbolikus egyenletre vonatkozó *általánosított Cauchy-feladat* megoldásán olyan $v\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúciót értünk, amelyre

$$\partial_t^2 v - \Delta v + cv = F \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben},$$

és $\operatorname{supp} v\subset\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. A fenti problémát a hiperbolikus egyenletre vonatkozó *általánosított Cauchy-feladatnak* nevezzük.

A 12.2. Állításból nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

12.4. Állítás. *Ha u kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot, továbbá a* (12.3) *hozzárendeléssel értelmezett $\tilde f$ függvényre $\tilde f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, akkor a $v := T_{\tilde u}$ (ahol $\tilde u$ a* (12.2) *összefüggéssel definiált) disztribúció megoldása az általánosított Cauchy-feladatnak az $F := T_{\tilde f} + \delta'\times T_g + \delta\times T_h$ jobb oldallal.*

Az általánosított Cauchy-feladatok megoldására alkalmazhatjuk a 11. fejezet eredményeit, különösképpen a 11.98. és 11.111. Tételeket, és az alábbi tételt nyerjük.

12.5. Tétel. *A hiperbolikus egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatnak létezik egyetlen $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldása, mégpedig $v = E * F$, ahol $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ olyan alapmegoldás, amelyre* $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$.

Bizonyítás. A 11.111. Tétel alapján létezik a hiperbolikus egyenletnek olyan $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ alapmegoldása, amelyre $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$. Ekkor a 11.88. Állítás szerint létezik az $E*F$ konvolúció, amelyre a 11.98. Tételből következően teljesül, hogy

$$\partial_t^2 v - \Delta v + cv = F \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben.}$$

Ezenkívül a 11.93. Állítás folytán

$$\operatorname{supp} v = \operatorname{supp}(E * F) \subset \overline{\operatorname{supp} E + \operatorname{supp} F} \subset \overline{\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} + \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}} = \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}.$$

Végül a 11.98. Tétel szerint az egyenletnek legfeljebb egy olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldása létezhet, amelyre $v * E$ létezik, így mivel $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$, ezért legfeljebb egy olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúció létezhet, amelyre $\operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ (hiszen az ilyen v-kre $v * E$ létezik). □

A fenti tételből máris következtethetünk a klasszikus Cauchy-feladat megoldásának egyértelműségére.

12.6. Következmény. *A hiperbolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy megoldása lehet.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy u_1 és u_2 klasszikus megoldások. Ekkor az $u := u_1 - u_2$ függvényre

$$\partial_t^2 u - \Delta u + cu = 0 \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben,}$$

valamint $u(0,x) = 0$ és $\partial_t u(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Ebből következően a $v := T_{\tilde{u}}$ disztribúció kielégíti az alábbi egyenletet $\mathbb{R}^{n+1}$-ben:

$$\partial_t^2 v - \Delta v + cv = 0.$$

Világos (a 11.35. Példa miatt), hogy $\operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, így a 12.5. Tétel szerint szükségképpen $v = 0$ egyetlen megoldás, azaz $u = 0$. □

A 12.5. Tétel egy fontos következménye (amelyet már az alapmegoldások kapcsán a 11.7. szakaszban is említettünk), hogy a hiperbolikus egyenlet olyan jelenséget ír le, amelyben a hatás véges sebességgel terjed. Ezt disztribúciókra az alábbi következmény fogalmazza meg (a klasszikus esetet illetően lásd még a 12.13. Következményt).

12.7. Következmény. *Legyen $t_0 > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített, és tekintsük a következő kúpot:*

$$A := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0 - t > |x_0 - x|\}.$$

Ekkor az általánosított Cauchy-feladat megoldásának leszűkítése A-ra, azaz $v|_A$ csak $F|_A$-tól függ, más szóval $F|_A = 0$ esetén $v|_A = 0$.

Bizonyítás. Legyen $K := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$, ekkor $\operatorname{supp} E \subset K$. Tegyük fel, hogy $F|_A = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{supp} F \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. A 11.93. Állítás szerint

$$\operatorname{supp} v = \operatorname{supp}(E * F) \subset \overline{\operatorname{supp} E + \operatorname{supp} F} \subset \overline{K + (\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)}.$$

Állítjuk, hogy $\overline{K + \mathbb{R}^{n+1} \setminus A} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$, ekkor készen leszünk, hiszen $\operatorname{supp} v \subset \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ (amely zárt halmaz), és így $v = 0$ az A halmazon.

Legyen $(t_1, x^{(1)}) \in K$ és $(t_2, x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. Ebből következően $t_1 \geq |x^{(1)}|$ és $t_0 - t_2 \leq |x^{(0)} - x^{(2)}|$, így a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$t_0 - (t_1 + t_2) \leq |x^{(0)} - x^{(2)}| - |x^{(1)}| \leq |x^{(0)} - (x^{(2)} - x^{(1)})|,$$

vagyis $(t_1 + t_2, x^{(1)} + x^{(2)}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$, ezért $K + (\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. Végül mivel $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ zárt halmaz (mert A nyílt), így $\overline{K + (\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. □

12.8. *Megjegyzés.* A 12.7. Következményben szereplő kúpot szokás a $(t_0, x^{(0)})$ pont *függőségi kúpjának* vagy *karakterisztikus kúpjának* nevezni.

12.2. A klasszikus Cauchy-feladat

Most az előző szakaszban az általánosított Cauchy-feladatra kapott eredményeinket szeretnénk a klasszikus Cauchy-feladat megoldására alkalmazni. Az alapgondolat a következő. Amennyiben a klasszikus feladatban szereplő függvények eleget tesznek bizonyos simasági feltételeknek, akkor a (12.4) általánosított Cauchy-feladat megoldásáról (amelyre képletünk van) belátható, hogy reguláris disztribúció, amelynek megfelelő lokálisan integrálható függvény $\mathbb{R}^{n+1}_+$-ban kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot. Az egyszerűség kedvéért csak az egydimenziós hullámegyenlet (azaz $c = 0$) esetét vizsgáljuk meg részletesen, a két- és háromdimenziós hullámegyenlet esetében csak felírjuk a klasszikus Cauchy-feladat megoldását. A $c \neq 0$ esettel kapcsolatban lásd a 12.1. és a 12.2. Feladatokat.

12.9. Tétel. *Legyen $n = 1$, $c = 0$, továbbá tegyük fel, hogy $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$. Ekkor a hiperbolikus egyenletre vonatkozó klasszikus*

Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ megoldása, mégpedig

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\,d\xi. \tag{12.11}$$

A (12.11) *képletet* d'Alembert-formulának *szokás hívni.*

Bizonyítás. Az egyértelműség a 12.6. Következményből adódik. A létezés bizonyítását három lépésben végezzük el. Először megmutatjuk, hogy a (12.11) formulával értelmezett függvény disztribúció értelemben megoldása a klasszikus Cauchy-feladathoz a (12.4) összefüggés alapján tartozó általánosított Cauchy-feladatnak. Ezután igazoljuk, hogy a megfelelő simasági feltételek mellett $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, végül pedig belátjuk a kezdeti feltételek teljesülését.

1. lépés. A 12.5. Tétel alapján a (12.4) egyenlet egyértelmű megoldása $E * F$, ahol a 11.101. Példa szerint $E(t,x) = H(t-|x|)/2$ (H a Heaviside-függvény), továbbá $F = T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h$. Belátjuk, hogy $E * F$ függvény értelemben létezik. Valóban,

$$\begin{aligned}(E * \tilde{f})(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\tau,\xi)E(t-\tau,x-\xi)\,d\tau\,d\xi \\ &= \int_{\substack{0\le\tau\le t\\ |x-\xi|\le t-\tau}} \frac{1}{2}f(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau.\end{aligned}$$

A (12.9) összefüggés felhasználásával $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$(\delta \times T_h)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(0,x)\,dx,$$

így a 11.88. Állítás szerint

$$\begin{aligned}&(E * (\delta\times T_h))(\varphi) = \\ &= (E \times (\delta\times T_h))[(t,x,\tau,\xi) \mapsto \psi(t,x)\chi(\tau,\xi)\varphi(t+\tau,x+\xi)] \\ &= (\delta \times T_h)\big\{(\tau,\xi) \mapsto \psi(\tau,\xi)T_E[(t,x) \mapsto [\chi(t,x)\varphi(t+\tau,x+\xi)]]\big\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\xi)\psi(0,\xi)\int_{\mathbb{R}^2} E(t,x)\chi(t,x)\varphi(t,x+\xi)\,dt\,dx\,d\xi,\end{aligned} \tag{12.12}$$

ahol $\psi = 1$ az $\mathbb{R}^2_+$ féltér egy környezetében és $\chi = 1$ a $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq |x|\}$ kúp egy környezetében. Ebből következően a Fubini-tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned}(E * (\delta \times T_h))(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} h(\xi) \int_{\mathbb{R}^2} E(t,x)\varphi(t,x+\xi)\,dt\,dx\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} E(t,x)\varphi(t,x+\xi)h(\xi)\,d\xi\,dt\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} E(t,\tilde{x}-\xi)\varphi(t,\tilde{x})h(\xi)\,d\xi\,dt\,d\tilde{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t,\tilde{x}) \left(\frac{1}{2} \int_{|\tilde{x}-\xi|\leq t} h(\xi)\,d\xi \right) dt\,d\tilde{x}.\end{aligned} \tag{12.13}$$

Ez azt jelenti, hogy $E * (\delta \times T_h) = T_{u_2}$, ahol

$$u_2(t,\tilde{x}) = \frac{1}{2} \int_{|\tilde{x}-\xi|\leq t} h(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2} \int_{\tilde{x}-t}^{\tilde{x}+t} h(\xi)\,d\xi.$$

Teljesen hasonló módon, a (12.10) összefüggés alkalmazásával (12.12) és (12.13) mintájára kapjuk, hogy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$\begin{aligned}(E * (\delta' \times T_g))(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \varphi(t,\tilde{x}) \left(\frac{1}{2} \int_{|\tilde{x}-\xi|\leq t} g(\xi)\,d\xi \right) dt\,d\tilde{x} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \varphi(t,\tilde{x}) \left(\frac{1}{2} \int_{\tilde{x}-t}^{\tilde{x}+t} g(\xi)\,d\xi \right) dt\,d\tilde{x}.\end{aligned}$$

A jobb oldalon egy parciális integrálást végrehajtva φ kompakt tartójú voltának, továbbá

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_{\tilde{x}-t}^{\tilde{x}+t} g(\xi)\,d\xi \right) = \frac{1}{2} \left(g(x+t) + g(x-t) \right)$$

felhasználásával adódik, hogy

$$(E * (\delta' \times T_g))(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t,\tilde{x}) \left(\frac{1}{2} g(x+t) + g(x-t) \right) dt\,d\tilde{x}.$$

Mindez azt jelenti, hogy $E * (\delta' \times T_g) = T_{u_3}$, ahol

$$u_3(t,x) = \frac{1}{2} \left(g(x+t) + g(x-t) \right).$$

Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy ha $F = T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h$, akkor $E * F = T_u$, ahol u a (12.11) formulában szereplő függvény.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy a (12.11) képlettel adott u függvényre $u \in \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Ez nyilvánvalóan következik a paraméteres integrál differenciálhatóságáról és a kirótt simasági feltételekből. Mivel az u függvény kétszer folytonosan differenciálható az $\mathbb{R}^2_+$ féltérben, ezért u legfeljebb másodrendű klasszikus és általánosított parciális deriváltjai megegyeznek. Az u függvény általánosított értelemben kielégíti az $F = T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h$ jobb oldallal adott általánosított Cauchy-feladatot, így a 12.4. Állítás alapján (és a klasszikus, illetve általánosított deriváltak egyenlősége folytán) u klasszikus értelemben is kielégíti az egydimenziós hullámegyenletet.

3. lépés. Végül már csak a kezdeti feltételek teljesülését kell ellenőriznünk. Nyilvánvalóan $u(0,x) = h(x)$, továbbá a 2.20. Tétel alapján

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t (f(\tau, x+(t-\tau)) + f(t, x-(t-\tau)))\,d\tau + \frac{1}{2}(g'(x+t) - g'(x-t)) + \frac{1}{2}(h(x+t)+h(x-t)),$$

így $\partial_t u(0,x) = h(x)$. □

Az alábbiakban csak kimondjuk a két- és háromdimenziós hullámegyenlet klasszikus megoldására vonatkozó tételeket, a bizonyítás az egydimenziós esethez teljesen hasonlóan történik (lásd a [175] tankönyvet).

12.10. Tétel. *Legyen $n = 2$, $c = 0$, és tegyük fel, hogy $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, $g \in \in C^3(\mathbb{R}^2)$ és $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Ekkor a kétdimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ megoldása, mégpedig*

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{B(x,t-\tau)} \frac{f(\tau,\xi)}{\sqrt{(t-\tau^2) - |x-\xi|^2}}\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,t)} \frac{g(\xi)}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{B(x,t)} \frac{h(\xi)}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi. \tag{12.14}$$

12.11. Tétel. *Legyen $n = 3$, $c = 0$, valamint $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}^4_+})$, $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ és $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Ekkor a háromdimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^4_+})$ megoldása, méghozzá*

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{f(t-|x-\xi|,\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{S(x,t)} g\,d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} h\,d\sigma. \tag{12.15}$$

A (12.15) *képletet szokás* Kirchhoff-formulának *nevezni.*

12.12. *Megjegyzés.* Valójában a kétdimenziós eset visszavezethető a háromdimenziós esetre (lásd a 12.4. Feladatot), az egydimenziós pedig a kétdimenziósra (lásd a 12.5. Feladatot). Sőt, általában az $(n+1)$ dimenziós Cauchy-feladat megoldásának ismeretében az n dimenziós feladat megoldását meg tudjuk határozni, ezt szokás a *leszállás módszerének* is nevezni.

12.13. *Megjegyzés* (Huygens-elv). A d'Alembert-, a (12.14) és a Kirchhoff-formula alapján adódik a következő nyilvánvaló állítás.

Egy, két és három dimenzióban a hiperbolikus egyenlet megoldásának értéke egy (t_0, x^0) pontban csak az f függvénynek a (t_0, x^0) pont karakterisztikus kúpjára való megszorításától, valamint a g és h függvények $B(x^0, t_0)$ gömbre való megszorításától függ. Ez azt jelenti, hogy egy x^* pontbeli kezdeti $g(x^*)$, $h(x^*)$ zavaró hatás az x^0-ban csak $|x^* - x^0|$ idő elteltével észlelhető, a hullám terjedési sebessége egységnyi. Sőt, az $n = 3$ esetben a (t_0, x^0) pontbeli érték, g-nek és h-nak csak a $B(x^0, t_0)$ gömb felületére vett megszorításától függ, a belsejében felvett értékektől nem. Más szóval x^* pontbeli kezdeti $g(x^*)$ (vagy $h(x^*)$) zavaró hatás csak a $\{(t, x) : t > 0, |x - x^*| = t\}$ kúp felületén befolyásolja az u megoldást, a kúp belsejében nem, azonban két dimenzióban a zavaró hatás a kúp belsejében is jelentkezik. A zavaró hatás tehát három dimenzióban egy hullámfront mentén terjed végig, annak elhaladtával újra nyugalmi állapot következik be. Azonban két dimenzióban az elülső hullámfront elhaladta után is jelentkezik a zavaró hatás, úgynevezett *hullámdiffúzió* megy végbe. A kétdimenziós eset tetszőleges páros dimenzióban, a háromdimenziós pedig tetszőleges páratlan dimenzióban igaz: páratlan dimenzióban a zavaró hatás egy hullámfront mentén halad végig, utána nyugalmi helyzet áll vissza, páros dimenzióban viszont a hullámfront elhaladása után jelentkezik a zavaró hatás, hullámdiffúzió megy végbe. Ez az úgynevezett *Huygens-elv.* (Szemléletesen: egy lámpát egy pillanatra felgyújtva bármely távolságban egy pillanatra látjuk a fényt, azonban a vízbe dobott kő által keltett kör hullámfront belseje nem kerül nyugalmi állapotba a hullámfront elhaladása után.)

12.14. *Történeti megjegyzés.* A Kirchhoff-formula Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) német fizikus nevét viseli, aki egy 1882-es cikkében vizsgálta a rezgő lemezek elméletét.

A 12.12. Megjegyzésben említett leszállás módszerének elnevezése Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) francia matematikustól származik, [70] könyvének első, 1923-as kiadásából (amelyből a Cauchy-feladat elnevezés is származik, lásd az 5.2. Megjegyzést). Ahogy Hadamard megjegyzi, gyerekes dolog egy olyan gyermekien egyszerű ötletre elnevezést bevezetni, amelyet ráadásul már az elmélet kialakulásától kezdve mindenki használt, de az egyszerűbb hivatkozás érdekében mégis hasznos. Az ötlet csupán annyi: aki a többet meg tudja oldani, az a kevesebbet is.

Christiaan Huygens (1629–1695) holland fizikus 1690-ben a fényről szóló könyvében írta le, hogy a fény terjedési hullámfrontja egy későbbi időpontban a hullámfrontból kiinduló hatások (másodlagos hullámok) burkolójaként áll elő. Később Augustin-Jean Fresnel francia fizikus ezt kiegészítette azzal, hogy egy adott pontbeli másodlagos hullámok amplitúdójának szuperpozíciójaként áll elő. A Huygens-elv elnevezést Huygens eredményének tiszteletére Hadamard vezette be a fentiekben említett könyvében. Hadamard felvetette a kérdést, hogy vajon melyek azok a másodrendű egyenletek, amelyekre teljesül a Huygens-elv, ez a probléma még ma sem teljesen megoldott. Később Peter David Lax (1926–2025) és Richard Courant (1888–1972) vezette be a gyenge Huygens-elvet, amely szerint egy pontbeli szingularitás csak a kezdeti értékeknek a pont karakterisztikus kúpjába eső szingularitásaitól függ. A gyenge Huygens-elv minden hiperbolikus egyenletre teljesül.

12.3. Feladatok

12.1. Tegyük fel, hogy az $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúcióra $\operatorname{supp} F \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$, továbbá $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $h(x_n) = \exp(kx_n)$, ahol $k > 0$ adott. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció kielégíti a

$$\partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j u - k^2 u = F, \qquad \operatorname{supp} u \subset \overline{\mathbb{R}^n_+} \tag{12.16}$$

általánosított Cauchy-feladatot, akkor a $v := u \times h$ disztribúció kielégíti a

$$\partial_t^2 v - \sum_{j=1}^{n} \partial_j v = F \times h, \qquad \operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}^n_+} \tag{12.17}$$

általánosított Cauchy-feladatot.

12.2. Igazoljuk a 12.1. Feladat megfordítását! Pontosabban, ha v a 12.17 feladat megoldása, akkor a $\tilde{h}(x_0, \dots, x_n) := h(x_n)$ függvény segítségével értelmezett $v/\tilde{h} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúció nem függ az n-edik (tér)változótól (lásd a 11.50. Feladatot). Ekkor az

$$u(\varphi) := v(\varphi \times \varphi_0)$$

összefüggéssel értelmezett $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció kielégíti a (12.16) feladatot, ha $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan, amelyre $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0 = 1$.

12.3. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbolikus egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladat megoldása folytonosan függ az $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúciótól a következő értelemben. Ha $F_j \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $\operatorname{supp} F_j \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$,

amelyekre $F_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})} F$ (a gyenge konvergencia szerint), akkor a megfelelő általánosított Cauchy-feladatok u_j megoldására $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})} u$, ahol u az F-hez tartozó Cauchy-feladat megoldása.

12.4. Vezessük le a (12.14) képletet a Kirchhoff-formulából úgy, hogy a kétdimenziós Cauchy-feladatot háromdimenziós feladatnak tekintjük az f, g, h függvények alábbi kiterjesztésével:

$$\tilde{f}(t,\tilde{x}) := f(t,x), \quad \tilde{g}(t,\tilde{x}) := g(t,x), \quad \tilde{h}(t,\tilde{x}) := h(t,x), \tag{12.18}$$

ahol $\tilde{x} = (x, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

12.5. Vezessük le a d'Alembert-formulát a (12.14) képletből úgy, hogy az egydimenziós Cauchy-feladatot kétdimenziós feladatnak tekintjük az f, g, h függvények alábbi kiterjesztésével:

$$\tilde{f}(t,\tilde{x}) := f(t,x), \quad \tilde{g}(t,\tilde{x}) := g(t,x), \quad \tilde{h}(t,\tilde{x}) := h(t,x), \tag{12.19}$$

ahol $\tilde{x} = (x, x_2) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

13. fejezet

Állandó együtthatójú lineáris parabolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok

A gyakorlati alkalmazások akkor bukkannak fel, amikor nem keressük azokat. Az egész emberiség fejlődése ezen az elven nyugszik.

Jacques Salomon Hadamard (1865–1963)

A fejezet tartalma. Értelmezzük az állandó együtthatójú lineáris parabolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok fogalmát és igazoljuk a megoldások létezését. Az általánosított megoldásokból a klasszikus megoldásokra következtetünk.

Az előző fejezet mintájára az alábbiakban a parabolikus egyenletekre vonatkozó klasszikus kezdetiérték-feladatok fogalmát szeretnénk kiterjeszteni a disztribúciók körére, és az így definiált általánosított Cauchy-feladatok segítségével következtetünk a klasszikus feladat megoldásaira.

13.1. Az általánosított Cauchy-feladat

Először emlékeztetünk a klasszikus Cauchy-feladat fogalmára. A 7. fejezetben foglaltak szerint az állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális

differenciálegyenletek kanonikus alakja parabolikus esetben a következő:

$$\partial_t u - \Delta u = f, \tag{13.1}$$

ahol a keresett u függvény változóit (az előző fejezet mintájára) (t, x) jelöli, ahol t az idő és $x = (x_1, \dots, x_n)$ a térváltozók, illetve Δ operátor csak a térváltozókban hat. Olyan u megoldást keresünk, amely a nulladik (azaz t) változóban egyszer, a többi változóban pedig kétszer folytonosan differenciálható. Ennek érdekében bevezetjük a $C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ teret:

$$C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+) := \big\{u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R} : \partial_t u \in C(\mathbb{R}^{n+1}_+), \partial_{ij} u \in C(\mathbb{R}^{n+1}_+), i, j \neq 0\big\}.$$

A fenti függvénytér segítségével már definiálhatjuk a klasszikus Cauchy-feladat fogalmát.

13.1. Definíció. A (13.1) differenciálegyenletre vonatkozó *klasszikus Cauchy-feladat megoldásán* olyan $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ függvényt értünk, amely (klasszikus értelemben) kielégíti a (13.1) egyenletet, továbbá $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, valamint teljesül az $u(0, x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltétel, ahol $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott függvény.

A hiperbolikus esethez hasonlóan az általánosított Cauchy-feladat értelmezéséhez először az u és f függvényeket kiterjesztjük az egész $\mathbb{R}^{n+1}$ térre (nullaként definiálva $\mathbb{R}^{n+1}_+$-on kívül), majd megvizsgáljuk, hogy a (13.1) milyen egyenletre vezet disztribúció értelemben.

$$\tilde{u}(t, x) := \begin{cases} u(t, x), & \text{ha } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t < 0, x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \tag{13.2}$$

$$\tilde{f}(t, x) := \begin{cases} f(t, x), & \text{ha } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t < 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{13.3}$$

Nyilván $\tilde{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, hiszen $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Annak érdekében, hogy $T_{\tilde{f}}$-ről beszélhessünk, fel kell tennünk, hogy $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, amelyhez például elegendő, ha $f \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Ekkor a 12.2. Állítás mintájára kapjuk a következő állítást.

13.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy az u függvény kielégíti a parabolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot, továbbá a* (13.2) *alapján értelmezett $\tilde{f}$ függvényre $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ teljesül. Ekkor a* (13.3) *hozzárendeléssel értelmezett $\tilde{u}$ függvényre*

$$\partial_t T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} = T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-}ben. \tag{13.4}$$

Bizonyítás. A bizonyítás a 12.2. Állítás bizonyításához hasonló módon történik. □

Vegyük észre, hogy a (13.4) egyenlet jobb oldalán álló disztribúcióra a 11.35. Példa és a 11.71. Állítás alapján

$$\operatorname{supp}(T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g) \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}.$$

Ennek alapján természetesen adódik a következő definíció.

13.3. Definíció. Legyen $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ adott, amelyre $\operatorname{supp} F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. A parabolikus egyenletre vonatkozó *általánosított Cauchy-feladat* megoldásán olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúciót értünk, amelyre

$$\partial_t v - \Delta v = F \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben},$$

és $\operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. A fenti egyenletet a parabolikus egyenletre vonatkozó *általánosított Cauchy-feladatnak* nevezzük.

A 13.2. Állításból nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

13.4. Állítás. *Ha u kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot, továbbá a* (13.3) *hozzárendeléssel értelmezett $\tilde{f}$ függvényre $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, akkor a $v := T_{\tilde{u}}$ (ahol $\tilde{u}$ a* (13.2) *összefüggéssel definiált) disztribúció megoldása az általánosított Cauchy-feladatnak az $F := T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g$ jobb oldallal.*

Az általánosított Cauchy-feladat megoldására alkalmazhatjuk a 11.98. Tételt, vagyis az alapmegoldás és a konvolúció műveletének segítségével előállíthatók a megoldások. Emlékeztetünk a parabolikus alapmegoldásra, amelyet a 11.112. Példában tárgyaltunk részletesen:

$$E(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \cdot \exp(-|x|^2/(4t)), & \text{ha } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{13.5}$$

Vegyük észre, hogy az E függvénynek csak bizonyos lassan növő függvényekkel vett konvolúciója létezik (nevezetesen olyanokkal, amelyeknek az $e^{-|x|^2}$ függvénnyel vett szorzata integrálható $\mathbb{R}^n$-en), így a hullámegyenlet esetével ellentétben a parabolikus alapmegoldás nem feltétlenül konvolválható bármely más disztribúcióval. Célunk egy olyan disztribúcióosztály keresése, amelynek elemei E-vel konvolválhatók. Ehhez vezessük be a következő $\mathscr{M}$ függvényteret.

13.5. Definíció. Jelölje $\mathscr{M}$ azon $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények összességét, amelyekre $f(t,x) = 0$ m.m., ha $t < 0$, továbbá minden $T > 0$ esetén $f|_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^n)$.

13.6. Állítás. *Ha $f \in \mathscr{M}$, akkor $E * f$ függvény értelemben létezik, és $E * * f \in \mathscr{M}$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $f \in \mathscr{M}$ esetén $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, másrészt a 9.3. Állítás c) része alapján $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$. A konvolúció definíciója szerint, felhasználva, hogy $t < 0$ esetén $f(t,x) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(E * f)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(\tau,\xi) f(t-\tau, x-\xi)\, d\tau\, d\xi \\ &\le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi) |f(t-\tau, x-\xi)\, d\xi\, d\tau \\ &\le \|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)} \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi,\end{aligned} \tag{13.6}$$

ahol a 9.3. Állítás b) részéből következően minden $\tau > 0$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi = 1,$$

továbbá $t \le 0$ esetén $E(t,x) = 0$, következésképpen

$$|(E * f)(t,x)| \le t \cdot \|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)}.$$

A fenti becslés jobb oldala nyilván lokálisan integrálható $\mathbb{R}^{n+1}$-en, sőt minden $T > 0$ esetén $E * f|_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)$, tehát $E * f$ függvény értelemben létezik, és mivel $t < 0$ esetén $(E * f)(t,x) = 0$, ezért $E * f \in \mathscr{M}$. □

Mivel az $E * f$ konvolúció függvény értelemben való létezése magában hordozza az $E * f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ feltételt, ezért tekinthetjük az $\mathscr{M}$ függvényosztálybeli függvényekhez tartozó reguláris disztribúciók deriváltjaiból képzett lineáris kombinációk összességét.

13.7. Definíció. Jelölje $\tilde{\mathscr{M}}$ az

$$F = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha T_{f_\alpha} \tag{13.7}$$

alakban előálló disztribúciók osztályát, ahol $a_\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in \mathscr{M}$ és $m \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek.

13.8. Állítás. *Ha $F \in \tilde{M}$, akkor $E * F$ disztribúció értelemben létezik, és $E * F \in \tilde{\mathscr{M}}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F \in \tilde{\mathscr{M}}$, azaz F a (13.7) egyenletnek megfelelő alakú. A 13.6. Állítás folytán $f_\alpha \in \mathscr{M}$ esetén $E * f_\alpha$ függvény értelemben

létezik és $E * f \in \mathscr{M}$. Ekkor a 11.84. Állításból következően $T_E * T_{f_\alpha} = = T_{E*f_\alpha}$. A 11.94. Állítás folytán $\partial^\alpha(T_E * T_{f_\alpha}) = T_E * \partial^\alpha T_{f_\alpha}$, ezért

$$E * F = T_E * \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha T_{f_\alpha} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha (T_E * T_{f_\alpha}) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha T_{E*f_\alpha},$$

és mivel $E * f_\alpha \in \mathscr{M}$, ezért $E * f \in \tilde{\mathscr{M}}$. □

Most már az $\tilde{\mathscr{M}}$ téren kimondhatjuk az általánosított Cauchy-feladat megoldásának létezéséről és egyértelműségéről szóló tételt, amely analóg a 12.5. Tétellel.

13.9. Tétel. *Legyen $F \in \tilde{\mathscr{M}}$. Ekkor a parabolikus egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $v \in \tilde{\mathscr{M}}$ megoldása, mégpedig $v = E * F$, ahol E a* (13.5) *alapmegoldás.*

Bizonyítás. Mivel $F \in \tilde{\mathscr{M}}$, ezért a 13.8. Állítás alapján $E*F$ létezik és $E*F \in \in \tilde{\mathscr{M}}$. Az alapmegoldásokról szóló 11.98. Tételből következően a $v := E * F$ disztribúcióra $\partial_t v - \Delta v = F$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ térben. Végül a 11.93. Állítás folytán

$$\operatorname{supp} v \subset \overline{\operatorname{supp} E + \operatorname{supp} F} \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+ + \mathbb{R}^{n+1}_+} = \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}.$$

Az egyértelműség ugyancsak a 11.98. Tételből következik, hiszen a

$$\partial_t v - \Delta v = F$$

egyenletnek legfeljebb egy olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldása létezhet, amelyre $v*E$ értelmes, azonban a 13.8. Állítás szerint $v \in \tilde{\mathscr{M}}$ esetén $v*E$ értelmes. □

13.10. Következmény. *A parabolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy olyan u megoldása létezhet, amelyre minden $T > > 0$ esetén teljesül, hogy $u|_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)$.*

13.11. *Megjegyzés.* Ha a megoldás x-beli növekedésére semmilyen növekedési feltétel nincs előírva, akkor előfordulhat, hogy a Cauchy-feladat megoldása nem egyértelmű, lásd bővebben a 13.13. Megjegyzés, illetve a 9.3.4. és 9.3.5. szakaszokat.

13.2. A klasszikus Cauchy-feladat

Az általánosított Cauchy-feladatra az előzőekben nyert eredményeinket szeretnénk alkalmazni a klasszikus feladat megoldásaira. A 13.4. Állítás szerint a klasszikus Cauchy-feladatnak az $F = T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g$ jobb oldalú általánosított feladat felel meg (ahol $\tilde{f}$ és $\tilde{u}$ a (13.2) és (13.3) hozzárendeléssel van

definiálva). Ahhoz, hogy az általánosított feladatra vonatkozó 13.9. Tételt alkalmazhassuk, $F \in \mathscr{M}$ szükséges. Ehhez elegendő, ha $T_{\tilde{f}} \in \tilde{\mathscr{M}}$ és $\delta \times T_g \in \in \tilde{\mathscr{M}}$. Az előbbi teljesül, ha $\tilde{f} \in \mathscr{M}$, az utóbbihoz pedig elég, ha $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Valóban, a 11.46. Példa, a 11.70. Állítás és a 11.66. Következmény alapján

$$\delta \times T_g = T'_H \times T_g = \partial_t (T_H \times T_g) = \partial_t T_{H \times g}, \tag{13.8}$$

ahol H a Heaviside-függvény. Mivel $H \times g \in \mathscr{M}$, sőt $H \times g \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, ezért $\delta \times T_g \in \tilde{\mathscr{M}}$.

Az előbbi feltételek esetén tehát $F = T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g \in \tilde{\mathscr{M}}$, így

$$v = E * F = E * T_{\tilde{f}} + E * (\delta \times T_g).$$

A klasszikus Cauchy-feladat megoldhatósága azon múlik, hogy $E * T_{\tilde{f}}$ és $E * * (\delta \times T_g)$ reguláris disztribúciók, amelyeknek megfelelő lokálisan integrálható függvények összege (megfelelő simasági feltételek mellett) kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot.

13.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^{1,2}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, továbbá $\partial_t^k \partial^\alpha f \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ minden $T > 0$, és $2k + |\alpha| \le 2$ $(k \ge 0)$ esetén. Ekkor a parabolikus egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik olyan megoldása, amely minden $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ $(T > 0)$ sávban korlátos, mégpedig*

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau,\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi \, d\tau \\ &+ \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi. \end{aligned} \tag{13.9}$$

Bizonyítás. Az egyértelműséget a 13.10. Következmény biztosítja. A létezés bizonyításának ötlete a következő: $\tilde{f} \in \mathscr{M}$ és $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén az általánosított Cauchy-feladat $F = T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g \in \tilde{\mathscr{M}}$ jobb oldalhoz tartozó megoldása a (13.9) függvényhez tartozó reguláris disztribúció (lásd a 13.1–13.2. Feladatokat). A tételben szereplő simasági feltételek mellett ez a lokálisan integrálható függvény kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot, lásd a 13.3. Feladatot. Megjegyezzük, hogy a g függvény folytonosságára csak a kezdeti feltétel teljesüléséhez van szükség. Könnyen látható, hogy $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén a (13.9) formula második tagja végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}^{n+1}_+$-on, ez a hővezetési egyenlet (vagyis az $f = 0$ jobb oldalú egyenlet) simító hatása: akármilyen korlátos kezdeti érték esetén a megoldás bármely $t > 0$ időpillanatban végtelen sokszor differenciálható. Egyszerűen igazolható, hogy ha g folytonos egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a parabolikus egyenlet u megoldására $\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = g(x_0)$. □

13.13. *Megjegyzés.* Ismét megkaptuk a korábbi 9.17. Tétel állítását. A (13.9) formulából következik (amelyet már az alapmegoldás kapcsán a 11.114. Megjegyzésben is említettünk), hogy a hővezetési egyenlet végtelen sebességű hőterjedést ír le. Valóban, ha $f = 0$ (azaz nincs se hőforrás, se hőnyelő), és a kezdeti hőmérsékletet meghatározó g függvény nemnegatív, és egy kompakt halmazon kívül 0, akkor tetszőleges $t > 0$ időpontban bármely $x \in \mathbb{R}^n$ helyen $u(t, x) > 0$, hiszen nemnegatív, nem m.m. 0 függvény integrálja pozitív. Bár a kezdeti hőmérséklet 0 volt egy halmazon kívül, bármely későbbi időpillanatban már bármely pontban pozitív lesz a hőmérséklet.

Igazolható, hogy a klasszikus Cauchy-feladat megoldása nemcsak az $\mathscr{M}$ függvényosztályon egyértelmű, hanem egy bővebb osztályon is. Jelölje $\mathscr{M}_\sigma$ az olyan $u\colon \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} \to \mathbb{R}$ függvények összességét, amelyekre bármely $T > 0$ számhoz léteznek c_T, a_T konstansok úgy, hogy

$$|u(t, x)| \le c_T \exp(a_T |x|^\sigma), \text{ ha } 0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor a klasszikus Cauchy-feladat megoldása egyértelmű az $\mathscr{M}_2$ függvényosztályon (lásd a [46] könyvet), de tetszőleges $\sigma > 2$ esetén az $\mathscr{M}_\sigma$ függvényosztályon már nem egyértelmű, sőt végtelen sok megoldás létezik. Ezzel kapcsolatban Tyihonov példáját említjük végtelen sok megoldás konstruálására a 9.3.5. szakaszban. Amint a 9.26. Megjegyzésben már említettük, hogy a végtelen sok megoldás ellenére David Widder (1898–1990) eredménye szerint legfeljebb egy nemnegatív megoldás létezhet, amely a fizikai alkalmazások szempontjából észszerű, például ha u az abszolút hőmérsékletet jelenti.

13.3. Feladatok

13.1. Legyen $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\delta \times g \in \tilde{\mathscr{M}}$, és

$$(\delta \times g) * E = \partial_t [E * (H \times g)].$$

13.2. Legyen $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Bizonyítsuk be, hogy minden rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén a $t \mapsto [E * (H \times g)](t, x)$ függvény folytonosan differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, és $t > 0$ esetén

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(t \mapsto [E * (H \times g)](t,x)) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t,\xi) g(x-\xi)\,d\xi$$
$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi.$$

13.3. Igazoljuk, hogy a 13.12. Tételben szereplő feltételek mellett a (13.9) formulával értelmezett u függvényre $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, $u(0,x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, továbbá u kielégíti a parabolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot.

13.4. Legyen $\tilde{f} \in \mathscr{M}$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ekkor a 13.12. Tétel bizonyításában foglaltak szerint a parabolikus egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladat $F = \tilde{f} + \delta \times g$ jobb oldalhoz tartozó megoldása $T_{\tilde{u}}$, ahol u a (13.9) formulával értelmezett függvény. Bizonyítsuk be, hogy az általánosított Cauchy-feladat megoldása folytonosan függ az f, g függvényektől a következő értelemben:

$$|u(t,x)| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t\|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)} \qquad (t \ge 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

14. fejezet

Fourier-sorok és Fourier-transzformált

Ez a munka tartalmazza a hővezetési egyenletet mind egy test belsejében, mind a határán; a tárgy újdonsága és fontossága miatt az Osztály úgy döntött, hogy megkoronázza ezt a művet, mindazonáltal megjegyezve, hogy a szerzőnek az egyenletekhez vezető levezetései nem mentesek nehézségektől, és hogy azok megoldásai kívánnivalókat hagy maga után mind az általánosságukban, mind pedig a tudományos szigorúságukban.

Lagrange, Laplace, Malus, Haüy és Legendre, a Nemzeti Intézet bírálóbizottságának tagjai, 1811. december 16.

A fejezet tartalma. Rövid bevezetést adunk a Fourier-sorok és a Fourier-transzformáció elméletébe a disztribúcióelmélet keretében. A jelölések egyszerűsítése érdekében csak az egydimenziós esettel foglalkozunk, de a többdimenziós eset hasonlóan tárgyalható.[1]

14.1. Szemelvények a Fourier-sorok klasszikus elméletéből

Fourier hővezetésről írott könyve máig tartó forradalmat hozott a matematikába, lásd például [11], [37], [86]. Ismertessünk egyet Fourier sok példája

[1] Szerzőtársaim váratlan elhunyta után ezt a fejezetet egyedül kellett megírnom, így az esetleges hibákért a felelősség csak engem terhel (KV).

közül. A végtelen

$$[0,+\infty)\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}$$

tartományban elhelyezkedő test egyensúlyi hőmérséklet-eloszlását kereste azon feltételek mellett, hogy az $x=0$ alaplapon 1 fokos, a határ többi részén pedig 0 fokos a test hőmérséklete. Matematikailag ez a következő kétdimenziós problémához vezetett:

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 & (0,\infty)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\text{-ben},\\ v(x,\pm\frac{\pi}{2})=0 & x>0\text{-ra},\\ v(0,y)=1 & -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\text{-re}. \end{cases}$$

A változók szétválasztásával azt találta, hogy a

$$v(x,y)=ae^{-x}\cos y+be^{-3x}\cos 3y+ce^{-5x}\cos 5y+\cdots$$

képlet megoldást szolgáltat, ha az $a,b,c,\dots$ együtthatókat úgy választjuk meg, hogy minden $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$-re fennálljon az

$$1=a\cos y+b\cos 3y+\cos 5y+\cdots$$

egyenlőség. Ezek után hosszadalmas számolással (az ortogonalitás felhasználása nélkül) megmutatta, hogy az

$$a=\frac{4}{\pi},\quad b=\frac{-4}{3\pi},\quad c=\frac{4}{5\pi},\dots$$

együtthatók megfelelnek, majd sikerült a $v(x,y)$-t előállító végtelen sort zárt alakra hoznia:

$$v(x,y)=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{2\cos y}{e^x-e^{-x}}.$$

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ez a függvény tényleg megoldás.

A kor vezető matematikusai: Lagrange és Laplace hiányolták Fourier matematikai precizitását, de elismerték, hogy a módszere nagyon hatékony. A következő évszázadban rengetegen foglalkoztak az eljárása szilárd alapokra helyezésével.

Jelöljük a továbbiakban $L_{2\pi}$-vel a 2π-periodikus, lokálisan integrálható $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvények terét. Adott $f\in L_{2\pi}$-re vezessük be az

$$a_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\ dx,\quad b_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ dx,$$

Fourier-együtthatókat, az

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Fourier-sort, és annak az

$$S_m f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad m = 0,1,\dots$$

részletösszegeit.

Vizsgáljuk meg először a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciáját.

14.1. Tétel (Lipschitz–Dini-tétel)**.** *Ha f differenciálható valamely a pontban, akkor $S_m f(a) \to f(a)$.*

A bizonyításhoz kényelmesebb lesz a komplex exponenciális függvényeket használni. Felhasználva a

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{és} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

képleteket, a részletösszegek átírhatók az

$$S_m f(x) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx}$$

alakba, ahol

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

és

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad ib_n = c_n - c_{-n}$$

minden n-re. A könyv többi részétől eltérően a továbbiakban komplex értékű függvényekkel foglalkozunk.

Szükségünk lesz egy klasszikus lemmára.

14.2. Lemma. *(Riemann–Lebesgue) Ha $f \in L_{2\pi}$, akkor $\lim\limits_{n\to\pm\infty} c_n = 0$.*

Bizonyítás. Ha f négyzetesen is integrálható $[-\pi,\pi]$-ben (például, ha szakaszosan folytonos), akkor az eredmény az elemi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \tag{14.1}$$

Bessel-egyenlőtlenségből következik. (Valójában a Parseval-egyenlőség szerint itt egyenlőség is áll, de annak a bizonyítása már felhasználja a trigonometrikus rendszer teljességét, és itt erre nincs szükségünk.) Az általános eset bizonyítása megtalálható például a [188] könyvben. □

A 14.1 Tétel bizonyítása. A következő egyszerű bizonyítást Chernoff találta 1980-ban [28]. Eltolással és egy konstans hozzáadásával feltehetjük, hogy $a = 0$ és $f(a) = 0$. Mivel $f(0) = 0$ és $f'(0)$ létezik, a $g(x) = f(x)/\left(e^{ix} - 1\right)$ függvény korlátos 0 egy környezetében, és így f-fel együtt g is lokálisan integrálható. Mivel

$$f(x) = (e^{ix} - 1)g(x),$$

a két függvény Fourier-együtthatói között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-i(k-1)x}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx \\ &= c_{k-1}(g) - c_k(g). \end{aligned}$$

Innen $m \to \infty$ esetén

$$S_m f(0) := \sum_{k=-m}^{m} c_k(f) = c_{-m-1}(g) - c_m(g) \to 0$$

a Riemann–Lebesgue-lemma miatt. □

14.3. *Megjegyzés.* A bizonyítás érvényben marad, ha az $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ függvény integrálható a egy környezetében. Ez teljesül például, ha f eleget tesz a-ban valamilyen Lipschitz- vagy Hölder-feltételnek, vagy ha f balról és jobbról deriválható a-ban.

Általánosabban, a bizonyítás módosításával megmutatható, hogy ha valamely A számra a

$$h \mapsto \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2A}{h}$$

függvény integrálható 0 egy környezetében, akkor $S_m f(a) \to A$. Ha pedig f-nek elsőfajú szakadása van a-ban, és léteznek a véges

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a+)}{x - a} \quad \text{és} \quad \lim_{x \to a-} \frac{f(a-) - f(x)}{x - a}$$

határértékek, akkor

$$S_m f(a) \to \frac{f(a+) + f(a-)}{2}.$$

A részleteket illetően lásd a [28] cikket.

Adjunk most elégséges feltételt a Fourier-sorok egyenletes konvergenciájára.

14.4. Tétel. *Ha f folytonosan differenciálható, 2π-periodikus függvény, akkor $S_m f$ egyenletesen tart f-hez az egész számegyenesen.*

Bizonyítás. A következő egyszerű bizonyítást Barry Simon találta 1969-ben [174]. Elég megmutatni, hogy az $S_m(f)$ sorozat egyenletesen konvergens, hiszen a 14.1 Tétel szerint csak f-hez tarthat. A Weierstrass-kritérium alapján elegendő megmutatnunk, hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty.$$

Hasonlítsuk össze ehhez f és f' Fourier-együtthatóit. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2\pi}f(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = inc_n(f) \end{aligned}$$

minden n-re. Alkalmazva a 14.1 Bessel-egyenlőtlenséget f'-re,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2\,|c_n(f)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2 < \infty.$$

Minthogy

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenséget használva a keresettel ekvivalens

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n(f)| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\frac{1}{n}\cdot nc_n(f)\right| \\ &\le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^2\,|c_n(f)|^2\right)^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

reláció adódik. □

14.5. *Megjegyzés.* A 14.4. Tétel érvényben marad a 2π-periodikus, folytonos és lokálisan korlátos változású (például szakaszonként monoton) függvényekre (Dirichlet–Jordan-Tétel). A bizonyítás megtalálható például a [188] könyvben.

A 14.4 Tétel bizonyítása során igazoltuk a következőt is.

14.6. Állítás. *Ha egy komplex számsorozatra* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, *akkor a*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergál egy folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *függvényhez, amelynek ez a trigonometrikus sor a Fourier-sora.*

Majdnem száz évig nyitott kérdés volt, hogy minden 2π-periodikus, folytonos függvény megkapható-e a Fourier-sorából. A kutatók szkeptikusak voltak, miután du Bois-Reymond 1876-ban konstruált egy olyan 2π-periodikus, folytonos függvényt, amelynek Fourier-sora divergens egy pontban [39]. Nagy meglepetés volt a húsz éves Fejér Lipót első cikke 1900-ban, ahol pozitív választ kapott erre a kérdésre [47].

14.7. Tétel. *(Fejér) Ha* f *egy tetszőleges* 2π*-periodikus, folytonos függvény, akkor az*

$$\frac{S_0 f + \cdots + S_n f}{n+1}$$

függvénysorozat egyenletesen tart f*-hez az egész számegyenesen.*

Bizonyítás. Lásd például a [188] könyvben. □

14.8. *Történeti megjegyzés.* Du Bois-Reymond példája nyomán Luzin [117] 1915-ben azt sejtette, hogy bármely 2π-periodikus, folytonos függvényt előállít a Fourier-sora Lebesgue-értelemben majdnem mindenütt. Miután ötven évig még az is elképzelhető volt, hogy egy 2π-periodikus, folytonos függvény Fourier-sora mindenhol divergens legyen, 1966-ban Carleson bebizonyította Luzin sejtését [22]. Általánosabban igazolta, hogy minden 2π-periodikus, lokálisan L^2-beli függvény is ilyen tulajdonságú. Az eredményét Hunt kiterjesztette minden 2π-periodikus, lokálisan L^p-beli függvényre is, ahol $p > 1$ [81]. Az, hogy a $p = 1$ esetben ez nem igaz, már régóta ismert volt: Kolmogorov 1926-ban konstruált olyan 2π-periodikus, lokálisan L^1-beli függvényt, amelynek a Fourier-sora mindenhol divergens [92].

14.2. Periodikus disztribúciók Fourier-sorai

Mivel az egyenletes konvergencia $\mathbb{R}$-en maga után vonja a $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-beli konvergenciát is, a 14.6 Állítás alapján minden olyan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{14.2}$$

trigonometrikus sor konvergál $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben, amelynek a (komplex) együtthatóira $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$. Ennél jóval több is igaz. Vezessük be a szokásos

$$S_m(x) := \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx}$$

részletösszegeket, és azonosítsuk őket a hozzájuk rendelt reguláris disztribúciókkal.

14.9. Tétel. *Ha létezik olyan $m \geq 0$ egész, hogy*

$$|c_n| = O(|n|^m), \quad n \to \pm\infty,$$

akkor az (S_m) sorozat konvergens $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben.

Bizonyítás. A 14.6 Állításból következik, hogy a

$$c_0 \frac{x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

végtelen sor egyenletesen tart egy f folytonos függvényhez $\mathbb{R}$-en. Minthogy $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, a konvergencia $\mathscr{D}'$-ben is fennáll:

$$c_0 \frac{x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx} \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R})} T_f.$$

Deriválva $(m+2)$-szer kapjuk, hogy

$$\sum_{n=-k}^{k} c_n e^{inx} \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R})} f^{(m+2)} \to T_f^{(m+2)}. \qquad \square$$

A $t \mapsto e^{it}$ változótranszformáció kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a 2π-periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények és a Γ (kompakt) egységkörvonalon értelmezett $\widetilde{f} : \Gamma \to \mathbb{C}$ függvények között, és f differenciálhatósága ekvivalens $\widetilde{f}$-nak az s ívhosszparaméter szerinti differenciálhatóságával. Ennek megfelelően természetesek az alábbi definíciók:

14.10. Definíció.

a) Jelöljük $\mathscr{D}(\Gamma)$-val az ívhosszparaméter szerint végtelen sokszor differenciálható $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ függvények vektorterét, és vezessük be $\mathscr{D}(\Gamma)$-ban a következő *konvergenciafogalmat*: $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\Gamma)} \varphi$, ha $\varphi_k^{(n)} \to \varphi^{(n)}$ Γ-n egyenletesen minden n indexre.

b) *Periodikus disztribúción* egy olyan komplex lineáris $T : \mathscr{D}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ funkcionált értünk, amelyik folytonos következő értelemben: ha $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\Gamma)} \varphi$, akkor $T(\varphi_k) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(\varphi)$. A periodikus disztribúciók a $\mathscr{D}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ függvények vektorterének egy lineáris alterét alkotják, amelyet $\mathscr{D}'(\Gamma)$-val jelölünk. Vezessük be $\mathscr{D}'(\Gamma)$-ban a következő gyenge konvergenciafogalmat: $T_k \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Gamma)} T$, ha $T_k(\varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(\varphi)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma)$-ra.

c) *Trigonometrikus sorokon* a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{ins}$ alakú sorokat értjük, ahol a c_n együtthatók tetszőlegesen adott komplex számok.

d) Egy $T \in \mathscr{D}'(\Gamma)$ periodikus disztribúció *Fourier-során* a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(T) e^{ins}$ trigonometrikus sort értjük, ahol T Fourier-együtthatóit a

$$c_n(T) := T(e^{-ins}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

képlettel értelmezzük.

Vezessük be a trigonometrikus és a Fourier-sorok

$$S_m := \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{ins} \quad \text{és} \quad S_m T := \sum_{n=-m}^{m} c_n(T) e^{ins}$$

részletösszegeit. Azt mondjuk, hogy a trigonometrikus sor konvergens $\mathscr{D}'(\Gamma)$-ban, és az összege T, ha $S_m \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Gamma)} T$. Schwartz következő tétele (a bizonyítások megtalálhatók a [168] könyvben) elegánsan és teljesen megvilágítja a periodikus disztribúciók Fourier-sorainak a konvergenciáját.

14.11. Tétel.

a) Minden $T \in \mathscr{D}'(\Gamma)$ disztribúciót előállít a Fourier-sora: $S_m T \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Gamma)} T$.

b) Egy $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ins}$ trigonometrikus sor pontosan akkor konvergens $\mathscr{D}'(\Gamma)$-ban, ha létezik olyan $m \geq 0$ egész, hogy

$$|c_n| = O(|n|^m), \quad n \to \pm\infty.$$

Ilyenkor a trigonometrikus sor az összegének a Fourier-sora.

A fenti két tétel értelmében kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn a 2π-periodikus disztribúciók, a Fourier-sorok és a $\mathscr{D}'(\Gamma)$-ban konvergens trigonometrikus sorok között.

14.3. Tesztfüggvények Fourier-transzformáltja

Ha egy $f :\in L^1_{\mathrm{loc}}$ függvény deriválható valamely $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor tekintsük valamely rögzített $T > 2\,|x|$-re annak a T-periodikus f_T függvénynek a Fourier-sorát, amelyik megegyezik f-fel a $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ intervallumban. Alkalmazva a 14.1 Tételt (amelyik egyszerű skálázással T-periodikus függvényekre is érvényes marad), az

$$f(x) = f_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-2\pi k i y/T}\, dy \right) e^{2\pi k i x/T}$$

egyenlőséget kapjuk.

Rögzítsünk egy kis $h > 0$ számot, és bontsuk fel a számegyenest h hosszúságú intervallumokra. Ekkor közelítőleg

$$\sum_{k:\ jh \le 2\pi k/T < (j+1)h} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-2\pi k i y/T}\, dy \right) e^{2\pi k i x/T} \approx \frac{hT}{2\pi} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-ijhy}\, dy \right) e^{ijhx}$$

minden $j \in \mathbb{Z}$-re, és ezeket összegezve

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-ijhy}\, dy \right) e^{ijhx}$$

adódik. Elvégezve a $h \to 0$ határátmenetet az

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \right) e^{i\xi x}\, d\xi$$

relációhoz jutunk. Végül, $T \to \infty$ esetén innen az

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi$$

heurisztikus formula adódik, ahol

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Az elegancia kedvéért vezessük be az $\widehat{f} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}$ (ejtsd „f kalap”) jelölést, és a módosított $dm(x) := \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ Lebesgue-mértéket. Ekkor a fenti képletek átírhatók a következő szimmetrikus alakba:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\, dm(x), \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\, dm(\xi), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Először egy, a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$-belieknél valamivel általánosabb függvényekre fogjuk igazolni ezeket a formulákat. A továbbiakban a rövidség kedvéért a nemnegatív egészeket indexeknek nevezzük. (Az indexek tehát a multiindexek az egydimenziós esetben.)

14.12. Definíció. Jelöljük $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-rel azon $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ függvények vektorterét, amelyekre

$$p_{m,n}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m \varphi^{(n)}(x) \right| < \infty$$

tetszőleges m, n indexek esetén.

Vezessük be továbbá $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-ben a következő *konvergenciafogalmat*: $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} \varphi$, ha tetszőleges m, n indexekre fennáll az

$$x^m \varphi_k^{(n)}(x) \to \varphi^{(n)}(x)$$

egyenletes konvergencia $\mathbb{R}$-ben.

14.13. *Megjegyzés.* Az $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-beli konvergencia megfelel a $(p_{m,n})$ félnormacsalád által definiált szeparált, lokálisan konvex topológiának. A lokálisan konvex terek a normált tereknél általánosabb, de azok sok tulajdonságát megtartó terek, lásd például [95]. A disztribúcióelmélet terei mind idetartoznak, lásd például [161].

14.14. Állítás.

a) Tetszőlegesen rögzített q polinomra a $\varphi \mapsto q\varphi$ leképezés $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-t folytonos lineáris módon önmagába képezi.

b) Tetszőlegesen rögzített ℓ indexre a $\varphi \mapsto \varphi^{(\ell)}$ leképezés $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-t folytonos lineáris módon önmagába képezi.

Bizonyítás. a) Elég a $q = \mathrm{id}$ esettel foglalkozni, mert ebből az általános eset iterációval és linearitással következik.

Ha $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, és m, n tetszőleges indexek, akkor $n = 0$ esetén

$$p_{m,0}(\mathrm{id}\,\varphi) = p_{m+1,0}(\varphi) < \infty,$$

az $n \geq 1$ az esetben pedig a Leibniz-szabály alapján

$$\left(x\varphi(x)\right)^{(n)} = x\varphi^{(n)}(x) + n\varphi^{(n-1)}(x),$$

és innen

$$p_{m,n}(\mathrm{id}\,\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^{m+1}\varphi^{(n)}(x) + nx^m\varphi^{(n-1)}(x) \right| \\ \leq p_{m+1,n}(\varphi) + np_{m,n-1}(\varphi) < \infty,$$

tehát $\mathrm{id}\,\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. A kapott becslésekből a nyilvánvalóan lineáris $\varphi \mapsto q\varphi$ leképezés folytonossága is következik, hiszen ha $p_{i,j}(\varphi_k) \to 0$ minden rögzített i, j indexre, akkor a

$$0 \leq p_{m,0}(\mathrm{id}\,\varphi_k) = p_{m+1,0}(\varphi_k) \to 0$$

és (ha $n \geq 1$)

$$0 \leq p_{m,n}(\mathrm{id}\,\varphi_k) \leq p_{m+1,n}(\varphi_k) + np_{m,n-1}(\varphi_k) \to 0$$

relációkból $p_{m,n}(\mathrm{id}\,\varphi_k) \to 0$ is teljesül minden rögzített m, n indexre.

b) Ha $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, akkor tetszőleges m, n indexekre

$$p_{m,n}\left(\varphi^{(\ell)}\right) = p_{m,n+\ell}(\varphi) < \infty,$$

úgyhogy $\varphi^{(\ell)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Továbbá, a nyilván lineáris $\varphi \mapsto \varphi^{(\ell)}$ leképezés folytonos is, hiszen ha $p_{i,j}(\varphi_k) \to 0$ minden rögzített i, j indexre, akkor a

$$p_{m,n}(\varphi_k^{(\ell)}) = p_{m,n+\ell}(\varphi_k) \to 0$$

konvergenciareláció is teljesül minden rögzített m, n indexre. □

Rátérünk a Fourier-transzformált tárgyalására.

14.15. Állítás. *A*

$$\varphi \mapsto \widehat{\varphi} := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\varphi(x)\; dm(x) \tag{14.4}$$

Fourier-transzformált $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-t folytonos lineáris módon önmagába képezi, és fennállnak a

$$\widehat{\varphi'} = i \cdot \mathrm{id}\,\widehat{\varphi}, \quad \widehat{\mathrm{id}\,\varphi} = i \cdot (\widehat{\varphi})' \tag{14.5}$$

azonosságok, vagyis tetszőleges $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$-re a $\varphi'(x)$ és $x\varphi(x)$ függvények képei rendre $i\xi\widehat{\varphi}(\xi)$ és $i \cdot (\widehat{\varphi})'(\xi)$.

Bizonyítás. A (14.4) egyenletet formálisan deriválva a ξ paraméter szerint, az

$$i^n(\widehat{\varphi})^{(n)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}x^n\varphi(x)\; dm(x)$$

egyenleteket kapjuk minden n indexre. Mivel $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ következtében a kapott integrálok konvergensek, a kapott egyenletek is érvényesek. Innen $\widehat{\varphi} \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R})$, és $i^n(\widehat{\varphi})^{(n)}$ az $x^n\varphi(x)$ függvény Fourier-transzformáltja.

Parciálisan integrálva (ez is törvényes $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ miatt) az

$$(i\xi)^m i^n(\widehat{\varphi})^{(n)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\,(x^n\varphi(x))^{(m)}\ dm(x)$$

egyenleteket kapjuk minden m indexre. Az $n = 0$ speciális eset mutatja, hogy $(i\xi)^m\widehat{\varphi}(\xi)$ a $\varphi^{(m)}$ függvény Fourier-transzformáltja.

Az utolsó azonosságból a

$$\sup|\xi^m(\widehat{\varphi})^n(\xi)| \le C\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|(x^n\varphi(x))^{(m)}\right|$$

becslést kapjuk a $C = \int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\ dm(x)$ konstanssal. Alkalmazva a Leibniz-formulát, innen egy másik abszolút C' konstanssal a

$$p_{m,n}(\widehat{\varphi}) \le C'\sum_{i=0}^{n+2}\sum_{j=0}^{m} p_{i,j}(\varphi)$$

reláció adódik, igazolva a Fourier transzformált folytonosságát $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-ből $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-be. □

14.16. *Megjegyzés.* A (14.5) azonosságok kifejezik a Fourier-transzformált alapvető tulajdonságát: felcseréli a deriválást és a független változóval való szorzást. Ez lehetővé teszi, hogy lineáris differenciálegyenleteket algebrai egyenletekké transzformáljuk. Ezt később több fontos példán is illusztráljuk majd, de most rögtön adunk egy példát.

14.17. Lemma. *A $\psi(x) = e^{-x^2/2}$ függvény a Fourier-transzformált fixpontja: $\widehat{\psi} = \psi$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ és $\psi(0) = 1$. Mivel $\psi'(x) + x\psi(x) =$ $= 0$, a (14.5) azonosság alapján $\widehat{\psi}$ ugyanennek az elsőrendű, homogén lineáris differenciálegyenletnek a megoldása: $\widehat{\psi}'(\xi) + \xi\widehat{\psi}(\xi) = 0$, és így alkalmas c konstanssal $\widehat{\psi} = c\psi$. Minthogy az Euler–Laplace integrál értékét használva

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,dm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1 = \psi(0),$$

$c = 1$. □

14.18. *Megjegyzés.* Általánosabban megmutatható (lásd például [188]), hogy a $\psi_n(x) := H_n(x)e^{-x^2/2}$ függvények mind a Fourier-transzformált $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-beli sajátfüggvényei, ahol $H_0, H_1, \ldots$ a Hermite-polinomokat jelölik, éspedig

$$\widehat{\psi_n} = i^n \psi_n, \quad n = 0,1,\ldots.$$

Továbbá a ψ_n függvények $L^2(\mathbb{R})$ ortogonális bázisát alkotják, ami lehetővé teszi a Fourier-transzformált folytonos kiterjesztését $L^2(\mathbb{R})$-re, és a minden $f \in L^2(\mathbb{R})$-re érvényes

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Plancherel-egyenlőség igazolását.

Minthogy $i^4 = 1$, ebből következik, hogy $L^2(\mathbb{R})$ a Fourier-transzformált az $1, i, -1, -i$ sajátértékekhez tartozó négy sajátalterének az ortogonális összege, és hogy a Fourier-transzformált diagonalizálható $L^2(\mathbb{R})$-ben.

Határozzuk meg végül az $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-beli Fourier-transzformált inverzét.

14.19. Tétel. *Ha $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ és*

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x}\, dm(x), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

akkor $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ és

$$\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\xi x}\, dm(\xi), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14.6}$$

Bizonyítás. A következő egyszerű bizonyítás Richards-tól származik [152]. Mutassuk meg először a

$$\varphi(0) = 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\, dm(\xi) = 0 \tag{14.7}$$

implikációt. Minthogy $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ és $\varphi(0) = 0$, létezik olyan $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, amelyre $\varphi = \mathrm{id} \cdot \psi$ (lásd a 14.2. Feladatot), és innen $\widehat{\varphi} = i(\widehat{\psi})'$ a (14.5)-beli második azonosság miatt. Mivel $\widehat{\psi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ folytán $x \to \pm\infty$ esetén $\psi(x) \to 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\, dm(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [i\widehat{\psi}]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Most megmutatjuk, hogy

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\, dm(\xi) \tag{14.8}$$

minden $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$-re. Tekintsük ehhez a 14.17. Lemmabeli $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ függvényt. Mivel $\psi(0) = 1$, alkalmazhatjuk a (14.7) implikációt φ helyett a $\varphi - \varphi(0)\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ függvényre. Ekkor az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi) - \varphi(0)\widehat{\psi}(\xi)\ dm(\xi) = 0$$

egyenlőséget kapjuk, amiből a keresett eredmény adódik, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}\ dm(\xi) = 1.$$

Befejezésül alkalmazzuk tetszőlegesen rögzített $x_0 \in \mathbb{R}$-re a (14.8) relációt φ helyett $\varphi_0(x) := \varphi(x + x_0)$-nel. Ekkor az

$$\varphi(x_0) = \varphi_0(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi_0}(\xi)\ dm(\xi)$$

egyenlőséget kapjuk, és innen (14.6) következik, mert

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi_0}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)e^{-ix\xi}\ dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + x_0)e^{-ix\xi}\ dm(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)e^{-i(y-x_0)\xi}\ dm(y) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{ix_0\xi}.\end{aligned}$$ □

14.4. Temperált disztribúciók Fourier-transzformáltja

Ebben a fejezetben kiterjesztjük a Fourier-transzformáltat egy sokkal bővebb „függvényosztályra”.

14.20. Definíció. *Temperált disztribúción* egy olyan komplex lineáris $T : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ funkcionált értünk, amelyik folytonos következő értelemben: ha $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} \varphi$, akkor $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$. A temperált disztribúciók az $\mathscr{S} \to \mathbb{C}$ függvények vektorterének egy lineáris alterét alkotják, amelyet $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-rel jelölünk.

14.21. *Megjegyzés.* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ sűrű altere $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-nek (lásd a 14.3. Feladatot), ezért a temperált disztribúciókat azonosíthatjuk a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$-re vett leszűkítéseikkel. E leszűkítések disztribúciók, úgyhogy tekinthetjük $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-t $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ lineáris alterének (lásd a 14.4. Feladatot).

14.22. *Megjegyzés.* Minthogy a szokásos Lebesgue-mérték helyett a módosított $dm(x) := \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ mértéket használjuk ebben a fejezetben, célszerű itt a reguláris disztribúciókat is a

$$T_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\ dm(x)$$

képlettel definiálni (azaz a korábbi disztribúciókat $\sqrt{2\pi}$-vel osztani).

A reguláris disztribúciók nem feltétlenül temperáltak. Ha azonban $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ legfeljebb polinomiálisan tart a végtelenbe, akkor $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$; lásd a 14.5. Feladatot.

14.23. Definíció. Értelmezzük egy temperált T disztribúció *deriváltját* és p polinommal való *szorzását* a

$$T'(\varphi) := -T(\varphi') \quad \text{és} \quad (pT)(\varphi) := T(p\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Értelmezzük az $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-beli *konvergenciát.*

14.24. Definíció. $T_n \xrightarrow{\mathscr{S}'(\mathbb{R})} T$, ha $T_n(\varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(\varphi)$ minden $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$-re.

14.25. Állítás. *A $T \mapsto T'$ és $T \mapsto pT$ leképezések (ahol p tetszőleges polinom) $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-t folytonos lineáris módon önmagába képezik.*

Bizonyítás. A 14.14. Állítás miatt T' és pT korrektül definiált lineáris funkcionálok $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-en. Folytonosak is, mert

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} 0 \Longrightarrow \varphi_k' \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} 0 \Longrightarrow T'(\varphi_k) = T(\varphi_k') \xrightarrow{\mathbb{C}} 0,$$

és

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} 0 \Longrightarrow p\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} 0 \Longrightarrow (pT)(\varphi_k) = T(p\varphi_k) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0.$$

Hátravan még a nyilván lineáris $T \mapsto T'$ és $T \mapsto pT$ leképezések folytonosságának az igazolása. Ha $T_n \xrightarrow{\mathscr{S}'(\mathbb{R})} T$ és $\varphi \in \mathscr{S}$, akkor

$$T_n'(\varphi) = -T_n(\varphi') \to -T(\varphi') = T'(\varphi)$$

és

$$(pT_n)(\varphi) = T_n(p\varphi) \to -T(p\varphi) = (pT)(\varphi). \qquad \square$$

14.26. Definíció. Egy T temperált disztribúció Fourier-transzformáltját a

$$\widehat{T}(\varphi) := T(\widehat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

képlettel értelmezzük.

Azonosítsuk az $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-beli függvényeket a megfelelő reguláris temperált disztribúciókkal (lásd a 14.22. Megjegyzést), és tekintsük $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-t az $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ tér lineáris alterének. A következő Lemma alapján a temperált disztribúciók Fourier-transzformáltja a tesztfüggvények Fourier-transzformáltjának a kiterjesztése.

14.27. Lemma. *Ha $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, akkor $\widehat{T_\varphi} = T_{\widehat{\varphi}}$.*

Bizonyítás. Igazoljuk először, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}\psi \, dm = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\widehat{\psi} \, dm$$

tetszőleges $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ esetén. Ez abból következik, hogy a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\psi(\xi)e^{-ix\xi} \, dm(x) \, dm(\xi)$$

kettős integrál konvergens, és így a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\widehat{\psi} \, dm(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)e^{-ix\xi} \, dm(\xi) \right) \, dm(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-ix\xi} \, dm(x) \right) \, dm(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi\widehat{\varphi} \, dm(\xi).\end{aligned}$$

Ezek után

$$\widehat{T_\varphi}(\psi) = T_\varphi(\widehat{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\widehat{\psi} \, dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}\psi \, dm(\xi) = T_{\widehat{\varphi}}(\psi)$$

minden $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$-re. □

14.28. Példa. Számítsuk ki a δ_a Dirac-delta disztribúció Fourier-transzformáltját. Először is, a $\delta_a \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció temperált, hiszen $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} \varphi$ esetén $\varphi_k(a) \xrightarrow{\mathbb{C}} \varphi(a)$, és így

$$\delta_a(\varphi_k) = \varphi_k(a) \xrightarrow{\mathbb{C}} \varphi(a) = \delta_a(\varphi).$$

Ha $\varphi \in \mathscr{S}$, akkor

$$\widehat{\delta}_a(\varphi) = \delta_a(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(a) = \int \varphi(x)e^{-iax} \, dm(x),$$

ahonnan $\widehat{\delta}_a = e^{-iax}$. Speciálisan $\widehat{\delta}_0 = 1$.

Most már bebizonyíthatjuk a Fourier-transzformált általános tételét.

14.29. Tétel. *Az $F(T) := \widehat{T}$ Fourier-transzformált $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-t folytonos lineáris módon önmagába képezi, és fennállnak a következő azonosságok:*

$$\widehat{T'} = i \cdot \mathrm{id} \cdot \widehat{T}, \quad \widehat{\mathrm{id}\, T} = i \cdot (\widehat{T})'.$$

Továbbá

$$F \circ F \circ F \circ F$$

az $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ tér identikus leképezése, úgyhogy F lineáris homeomorfizmus, és $F^{-1} = F \circ F \circ F$.

Bizonyítás. Ha $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, akkor $\widehat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, hiszen $\widehat{T}$ a folytonos lineáris $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ és T leképezések kompozíciója.

A $T \mapsto \widehat{T}$ leképezés nyilván lineáris, és folytonos is, mert ha $T_n \xrightarrow{\mathscr{S}'(\mathbb{R})} T$, akkor tetszőleges $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$-re $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, és így

$$\widehat{T}_n(\varphi) = T_n(\widehat{\varphi}) \to T(\widehat{\varphi}) = \widehat{T}(\varphi).$$

A 14.15. Állításbeli (14.5) formulák alapján

$$\begin{aligned}\widehat{T'}(\varphi) &= T'(\widehat{\varphi}) = -T((\widehat{\varphi})') = -T(-i \cdot \widehat{\mathrm{id} \cdot \varphi}) \\ &= iT(\widehat{\mathrm{id} \cdot \varphi}) = i\widehat{T}(\mathrm{id} \cdot \varphi) = i(\mathrm{id} \cdot \widehat{T})(\varphi)\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{id} \cdot T}(\varphi) &= (\mathrm{id} \cdot T)(\widehat{\varphi}) = T(\mathrm{id} \cdot \widehat{\varphi}) = T(-i \cdot \widehat{\varphi'}) \\ &= -iT(\widehat{\varphi'}) = -i\widehat{T}(\varphi') = i(\widehat{T})'(\varphi)\end{aligned}$$

minden $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$-re, ami bizonyítja a keresett azonosságokat. Végül, ha $\varphi \in \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, akkor $F(F(\varphi))(x) = \varphi(-x)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re a 14.19. Tétel alapján, és innen $(F \circ F \circ F \circ F)(\varphi) = \varphi$. Következésképpen

$$((F \circ F \circ F \circ F)T)(\varphi) = T((F \circ F \circ F \circ F)\varphi) = T(\varphi)$$

minden $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$-re és $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$-re. □

14.30. *Megjegyzés.* A Fourier-transzformált könnyen általánosítható N változós függvényekre az $e^{ix\xi}$ kifejezéseket $e^{ix\cdot\xi}$-ra változtatva, ahol „$\cdot$” az $\mathbb{R}^N$-beli skaláris szorzatot jelöli. Lásd például a [79], [164] vagy [168] könyveket.

14.5. A Fourier-transzformált alkalmazásai

Oldjuk meg először az egydimenziós hővezetési egyenletet a Dirac-delta kezdőértékkel:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}\text{-ben}, \quad u(0,\cdot)=\delta_0.$$

Az $u(t,x)$ disztribúció x szerinti $\widehat{u}(t,\xi)$ Fourier-transzformáltjára (a t változót paraméternek tekintjük) a

$$\partial_t \widehat{u} + \xi^2 \widehat{u} = 0 \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}\text{-ben}, \quad \widehat{u}(0,\xi)=1$$

közönséges homogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémát kapjuk, amelynek a megoldása

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-t\xi^2}.$$

A keresett $u(t,x)$ disztribúció ennek az inverz Fourier-transzformáltja. Emlékeztetünk arra a 14.17. Lemmából, hogy a $\psi(x)=e^{-x^2/2}$ függvény Fourier-transzformáltja önmaga. Ezt felhasználva, az $s=\sqrt{2t}\xi$ helyettesítés után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\xi^2} e^{ix\xi}\, dm(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) e^{-is\cdot\frac{-x}{\sqrt{2t}}}\, dm(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}} \widehat{\psi}(-x/\sqrt{2t}) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Keressük most meg az egydimenziós hővezetési egyenlet egy alapmegoldását. Ha

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = \delta \quad \mathbb{R}^2\text{-ben},$$

akkor $u(t,x)$-nek az x szerinti $\widehat{u}(t,\xi)$ Fourier-transzformáltjára most a

$$\partial_t \widehat{u} + \xi^2 \widehat{u} = \delta(t)$$

közönséges lineáris differenciálegyenletet kapjuk. Ennek egy alapmegoldása

$$\widehat{u}(t,\xi) = H(t) e^{-t\xi^2},$$

ahol H a Heaviside-függvényt jelöli (lásd a 11.99. Példát). Innen

$$u(t,x) = \frac{H(t)}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

14.31. *Megjegyzés.* Az előző két feladat megoldása $t>0$-ra megegyezik: ez a Duhamel-elvet illusztrálja.

14.32. *Megjegyzés.* Sok könyvben a némileg különböző

$$u(t,x) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

formulát találjuk. Az eltérő konstans szorzó oka, hogy a reguláris temperált disztribúciók bevezetésekor a korábbi reguláris temperált disztribúciókhoz képest egy $1/\sqrt{2\pi}$ tényezőt használtunk (lásd a 14.22. Megjegyzést). A Fourier-transzformáltnak több különböző verziója használatos (mi a [164] könyvet követtük), erre mindig oda kell figyelni.

Harmadik példaként keressük meg az egydimenziós hullámegyenlet megoldásait. Ha

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \quad \mathbb{R}^2\text{-ben},$$

ahol c adott pozitív konstans, akkor $u(t,x)$ x szerinti $\widehat{u}(t,\xi)$ Fourier-transzformáltjára most a

$$\partial_t^2 \widehat{u} + c^2 \xi^2 \widehat{u} = 0$$

közönséges homogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk, amelynek $\xi \neq 0$ esetén az általános megoldása alkalmas $\widehat{f}(\xi)$ és $\widehat{g}(\xi)$ konstansokkal

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{-i\xi ct} + \widehat{g}(\xi) e^{i\xi ct}.$$

A furcsa jelölés oka mindjárt világos lesz. Innen

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(t,\xi) e^{ix\xi} \, dm(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{f}(\xi) e^{-i\xi ct} + \widehat{g}(\xi) e^{i\xi ct}\right] e^{ix\xi} \, dm(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x-ct)} + \widehat{g}(\xi) e^{i\xi(x+ct)} \, dm(\xi) \\ &= f(x-ct) + g(x+ct), \end{aligned}$$

ahol f és g tetszőleges temperált disztribúciók.

Sok további alkalmazás található a [168], [205], [206] könyvekben.

A Fourier-transzformált átfogó jelentőséggel bír a modern matematikában. Konkrét feladatok megoldásán túl lehetővé teszi például a differenciál- és integrálegyenleteket messzemenően általánosító pszeudo-differenciálegyenletek tárgyalását, vagy törtrendű deriváltakat tartalmazó egyenletek tanulmányozását, amelyek természetes módon jelennek meg sok alkalmazásban. Lásd például a [79], [168], [192], [199] könyveket.

14.6. Feladatok

14.1. Terjesszük ki a $[0,2\pi]$ intervallumon adott $x \mapsto (x-\pi)^2$ függvényt egy 2π-periodikus, folytonos f függvénnyé.

a) Mutassuk meg, hogy

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}(e^{inx} + e^{-inx}),$$

$\mathbb{R}$-en, és hogy a konvergencia egyenletes.

b) Vezessük le a)-ból a Poisson-formulát:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R})\text{−}ben.$$

14.2. Lássuk be, hogyha $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, és $\varphi(0) = 0$, akkor létezik olyan $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ függvény, hogy $\varphi = \mathrm{id} \cdot \psi$.

14.3. Igazoljuk, hogy $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ sűrű $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-ben.

14.4. Mutassuk meg, hogy ha $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, akkor T-nek a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$-re vett leszűkítése $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-hez tartozik.

14.5. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, és tegyük fel, hogy van olyan p polinom, amelyre f/p integrálható $\mathbb{R}$-en. Mutassuk meg, hogy a

$$T_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi \, dm(x), \quad \varphi \in \mathscr{S}$$

képlet temperált disztribúciót definiál.

IV. rész

Szoboljev-terek

15. fejezet

Szoboljev-terek

Matematikus vagyok. A matematika kitöltötte az életemet.

Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002)[1]

A fejezet tartalma. Ebben a fejezetben – a [175] tankönyvtől némileg eltérő módon – definiáljuk a további alkalmazások szempontjából fontos Szoboljev-tereket és igazoljuk legfontosabb tulajdonságaikat. Először bevezetjük a $H^1(\mathbb{R}^N)$ teret, majd megvizsgáljuk néhány alaptulajdonságát. Ezt követően korlátos Ω tartományon értelmezzük a $H^1(\Omega)$ teret, és foglalkozunk a $H^1(\Omega)$-beli függvények $H^1(\mathbb{R}^N)$-beliként való kiterjeszthetőségének, valamint a $H^1(\Omega)$-beli függvények peremen vett nyomának (megszorításának, leszűkítésének) kérdésével. Igazoljuk továbbá a $H^1(\Omega)$ tér $L^2(\Omega)$ térbe való kompakt beágyazását. Ezután a $H_0^1(\Omega)$ és $H^2(\Omega)$ tereket tárgyaljuk, végül röviden kitérünk a $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ terek duálisaira.

Az itt bevezetésre kerülő speciális Hilbert-terek különösen alkalmasak a parciális differenciálegyenletek tanulmányozásához, ezt részletesen a 16. és 17. fejezetekben fogjuk tárgyalni. [2]

A következőkben a Lebesgue-integrál és a $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály néhány tulajdonságára fogunk támaszkodni, bővebben lásd a 2. és 3. fejezeteket. A teljesség kedvéért az alábbi tételt kimondjuk.

15.1. Tétel. *Legyen U egy $\mathbb{R}^N$-beli nem üres nyílt halmaz. Ekkor*

(a) *$L^2(U)$ szeparábilis Hilbert-tér az alábbi skaláris szorzatra nézve:*

$$(u, v)_{L^2} := \int_U uv\, dx.$$

[1] Önéletrajzi könyvének kezdőmondatai, lásd [170].

[2] Szoboljev (Sobolev) 1935, 1936.

(b) $C_0^\infty(U)$ *sűrű lineáris altere* $L^2(U)$*-nak.*

15.1. A $H^1(\mathbb{R}^N)$ tér

15.2. Definíció. A $H^1(\mathbb{R}^N)$ tér elemei azok az $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ függvények, amelyekhez léteznek olyan $g_1, \dots, g_N \in L^2(\mathbb{R}^N)$ függvények, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_i\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} g_i\varphi\,dx \quad \text{minden} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, \dots, N \quad \text{esetén,} \tag{15.1}$$

ahol $\partial_i\varphi$ a φ függvény i-edik parciális deriváltját jelöli.

15.3. Példa. Ha $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, akkor $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a $g_i := \partial_i u$, $i = 1, \dots, N$ választással.

15.4. *Megjegyzések.*

- A g_i függvények minden $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$-re egyértelműen meg vannak határozva. Ha ugyanis egy h_i függvény a g_i-éhez hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, akkor a (15.1) alapján $\int_{\mathbb{R}^N}(h_i - g_i)\varphi\,dx = 0$ minden φ tesztfüggvényre, vagyis $h_i - g_i$ ortogonális $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-re $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben. Minthogy $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sűrű $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben, innen $h_i - g_i = 0$ m.m. adódik.

- Hasonlóan adódik ($L^2(U)$-ban okoskodva), hogy ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ eltűnik valamely $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt halmazon, akkor $g_i = 0$ m.m. U-ban minden i-re.

- Az $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tartalmazás azt jelenti, hogy $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ olyan függvény, amelynek $\partial_i u$ disztribúciós deriváltjai $L^2(\mathbb{R}^N)$-beli függvényekhez tartozó reguláris disztribúciók (lásd a 11.43. Definíciót).

A példa és az első megjegyzés alapján természetes a következő

15.5. Definíció. Bármely $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ függvény első parciális deriváltjait a $\partial_i u := g_i$ képlettel, *gradiensét* pedig a

$$\operatorname{grad} u = \nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_N u) \in \left(L^2(\mathbb{R}^N)\right)^N$$

képlettel értelmezzük.

15.6. Tétel.
(a) *$H^1(\mathbb{R}^N)$ szeparábilis Hilbert-tér az*

$$(u,v)_{H^1} := \int_{\mathbb{R}^N} \left[uv + \sum_{i=1}^{N} (\partial_i u)(\partial_i v) \right] dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left[uv + \nabla u \cdot \nabla v \right] dx$$

skaláris szorzatra nézve.

(b) *$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sűrű lineáris altere $H^1(\mathbb{R}^N)$-nek.*

Bizonyítás.
(a) A definícióból következik, hogy $H^1(\mathbb{R}^N)$ az $L^2(\mathbb{R}^N)$ tér lineáris altere, és hogy a

$$Tu := (u, \partial_1 u, \dots, \partial_N u)$$

lineáris leképezés izometria $H^1(\mathbb{R}^N)$ és az $R(T)$ képtér között. Elegendő megmutatnunk, hogy az utóbbi *zárt* lineáris altere az $\left(L^2(\mathbb{R}^N)\right)^{N+1}$ szeparábilis Hilbert-térnek, mert egy szeparábilis Hilbert-tér minden zárt lineáris altere is szeparábilis Hilbert-tér.

Tekintsünk tehát egy olyan $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ sorozatot, amelyre

$$Tu_n \to (u, g_1, \dots, g_N) \quad \left(L^2(\mathbb{R}^N)\right)^{N+1}\text{-ben},$$

vagyis

$$u_n \to u, \quad \partial_1 u_n \to g_1, \dots, \quad \partial_N u_n \to g_N \quad L^2(\mathbb{R}^N)\text{-ben}.$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, az $L^2(\mathbb{R}^N)$-beli skaláris szorzat folytonosságának felhasználásával az

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n \partial_i \varphi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u_n \varphi \, dx \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ i = 1, \dots, N$$

egyenlőségekben, a (15.1) összefüggést kapjuk. A definíció szerint innen $u \in$ $\in H^1(\mathbb{R}^N)$ és $\partial_i u = g_i$, $i = 1, \dots, N$, tehát $(u, g_1, \dots, g_N) \in R(T)$.

(b) Tekintsünk egy (η_n) egységapproximációt. Tetszőleges $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ esetén a 3.26. Tétel és a 11.94. Állítás alapján az $\eta_n * u$ függvények $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-hez tartoznak, és $H^1(\mathbb{R}^N)$-ben u-hoz konvergálnak. □

15.7. *Megjegyzések.*

- u_n pontosan akkor konvergál u-hoz $H^1(\mathbb{R}^N)$-ben, ha $u_n \to u$ és $\partial_1 u_n \to \partial_1 u, \dots, \partial_N u_n \to \partial_N u$ $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben.
- (u_n) pontosan akkor Cauchy-sorozat $H^1(\mathbb{R}^N)$-ben, ha $(u_n), (\partial_1 u_n), \dots,$ $(\partial_N u_n)$ mind Cauchy-sorozatok $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben.

- Ha valamely $H^1(\mathbb{R}^N)$-beli (u_n) sorozatra és $u, g_1, \dots, g_N \in L^2(\mathbb{R}^N)$ függvényekre $u_n \to u$ és $\partial_1 u_n \to g_1, \dots, \partial_N u_n \to g_N$ $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben, akkor $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, és $\partial_1 u = g_1$, $\dots$, $\partial_N u = g_N$.

Igazoljuk a Lagrange-féle középértéktétel alábbi változatát:

15.8. Állítás (Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség[3])**.** *Legyen $C \subset \mathbb{R}^N$ egy a oldalhosszúságú N dimenziós kocka és $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Akkor*

$$\int_C u^2\,dx \le \frac{Na^2}{2}\int_C |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{a^N}\left|\int_C u\,dx\right|^2.$$

Bizonyítás. Eltolással és forgatással feltehető, hogy $C = [0,a]^N$. Legyen először $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ha $x, y \in C$, akkor

$$\begin{aligned}
u(x)-u(y) &= \int_{y_1}^{x_1} \partial_1 u(z_1, y_2, \dots, y_N)\,dz_1 + \int_{y_2}^{x_2} \partial_2 u(x_1, z_2, y_3, \dots, y_N)\,dz_2 + \dots + \\
&\quad + \int_{y_N}^{x_N} \partial_N u(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, z_N)\,dz_N \le \\
&\le \int_0^a |\partial_1 u(z_1, y_2, \dots, y_N)|\,dz_1 + \int_0^a |\partial_2 u(x_1, z_2, y_3, \dots, y_N)|\,dz_2 + \dots + \\
&\quad + \int_0^a |\partial_N u(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, z_N)|\,dz_N,
\end{aligned}$$

ahonnan[4]

$$\begin{aligned}
u(x)^2 + u(y)^2 - 2u(x)u(y) = |u(x)-u(y)|^2 &\le \\
&\le N\left(\int_0^a |\partial_1 u(z_1, y_2, \dots, y_N)|\,dz_1\right)^2 + \dots + \\
&\quad + N\left(\int_0^a |\partial_N u(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, z_N)|\,dz_N\right)^2 \le \\
&\le Na\int_0^a |\partial_1 u(z_1, y_2, \dots, y_N)|^2\,dz_1 + \dots +
\end{aligned}$$

[3] Lásd Blaschke 1916.

[4] Először felhasználjuk az elemi

$$(a_1 + \dots + a_N)^2 \le N(a_1^2 + \dots + a_N^2)$$

egyenlőtlenséget (amely az $(a_1, \dots, a_N), (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$ vektorokra alkalmazott Cauchy-egyenlőtlenségből adódik), majd alkalmazzuk a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget mindegyik integrálra.

$$+ Na \int_0^a |\partial_N u(x_1, x_2, \dots, y_{N-1}, z_N)|^2 \, dz_N.$$

Integrálva a $C \times C$ halmazon a kívánt egyenlőséget kapjuk:

$$2a^N \int_C u^2 \, dx \le Na^{N+2} \int_C |\nabla u|^2 \, dx + 2 \left| \int_C u(x) \, dx \right|^2.$$

Az általános eset sűrűségi meggondolással adódik.[5] Az igazolandó egyenlőtlenség ugyanis $f(u) \le g(u)$ alakú, ahol $f, g : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ folytonos leképezések. Minthogy az egyenlőség fennáll a $H^1(\mathbb{R}^N)$ tér sűrű $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ részhalmazán, a folytonosság miatt az egész $H^1(\mathbb{R}^N)$ téren is érvényes. □

15.9. Következmény. *Legyen $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Ha $\nabla u = 0$ m.m. egy összefüggő, nyílt $U \subset \mathbb{R}^N$ halmazon, akkor u konstans U-ban.*

Bizonyítás. U összefüggősége miatt elég megmutatnunk, hogy u konstans bármely $x \in U$ valamely környezetében. Válasszunk környezetül egy a oldalhosszúságú N dimenziós C kockát, akkor

$$\int_C u^2 \, dx \le \frac{1}{a^N} \left| \int_C u \, dx \right|^2,$$

ami az

$$\left| \int_C 1 \cdot u \, dx \right|^2 \ge \left(\int_C 1^2 \, dx \right) \left(\int_C u^2 \, dx \right)$$

alakban is írható. Ez a fordított Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, ami csak akkor áll fenn, ha az 1 és u függvények egymás konstansszorosai. □

15.10. Állítás. *Tekintsünk egy korlátos $\mathscr{F} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ függvénycsaládot. Ha valamennyi $u \in \mathscr{F}$ függvény m.m. eltűnik valamely közös $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazon kívül, akkor $\mathscr{F}$ prekompakt (teljesen korlátos) $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben.*

Bizonyítás. Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$-hoz olyan

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \dots \cup \mathscr{F}_m$$

véges partíciót kell találnunk, ahol valamennyi $\mathscr{F}_i$ halmaz $L^2(\mathbb{R}^N)$-beli átmérője legfeljebb ε, vagyis

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u - v|^2 \, dx \right)^{1/2} \le \varepsilon$$

[5] A továbbiakban az ilyen típusú meggondolásokat nem fogjuk részletezni.

minden $u, v \in \mathscr{F}_i$-re és $i = 1, \dots, m$-re.

Rögzítsünk egy olyan c konstanst, hogy $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le c$ minden $u \in \mathscr{F}$-re. Rögzítsünk ezek után egy elég kis $a > 0$ számot,[6] és fedjük be K-t az előző állításbeli C zárt kocka véges sok $C_1, \dots, C_n$ eltoltjával úgy, hogy semelyik két eltolt kockának ne legyen közös belső pontja. Ezt a következő módon érhetjük el. Veszünk egy a élű kockarácsot (mint a négyzetrácsos papír kétdimenziós esetben). K-t korlátossága miatt ezek közül véges sok lefedi. Ekkor minden $u, v \in \mathscr{F}$-re érvényes a következő becslés:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2 \, dx &= \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} |u-v|^2 \, dx \\
&\le \frac{Na^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx + \frac{1}{a^N} \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{C_j} (u-v) \, dx \right|^2 \\
&= \frac{Na^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx + \frac{1}{a^N} \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{C_j} u \, dx - \int_{C_j} v \, dx \right|^2 \\
&\le 2Nc^2a^2 + \frac{1}{a^N} \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{C_j} u \, dx - \int_{C_j} v \, dx \right|^2 .
\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk az elemi

$$|\nabla u - \nabla v|^2 \le 2|\nabla u|^2 + 2|\nabla v|^2$$

egyenlőtlenséget. Bevezetve a

$$Tu := \left(\int_{C_1} u(x) \, dx, \dots, \int_{C_n} u(x) \, dx \right)$$

képlettel értelmezett $T : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, az egyenlőtlenség átírható a következő alakba:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2 \, dx \le 2Nc^2a^2 + \frac{1}{a^N} |Tu - Tv|^2 . \tag{15.2}$$

A T lineáris leképezés folytonos, mert a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
|Tu|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{C_j} 1 \cdot u \, dx \right|^2 \le \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{C_j} 1^2 \, dx \right) \cdot \left(\int_{C_j} u^2 \, dx \right) \\
&= a^N \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \, dx \le a^N \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + |\nabla u|^2) \, dx = a^N \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

[6] A pontos választást ε függvényében később adjuk meg.

minden $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$-re. A korlátos $\mathscr{F} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ halmaz folytonos lineáris $T(\mathscr{F})$ képe korlátos $\mathbb{R}^n$-ben, de akkor prekompakt is $\mathbb{R}^n$-ben, mert $\mathbb{R}^n$ véges dimenziós. Található tehát egy olyan $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{F}_m$ véges partíció, hogy

$$|Tu - Tv|^2 \le Nc^2a^{N+2} \quad \text{minden } u, v \in \mathscr{F}_i\text{-re és } i = 1, \dots, m\text{-re.}$$

Innen a (15.2) alapján kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u - v|^2 \, dx \le 3Nc^2a^2 \quad \text{minden } u, v \in \mathscr{F}_i\text{-re és } i = 1, \dots, m\text{-re.}$$

Az állítás innen adódik, ha a bizonyítás elején az $a := \varepsilon/\sqrt{3N}c$ értéket választjuk. □

15.2. A $H^1(\Omega)$ terek

A továbbiakban Ω-val mindig egy $\mathbb{R}^N$-beli nem üres, *korlátos* nyílt halmazt jelölünk, Γ-val pedig ennek a határát. Az egyszerűség kedvéért[7] azt is feltesszük, hogy Ω C^∞-beli a következő értelemben:

15.11. Definíció. Az Ω halmaz C^∞*-beli*, ha minden $a \in \Gamma$ ponthoz létezik a-nak egy olyan $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt környezete és egy olyan $h : B \to U$ diffeomorfizmus[8] a $B := \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x| < 1\}$ nyílt egységgömb és U között, hogy minden $x = (x_1, \dots, x_N) \in B$ pontra

$$\begin{aligned} x_N < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad h(x) \in \Omega \,; \\ x_N = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad h(x) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Geometriailag Γ lokálisan egy C^∞-beli függvény gráfja, és Ω a határa egy oldalán helyezkedik el.[9]

15.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy $u \in H^1(\Omega)$, ha $u \in L^2(\Omega)$ és léteznek olyan $g_1, \dots, g_N \in L^2(\Omega)$ függvények, hogy

$$\int_\Omega u\partial_i\varphi \, dx = -\int_\Omega g_i\varphi \, dx$$

minden $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ és $i = 1, \dots, N$ esetén.

[7] Ezek a geometriai feltevések enyhíthetőek: lásd például Raviart–Thomas [150] könyvét vagy a [175] tankönyvet.

[8] Vagyis olyan C^∞-beli $h : B \to U$ bijekció, amelynek az inverze is C^∞-beli.

[9] Nem teljesül például az utóbbi feltétel, ha Ω egy $\mathbb{R}^2$-beli nyílt körlapból adódik egy sugara elvételével („bevágás”).

15.13. *Megjegyzés.* $u \in H^1(\Omega)$ azt jelenti, hogy $u \in L^2(\Omega)$ és u minden $\partial_j u$ disztribúciós deriváltja egy-egy $L^2(\Omega)$ függvénynek megfelelő reguláris disztribúció (L. a 11.43. Definíciót).

15.14. Példa. Jelöljük $C^\infty(\overline{\Omega})$-tal a $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-beli függvények Ω-ra vett leszűkítéseinek a halmazát.[10] Ha $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, akkor $u \in H^1(\Omega)$ a $g_i = \partial_i u$, $i = 1, \dots, N$ választással.

Világos, hogy $H^1(\Omega)$ az $L^2(\Omega)$ tér lineáris altere. Minthogy $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^2(\Omega)$-ban, a g_i függvények egyértelműen meg vannak határozva. Jogos tehát tetszőleges $u \in H^1(\Omega)$ függvény első parciális deriváltjait és gradiensét a

$$\partial_i u := g_i \quad \text{és} \quad \operatorname{grad} u = \nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)$$

képletekkel *definiálni.*

15.15. Tétel.

(a) $H^1(\Omega)$ *szeparábilis Hilbert-tér az*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega \left[uv + \sum_{i=1}^N (\partial_i u)(\partial_i v) \right] dx$$

skaláris szorzatra nézve.

(b) $C^\infty(\overline{\Omega})$ *sűrű lineáris altér* $H^1(\Omega)$*-ban.*

Bizonyítás.

(a) Megismételhető a 15.6. Tétel (a) részének a bizonyítása.

(b) A 15.6. Tétel (b) részéből következik az alábbi 15.16. Állítás alkalmazásával. □

A definíciókból következik, hogy ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, akkor $u|_\Omega \in H^1(\Omega)$ a $g_i = \partial_i u|_\Omega$, $(i = 1, \dots, N)$ választással. A következő eredmény szerint $u \in \in H^1(\Omega)$ minden eleme megkapható ily módon.

15.16. Állítás (Lions, Magenes–Stampacchia [11])**.** *Tekintsük* $\overline{\Omega}$ *egy kompakt* K *környezetét.* [12] *Létezik egy olyan*

$$P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^N)$$

folytonos *lineáris leképezés, hogy*

$$Pu = u \ \ \Omega\text{-}n \text{ és } Pu = 0 \ \ \mathbb{R}^N \setminus K\text{-}n$$

minden $u \in H^1(\Omega)$*-ra.*

[10] Megmutatható, hogy $C^\infty(\overline{\Omega})$ azon $u : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényekből áll, amelyek végtelen sokszor differenciálhatóak, és minden parciális deriváltjuk egyenletesen folytonos.

[11] Lions 1957, Magenes–Stampacchia 1958.

[12] Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^N \setminus K$ és $\overline{\Omega}$ távolsága > 0.

Bizonyítás. Az egydimenziós esetre elemi bizonyítást adunk a 15.14. Feladatban. Az általános esetnek a „tükrözés és levágás módszerén” alapuló bizonyítása megtalálható például a [13] könyvben. □

15.17. Tétel (Rellich [13]). *A $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ beágyazás kompakt.*

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy bármely $H^1(\Omega)$-beli korlátos B halmaz prekompakt az $L^2(\Omega)$ metrikájára nézve. Ehhez elég észrevennünk, hogy a $P(B) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ halmaz teljesíti a 15.10. Állítás feltételeit. □

Alkalmazásként terjesszük ki a Poincaré–Wirtinger egyenlőtlenséget általánosabb tartományokra:

15.18. Állítás (Poincaré–Wirtinger [14]). *Ha Ω összefüggő, akkor van olyan $c(\Omega)$ konstans, hogy*

$$\int_\Omega u^2\,dx \le c(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \left|\int_\Omega u\,dx\right|^2\right)$$

minden $u \in H^1(\Omega)$-ra.

Bizonyítás. Ha az állítás nem igaz, akkor található olyan $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ sorozat, hogy $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ minden n-re, és

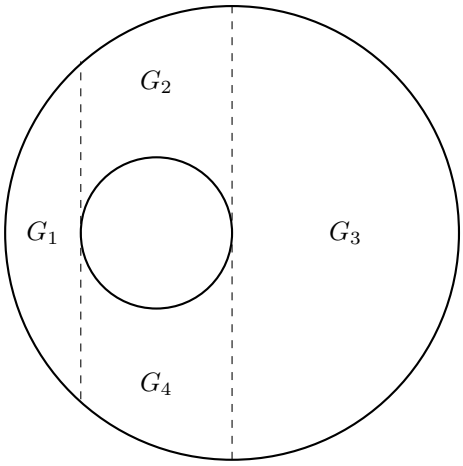
$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx + \left|\int_\Omega u_n(x)\,dx\right|^2 \to 0.$$

Ekkor $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \to 1$. Speciálisan (u_n) korlátos $H^1(\Omega)$-ban, és így Rellich tétele szerint van $L^2(\Omega)$-ban konvergens $u_{n_k} \to u$ részsorozata.

Minthogy $\nabla u_{n_k} \to 0$ $L^2(\Omega)^N$-ben, (u_{n_k}) Cauchy-sorozat $H^1(\Omega)$-ban, és így $u_{n_k} \to v$ $H^1(\Omega)$-ban valamely alkalmas $v \in H^1(\Omega)$ függvényre. Akkor $u_{n_k} \to v$ $L^2(\Omega)$-ban is, tehát $v = u$ az $L^2(\Omega)$-beli határérték egyértelműsége miatt. Az eddigiek alapján tehát

- $u \in H^1(\Omega)$,
- $\nabla u = 0$ m.m. Ω-ban,
- $\int_\Omega u\,dx = 0$,
- $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

[13] Rellich 1930.
[14] Poincaré 1890, 1894, Blaschke 1916 említi Wirtingert.



15.1. ábra. Ω résztartományokra bontása

Alkalmazva a 15.9. Következményt, [15] az első két feltételből következik, hogy u konstans. A harmadik feltétel szerint ez a konstans nulla, ez viszont ellentmond a negyedik feltételnek. □

A továbbiakban $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_N(x))$-vel jelöljük az $x \in \Gamma$ pontban az Ω-ból kifelé mutató normális egységvektort. Emlékeztetünk a Newton–Leibniz-formula alábbi általánosítására (lásd a 4.18. Tételt).

15.19. Állítás (Gauss–Osztrogradszkij [16])**.** *Ha* $f \in C^1(\overline{\Omega})$*, akkor*

$$\int_\Omega \partial_j f \, dx = \int_\Gamma f \nu_j \, d\Gamma, \quad j = 1, \dots, N.$$

15.20. *Megjegyzés.* Az egydimenziós esetben ez ekvivalens a Newton–Leibniz-formulával.

A bizonyítás gondolata két dimenzióban[17] Tegyük fel, hogy függőleges egyenesekkel Ω felbontható véges sok

$$G := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x < b, \quad \phi(x) < y < \psi(x)\big\}$$

alakú tartományra, ahol $[a, b]$ egy kompakt intervallum, és $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $\phi \le \psi$ egyenlőtlenségnek eleget tevő folytonos függvények.[18]

[15] Ehhez először kiterjesztjük u-t egy $H^1(\mathbb{R}^N)$-beli függvénnyé.
[16] Gauss 1813, 1840, Osztrogradszkij 1828, 1834.
[17] A részleteket és a magasabb dimenziós esetet illetően lásd például a [29, 48] könyveket.
[18] C^∞-beli tartományokra a tétel innen alkalmas, sokszöggel határolt tartományokkal való közelítéssel következik.

Szukcesszív integrálással adódik, hogy

$$\int_G \partial_2 f \; dx \; dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \partial_2 f(x,y) \; dy \right) \; dx$$
$$= \int_a^b f(x,\psi(x)) \; dx - \int_a^b f(x,\phi(x)) \; dx.$$

Tekintsük az $[a,b]$ intervallumnak egy $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ felosztását. Ha ℓ_i-vel jelöljük ψ $[x_{i-1}, x_i]$-re vett leszűkítése gráfjának az ívhosszát, akkor

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, \psi(x_i))(x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^n f(x_i,\psi(x_i))\nu_2(x_i,\psi(x_i))\ell_i$$

abban az értelemben, hogy a két oldal különbsége nullához tart, ha

$$\delta := \max_i (x_i - x_{i-1}) \to 0.$$

Csakugyan, ha ψ lineáris függvény, akkor itt egyenlőség áll azon derékszögű háromszögek hasonlósága miatt, amelyek átfogói Γ_ψ (ψ gráfja) és ν, a befogóik pedig párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel. Ha ψ nem lineáris, akkor az egyenlőségből „jó közelítés lesz", ha mindegyik $x_i - x_{i-1}$ távolság elég kicsi.

Vegyük észre, hogy $\delta \to 0$ esetén a két oldal Riemann-összegként rendre az

$$\int_a^b f(x,\psi(x)) \; dx \quad \text{és} \quad \int_{\Gamma_\psi} f\nu_2 \; d\Gamma$$

integrálokhoz tart; határértékre térve az

$$\int_a^b f(x,\psi(x)) \; dx = \int_{\Gamma_\psi} f\nu_2 \; d\Gamma$$

egyenlőséget kapjuk.

Hasonlóan adódik, hogy

$$-\int_a^b f(x,\phi(x)) \; dx = \int_{\Gamma_\phi} f\nu_2 \; d\Gamma;$$

a negatív előjel a jobb oldali ν_2 komponensből származik. Innen

$$\int_G \partial_2 f \; dx \; dy = \int_{\Gamma_\psi} f\nu_2 \; d\Gamma + \int_{\Gamma_\phi} f\nu_2 \; d\Gamma,$$

és az egyenlőségeket összeadva

$$\int_\Omega \partial_2 f \; dx = \int_\Gamma f \nu_2 \; d\Gamma$$

adódik.

A $\partial_1 f$ parciális derivált vizsgálata visszavezethető az előzőre az $(x, y) \mapsto (y, x)$ tükrözés segítségével, amely az

$$\int_\Omega \partial_1 f \; dx = \int_\Gamma f \nu_1 \; d\Gamma$$

egyenlőséghez vezet. □

15.21. Tétel (Nyomtétel [19]). *Létezik egy egyértelműen meghatározott olyan*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$$

folytonos lineáris leképezés, hogy

$$\gamma u = u|_\Gamma$$

minden $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$-ra.

Továbbá [20]

$$\int_\Omega [(\partial_j u)v + u(\partial_j v)] \; dx = \int_\Gamma (\gamma u)(\gamma v)\nu_j \, d\Gamma, \quad j = 1, \ldots, N$$

minden $u, v \in H^1(\Omega)$-ra.

15.22. *Megjegyzés.* A jelölés egyszerűsítése végett általában u-t írunk γu helyett.

Fogadjuk el ideiglenesen a következő lemmát:

15.23. Lemma. *Létezik egy olyan C^∞-beli $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ vektormező, hogy $h \cdot \nu \geq 1$ az Ω halmaz Γ határán, ahol ν a külső normális egységvektort jelöli.*

15.24. Példa. Ha például Ω egy a középpontú, r sugarú gömb, akkor a $h(x) := \frac{x-a}{r}$ függvényre még a $h \cdot \nu = 1$ egyenlőség is teljesül. Általánosabban, ha Ω konvex, vagy legalább *csillagszerű* valamely a pontjára nézve (azaz ha $ta + (1-t)x \in A$ minden $x \in A$ és $0 < t < 1$ esetén), akkor a $h(x) := (x-a)/r$ választás megfelel, ahol $r > 0$ olyan kicsi, hogy $B_r(a) \subset \Omega$.

[19] Sobolev 1950. A folytonosságnál erősebb $\|\gamma u\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C(\Omega) \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$ becslést is igazoljuk majd.

[20] Green 1828.

15.25. *Megjegyzés.* Ha Ω a C^∞ osztályban van, akkor olyan C^∞-beli vektormező is konstruálható, amelyre $h = \nu$, és így $h \cdot \nu = 1$ a Γ határon.[21] Amint látni fogjuk, a gyengébb $h \cdot \nu \geq 1$ tulajdonság már elegendő a tétel bizonyításához.

A nyomtétel bizonyítása. A lemma szerint van olyan C^∞-beli

$$h = (h_1, \dots, h_N) \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

vektormező, hogy $h \cdot \nu \geq 1$ Γ-n. Alkalmazva a Gauss–Osztrogradszkij-tételt a $h_j u^2$ függvényekre a következő azonosságot kapjuk:[22]

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma u^2 \, d\Gamma &\leq \int_\Gamma (h \cdot \nu) u^2 \, d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \partial_j (h_j u^2) \, dx \\
&= \sum_{j=1}^N \int_\Omega \left[h_j \partial_j (u^2) + (\partial_j h_j) u^2 \right] \, dx \\
&= \sum_{j=1}^N \int_\Omega \left[2 (h_j \partial_j u) u + (\partial_j h_j) u^2 \right] \, dx \\
&= \int_\Omega u (2h \cdot \nabla u) \, dx + \int_\Omega (\operatorname{div} h) u^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Bevezetve (az $L^\infty(\overline{\Omega})$-beli normákkal) az

$$M_0 := 2 \|h\|_\infty, \quad M_1 := \|\operatorname{div} h\|_\infty \quad \text{és} \quad M := \sqrt{M_0^2 + M_1^2}$$

számokat, innen

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq M_0 \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 + M_1 \|u\|_2^2 \\
&\leq \sqrt{M_0^2 + M_1^2} \sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2} \ \|u\|_2 \\
&= M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq M \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 .
\end{aligned}$$

Minthogy $C^\infty(\overline{\Omega})$ sűrű $H^1(\Omega)$-ban, az $u \mapsto u|_\Gamma$ lineáris leképezés folytonosan kiterjeszthető egy egyértelműen meghatározott folytonos lineáris $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ leképezéssé.

Az igazolandó azonosság $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$-re a Gauss–Osztrogradszkij-tételből adódik az $f = uv$ választással. Az általános eset sűrűségi és folytonossági meggondolással következik, felhasználva a *nyom* leképezés folytonosságát is. □

[21] Lásd például a 2.1. Lemmát a [94] könyvben (18. o.).

[22] A $\operatorname{div} h := \sum_{j=1}^N \partial_j h_j$ jelölést használjuk.

A lemma bizonyítása. Tetszőleges $x_i \in \Gamma$-hoz tekintsük az $y_i = x_i - 2\nu(x_i)$ pontot, így $(x_i - y_i) \cdot \nu(x_i) = 2$. Mivel a $\nu : \Gamma \to \mathbb{R}^N$ normálvektor a feltevéseink miatt folytonos Ω-n, az x_i pont egy alkalmas V_i nyílt környezetére

$$(x - y_i) \cdot \nu(x) > 1 \quad \text{minden} \quad x \in \Gamma \cap V_i \quad \text{esetén.}$$

Minthogy Γ kompakt, lefedhető véges sok ilyen nyílt halmazzal, legyenek ezek $V_1, \dots, V_m$. Válasszunk egy ehhez tartozó C^∞-beli egységosztást, vagyis olyan C^∞-beli $\theta_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ függvényeket, amelyekre

$$\begin{aligned}
&\theta_i \geq 0 \quad \text{minden } i\text{-re,}\\
&\theta_i \quad \text{eltűnik egy } V_i\text{-beli kompakt halmazon kívül minden } i\text{-re,}\\
&\theta_1 + \dots + \theta_m \equiv 1 \quad \Gamma\text{-n.}
\end{aligned}$$

Akkor a

$$h(x) := \sum_{i=1}^{m} \theta_i(x)(x - y_i), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

függvény rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Valóban, ha tetszőlegesen rögzített $x \in \Gamma$-ra I-vel jelöljük azon i indexek halmazát, amelyekre $x \in V_i$, akkor[23]

$$\begin{aligned}
h(x) \cdot \nu(x) &= \sum_{i=1}^{m} \theta_i(x)(x - y_i) \cdot \nu(x) = \sum_{i \in I} \theta_i(x)(x - y_i) \cdot \nu(x)\\
&\geq \sum_{i \in I} \theta_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(x) = 1. \qquad \square
\end{aligned}$$

15.26. *Megjegyzés.* A kétdimenziós esetben a lemma érvényben marad szakaszonként C^1-beli tartományokra, így sokszögekre is. Ilyenkor a szinguláris x_i határpontokban két természetes, „bal" és „jobb" oldali normál vektor van: $\nu_-(x_i)$ és $\nu_+(x_i)$. Ezek nem lehetnek egymás ellentettjei, így van olyan y_i pont a szögfelezőjükön, amelyre

$$(x_i - y_i) \cdot \nu_-(x_i) = (x_i - y_i) \cdot \nu_+(x_i) = 2.$$

15.3. A $H_0^1(\Omega)$ tér

15.27. Definíció. Jelöljük $H_0^1(\Omega)$-val a $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ *nyom* leképezés magját:

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) \ : \ u = 0 \quad \Gamma\text{-n} \right\}.$$

[23] Valójában szigorú egyenlőtlenség is teljesül.

15.28. Példa. Világos, hogy $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$.

15.29. Tétel.

(a) *$H_0^1(\Omega)$ szeparábilis Hilbert-tér a $H^1(\Omega)$-ból örökölt skaláris szorzatra nézve.*

(b) *$C_0^\infty(\Omega)$ sűrű lineáris altér $H_0^1(\Omega)$-ban.*

Bizonyítás.

(a) $H^1(\Omega)$ *zárt* lineáris altere lévén, $H_0^1(\Omega)$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

(b) Bizonyítás nélkül elfogadjuk (lásd a [175] tankönyvet). □

15.30. Állítás (Poincaré-egyenlőtlenség [24])**.** *Létezik olyan $c(\Omega)$ konstans, hogy*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

minden $u \in H_0^1(\Omega)$-ra.

Következésképpen a

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

képlet a $H^1(\Omega)$-ből örökölttel ekvivalens euklideszi normát definiál $H_0^1(\Omega)$-n.

15.31. *Megjegyzés.* Emlékeztetünk rá, hogy Ω a feltevésünk szerint *korlátos*. Például $\mathbb{R}^N$-en nem áll fenn hasonló egyenlőtlenség. Tekintsünk ennek a megmutatásához egy nem azonosan nulla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ függvényt, és vezessük be a $\varphi_n(x) := \varphi(x/n)$ képlettel értelmezett $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-beli függvénysorozatot. Ekkor

$$\|\varphi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int |\varphi_n(x)|^2 \; dx = \int |\varphi(x/n)|^2 \; dx = n^N \, \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

és

$$\|\nabla\varphi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int |\nabla\varphi_n(x)|^2 \; dx = \int \left|\frac{1}{n}\nabla\varphi(x/n)\right|^2 \; dx = n^{N-2} \, \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

minden n-re. Ha volna olyan $c > 0$ szám, hogy

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq c\, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

minden $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$-re, akkor minden n-re teljesülnie kellene az

$$n^N \, \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq c n^{N-2} \, \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \Longleftrightarrow n \leq c \frac{\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}$$

egyenlőtlenségeknek, ami lehetetlen.

[24] Poincaré 1890.

Bizonyítás. Elegendő igazolnunk az egyenlőtlenséget $u \in C_0^\infty(\Omega)$-ra. Vezessünk be egy Ω-t tartalmazó C kockát a

$$b < x_i < b + a, \quad i = 1, \dots, N$$

egyenlőségekkel. Az u függvényeket nullaként kiterjesztve Ω-n kívülre feltehető, hogy $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Minden $x \in \Omega$-ra

$$u(x) = \int_b^{x_1} \partial_1 u(z_1, x_2, \dots, x_N)\, dz_1.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget használva innen

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\le (x_1 - b) \int_b^{x_1} |\partial_1 u(z_1, x_2, \dots, x_N)|^2\, dz_1 \\ &\le a \int_b^{b+a} |\partial_1 u(z_1, x_2, \dots, x_N)|^2\, dz_1 \end{aligned}$$

adódik, ebből pedig szukcesszív integrációval az

$$\int_\Omega |u(x)|^2\, dx \le a^2 \int_\Omega |\partial_1 u(x)|^2\, dx \le a^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$$

egyenlőséget kapjuk: a keresett egyenlőtlenség teljesül a $c(\Omega) = a$ konstanssal.

Az állítás második része az alábbi egyenlőtlenségekből következik:

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \le (1 + a^2) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad \square$$

15.4. A $H^2(\Omega)$ tér

15.32. Definíció. Azt mondjuk, hogy $u \in H^2(\Omega)$, ha $u \in H^1(\Omega)$ és $\partial_i u \in \in H^1(\Omega)$ minden $i = 1, \dots, N$-re.

A kényelem kedvéért a korábbiakhoz hasonlóan vezessük be az

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$$

multi-indexeket, amelyeknek a komponensei nemnegatív egészek. A komponensek összegét α *rendjének* nevezzük és $|\alpha|$-val jelöljük. Az α rendű parciális deriváltat a

$$\partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N}$$

képlettel értelmezzük.

15.33. Tétel.
(a) *$H^2(\Omega)$ szeparábilis Hilbert-tér az*

$$(u,v)_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le 2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

skaláris szorzatra nézve.
(b) *$C^\infty(\overline{\Omega})$ sűrű lineáris altere $H^2(\Omega)$-nak.*

Bizonyítás. A 15.15. Tétel bizonyítása adaptálható. □

Világos, hogy a

$$\Delta u := \text{div grad } u = \sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u \in L^2(\Omega)$$

képlet egy folytonos lineáris $\Delta : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ leképezést definiál. Ezt *Laplace-operátornak* hívjuk.[25]

Értelmezhető minden $u \in H^2(\Omega)$ függvény *normális deriváltja* is a

$$\partial_\nu u := \sum_{i=1}^{N} \nu_i \gamma(\partial_i u)$$

képlet segítségével.[26]

A nyomtételből következik, hogy az $u \mapsto \partial_\nu u$ leképezés folytonos és lineáris $H^2(\Omega)$-ből $L^2(\Gamma)$-ba. Érvényes továbbá a következő parciális integrálási formula:

15.34. Állítás (Green [27]). *Ha $u \in H^2(\Omega)$ és $v \in H^1(\Omega)$, akkor*

$$\int_\Omega [(\Delta u)v + \nabla u \cdot \nabla v]\, dx = \int_\Gamma (\partial_\nu u) v \, d\Gamma.$$

Bizonyítás. Alkalmazva a 15.21. Tételbeli azonosságot u helyett $\partial_j u$-ra, az

$$\int_\Omega \left[(\partial_j^2 u)v + (\partial_j u)(\partial_j v)\right]\, dx = \int_\Gamma (\partial_j u) v \nu_j \, d\Gamma$$

egyenlőségeket kapjuk minden $j = 1, \dots, N$-re. (A 15.22. Megjegyzésnek megfelelően γu helyett v-t írtunk.) A keresett összefüggés ezeket összeadva és Δu, ∇u, $\partial_\nu u$ definícióját felhasználva adódik. □

[25] Laplace 1782, 1787.
[26] Sima függvényekre ez visszaadja a klasszikus fogalmat.
[27] Green 1828.

15.5. Magasabb rendű Szoboljev-terek

Általánosítsuk indukcióval a $H^1(\Omega)$ és $H^2(\Omega)$ tereket:

15.35. Definíció. Ha valamely $k \geq 3$ egészre $H^{k-1}(\Omega)$ már értelmezve van, akkor álljon $H^k(\Omega)$ azon $u \in H^1(\Omega)$ függvényekből, amelyekre $\partial_i u \in \in H^{k-1}(\Omega)$ is teljesül minden $i = 1, \ldots, N$ esetén.

A 15.15. Tétel bizonyításának egyszerű adaptálásával kapjuk a 15.15. és 15.33. Tételek következő általánosítását:

15.36. Tétel.
(a) Az

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

skaláris szorzatra nézve $H^k(\Omega)$ szeparábilis Hilbert-tér.

(b) A $C^\infty(\overline{\Omega})$ lineáris altér sűrű $H^k(\Omega)$-ban.

15.37. *Megjegyzések.*

- A $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$ értelmezéssel a fenti tétel (a) része egybeesik a 15.1. Tétellel.
- A $H^k(\Omega)$ terek sorozata monoton csökkenő, és $C^\infty(\overline{\Omega})$ a metszetükhöz tartozik. Valójában fennáll a

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} H^k(\Omega) = C^\infty(\overline{\Omega})$$

  egyenlőség.[28]

Hasonlóan értelmezhetjük a $H_0^k(\Omega)$ tereket $k \geq 2$-re:

15.38. Definíció. Ha valamely $k \geq 2$ egészre $H_0^{k-1}(\Omega)$ már értelmezve van, akkor álljon $H_0^k(\Omega)$ azon $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényekből, amelyekre $\partial_i u \in \in H_0^{k-1}(\Omega)$ is teljesül minden $i = 1, \ldots, N$ esetén.

Érvényes a 15.29. Tétel következő általánosítása:

15.39. Tétel.
(a) Mint a $H^k(\Omega)$ tér lineáris altere, $H_0^k(\Omega)$ szeparábilis Hilbert-tér.

(b) A $C_0^\infty(\Omega)$ lineáris altér sűrű $H_0^k(\Omega)$-ban.

[28] Lásd például H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer 2011, Chapter 9.

15.40. Példa. Az egydimenziós $\Omega = (a, b)$ esetben

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \ : \ u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0 \right\}.$$

Ez valódi lineáris altere a

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \ : \ u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

térnek.

15.6. Duális Szoboljev-terek

Gyakran találkozunk majd olyan H és V Hilbert-terekkel, ahol V sűrű lineáris altere H-nak, és a $V \subset H$ beágyazás folytonos abban az értelemben, hogy valamely c konstanssal

$$\|x\|_H \leq c \, \|x\|_V$$

minden $x \in V$-re. Ilyenkor a duális $H' \subset V'$ terek hasonló tulajdonságúak. Pontosabban, fennáll a következő:[29]

15.41. Állítás. *Legyenek V és H olyan Hilbert-terek, ahol V sűrű lineáris altere H-nak, és a $V \subset H$ beágyazás folytonos.*

(a) A H'-ből V'-be képező lineáris

$$\varphi \mapsto \varphi|_V$$

leszűkítés injektív, így H' azonosítható V' egy lineáris alterével.

(b) A Riesz–Fréchet-tétel alapján azonosítva a H' és H tereket, a

$$V \subset H = H' \subset V'$$

relációkat nyerjük, és tetszőleges $h \in H$, $v \in V$ vektorokra fennáll a

$$\langle h, v \rangle_{V',V} = (h, v)_H$$

egyenlőség.[30]

[29] A továbbiakban nem lesz szükségünk H' sűrűségére V'-ben, és az (e) tulajdonságra sem. Ez a sűrűségi tulajdonság egyébként a később tárgyalásra kerülő 16.27. Tételből is következik abban az esetben, ha a $V \subset H$ beágyazás *kompakt* is, vagyis ha a V-ből H-ba vezető $v \mapsto v$ identikus lineáris leképezés kompakt.

[30] Itt és a következőkben gyakran használjuk $h(v)$ helyett a $\langle h, v \rangle_{V',V}$ jelölést, amely kidomborítja a $(h, v) \mapsto h(v)$ leképezés bilineáris karakterét.

(c) A Riesz–Fréchet-féle $A : V \to V'$ izometrikus izomorfizmus a következő egyenlőséggel jellemezhető:

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = (u, v)_V$$

minden $u, v \in V$-re.

(d) A $H' \subset V'$ beágyazás is sűrű és folytonos.

(e) Ha a $V \subset H$ beágyazás kompakt, akkor a $H' \subset V'$ beágyazás is kompakt.

Bizonyítás.

(a) Ha $\varphi \in H'$, akkor a V-re vett leszűkítés V'-hez tartozik (vagyis folytonos), mert

$$|\varphi(x)| \le \|\varphi\| \cdot \|x\|_H \le c\,\|\varphi\| \cdot \|x\|_V$$

minden $x \in V$-re. Továbbá a lineáris

$$\varphi \mapsto \varphi|_V$$

leszűkítés injektív, mert φ folytonos, és V sűrű H-ban.

(b) A két azonosításból adódik, hogy

$$\langle h, v\rangle_{V',V} = \langle h, v\rangle_{H',H} = (h, v)_H$$

minden $h \in H$-ra és $v \in V$-re.

(c) Ez a Riesz-Fréchet-tétel átfogalmazása.

(d) Ha $\varphi \in H'$, akkor

$$\|\varphi\|_{V'} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_V} \le \sup_{x\neq 0} \frac{c\,|\varphi(x)|}{\|x\|_H} = c\,\|\varphi\|_{H'}\,.$$

Ez bizonyítja a $H' \subset V'$ beágyazás folytonosságát.

A H' tér V'-beli sűrűségének a bizonyításához a Hahn–Banach-tétel egy ismert következménye szerint elegendő megmutatnunk, hogy ha egy $\Phi \in V''$ lineáris funkcionál eltűnik H'-n, akkor $\Phi = 0$.

Mivel a Hilbert-terek reflexívek, létezik egy olyan $v \in V$ vektor, hogy $\Phi(\varphi) = \varphi(v)$ minden $\varphi \in H'$-re. Elég tehát megmutatnunk a következőt: ha $v \in V$, és $\varphi(v) = 0$ minden $\varphi \in H'$-re, akkor $v = 0$. Tekintsük e célból a $\varphi(h) := (v, h)_H$ funkcionált. Ekkor $\varphi \in H'$ és

$$0 = \varphi(v) = \|v\|_H^2\,,$$

úgyhogy valóban $v = 0$.

(e) Ez speciális esete Schauder tételének, miszerint egy kompakt operátor adjungáltja is kompakt. □

15.42. Példa.

- A $H = L^2(\Omega)$ és $V = H^k(\Omega)$ választással ($k = 1,2,\ldots$) a

$$H^k(\Omega) \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset \big(H^k(\Omega)\big)'$$

relációkhoz jutunk sűrű és folytonos beágyazásokkal.

- A $H = L^2(\Omega)$ és $V = H_0^k(\Omega)$ választással ($k = 1,2,\ldots$) a

$$H_0^k(\Omega) \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset \big(H_0^k(\Omega)\big)'$$

relációkhoz jutunk sűrű és folytonos beágyazásokkal. A $k = 1$ esethez hasonlóan a $\big(H_0^k(\Omega)\big)'$ duális teret általában $H^{-k}(\Omega)$-val jelöljük.

15.43. *Megjegyzések.*

- $H^{-k}(\Omega)$ elemeit meghatározzák a $C_0^\infty(\Omega)$-re vett leszűkítéseik, mert $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $H_0^k(\Omega)$-ban. Ezért $H^{-k}(\Omega)$ elemeit disztribúciókkal azonosíthatjuk.

- Mivel $C_0^\infty(\Omega)$ nem sűrű $H^k(\Omega)$-ban, az utóbbi elemei nem tekinthetők disztribúcióknak: $\big(H^1(\Omega)\big)'$ különböző elemeinek ugyanaz lehet a $C_0^\infty(\Omega)$-re vett leszűkítése.

- V reflexivitása szükséges. Ez látható a kis ℓ_p terek példáján: az

$$\ell_1 \subset \ell_2 = \ell_2' \subset \ell_1' = \ell_\infty$$

tartalmazási relációk közül az első sűrű, de a második nem.

15.44. *Történeti megjegyzés.* A disztribúcióelméletről szóló fejezet bevezetőjében említettük, hogy az általánosított derivált fogalmát és az arra épülő, a fentiekben ismertetett tereket Szergej Lvovics Szoboljev vezette be az 1935-36-os években. A történeti hűséghez hozzátartozik, hogy őt megelőzően már az 1900-as évek elejétől kezdődően sok helyen felbukkant az általánosított derivált és a hozzá kapcsolódó fogalmak gondolata, az alábbiakban röviden vázoljuk a kialakulás menetét.

A derivált általánosításának fő motivációja a Dirichlet-elv (lásd a 8.3.3. szakaszt) matematikai vizsgálata volt. Ebben fontos szerepet töltött be az akkori olasz matematikai analízis iskola: Beppo Levi (1875–1961), Guido Fubini (1879–1943) és Leonida Tonelli (1885–1946). Különösen a többváltozós abszolút folytonos függvényekkel kapcsolatos munkáik kiemelkedőek, ezek közül több a későbbi általános eredmények speciális esete. Az abszolút folytonosság fogalma egy dimenzióban Giuseppe Vitalitól (1875–1932) származik.

A Lebesgue-integrálható függvények integrálfüggvényei abszolút folytonosak; megfordítva minden abszolút folytonos f függvény m.m. differenciálható, f' Lebesgue-integrálható, és f a deriváltjának az integrálfüggvénye. Az egydimenziós $W^{1,p}(a,b)$ Szoboljev-terek pont az abszolút folytonos függvények terei lesznek a $p=1$ esetben.

Az olasz iskola mellett a göttingeni (később Amerikába kivándorolt) Richard Courant (1888–1972), David Hilbert (1862–1943), és az ugyancsak Amerikába kivándorolt Kurt Otto Friedrichs (1901–1982) is fontos szerepet játszottak a funkcionálanalízis, kiváltképp a variációs módszerek parciális differenciálegyenletek elméletében való alkalmazásában. Ezenkívül meg kell említenünk Franz Rellich (1906–1955) nevét, aki az első kompakt beágyazási tételt bizonyította 1930-ban, lásd a 15.17. Tételt (természetesen akkor még nem Szoboljev-terekkel megfogalmazva).

Beppo Levi eredményeit továbbfejlesztve jelentős lépést tett meg a Szoboljev-terek irányában Otton Marcin Nikodým (1887–1974) lengyel matematikus, akinek nevét őrzi a közismert a Radon–Nikodým-deriváltról szóló tétel. Nikodým úgynevezett Beppo Levi-féle függvényeket vizsgált, amelyek valójában a későbbi $H^1(\Omega)$ tereknek feleltek meg.

Az általánosított megoldás fogalmát Szoboljevet megelőzően már Jean Leray (1906–1998) francia matematikus a Navier–Stokes-egyenletek kapcsán értelmezte, a kvázimegoldás elnevezést használva, és a megoldások terének a későbbi $H^1(\Omega)$ teret választva.

Végül az amerikai iskolát kell megemlítenünk: Griffith Conrad Evans (1887–1973) és Charles Bradfield Morrey (1908–1984), akik Szoboljevtől függetlenül bevezették a későbbi $W^{1,p}(\Omega)$ teret, és vizsgálták e térbeli függvények tulajdonságait.

A fentiek alapján világos tehát, hogy az általánosított derivált, valamint az erre épülő terek fogalma nem köthető pusztán egyetlen személyhez, az valójában egy sereg matematikus munkájának köszönhetően alakult ki mai formájára. Ennek megfelelően sokáig nem is Szoboljev nevével azonosították ezeket a tereket, hanem olasz és francia nyelvterületen Beppo Levi-féle függvényterekről beszéltek. Azonban Beppo Levi számára idős korában kissé ellenszenvessé vált a „modern” matematika, és nem szívesen látta a nevét ilyen dolgokkal összefüggésben. Ezért a térnek új nevet kellett adni, a választás Szoboljev nevére esett, aki nem ellenkezett, így lett ma széles körben elfogadott a Szoboljev-tér elnevezés.

Természetesen nemcsak az elnevezés, hanem a jelölés is sokáig változott, de Szoboljev 1950-es monográfiájában (lásd [180]) már szerepel a W_p^l jelölés. A Szoboljev-terek kialakulásának történetét bővebben lásd a [129] írásban.

15.7. Feladatok

15.1. Az

$$u(x)^2 = \int_{-\infty}^{x} 2uu'\,dt$$

összefüggésből kiindulva mutassuk meg, hogy

$$\|u\|_\infty \le \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

minden $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$-re!

15.2. Jelöljük $C_0(\mathbb{R})$-rel a $\lim_{\pm\infty} u = 0$ tulajdonságú folytonos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Banach-terét az $\|u\|_\infty$ normával!

Mutassuk meg, hogy $H^1(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$. Pontosabban, minden $u \in H^1(\mathbb{R})$ ekvivalenciaosztály tartalmaz pontosan egy $C_0(\mathbb{R})$-beli $\tilde{u}$ elemet, és

$$\|\tilde{u}\|_\infty \le \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}\,.$$

A továbbiakban szisztematikusan a folytonos reprezentánst tekintjük, és $u \in H^1(\mathbb{R})$ esetén $\tilde{u}$ helyett egyszerűen u-t írunk.

15.3. Igazoljuk a Newton–Leibniz-formulát minden $u \in H^1(\mathbb{R})$-re:

$$\int_a^b u'\,dt = u(b) - u(a), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

15.4. Igazoljuk, hogy ha $u \in H^1(\mathbb{R})$ és $u' = 0$ m.m., akkor $u = 0$.

15.5. Igazoljuk, hogy ha $u, v \in H^1(\mathbb{R})$, akkor $uv \in H^1(\mathbb{R})$ és

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

15.6. Igazoljuk, hogy a $H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ beágyazás nem kompakt!

15.7. Mutassuk meg, hogy az abs *abszolútérték-függvény* leszűkítése $(-1,\,1)$-re $H^1(-1,\,1)$-be tartozik!

A következő feladatokban legyen $-\infty < a < b < \infty$.

15.8. Az

$$u(x)^2 - u(y)^2 = \int_y^x 2uu'\,dt, \quad a < y < x < b$$

összefüggésből kiindulva mutassuk meg, hogy

$$\|u\|^2_{L^\infty(a,b)} \le \|u\|^2_{H^1(a,b)} + \frac{1}{b-a}\,\|u\|^2_{L^2(a,b)}$$

minden $u \in C^\infty([a,b])$-re!

15.9. Mutassuk meg, hogy $H^1(a,b) \subset C([a,b])$ és a beágyazás folytonos. Pontosabban, minden $u \in H^1(a,b)$ ekvivalenciaosztály tartalmaz pontosan egy $C([a,b])$-beli $\tilde{u}$ elemet. Vezessük le ebből, hogy a sgn *előjelfüggvény* leszűkítése $(-1,\,1)$-re nem tartozik $H^1(-1,\,1)$-be!

Ezentúl minden $u \in H^1(a,b)$-re $\tilde{u}$ helyett egyszerűen u-t írunk.

15.10. Mutassuk meg, hogy minden $u \in H^1(a,b)$ függvény Hölder-folytonos az $1/2$ együtthatóval; pontosabban

$$|u(x) - u(y)| \le \|u'\|_{L^2(a,b)} \cdot |x-y|^{1/2}$$

minden $x, y \in [a,b]$-re.

15.11. Mutassuk meg, hogy ha $1/2 < p < 1$, akkor az $u(x) := x^p$ függvény $H^1(0{,}1)$-beli, és nem Lipschitz-folytonos, sőt nem is Hölder-folytonos semmilyen $\alpha > p$ kitevővel.

15.12. Bizonyítsuk be, hogyha $u \in C^1([a,b])$, akkor $u \in H^1(a,b)$, és a Szoboljev-értelemben vett deriváltja megegyezik a klasszikus deriválttal.

A következő feladatból következik, hogy általánosabban, ha $u \in C([a,b])$ szakaszonként folytonosan differenciálható, akkor $u \in H^1(a,b)$.

15.13. Legyen $u \in C([a,b])$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, és tegyük fel, hogy az $u_i := u|_{[x_{i-1},x_i]}$ függvények $H^1([x_{i-1},x_i])$-hez tartoznak alkalmas $u_i' \in L^2(x_{i-1},x_i)$ függvényekkel minden $i = 1,\dots,n$-re. Mutassuk meg, hogy $u \in H^1(a,b)$, és $u' = u_i'$ m.m. $[x_{i-1},x_i]$-ben, $i = 1,\dots,n$.

15.14. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $c < a < b < d$ számok esetén a

$$(Pu)(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < c; \\ u(a)(x-c), & \text{ha } c < x < a; \\ u(x), & \text{ha } a < x < b; \\ u(b)(d-x), & \text{ha } b < x < d; \\ 0, & \text{ha } d < x \end{cases}$$

képlet folytonos lineáris $P : H^1(a,b) \to H^1(\mathbb{R})$ kiterjesztési operátort definiál minden $\varepsilon > 0$-ra.

15.15. Ha $a < c < b$, akkor a

$$\langle \delta_c, v \rangle := v(c)$$

képlettel értelmezett *Dirac-delta funkcionálra*

$$\delta_c \in H^{-1}(a,b) \left(= \big(H_0^1(a,b)\big)' \right),$$

de $\delta_c \notin L^2(a,b) \big(= (L_2(a,b))'\big)$.

15.16. Legyen $0 \in \Omega$ és $\Omega^* = \Omega \setminus \{0\}$. Tegyük fel, hogy egy $u \in C^1(\Omega^*)$ függvény eleget tesz a következő feltételeknek:

- $\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \, dx < \infty$ (a klasszikus deriváltakkal),
- $\lim_{x \to 0} |x|^{N-1} u(x) = 0$.

Akkor $u \in H^1(\Omega)$ és $g_j = \partial_j u$ m.m., ahol $\partial_j u$ a klasszikus deriváltakat jelöli.

15.17. Mutassuk meg, hogy

$$\nabla |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x}{|x|}$$

minden $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén!

A következő három feladatban legyen $\Omega = B_R(0)$ egy $0 < R < 1$ sugarú gömb $\mathbb{R}^N$-ben, $N \geq 2$.

15.18. Legyen $N \geq 3$, $1 - \frac{N}{2} < \alpha < 0$, $u(x) = |x|^\alpha$ és $v(x) = \sin u(x)$. Mutassuk meg, hogy

- $u \in H^1(\Omega)$, de $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$;
- $v \in H^1(\Omega)$ és $v \in L^\infty(\Omega)$, de $v \notin C(\Omega)$.

15.19. Legyen $N \geq 3$, $u(x) = \ln\bigl|\ln|x|\bigr|$ és $v(x) = \sin u(x)$. Mutassuk meg ugyanazokat a tulajdonságokat, mint az előző feladatban!

15.20. Legyen $N = 2$, $0 < \beta < 1/2$, $u(x) = \bigl|\ln|x|\bigr|^\beta$ és $v(x) = \sin u(x)$. Mutassuk meg ugyanazokat a tulajdonságokat, mint az előző két feladatban.

15.21. Igazoljuk a Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség alábbi változatát: ha Ω összefüggő, akkor van olyan $c(\Omega) > 0$ konstans, hogy

$$c(\Omega) \int_\Omega u^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \left| \int_\Gamma u \, dx \right|^2$$

minden $u \in H^1(\Omega)$-ra.

15.22. Igazoljuk a Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség alábbi, pontosabb formáját: ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ és $C = [0, a]^N$, akkor

$$\int_C |u|^2 \, dx \leq \frac{a^2}{4\pi^2} \int_C |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{a^N} \left| \int_C u \, dx \right|^2 .$$

16. fejezet

Elliptikus problémák

A természet jót nevet az integrálás nehézségein.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

A fejezet tartalma. Értelmezzük elliptikus peremérték-feladatok gyenge megoldásainak fogalmát Dirichlet- és Neumann-féle peremfeltételek mellett, majd megvizsgáljuk a megoldások létezését és egyértelműségét.

Az eddigiekhez hasonlóan ebben a fejezetben is feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ nem üres, *korlátos,* C^∞*-beli* nyílt halmaz, és a határát Γ-val jelöljük.

16.1. Dirichlet-feladat I

Tekintsük a következő problémát:[1]

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u = 0 & \Gamma\text{-n}. \end{cases} \tag{16.1}$$

Valamilyen „észszerű" függvényosztályhoz tartozó, adott $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényhez keressük a feladatnak valamilyen másik „észszerű" függvényosztályhoz tartozó $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ megoldását.

Ehhez a feladathoz jutunk például az elektrosztatikában, ha adva van egy elektromosan vezető felülettel határolt Ω tartományban valamilyen f sűrűségű töltéseloszlás, és meg kívánjuk határozni a töltések által indukált elektromos tér u potenciálját.

Az előző fejezet alapján természetesnek tűnik a megoldást $H^2(\Omega)$-ban keresni:

[1] Euler 1752, Laplace 1782 és 1787, Poisson 1813.

16.1. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ esetén a (16.1) feladat *erős megoldásán* olyan $u \in H^2(\Omega)$ függvényt értünk, amelyik eleget tesz a (16.1) probléma első egyenletének Ω-ban, a másodiknak pedig a nyomtétel értelmében Γ-n.

A fizikai alkalmazásokban azonban f nem mindig $L^2(\Omega)$-beli. Abból a célból, hogy alkalmasabb megoldásfogalomhoz jussunk, szorozzuk meg a (16.1) probléma első egyenletét egy tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$-beli függvénnyel, és integráljunk parciálisan Ω-ban. Felhasználva, hogy $v = 0$ Γ-n, a 15.34. Állítás alapján az

$$\int_\Omega fv\ dx = \int_\Omega (-\Delta u)v\ dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx - \int_\Gamma (\partial_\nu u)v\ d\Gamma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx$$

variációs egyenletet kapjuk, amelyet az

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx = f(v) \quad \text{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\text{-ra} \tag{16.2}$$

alakban is írhatunk. Az utolsó egyenlőségnek $f \in L^2(\Omega)$ helyett $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén, és $u \in H^2(\Omega)$ helyett $u \in H^1(\Omega)$ esetén is értelme van. Figyelembe véve a peremfeltételt is, célszerűnek látszik tehát a megoldás következő, általánosabb definíciója:

16.2. Definíció. Adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén a (16.1) feladat *gyenge megoldásán*[2] olyan $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz a (16.2) összefüggésnek.

A következő eredmény szerint ez a definíció elfogadható. Vezessük be az elegancia kedvéért $H_0^1(\Omega)$-ban az ekvivalens

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

euklideszi normát.[3]

16.3. Tétel. *Tetszőlegesen adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén a* (16.1) *feladatnak pontosan egy u gyenge megoldása van.*

Továbbá az $f \mapsto u$ leképezés izometrikus izomorfizmus $H^{-1}(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ között.

Bizonyítás. Elegendő alkalmaznunk a Riesz–Fréchet-tételt, hiszen a (16.2) egyenlet pontosan azt fejezi ki, hogy $u \in H_0^1(\Omega)$ reprezentálja $f \in H^{-1}(\Omega)$-t. □

[2] Courant–Friedrichs–Lewy 1928, Leray 1934, Sobolev 1937, Schwartz 1952. Emeljük ki, hogy minden erős megoldás gyenge megoldás is.

[3] Lásd az 15.30. Állítást.

16.4. *Megjegyzések.*

- A tétel alapján a $\Delta : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ Laplace-operátor $H_0^1(\Omega)$-ra vett leszűkítése kiterjeszthető egy $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ izometrikus izomorfizmussá. Az utóbbit szintén Δ-val szokás jelölni.

- Igazolható, hogy u pontosan akkor erős megoldás, ha $f \in L^2(\Omega)$. A bizonyítás könnyű az egydimenziós esetben: lényegében $H^2(\Omega)$ definíciójából következik (lásd a 16.1. Feladatot), magasabb dimenzióban viszont nehezebb (és felhasználja Ω regularitását).[4] Érvényes alkalmas c konstanssal az
$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$$
becslés is. A bizonyítás megtalálható például a [13] könyv 9.6 fejezetében. A 16.8. Feladatban rövid szemléletes bizonyítást ismertetünk konvex síktartományokra.

16.2. Dirichlet-feladat II

Tekintsük most az általánosabb

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u = g & \Gamma\text{-n} \end{cases} \tag{16.3}$$

feladatot, ahol $f : \Omega \to \mathbb{R}$ és $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ adott függvények.

16.5. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ és $g \in L^2(\Gamma)$ esetén a (16.3) feladat *erős megoldásán* olyan $u \in H^2(\Omega)$-t értünk, amelyik eleget tesz a (16.3) probléma első egyenletének $L^2(\Omega)$-ban, a másodiknak pedig a nyomtétel értelmében $L^2(\Gamma)$-ban.

Keressünk ismét egy gyengébb megoldásfogalmat. Ha u erős megoldás, akkor a (16.3) probléma első egyenletét egy tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$-beli függvénnyel megszorozva, majd parciálisan integrálva ugyanahhoz az

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = f(v) \quad \text{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\text{-ra} \tag{16.4}$$

variációs egyenlethez jutunk, mint az előző szakaszban.

16.6. Definíció. Adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén a (16.3) feladat *gyenge megoldásán* olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz a (16.4) egyenletnek, és amelyre $\gamma u = g$ $L^2(\Gamma)$-ban.

[4] Schwarz 1870, Neumann 1870, Poincaré 1890, Hilbert 1899, Lebesgue 1912.

Igazolható, hogy a $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ nyomleképezés *nem* szuperjektív, ezért vezessük be a képterére a következő jelölést:[5]

$$H^{1/2}(\Gamma) = \left\{\gamma u \ : \ u \in H^1(\Omega)\right\}.$$

Igazolható, hogy a

$$\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf\left\{\|u\|_{H^1(\Omega)} \ : \ u \in H^1(\Omega) \quad \text{és} \quad \gamma u = g\right\}$$

faktornormára nézve ez egy normált tér (sőt Hilbert-tér is).

16.7. Tétel. *Tetszőlegesen adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ és $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ függvényekre a* (16.3) *problémának pontosan egy u gyenge megoldása van.*

Továbbá az $(f, g) \mapsto u$ képlettel definiált $H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ lineáris leképezés folytonos.

A tétel második része szerint a megoldás folytonosan függ az adatoktól; ezt Hadamard nyomán úgy szokás kifejezni, hogy a feladat *korrekt kitűzésű.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy olyan $G \in H^1(\Omega)$ függvényt, amelyre $\gamma G = g$. Bevezetve a $z := u - G$ új ismeretlen függvényt, a feladatunk a következő alakot ölti: olyan $z \in H_0^1(\Omega)$ függvényt keresünk, hogy

$$\int_\Omega \nabla z \cdot \nabla v \ dx = f(v) - \int_\Omega \nabla G \cdot \nabla v \ dx$$

minden $v \in H_0^1(\Omega)$-ra.

Minthogy a

$$\varphi(v) := f(v) - \int_\Omega \nabla G \cdot \nabla v \ dx$$

képlet folytonos lineáris funkcionált definiál $H_0^1(\Omega)$-n, a megoldás létezése és egyértelműsége a korábbiakhoz hasonlóan adódik a Riesz–Fréchet-tétel alkalmazásával.

A bizonyítás a következő becslést is szolgáltatja:

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(\Omega)} &\le \|z\|_{H^1(\Omega)} + \|G\|_{H^1(\Omega)} \\ &\le c\big(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla G\|_{L^2(\Omega)}\big) + \|G\|_{H^1(\Omega)} \\ &\le (c+1) \cdot \big(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|G\|_{H^1(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

Az utolsó kifejezés infimumát képezve az összes olyan $G \in H^1(\Omega)$ függvényre, amelyre $\gamma G = g$, az Hadamard-tulajdonságot igazoló

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le (c+1) \cdot \big(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\big)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. □

[5] Az 1/2 kitevő használatát a Szoboljev-terek alternatív, a Fourier-transzformálton alapuló definíciója magyarázza meg: lásd a [112], [175] könyveket.

16.8. *Megjegyzés.* Felhasználva Ω regularitását az is igazolható, hogy u pontosan akkor *erős* megoldás, ha

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{és} \quad g \in H^{3/2}(\Gamma) := \left\{ \gamma u \ : \ u \in H^2(\Omega) \right\}.$$

16.3. Neumann-feladat I

Tekintsük most az alábbi problémát:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u = h & \Gamma\text{-n}. \end{cases} \tag{16.5}$$

Az u tagot bizonyos technikai nehézségek elkerülésére szerepeltetjük az első egyenletben: az u nélküli egyenletet a következő szakaszban tanulmányozzuk majd. (Az u tag helyett cu tagot is vehetnénk $c > 0$ állandóval.)

16.9. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ és $h \in L^2(\Gamma)$ esetén a (16.5) feladat *erős megoldásán* olyan $u \in H^2(\Omega)$-t értünk, amelyik eleget tesz a (16.1) probléma első egyenletének Ω-ban, a másodiknak pedig Γ-n.

Ha u erős megoldás, akkor a (16.5) probléma első egyenletét egy tetszőleges $v \in H^1(\Omega)$-beli függvénnyel megszorozva, majd parciálisan integrálva a 15.34. Állítás alapján az

$$\begin{aligned} \int_\Omega fv \, dx &= \int_\Omega [(-\Delta u)v + uv] \, dx \\ &= \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv] \, dx - \int_\Gamma (\partial_\nu u)v \, d\Gamma \\ &= \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv] \, dx - \int_\Gamma hv \, d\Gamma \end{aligned}$$

egyenlőségeket kapjuk, vagyis

$$\int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv] \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_\Gamma hv \, d\Gamma \quad \text{minden} \quad v \in H^1(\Omega)\text{-ra}. \tag{16.6}$$

Ez a szokásos módon a következő definícióhoz vezet:

16.10. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ és $h \in L^2(\Gamma)$ esetén a (16.5) feladat *gyenge megoldásán* olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz a (16.6) összefüggésnek.

16.11. *Megjegyzések.*

- A $\partial_\nu u = h$ peremfeltétel nem szerepel explicit módon a gyenge megoldás definíciójában. Valójában ott van elrejtve, hogy a Dirichlet-feladatoktól eltérően a $H_0^1(\Omega)$-beliek helyett tetszőleges $H^1(\Omega)$-beli tesztfüggvényeket szerepeltetünk a variációs egyenletben.

- Vizsgálhatnánk még általánosabb megoldásokat is tetszőleges $f \in H^1(\Omega)'$ és $h \in \big(H^{1/2}(\Gamma)\big)'$ adatokra, a (16.6) egyenlet jobb oldala helyére $f(v) + h(\gamma v)$-t írva.

16.12. Tétel. *Tetszőleges $f \in L^2(\Omega)$ és $h \in L^2(\Gamma)$ esetén a (16.5) problémának pontosan egy u gyenge megoldása van.*

Az $(f,h) \mapsto u$ képlettel definiált $L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ lineáris leképezés folytonos.

Bizonyítás. Jelöljük a (16.6) egyenlet jobb oldalát $\varphi(v)$-vel. Akkor $\varphi \in H^1(\Omega)'$, hiszen

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &\le \left|\int_\Omega fv\,dx\right| + \left|\int_\Gamma hv\,d\Gamma\right| \\ &\le \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Gamma)} \cdot \|v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\le \big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\| \cdot \|h\|_{L^2(\Gamma)}\big) \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

minden $v \in H^1(\Omega)$-ra. A Riesz–Fréchet-tétel szerint létezik tehát pontosan egy gyenge megoldás.

A (16.6) egyenletben $v = u$-t választva az

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2\,dx = |\varphi(u)| \\ &\le \big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\| \cdot \|h\|_{L^2(\Gamma)}\big) \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget, innen pedig a keresett

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\| \cdot \|h\|_{L^2(\Gamma)}$$

becslést kapjuk. □

16.13. *Megjegyzés.* Bizonyítható, hogy u pontosan akkor erős megoldás, ha $f \in L^2(\Omega)$ és $h \in H^{1/2}(\Gamma)$.

16.4. Neumann-feladat II

Vizsgáljuk most a következő feladatot:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u = h & \Gamma\text{-n}. \end{cases} \tag{16.7}$$

A szokásos módon kapjuk a következő definíciót:

16.14. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ és $h \in L^2(\Gamma)$ esetén a (16.7) feladat *gyenge megoldásán* olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz a következő feltételnek:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_\Gamma hv \, d\Gamma \quad \text{minden} \quad v \in H^1(\Omega)\text{-ra}. \tag{16.8}$$

Két új nehézség is felmerül. Először is, ha u megoldás, akkor $u + c$ is megoldás minden c konstansra, tehát a megoldás sosem egyértelmű. Másrészt, ha u megoldás, akkor a (16.8) összefüggésből a $v = 1$ választással az adott f, h függvényekre az

$$\int_\Omega f \, dx + \int_\Gamma h \, d\Gamma = 0 \tag{16.9}$$

kompatibilitási feltétel adódik (maga a megoldás itt nem szerepel). Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a feladatunknak nincs megoldása.

A következő eredmény megvilágítja a helyzetet:

16.15. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω összefüggő,*[6] *és legyen $f \in L^2(\Omega)$, $h \in$ $\in L^2(\Gamma)$.*

(a) Ha a (16.9) *egyenlőség nem teljesül, akkor a* (16.7) *feladatnak nincs megoldása.*

(b) Ha a (16.9) *egyenlőség teljesül, akkor a* (16.7) *feladatnak végtelen sok megoldása van, amelyek egy tetszőleges additív konstansban különböznek egymástól.*

Bizonyítás. Az (a) pontot már igazoltuk. Tegyük fel ezentúl, hogy (16.9) teljesül, és vezessük be $H^1(\Omega)$-ban a

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ : \ \int_\Omega v \, dx = 0 \right\}$$

[6] E feltevés hiányában Ω minden összefüggő komponenséhez tartozik egy kompatibilitási feltétel. A részleteket az olvasóra bízzuk.

lineáris alteret. Mint a folytonos lineáris $v \mapsto \int_\Omega v\ dx$ funkcionál magja, V zárt, és így maga is Hilbert-tér a $H^1(\Omega)$-ból örökölt skaláris szorzatra. Továbbá a Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség (15.18. Állítás) alapján az

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx$$

képlet az eredetivel ekvivalens skaláris szorzatot értelmez V-ben. A továbbiakban tekintsük ezt a skaláris szorzatot.

A Riesz–Fréchet-tételt alkalmazva létezik pontosan egy olyan $u_0 \in V$ függvény, hogy

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v\ dx = \int_\Omega fv\ dx + \int_\Gamma hv\ d\Gamma \quad \text{minden} \quad v \in V\text{-re.} \tag{16.10}$$

A (16.9) kompatibilitási feltétel mutatja, hogy (16.10) minden v konstans függvényre is teljesül. Minthogy minden $v \in H^1(\Omega)$ függvény egyértelműen felírható $v = v_0 + c$ alakban,[7] ahol $v_0 \in V$ és $c \in \mathbb{R}$, innen következik, hogy u_0 gyenge megoldás.

Korábban már láttuk, hogy ekkor az $u_0 + c$, $c \in \mathbb{R}$ függvények is mindig gyenge megoldások.

Legyen végül u egy tetszőleges gyenge megoldás, és írjuk u-t az $u_1 + c$ alakba, ahol $u_1 \in V$ és $c \in \mathbb{R}$. Akkor u_1 is gyenge megoldás, és így eleget tesz a (16.10) összefüggésnek. Az u_0 függvény egyértelműsége miatt innen $u_1 = u_0$, tehát u csak egy additív konstansban különbözik u_0-tól. □

16.5. Vegyes peremfeltételű feladatok

Általánosítjuk az előző szakaszok eredményeit. Rögzítsük Γ-nak egy (Γ felületi mértékének értelmében) mérhető Γ_0 részhalmazát, egy nemnegatív, korlátos, mérhető a függvényt a $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \Gamma_0$ halmazon, és tekintsük a következő rendszert:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban,} \\ u = g & \Gamma_0\text{-on,} \\ \partial_\nu u + au = h & \Gamma_1\text{-en.} \end{cases} \tag{16.11}$$

16.16. *Megjegyzések.*

- A Γ_1-en vett peremfeltételt gyakran *Robin-féle* peremfeltételnek nevezik. Az $a = 0$ esetben ez a Neumann-féle peremfeltételre redukálódik.

[7] Egyszerű számolással látható, hogy $v - c \in V \iff c = |\Omega|^{-1} \int v\ dx$, ahol $|\Omega|$ az Ω halmaz térfogatát jelöli.

- A rendszer az előző szakaszokban tárgyalt Dirichlet, illetve Neumann problémákra redukálódik, ha $\Gamma_0 = \Gamma$, illetve, ha $\Gamma_0 = \emptyset$ és $a = 0$.

Bevezetve a

$$V := \big\{ v \in H^1(\Omega) \ : \ v = 0 \quad \text{m.m.} \quad \Gamma_0\text{-on} \big\}$$

zárt lineáris alteret, a szokásos eljárás a következőkhöz vezet:

16.17. Definíció.

- A (16.11) rendszer erős megoldásán olyan $u \in H^2(\Omega)$ függvényt értünk, amelyik eleget tesz az első egyenletnek $L^2(\Omega)$-ban, a másodiknak $L^2(\Gamma_0)$-ban, a harmadiknak pedig $L^2(\Gamma_1)$-ben.
- A (16.11) rendszer gyenge megoldásán olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt értünk, amelyre $u = g$ teljesül $L^2(\Gamma_0)$-ban, és

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx + \int_{\Gamma_1} auv \ d\Gamma = \int_\Omega fv \ dx + \int_{\Gamma_1} hv \ d\Gamma \tag{16.12}$$

  minden $v \in V$-re.

16.18. *Megjegyzés.* Minden erős megoldás gyenge megoldás is. Ha ugyanis u erős megoldás, akkor minden $v \in V$-re fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned} \int_\Omega fv \ dx &= \int_\Omega -(\Delta u)v \ dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx - \int_\Gamma (\partial_\nu u)v \ d\Gamma \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx - \int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u)v \ d\Gamma \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx + \int_{\Gamma_1} (au - h)v \ d\Gamma. \end{aligned}$$

A következő tétel kiegészíti és általánosítja a fejezet több korábbi tételét:

16.19. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω összefüggő, és hogy a következő feltételek közül legalább az egyik teljesül:*[8]

$$\Gamma_0 \text{ pozitív mértékű;} \tag{16.13}$$

$$a > 0 \text{ az } \Gamma \text{ határ egy pozitív mértékű részhalmazán.} \tag{16.14}$$

Akkor bármely $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ és $h \in L^2(\Gamma_1)$ esetén a (16.11) rendszernek létezik egy egyértelmű gyenge megoldása.

A $g \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ jelölés azt jelenti, hogy g megegyezik Γ_0-on valamely $G \in H^1(\Omega)$ függvény nyomával.

A bizonyításhoz általánosítjuk a Poincaré-egyenlőtlenséget:[9]

16.20. Állítás. *A tétel feltételei mellett létezik egy olyan $c(\Omega)$ konstans, hogy*

$$\int_\Omega u^2 \, dx \le c(\Omega)\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} au^2 \, d\Gamma\Big)$$

minden $u \in V$-re.

Következésképpen az

$$(u,v)_V := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} auv \, d\Gamma$$

formula skaláris szorzatot értelmez V-n, és ez ekvivalens a $H^1(\Omega)$-beli skaláris szorzat V-re vett leszűkítésével.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy olyan $(u_n) \subset V$ sorozat, hogy $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ minden n-re, és

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} au_n^2 \, d\Gamma \to 0.$$

Akkor $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \to 1$. Speciálisan (u_n) korlátos $H^1(\Omega)$-ban, és így Rellich tétele alapján létezik egy $L^2(\Omega)$-ban konvergáló: $u_{n_k} \to u$ részsorozat. Minthogy $\nabla u_{n_k} \to 0$ is teljesül $L^2(\Omega)$-ban, (u_{n_k}) Cauchy-sorozat $H^1(\Omega)$-ban, és így konvergál $H^1(\Omega)$-ben egy alkalmas v függvényhez. Mivel V zárt $H^1(\Omega)$-ban, $v \in V$. Ekkor $u_{n_k} \to v$ $L^2(\Omega)$-ban is, úgyhogy $v = u$ a limit egyértelműsége miatt. A fentiek alapján

- $u \in V$;
- $\nabla u = 0$ m.m. Ω-ban;
- $u = 0$ m.m. Γ_0-on;
- $au^2 = 0$ m.m. Γ_1-en;
- $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

[8] Ha egyik feltétel sem teljesül, akkor a 16.15. Tételben már tárgyalt esetre jutunk vissza.

[9] A $\Gamma_0 = \Gamma$ esetben ez az 15.30. Állításra redukálódik.

Alkalmazva a 15.9. Következményt[10] és felhasználva Ω összefüggőségét, az első két tulajdonságból következik, hogy u konstans függvény. A (16.13) vagy (16.14) feltevések alapján a harmadik és negyedik tulajdonságból következik, hogy ez a konstans nulla, tehát $u = 0$. Ez azonban ellentmond az utolsó tulajdonságnak.

Az állítás második része következik a 15.21. Nyomtétel alapján fennálló

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx + \int_{\Gamma_1} au^2 \; d\Gamma \\ \leq \int_\Omega \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) \; dx + \int_{\Gamma_1} au^2 \; d\Gamma \leq (1 + c_1(\Omega)) \, \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

és

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \big(1 + c(\Omega)\big)\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx + \int_{\Gamma_1} au^2 \; d\Gamma\Big)$$

egyenlőtlenségekből, illetve az ezekkel ekvivalens

$$\frac{1}{\sqrt{1 + c(\Omega)}} \, \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_V \leq \sqrt{1 + c_1(\Omega)} \, \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{minden} \quad u \in V\text{-re}$$

relációkból. Ezek azt is mutatják, hogy a $\|u\|_V$ félnorma valójában norma, és ekvivalens V-n a $H^1(\Omega)$ tér normájával. □

A 16.19. Tétel bizonyítása. Rögzítsünk egy $G \in H^1(\Omega)$ függvényt, amelynek Γ_0-ra vett nyoma g-vel egyenlő. Bevezetve az $u - G$ új ismeretlen függvényt, a problémát visszavezethetjük a $g = 0$ esetre.

Ekkor olyan $u \in V$ függvényt kell találnunk, amely minden $v \in V$-re eleget tesz a (16.12) azonosságnak. Az azonosság bal oldala az új V-beli skaláris szorzat, a jobb oldal pedig folytonos lineáris funkcionált definiál V-n. A tétel innen a Riesz–Fréchet-tétel szokásos alkalmazásával adódik. □

16.6. Egy negyedrendű probléma

A következő probléma az $N = 2$ esetben a rögzített határú rezgő lemezek egyensúlyi helyzeteit modellizálja. Adott $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény mellett olyan $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ függvényt keresünk, amelyik eleget tesz a következő feltételeknek:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \Gamma\text{-n}. \end{cases} \tag{16.15}$$

A (16.15) probléma *erős megoldásán* olyan $u \in H^4(\Omega) \cap H^2_0(\Omega)$ függvényt értünk, amelyre $\Delta^2 u = f$ $L^2(\Omega)$-ban.

[10] Ehhez először kiterjesztjük u-t egy $H^1(\mathbb{R}^N)$-beli fügvénnyé.

Ha u erős megoldás, akkor a Green-formula alkalmazásával az

$$\begin{aligned}\int_\Omega fv\ dx &= \int_\Omega (\Delta^2 u)v\ dx \\ &= \int_\Omega \Delta u \Delta v\ dx + \int_\Gamma (\partial_\nu \Delta u)v - (\Delta u)\partial_\nu v\ d\Gamma \\ &= \int_\Omega \Delta u \Delta v\ dx\end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk minden $v \in H_0^2(\Omega)$-re, mert a határintegrálok a v-re tett feltevések miatt eltűnnek.

Alkalmazva a 15.41. Állítást, és felhasználva a

$$H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset H^{-2}(\Omega)$$

relációkat, a bal oldali integrál az

$$f(v) := \langle f, v \rangle_{H^{-2}(\Omega), H_0^2(\Omega)}$$

alakban is írható, ahol f-et a $H^{-2}(\Omega)$ duális tér elemének tekintjük. Ez a következő definícióhoz vezet:

16.21. Definíció. Adott $f \in H^{-2}(\Omega)$ esetén a (16.11) probléma *gyenge megoldásán* olyan $u \in H_0^2(\Omega)$ függvényt értünk, amelyre

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v\ dx = f(v)$$

minden $v \in H_0^2(\Omega)$ esetén.

16.22. Tétel. *Tetszőlegesen adott $f \in H^{-2}(\Omega)$ esetén a* (16.11) *problémának létezik, méghozzá egyetlen gyenge megoldása.*

Bizonyítás. A 15.30. Állításhoz hasonlóan, a

$$(u, v)_{H_0^2(\Omega)} := \int_\Omega \Delta u \Delta v\ dx$$

formula skaláris szorzatot értelmez $H_0^2(\Omega)$-ban, és a hozzá tartozó norma ekvivalens $H^2(\Omega)$ normájának a $H_0^2(\Omega)$ térre vett leszűkítésével. Valóban, a 16.4. Megjegyzésbeli mélyebb eredmény alapján a fenti formula ekvivalens normát szolgáltat a bővebb $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ térben is. (Lásd a 16.8. Feladatot is.)

Az új skaláris szorzatot használva a tétel azt mondja ki, hogy minden $f \in H^{-2}(\Omega)$ funkcionál reprezentálható egy egyértelműen meghatározott $u \in$ $\in H_0^2(\Omega)$ függvénnyel. Ez a Riesz–Fréchet-tétel speciális esete. □

16.7. A Laplace-operátor spektráltétele

Homogén peremfeltételek esetén a Laplace-operátor a szimmetrikus mátrixokhoz hasonlóan diagonalizálható.[11] Ez lehetővé fogja tenni, hogy a következő fejezetben tárgyalásra kerülő végtelen dimenziós evolúciós problémákat egydimenziós közönséges differenciálegyenletek sorozatára redukáljuk.

Tekintsük először a Dirichlet-féle peremfeltételt. Tekintsük az $L^2(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ terek szokásos skaláris szorzatait:

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv\ dx \quad \text{és} \quad (u,v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx.$$

16.23. Tétel. *Létezik olyan $L^2(\Omega)$-beli $w_1, w_2, \dots$ ortonormált bázis és olyan, végtelenhez tartó $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ pozitív valós számsorozat, hogy minden egyes k-ra $w_k \in H_0^1(\Omega)$ és*

$$\int_\Omega \nabla w_k \cdot \nabla v\ dx = \lambda_k \int_\Omega w_k v\ dx \quad \textit{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\textit{-ra.} \tag{16.16}$$

A $\lambda_k^{-1/2} w_k$ függvények ortonormált bázist alkotnak $H_0^1(\Omega)$-ban, a $\lambda_k^{1/2} w_k$ függvények pedig ortonormált bázist alkotnak $H^{-1}(\Omega)$-ban.

Nemsokára egy ennél általánosabb tételt fogunk bebizonyítani (lásd a 16.27. Tételt).

16.24. *Megjegyzések.*

- Figyeljük meg, hogy w_k a (16.1) Dirichlet-feladat gyenge megoldása $f = \lambda_k w_k$-ra:
$$\begin{cases} -\Delta w_k = \lambda_k w_k & \Omega\text{-ban,} \\ w_k = 0 & \Gamma\text{-n.} \end{cases} \tag{16.17}$$
Azt mondjuk, hogy a λ_k számok $-\Delta$ (Dirichlet-peremfeltételhez tartozó) *sajátértékei*, és a w_k függvények a megfelelő *sajátfüggvények*.

- Megmutatható, hogy $w_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$. A Green-formula alkalmazásával ekkor (16.16)-ból levezethető, hogy
$$\int_\Omega (\Delta w_k + \lambda_k w_k) v\ dx = 0 \quad \text{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\text{-ra,}$$
és innen $\Delta w_k + \lambda_k w_k = 0$ m.m. Minthogy a bal oldal folytonos, az egyenlőség mindenütt teljesül: w_k klasszikus értelemben is megoldása (16.17)-nek.

[11] Schwarz 1885, Picard 1893, Poincaré 1894.

- A legegyszerűbb, egydimenziós $\Omega = (0, \pi)$ esetben $w_k(x) = \sqrt{2/\pi} \sin kx$ és $\lambda_k = k^2$.[12]

A 16.23. Tétel segítségével vizsgálhatjuk a (16.1) feladatnál általánosabb

$$\begin{cases} -\Delta u - \alpha u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u = 0 \end{cases} \tag{16.18}$$

Dirichlet-feladatot, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ állandó.

A 16.2. Definíciónak megfelelően a (16.18) feladat gyenge megoldását így értelmezzük:

16.25. Definíció. Adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén a (16.18) feladat gyenge megoldásán olyan $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz az

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \alpha \int_\Omega uv dx = f(v), \qquad v \in H_0^1(\Omega) \tag{16.19}$$

összefüggésnek.

A 16.23. Tétel szerint $L^2(\Omega)$-ban létezik olyan $w_1, w_2, \dots$ ortonormált bázis és $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ pozitív sajátértékek, hogy minden k-ra $w_k \in H_0^1(\Omega)$, és

$$\int_\Omega \nabla w_k \nabla v dx = \lambda_k \int_\Omega w_k v dx, \qquad \text{minden } v \in H_0^1(\Omega)\text{-ra}, \tag{16.20}$$

azaz w_k-k gyenge értelemben sajátfüggvények. Fejtsük sorba a (16.18) feladatban keresett $u \in H_0^1(\Omega)$ megoldást a $w_1, w_2, \dots$ ortonormált bázis szerint:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k. \tag{16.21}$$

Mivel $w_1, w_2, \dots$ teljes ortonormált bázis a $H_0^1(\Omega)$ térben, ezért az $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény akkor és csak akkor tesz eleget a (16.19) összefüggésnek, ha

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w_k dx - \alpha \int_\Omega u w_k dx = f(w_k), \qquad k = 1,2,\dots$$

(a bázisfüggvények véges lineáris kombinációi sűrűek $H_0^1(\Omega)$-ban). Alkalmazva (16.20)-at $v = u$-val, ez átírható a következő alakba:

$$(\lambda_k - \alpha) \int_\Omega u w_k dx = f(w_k), \qquad k = 1,2,\dots \tag{16.22}$$

[12] Az ortonormált sajátfüggvények előjeltől eltekintve egyértelműek.

Ha $\alpha \neq \lambda_k$ az összes k indexre, akkor ebből következik, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha

$$c_k = \int_\Omega u w_k dx = \frac{f(u_k)}{\lambda_k - \alpha}, \qquad k = 1,2,\dots \tag{16.23}$$

vagyis ekkor a (16.19) feladatnak egyetlen megoldása létezik, és

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k, \tag{16.24}$$

ahol a c_k együtthatókat a (16.23) formula határozza meg.

Ha van olyan k, hogy $\lambda_k = \alpha$, akkor a megoldás akkor és csak akkor létezik, ha

$$f(u_k) = \lambda_k \qquad \lambda_k = \alpha \text{ esetén.} \tag{16.25}$$

Ebben az esetben is a (16.24) képlet adja a megoldásokat, de c_k tetszőleges állandó minden olyan k indexre, amelyre $\lambda_k = \alpha$.

Kaptuk tehát a következő tételt.

16.26. Tétel. *Ha $\alpha \neq \lambda_k$ minden k-ra, akkor a* (16.19) *feladatnak tetszőleges $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén pontosan egy $u \in H_0^1(\Omega)$ megoldása létezik, amelyet a* (16.23), (16.24) *képletek határoznak meg. Ha van olyan k index, amelyre $\lambda_k = \alpha$, akkor a megoldás létezéséhez szükséges és elegendő a* (16.25) *feltétel, ekkor a feladat megoldása természetesen nem egyértelmű és az összes megoldást megadó* (16.24) *képletben azon k indexek esetén, amelyekre $\lambda_k = \alpha$ (ilyen k csak véges sok lehet, hiszen $\lambda_k \to \infty$), c_k tetszőleges állandó.*

A következő általános tétel magában foglalja a 16.23. Tételt a $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ speciális esetben. Legyen H és V két szeparábilis Hilbert-tér egy folytonos és sűrű $V \subset H$ beágyazással. A 15.41. Állításnak megfelelően tekintsük a

$$V \subset H = H' \subset V'$$

sémát, és vezessük be a Riesz–Fréchet-féle $A : V \to V'$ izometrikus izomorfizmust.

16.27. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $V \subset H$ beágyazás kompakt is. Ekkor létezik egy $(w_k) \subset V$ vektorsorozat és egy (λ_k) valós számsorozat, hogy*

- *$Aw_k = \lambda_k w_k$ minden k-ra, vagy ekvivalens módon*

$$(w_k, v)_V = \lambda_k (w_k, v)_H \quad \text{minden} \quad v \in V\text{-re}; \tag{16.26}$$

- *$\lambda_k > 0$ minden k-ra, és $\lambda_k \to \infty$;*

- (w_k) *ortonormált bázis* H*-ban;*
- $(\lambda_k^{-1/2} w_k)$ *ortonormált bázis* V*-ben;*
- $(\lambda_k^{1/2} w_k)$ *ortonormált bázis* V'*-ben.*

A bizonyításhoz emlékeztetünk David Hilbert (1862–1943) absztrakt spektráltételére.

16.28. Tétel. *Legyen A kompakt, szimmetrikus (vagy önadjungált) operátor egy végtelen dimenziós, szeparábilis H Hilbert-térben. Létezik olyan (e_k) ortonormált bázis H-ban és olyan (λ_k) valós számsorozat, hogy*

$$Ae_k = \lambda_k e_k \quad \textit{minden} \quad k\textit{-ra},$$

és

$$\lambda_k \to 0.$$

Bizonyítás. Lásd például a [95] vagy [159] könyvekben. □

A 16.27. Tétel bizonyítása. Minthogy az $i : V \to V'$ beágyazás kompakt és $A^{-1} : V' \to V$ folytonos, az összetett $A^{-1} \circ i : V \to V$ operátor is kompakt. Továbbá szimmetrikus is, vagyis

$$((A^{-1} \circ i)u, v)_V = (u, (A^{-1} \circ i)v)_V \quad \text{minden} \quad u, v \in V\text{-re}.$$

Valóban, A definíciója alapján

$$((A^{-1} \circ i)u, v)_V = \langle (A^{-1} \circ i)u, A(A^{-1} \circ i)v \rangle_{V,V'} = ((A^{-1} \circ i)u, (A^{-1} \circ i)v)_V$$

és

$$(u, (A^{-1} \circ i)v)_V = \langle A(A^{-1} \circ i)u, (A^{-1} \circ i)v \rangle_{V',V} = ((A^{-1} \circ i)u, (A^{-1} \circ i)v)_V.$$

Alkalmazva $A^{-1} \circ i : V \to V$ kompakt, önadjungált operátorra az absztrakt spektráltételt, létezik egy olyan (e_k) ortonormált bázis V-ben és egy olyan (μ_k) valós számsorozat, hogy $\mu_k \to 0$, és $A^{-1} e_k = \mu_k e_k$ minden k-ra.

Minthogy A^{-1} injektív, a μ_k számok nullától különbözőek. Értelmezhetjük tehát a $\lambda_k := 1/\mu_k$ számokat, és $|\lambda_k| \to \infty$, továbbá $Ae_k = \lambda_k e_k$ minden k-ra. Az utóbbi egyenlőségekből (16.26) következik a $w_k = c_k e_k$ alakú elemekre, mert

$$(e_k, v)_V = \langle Ae_k, v \rangle_{V',V} \quad \text{és} \quad \langle \lambda_k e_k, v \rangle_{V',V} = \lambda_k (e_k, v)_H$$

minden $v \in V$-re a 15.41. Állítás (c) része miatt.

Minthogy $A : V \to V'$ izometrikus izomorfizmus, az $Ae_k = \lambda_k e_k$ képvektorok ortonormált bázist alkotnak V'-ben.

Tekintsük végül a következő egyenlőségeket:

$$\lambda_k(e_k, e_n)_H = \langle \lambda_k e_k, e_n\rangle_{V',V} = \langle Ae_k, e_n\rangle_{V',V} = (e_k, e_n)_V.$$

A $k = n$ esetben ezekből $\lambda_k > 0$ minden k-ra. Ezt felhasználva az egyenlőségekből az is következik, hogy a $\lambda_k^{1/2} e_k$ vektorok ortonormált sorozatot alkotnak H-ban. Ezek a vektorok generálják V-t, és így V H-beli sűrűsége miatt H-t is, úgyhogy e vektorok ortonormált *bázist* is alkotnak H-ban.

A tétel innen a $w_k := \lambda_k^{1/2} e_k$ választással adódik. □

Az előző tétel további alkalmazásaként tekintsük a 16.3.–16.5. szakaszokban vizsgált rendszereket. Legyen Γ_0 a Γ határ mérhető részhalmaza, a egy nemnegatív, korlátos, mérhető függvény a $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \Gamma_0$ halmazon, $H = L^2(\Omega)$ a szokásos skaláris szorzattal, és

$$V := \big\{ v \in H^1(\Omega) \ : \ v = 0 \quad \text{m.m.} \quad \Gamma_0\text{-n} \big\}$$

a következő skaláris szorzattal:

$$(u, v)_V := \int_\Omega [uv + \nabla u \cdot \nabla v]\, dx + \int_{\Gamma_1} auv \ d\Gamma.$$

Az utóbbi ekvivalens a $H^1(\Omega)$-ből örökölt skaláris szorzattal, és a H, V terek eleget tesznek a 16.27 Tétel feltételeinek.

Létezik tehát $L^2(\Omega)$-nak egy olyan $w_0, w_1, \dots$ ortonormált bázisa és egy olyan, végtelenhez tartó $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ pozitív valós számsorozat, hogy minden k-ra és minden $v \in V$-re $w_k \in V$ és

$$\int_\Omega [w_k v + \nabla w_k \cdot \nabla v]\, dx + \int_{\Gamma_1} a w_k v \ d\Gamma = \lambda_k \int_\Omega w_k v \ dx.$$

Továbbá $w_0, w_1, \dots$ *ortogonális* bázis V-ben is.

Átírva a fenti relációt az

$$\int_\Omega \nabla w_k \cdot \nabla v \ dx + \int_{\Gamma_1} a w_k v \ d\Gamma = (\lambda_k - 1) \int_\Omega w_k v \ dx$$

alakba, a $v = w_k$ választással kapjuk, hogy $\lambda_k \geq 1$.

Bevezetve a $\tilde\lambda_k := \lambda_k - 1$ számokat, $\tilde\lambda_k \geq 0$ minden n-re, és a 16.3.–16.5. szakaszok számításai szerint az utolsó reláció a következő sajátérték-probléma természetes interpretációja:

$$\begin{cases} -\Delta w_k = \tilde\lambda_k w_k & \Omega\text{-ban}, \\ w_k = 0 & \Gamma_0\text{-on}, \\ \partial_\nu w_k + a w_k = 0 & \Gamma_1\text{-en}. \end{cases}$$

Ennek alapján tekintsük a következő problémát:

$$\begin{cases} -\Delta u - \alpha u = f, & (f \in L^2(\Omega)) \\ u = 0 & \Gamma_0\text{-n}, \\ \partial_\nu u + au = 0 & \Gamma_1\text{-en}. \end{cases} \tag{16.27}$$

Erre a feladatra ugyanúgy igazolható a 16.23. Tételhez hasonló tétel, amely szerint a feladatnak pontosan egy megoldása létezik, ha $\alpha \neq \lambda_k$ az előbbi sajátérték-probléma összes λ_k sajátértékére. Ha viszont van olyan k index, amelyre $\alpha = \lambda_k$, akkor a megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele:

$$\int_\Omega f w_k = 0, \qquad \text{ha } \lambda_k = \alpha,$$

és akkor az $u = \sum_{k=1}^{\infty}$ megoldásképletben c_k tetszőleges állandó, ha $\lambda_k = \alpha$.

Negyedik alkalmazásként legyen $H = L^2(\Omega)$ a szokásos skaláris szorzattal, és $V = H_0^2(\Omega)$ a 16.6. szakaszban bevezetett

$$(u, v)_V := \int_\Omega \Delta u \Delta v \; dx$$

skaláris szorzattal. A tétel alkalmazásával kapunk egy $w_0, w_1, \ldots$ ortonormált bázist $L^2(\Omega)$-ban, és egy végtelenhez tartó $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pozitív valós számsorozatot, úgy, hogy minden k-ra és $v \in H_0^2(\Omega)$-ra $w_k \in H_0^2(\Omega)$, és

$$\int_\Omega \Delta w_k \Delta v \; dx = \lambda_k \int_\Omega w_k v \; dx.$$

Továbbá $w_0, w_1, \ldots$ *ortogonális* bázis $H_0^2(\Omega)$-ban is.

A 16.6. szakasz szerint ez így is interpretálható:

$$\begin{cases} \Delta^2 w_k = \lambda_k w_k & \Omega\text{-ban}, \\ w_k = \partial w_k = 0 & \Gamma\text{-n}. \end{cases}$$

16.29. *Megjegyzés.* Visszaemlékezve a természetes $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ konvencióra, és alkalmazva a 16.27. Tételt a $H = L^2(\Omega)$ és $V = H^1(\Omega)$ szereposztással[13] a következő formulákat kapjuk $s = -1,0,1$-re:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \right\|_{H^s(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \left| c_k \right|^2 .$$

E formulák alapján természetesen definiálhatók a $H^s(\Omega)$ Szoboljev-terek tetszőleges valós s kitevőre, mint a w_k sajátfüggvények alkotta lineáris altér

[13] Ez $\Gamma_1 = \Gamma$ és $a = 0$ esetén a Neumann-féle peremfeltételnek felel meg.

teljessé tételeként kapott Hilbert-terek a formulabeli normára nézve. Megmutatható,[14] hogy a 15.21. Nyomtétel érvényben marad a $H^s(\Omega)$ terekre minden $s > 1/2$ esetén.

A 15.21 Tétel bizonyítása során kapott

$$\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \le C(\Omega)\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

becslés alapján azt sejthetnénk, hogy a 15.21. Nyomtétel az $s = 1/2$ határesetben is igaz, de ezt cáfolja az $\Omega = (0,\pi)$ intervallumbeli

$$u(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k \log k}$$

függvény példája. Ebben ez esetben a sajátfüggvényeket és sajátértékeket a

$$w_0(x) = \pi^{-1}, \quad w_k(x) = (2/\pi)\cos kx, \quad k = 1,2,\dots$$

és $\lambda_k = k^2, \quad k = 0,1,\dots$ képletek adják meg. Minthogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2s}}{k^2(\log k)^2}$$

sor $s = 1/2$ esetén konvergens, $u \in H^{1/2}(\Omega)$. Azonban, $u(0)$ nincs értelmezve, mert a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$$

sor divergens.

16.8. Feladatok

16.1. Tekintsük a

$$\begin{cases} -u'' = f \quad (a,b)\text{-ben}, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{16.28}$$

Dirichlet-feladatot. Emlékeztetünk rá, hogy bármely $f \in H^{-1}(a,b)$ esetén létezik pontosan egy $u \in H^1(a,b)$ megoldás. Mutassuk meg, hogy ha $f \in L^2(a,b)$, akkor $u \in H^2(a,b)$.

16.2. Adjunk explicit képletet (16.28) megoldására $f \in C([a,b])$ esetén!

[14] Lásd például J.-L. Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Volume 1, Chapter 1.

16.3. Adjunk explicit képletet (16.28) megoldására, ha $f = \delta_c$ valamely $a < c < b$ pontra!

16.4. Oldjuk meg a következő problémát:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-ben}, \\ u'(a) = u(a) \quad \text{és} \quad u(b) = 0. \end{cases}$$

16.5. Oldjuk meg a következő problémát:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-ben}, \\ u(a) = u(b) \quad \text{és} \quad u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

16.6. Legyen adva $p \in C^1([a,b])$ és $q, r, f \in L^2((a,b))$, továbbá tegyük fel, hogy $\min p > 0$. Oldjuk meg az alábbi feladatot alkalmas további p, q, r-re vonatkozó feltételek mellett:

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f & (a,b)\text{-ben}, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{16.29}$$

16.7. Fogalmazzuk meg a (16.27) rendszer után említett tételt, majd bizonyítsuk is be!

16.8.

a) Legyen Ω kétdimenziós tartomány, és jelöljük R-rel a Γ perem görbületét. Igazoljuk minden $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ függvényre a

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega (\partial_i \partial_j u)^2 \, dx + \int_\Gamma \frac{1}{R} (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma = \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx$$

azonosságot.

b) Vezessük le a)-ból konvex tartományokra a 16.4. Megjegyzésbeli

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \, \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

egyenlőtlenséget.

16.30. *Megjegyzés.* A 16.8. Feladat Jan Kadlec (1939–1967) [85] dolgozatának speciális esete.

17. fejezet

Evolúciós problémák

Fourier nagyszerű matematikai költeménye.

William Thomson (Lord Kelvin) (1824–1907)

A fejezet tartalma. Értelmezzük vegyes feladatok gyenge megoldásainak fogalmát, majd megvizsgáljuk a megoldások tulajdonságait.

Továbbra is feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ nem üres, *korlátos, C^∞-beli* nyílt halmaz, és a határát Γ-val jelöljük.

Ebben a fejezetben olyan $N+1$ változós $u(x,t)$ függvényeket fogunk vizsgálni, ahol $t \in \mathbb{R}$ az *időt*, $x \in \mathbb{R}^N$ pedig a térbeli pozíciót jelöli. Az idő szerinti $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ deriváltak helyett röviden u'-t és u''-t írunk, a nabla és Laplace-operátorokat pedig csak a térbeli változókra alkalmazzuk:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right), \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Az idő- és térváltozók eltérő szerepe miatt gyakran célszerű lesz $u(x,t)$-et $u(t)(x)$ formában tekinteni, vagyis úgy képzelni, hogy minden egyes t-re $u(t)$ az x változó függvénye.

17.1. Hővezetési egyenlet

Tekintsük a következő feladatot:[1]

$$\begin{cases} u' - \Delta u = 0 & \Omega \times (0,\infty)\text{-ben}, \\ u = 0 & \Gamma \times [0,\infty)\text{-n}, \\ u(0) = u_0 & \Omega\text{-ban}. \end{cases} \tag{17.1}$$

[1] Fourier 1807, 1822.

17.1. *Megjegyzés.* A 6. fejezetben láttuk, hogy ha az $N = 3$ esetben $u(x,t)$ jelöli egy Ω háromdimenziós test x pontjának a hőmérsékletét a t időpontban, továbbá a test határán állandóan nulla fok a hőmérséklet (például jégbe van helyezve), és a $t = 0$ időpontban a test pontjainak a hőmérséklete $u(x,0) = u_0(x)$, akkor a (17.1) feladat megoldása megadja a test pontjainak a hőmérsékletét bármely $t > 0$ időpontban.

A 16.3. Tétel és bizonyítása fényében természetes ezt a problémát a következőképpen interpretálni:

$$u' + Au = 0 \quad (0,\infty)\text{-ben}, \quad u(0) = u_0,$$

ahol $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ a Riesz–Fréchet-izomorfizmust jelöli.

Általánosabban, legyen H és V két szeparábilis Hilbert-tér sűrű és kompakt $V \subset H$ beágyazással. Tekintsük a 15.41. Állításbeli

$$V \subset H = H' \subset V'$$

sémát, és vezessük be az $A : V \to V'$ Riesz–Fréchet-izomorfizmust.

17.2. Tétel. *Tetszőleges $u_0 \in H$-hoz létezik egyetlen olyan $u : [0,\infty) \to H$ függvény, amelyre*

(a) *$u : [0,\infty) \to H$ folytonos, és $u(0) = u_0$ H-ban;*

(b) *$u : (0,\infty) \to V$ folytonos, $u : (0,\infty) \to V'$ folytonosan differenciálható, és*

$$u'(t) + Au(t) = 0 \quad \textit{minden} \quad t > 0\textit{-ra.}$$

Továbbá

(c) *$u : (0,\infty) \to V$ végtelen sokszor differenciálható;*

(d) *a $t \mapsto \|u(t)\|_H$ függvény monoton fogyó $[0,\infty)$-ben.*

17.3. *Megjegyzések.* Tekintsük a (17.1) hővezetési egyenletnek megfelelő $H = L^2(\Omega)$ és $V = H_0^1(\Omega)$ speciális esetet.

- A hővezetési feladat korrekt kitűzésű, hiszen (a) és (b) miatt az $u_0 \mapsto u$ lineáris leképezés folytonos $L^2(\Omega)$-ból $C_b([0,\infty); L^2(\Omega))$-ba, ahol $C_b([0,\infty); L^2(\Omega))$ jelöli az $[0,\infty) \to L^2(\Omega)$ folytonos és korlátos függvények osztályát.

- Hangsúlyozzuk, hogy $t > 0$-ra $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ akkor is teljesül, ha $u(0) = u_0 \notin H_0^1(\Omega)$. Ez a *regularizálási effektus* szorosan kapcsolódik a hővezetés időbeli *irreverzibilitásához.*

- Megmutatható, hogy $u(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ minden $t > 0$-ra, sőt

$$u \in C^\infty((0,\infty) \times \overline{\Omega}).$$

- Igazolható a következő *minimum-elv* (lásd részletesen a 9.4. szakaszt): ha u_0 nem azonosan nulla, de $u_0 \geq 0$ m.m. Ω-ban, akkor $u > 0$ mindenütt $(0,\infty) \times \Omega$-ban.[2]

- Az előző tulajdonság azt is mutatja (lásd még a 9.28. Megjegyzést is), hogy a hővezetésnek ebben a modelljében *végtelen* a terjedési sebesség: ha $u_0 = u(0) \geq 0$ csak egy Ω egy kis részében tér is el nullától, akkor $u(t) > 0$ Ω minden pontjában, minden $t > 0$-ra.

- Tekinthetünk inhomogén peremfeltételeket is. Ilyenkor általában keresünk egy elég sima $G : [0,\infty) \times \overline{\Omega}$ függvényt, amelyik kielégíti a peremfeltételt. Ekkor az $u - G$ új ismeretlen függvény a homogén peremfeltételű a (17.1) rendszer megoldása azzal a változtatással, hogy az $u' - \Delta u = 0$ differenciálegyenletet az inhomogén $u' - \Delta u = G' - \Delta G$ egyenletre cseréljük. Ezt az inhomogenitást könnyebb kezelni, mint a peremfeltételben lévőt: lásd alább a 17.2. Tétel bizonyítását követő megjegyzést.

A 17.2. Tétel bizonyítása. Rögzítsünk H-ban egy $w_1, w_2, \ldots$ ortonormált bázist a 16.27. Tétel alapján. Feltéve, hogy létezik egy megoldás, fejtsük Fourier-sorba u_0-t és $u(t)$-t minden egyes $t \in [0,\infty)$-re:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k, \qquad (17.2)$$
$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k.$$

Minden egyes rögzített k-ra

$$(u(t), w_k)_H = c_k(t) \quad \text{és} \quad (u(t), w_k)_V = c_k(t)(w_k, w_k)_V = \lambda_k c_k(t)$$

a w_k sajátvektorok ortogonalitása miatt. Továbbá, a kezdeti feltételből a

$$c_k(0) = (u(0), w_k)_H = (u_0, w_k)_H = a_k$$

egyenlőség, a differenciálegyenletből pedig minden $t > 0$-ra a

$$c_k'(t) = \frac{d}{dt}(u(t), w_k)_H = \frac{d}{dt}\langle u(t), w_k\rangle_{V',V}$$

[2] u helyett $-u$-t tekintve látható, hogy érvényes az analóg *maximum-elv* is.

$$= \langle u'(t), w_k\rangle_{V',V} = \langle -Au(t), w_k\rangle_{V',V}$$
$$= -(u(t), w_k)_V = -\lambda_k c_k(t)$$

egyenlőség adódik.[3] Innen

$$c_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t},$$

és így

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} w_k \qquad V\text{-ben} \tag{17.3}$$

minden $t \in \mathbb{R}$-re. Megmutattuk, hogy ha létezik megoldás, akkor az egyértelmű, és a (17.2)–(17.3) képletek által van definiálva.

Magyarázzuk meg a fenti harmadik egyenlőséget. Vezessük be minden rögzített k-ra a folytonos lineáris $\Phi_k \in V''$ funkcionált a $\Phi_k(u) := \langle u, w_k\rangle_{V',V}$ képlet segítségével, akkor $\langle u(t), w_k\rangle_{V',V} = \Phi_k(u(t))$. Lévén két C^1-beli függvény kompozíciója, $\Phi_k \in C^1$, és minthogy $\Phi_k'(u) = \Phi_k$ minden $u \in V'$-re,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), w_k\rangle_{V',V} = (\Phi_k \circ u)'(t) = \Phi_k((u')(t)) = \langle u'(t), w_k\rangle_{V',V},$$

amint azt állítottuk.

Hátravan annak az igazolása, hogy a (17.3) sor minden egyes $t \in \mathbb{R}$-re konvergál, és hogy a sor összege rendelkezik a tételben kimondott tulajdonságokkal.

Mivel $u_0 \in H$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \tag{17.4}$$

a Parseval-formula szerint. A kívánt regularitási tulajdonságokhoz megmutatjuk, hogy a (17.3) sor $t \in [0,\infty)$-re nézve egyenletesen konvergál H-ban, és hogy a formális szukcesszív deriválásokkal kapott

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(-\lambda_k)^p e^{-\lambda_k t} w_k, \quad p = 0,1,\dots$$

sorok bármely rögzített $t_0 > 0$ esetén $t \in [t_0,\infty)$-re nézve egyenletesen konvergálnak V-ben. Ehhez elég ellenőriznünk a megfelelő Cauchy-tulajdonságokat.

Ha $n > m$, akkor

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k e^{-\lambda_k t} w_k \right\|_H^2 = \sum_{k=m+1}^{n} e^{-2\lambda_k t} |a_k|^2 \le \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|^2$$

[3] A harmadik egyenlőséget mindjárt megmagyarázzuk.

minden $t \geq 0$-ra. Az utolsó sor összege nem függ t-től, és $m \to \infty$ esetén (17.4) miatt nullához tart.

Tetszőlegesen rögzített $p \geq 0$ és $t_0 > 0$ esetén, minden $n > m$-re és $t \geq t_0$-ra fennállnak a következő relációk:

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k (-\lambda_k)^p e^{-\lambda_k t} w_k \right\|_V^2 = \sum_{k=m+1}^{n} (\lambda_k)^{2p+1} e^{-2\lambda_k t} |a_k|^2 \leq \sum_{k=m+1}^{n} (\lambda_k)^{2p+1} e^{-2\lambda_k t_0} |a_k|^2 .$$

Minthogy a $\lambda \mapsto \lambda^{2p+1} e^{-2\lambda t_0}$ függvény felülről korlátos $[\lambda_1, \infty)$-ben valamely $c(p, t_0)$ konstanssal, (17.4) felhasználásával innen adódik, hogy

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k (-\lambda_k)^p e^{-\lambda_k t} w_k \right\|_V^2 \leq c(p, t_0) \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|^2 \to 0,$$

ha $n \to \infty$.

Az előző meggondolásokból következik, hogy a (17.2)–(17.3) formulák a kívánt regularitási tulajdonságokkal rendelkező u függvényt definiálnak, és hogy

$$u'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\lambda_k a_k e^{-\lambda_k t} w_k \qquad V'\text{-ben} \tag{17.5}$$

minden $t > 0$-ra. Az $u(0) = u_0$ kezdeti feltétel (17.2)-ből és (17.3)-ból következik.

Továbbá tetszőleges $t > 0$-ra a (17.3), (17.5) relációkból az

$$u'(t) + Au(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} (-\lambda_k w_k + A w_k) = 0 \qquad V'\text{-ben}$$

egyenlőséget kapjuk, mert $Aw_k = \lambda_k w_k$.

Végül tetszőleges $0 \leq s < t$ esetén

$$\|u(t)\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 e^{-2\lambda_k t} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 e^{-2\lambda_k s} = \|u(s)\|_H^2 ,$$

mert $\lambda_k > 0$ minden k-ra. □

17.4. *Megjegyzés.* A most látott bizonyítás általánosítható az inhomogén

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0$$

problémára, ahol $f : [0,\infty) \to V'$ adott, lokálisan integrálható függvény. Felhasználva az

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) w_k$$

Fourier-sorfejtéseket is, most az inhomogén

$$c_k'(t) + \lambda_k c_k(t) = d_k(t)$$

lineáris differenciálegyenletekhez jutunk ugyanazokkal a kezdeti feltételekkel, mint az előbb. A részleteket az olvasóra hagyjuk.

Az előző tétel másik alkalmazásaként megmutatható, hogy az

$$\begin{cases} u' - \Delta u = 0 & (0,\infty) \times \Omega\text{-ban}, \\ u = 0 & [0,\infty) \times \Gamma_0\text{-on}, \\ \partial_\nu u + au = 0 & [0,\infty) \times \Gamma_1\text{-en}, \\ u(0) = u_0 & \Omega\text{-ban}, \end{cases}$$

problémának létezik egyetlen megoldása, ha Γ_0 a Γ határ mérhető részhalmaza, és a egy nemnegatív, korlátos, mérhető függvény a $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \Gamma_0$ halmazon és Γ_0 pozitív mértékű, vagy $\alpha > 0$ Γ_1-nek egy pozitív mértékű részhalmazán.

Ehhez alkalmazzuk a 17.2. Tételt a szokásos $H = L^2(\Omega)$ térrel, valamint a

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \ : \ v = 0 \quad \text{m. m.} \quad \Gamma_0\text{-n} \right\}$$

térrel, amely az

$$(u,v)_V := \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} auv \, d\Gamma$$

skaláris szorzattal van ellátva.

17.2. Hullámegyenlet

Tekintsük most a következő feladatot:[4]

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \Omega \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}\text{-n}, \\ u(0) = u_0 \quad \text{és} \quad u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban}. \end{cases} \tag{17.6}$$

17.5. Példa. A 6. fejezetben láttuk, hogy ha $u(x,t)$ jelöli egy Ω alaphelyzetű rezgő membrán x pontjának transzverzális kitérését a t időpontban, továbbá

[4] Taylor 1715, d'Alembert 1747, Euler 1750, D. Bernoulli 1753, Euler 1760.

a membrán határa rögzítve van, és ismeretes a $t = 0$ időpontban a membrán pontjainak az $u_0(x)$ kitérése és $u_1(x)$ pillanatnyi sebessége, akkor a (17.6) feladat megoldása megadja a membrán helyzetét bármely más időpontban is.

Ismeretes, hogy a megoldás *mechanikai energiáját* az

$$E(t) := \frac{1}{2}\big(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\big), \quad t \in \mathbb{R}$$

képlet adja meg.

A 16.3. Tétel és bizonyítása alapján természetes ezt a problémát az

$$u'' + Au = 0 \quad \mathbb{R}\text{-ben}, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1$$

alakban interpretálni, ahol $A : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ a megfelelő Riesz–Fréchet-izomorfizmust jelöli.

Általánosabban, legyen H és V két Hilbert-tér egy sűrű és folytonos $V \subset$ $\subset H$ beágyazással. Tekintsük a 15.41. Állításbeli

$$V \subset H = H' \subset V'$$

sémát, és vezessük be az $A : V \to V'$ Riesz–Fréchet-izomorfizmust.

17.6. Tétel. *Tetszőleges $u_0 \in V$-hez és $u_1 \in H$-hoz létezik egyetlen olyan $u : \mathbb{R} \to V$ függvény, amelyre*

(a) *$u : \mathbb{R} \to V$ folytonos, és $u(0) = u_0$ V-ben;*

(b) *$u : \mathbb{R} \to H$ folytonosan differenciálható, és $u'(0) = u_1$ H-ban;*

(c) *$u : \mathbb{R} \to V'$ kétszer folytonosan differenciálható, és*

$$u''(t) + Au(t) = 0 \quad \textit{minden} \quad t \in \mathbb{R}\textit{-re.}$$

(d) *Az*

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|^2_H + \|u(t)\|^2_V\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

formula által definiált energia *nem függ t-től.*

17.7. *Megjegyzések.* A $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1_0(\Omega)$ speciális esetben adódik, hogy a (17.6) feladatnak létezik, éspedig egyetlen megoldása.

- Az *energiamegmaradás* törvénye azt is mutatja, hogy a (17.6) feladat korrekt felállítású a következő értelemben: az $(u_0, u_1) \mapsto (u, u')$ lineáris leképezés folytonos $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$-ból $C_b(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega))$-ba.

- Ha $u(x,t)$ a hullámegyenlet megoldása, akkor a

$$v(x,t) := u(x,-t)$$

képlet is megoldást szolgáltat (más kezdeti adatokkal). Ebből az idő szerinti *reverzibilitásból* következik, hogy a hullámegyenletben nincs a hővezetési egyenlethez hasonló regularizálási effektus.

- Legyen ω egy tetszőlegesen kis nyílt részhalmaza Ω-nak, és vezessük be minden $t \in \mathbb{R}$-re az

$$\omega_t := \{x \in \Omega \ : \ \text{dist}\,(x,\omega) < |t|\}$$

halmazt. Megmutatható (lásd még a 12.7. Következményt), hogy ha a (17.6) két (különböző kezdeti adatpárhoz tartozó) megoldása megegyezik ω-n kívül a $t = 0$ időpontban, akkor minden egyes $t \in \mathbb{R}$ időpontban megegyeznek ω_t-n kívül. Szemléletesen: a kezdeti adatok változtatása *véges* (itt egységnyi) *sebességgel terjed*.

- A hővezetési egyenletnél tárgyalt módon vizsgálhatunk inhomogén differenciálegyenleteket és inhomogén peremfeltételeket is.

A 17.6. Tétel bizonyítása. Rögzítsünk H-ban egy $w_1, w_2, \dots$ ortonormált bázist a 16.27. Tétel alapján.

Feltéve, hogy létezik egy megoldás, fejtsük Fourier-sorba u_0-t, u_1-et és $u(t)$-t minden $t \in \mathbb{R}$-re:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k, \tag{17.7}$$

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k, \tag{17.8}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k. \tag{17.9}$$

A kezdeti feltételekből

$$c_k(0) = (u(0), w_k)_H = (u_0, w_k)_H = a_k$$

és

$$c_k'(0) = \frac{d}{dt}(u(t), w_k)_H|_{t=0} = (u'(t), w_k)_H|_{t=0}$$
$$= (u'(0), w_k)_H = (u_1, w_k)_H = b_k$$

adódik, a differenciálegyenletből pedig a következő egyenlőségeket kapjuk minden $t \in \mathbb{R}$-re:[5]

$$\begin{aligned} c_k''(t) &= \frac{d^2}{dt^2}(u(t), w_k)_H = \frac{d^2}{dt^2}\langle u(t), w_k\rangle_{V',V} \\ &= \langle u''(t), w_k\rangle_{V',V} = \langle -Au(t), w_k\rangle_{V',V} \\ &= -(u(t), w_k)_V = -\lambda_k c_k(t). \end{aligned}$$

Innen

$$c_k(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}} \tag{17.10}$$

minden $t \in \mathbb{R}$. A fentiek alapján csak egy megoldás lehet, és azt a (17.9), (17.10) képletek kell, hogy megadják.

Hátravan annak a megmutatása, hogy ez a sor minden egyes $t \in \mathbb{R}$-re konvergens, és hogy az összege rendelkezik a tételben állított tulajdonságokkal.

Minthogy $u_0 \in V$ és $u_1 \in H$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k |a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 < \infty \tag{17.11}$$

a Parseval-formula szerint. Ezt felhasználva megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)w_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)w_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k''(t)w_k$$

sorok minden egyes rögzített $t \in \mathbb{R}$-re konvergálnak, rendre a V, H és V' terekben, és hogy a konvergenciák t-ben egyenletesek.

Elegendő igazolnunk a megfelelő egyenletes Cauchy-tulajdonságokat: ha $n > m \to \infty$, akkor

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k(t)w_k \right\|_V \to 0,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k'(t)w_k \right\|_H \to 0$$

és

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k''(t)w_k \right\|_{V'} \to 0.$$

[5] A harmadik egyenlőség hasonlóan igazolható, mint az előző szakaszban a 17.2. Tétel bizonyítása során.

A harmadik reláció ekvivalens az elsővel a 16.27. Tétel miatt:

$$\left\|\sum c_k''(t)w_k\right\|_{V'} = \left\|\sum \lambda_k c_k(t)w_k\right\|_{V'} = \left\|\sum c_k(t)w_k\right\|_V .$$

Ezért elég megmutatnunk, hogy $n > m \to \infty$ esetén, t-ben egyenletesen

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} c_k(t)w_k\right\|_V^2 + \left\|\sum_{k=m+1}^{n} c_k'(t)w_k\right\|_H^2 \to 0.$$

A w_k függvények H-beli és V-beli ortogonalitása miatt a bal oldal a következő kifejezéssel egyenlő:

$$\sum_{k=m+1}^{n} \left(|c_k(t)|^2 \|w_k\|_V^2 + |c_k'(t)|^2 \|w_k\|_H^2\right) = \sum_{k=m+1}^{n} \left(\lambda_k |c_k(t)|^2 + |c_k'(t)|^2\right).$$

Minthogy közvetlen számítással

$$\begin{aligned}\lambda_k |c_k(t)|^2 + |c_k'(t)|^2 &= \lambda_k \left(a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2 \\ &\quad + \left(-\sqrt{\lambda_k}a_k \sin\sqrt{\lambda_k}t + \sqrt{\lambda_k}b_k \frac{\cos\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2 \\ &= \lambda_k |a_k|^2 + |b_k|^2 ,\end{aligned}$$

a fenti egyenlőség a következőre egyszerűsödik:

$$\sum_{k=m+1}^{n} \left(|c_k(t)|^2 \|w_k\|_V^2 + |c_k'(t)|^2 \|w_k\|_H^2\right) = \sum_{k=m+1}^{n} \left(\lambda_k |a_k|^2 + |b_k|^2\right).$$

A kívánt Cauchy-tulajdonság innen adódik, mert az utolsó kifejezés t-től független, és $n > m \to \infty$ esetén (17.11) miatt nullához tart.

Az előző meggondolásokból következik, hogy a (17.9), (17.10) formulák a kívánt regularitási tulajdonságokkal rendelkező $u : \mathbb{R} \to V$ függvényt definiálnak, és hogy

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)w_k \qquad V\text{-ben}, \\ u'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)w_k \qquad H\text{-ban}, \\ u''(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k''(t)w_k \qquad V'\text{-ben}, \end{aligned}$$

minden $t \in \mathbb{R}$-re. Innen

$$u(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) w_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k = u_0 \qquad V\text{-ben},$$
$$u'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k'(0) w_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k = u_1 \qquad H\text{-ban},$$

és

$$u''(t) + Au(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)(-\lambda_k w_k + A w_k) = 0$$

minden $t \in \mathbb{R}$-re, mert $Aw_k = \lambda_k w_k$.

A konvergenciát bizonyító fenti okoskodás azt is mutatja, hogy

$$E(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k |a_k|^2 + |b_k|^2 \right)$$

minden $t \in \mathbb{R}$-re, vagyis az energia nem függ t-től. □

17.8. *Megjegyzés.* A fenti bizonyítás általánosítható az inhomogén

$$u''(t) + Au(t) = f(t)$$

problémára, ahol $f : \mathbb{R} \to V'$ adott, lokálisan integrálható függvény. Felhasználva az

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) w_k$$

Fourier-sorfejtéseket is, most az inhomogén

$$c_k''(t) + \lambda_k c_k(t) = d_k(t)$$

lineáris differenciálegyenletekhez jutunk ugyanazokkal a kezdeti feltételekkel, mint az előbb. A részleteket az olvasóra hagyjuk.

Második alkalmazásként megoldhatjuk a következő, általánosabb problémát is, ahol Γ_0 a Γ határ mérhető részhalmaza, és a egy nemnegatív, korlátos, mérhető függvény a $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \Gamma_0$ halmazon:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \Omega \times \mathbb{R}\text{-en}, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}\text{-en}, \\ \partial_\nu u + au = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}\text{-en}, \\ u(0) = u_0 & \Omega\text{-ban}, \\ u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban}. \end{cases}$$

Ehhez alkalmazzuk a 17.6. Tételt a szokásos $H = L^2(\Omega)$ térrel, valamint a

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \ : \ v = 0 \quad \Gamma_0\text{-on m.m.} \right\}$$

térrel, amely az

$$(u, v)_V := \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} auv \, d\Gamma$$

skaláris szorzattal van ellátva.

Harmadik alkalmazásként tekintsük a következő rendszert:

$$\begin{cases} u'' + \Delta^2 u = 0 & \mathbb{R} \times \Omega\text{-ban}, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \mathbb{R} \times \Gamma\text{-n}, \\ u(0) = u_0 & \Omega\text{-ban}, \\ u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban}. \end{cases}$$

Az $N = 2$ esetben ez a rögzített határú merev lemezek kis transzverzális rezgéseinek a szokásos lineáris modellje.

Alkalmazva a 17.6. Tételt a szokásos $H = L^2(\Omega)$ térrel, valamint a $V = H_0^2(\Omega)$ térrel az

$$(u, v)_V := \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx$$

skaláris szorzatra nézve (mint a 16.6. szakaszban), kapjuk a megoldások létezését és unicitását.

17.3. Feladatok

17.1. Tekintsük a 15.41. Állításbeli $V \subset H = H' \subset V'$ sémát és a H Hilbert-tér 16.27. Spektráltételben megadott (w_k) ortonormált bázisát. Minthogy $Aw_k = \lambda_k w_k$ minden k-ra, természetes az

$$A\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k\right) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k w_k$$

definíció, valahányszor a két sor alkalmas Hilbert-terekben konvergál.

Jelöljük minden s valós számra D^s-sel a $Z := \operatorname{Vect}\{w_1, w_2, \ldots\}$ vektortér teljessé tételével kapott Hilbert-teret a

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \right\|_s^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \, |c_k|^2$$

képlettel értelmezett euklideszi normára nézve. Igazoljuk a következőket:

a) ha $r < s$, akkor $D^s \subset D^r$, továbbá a beágyazás sűrű és folytonos;

b) $D^0 = H$, $D^1 = V$ és $D^{-1} = V'$;

c) $A : D^{s+2} \to D^s$ folytonos lineáris leképezés minden $s \in \mathbb{R}$-re.

Határozzuk meg D^2-t, ha $H = L^2(0,\pi)$ és $V = H_0^1(0,\pi)$.

17.2. Tekintsük a 17.2. Tételbeli feladat megoldását. Igazoljuk minden $r \in \mathbb{R}$-re a következőket:

a) $u : (0,\infty) \to D^r$ végtelen sokszor differenciálható;

b) a $t \mapsto \|u(t)\|_{D^r}$ függvény monoton fogyó $(0,\infty)$-ben.

17.3. Igazoljuk a 17.6. Tétel következő általánosítását:

Tetszőleges $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in D^{s+1}$ és $u_1 \in D^s$ esetén létezik egyetlen olyan $u : \mathbb{R} \to D^{s+1}$ függvény, amelyre

a) $u : \mathbb{R} \to D^{s+1}$ folytonos, és $u(0) = u_0$ D^{s+1}-ben;

b) $u : \mathbb{R} \to D^s$ folytonosan differenciálható, és $u'(0) = u_1$ D^s-ben;

c) $u : \mathbb{R} \to D^{s-1}$ kétszer folytonosan differenciálható, és

$$u''(t) + Au(t) = 0 \quad \text{minden} \quad t \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

d) Az

$$E_s(t) := \frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|_{D^s}^2 + \|u(t)\|_{D^{s+1}}^2\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

formula által definiált *energia* nem függ t-től.

18. fejezet

Útmutatások, megoldások

Ha nem boldogulsz a kitűzött feladattal, próbálkozzál először egy rokon feladattal.

Pólya György (1887–1985)

18.1. Az 5. fejezetbeli feladatok megoldásai

5.1. Megoldás. Vegyük észre, hogy az $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ multiindexet egyértelműen meghatározzák az

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq m.$$

összegek. Az α_j nemnegatív egészek helyett célszerű a $\beta_j := \alpha_j + 1$ egészeket tekinteni, mert ekkor az iménti részösszegek megfelelői mind különbözőek lesznek:

$$1 \leq \beta_1 < \beta_1 + \beta_2 < \ldots < \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n \leq m + n.$$

Mivel 1 és $m+n$ között (a határokat is beleértve) $\binom{m+n}{n}$-féleképpen választhatunk ki n darab különböző egész számot, így a kérdéses multiindexek száma $\binom{m+n}{n}$.

5.2. Megoldás. a) Az x változó szerint integrálva kapjuk, hogy

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + c(y),$$

ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény.

b) Az y változó szerint integrálva:

$$u(x,y) = x\frac{y^2}{2} + c(x),$$

ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény.

c) A differenciálegyenlet pontosan akkor állhat fenn, ha $\partial_1 u(x,y) = 0$ és $\partial_2 u(x,y) = 0$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén, ezért u konstansfüggvény.

5.3. Megoldás. a) Az x változó szerint egymás után kétszer integrálva adódik:

$$\partial_1 u(x,y) = e^{x+y} + c_1(y) \quad \text{és} \quad u(x,y) = e^{x+y} + c_1(y)x + c_2(y),$$

ahol $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

b) Az x, majd az y változó szerint integrálva kapjuk:

$$\partial_2 u(x,y) = \frac{x^2}{2}y + c_1(y) \quad \text{és} \quad u(x,y) = \frac{x^2y^2}{4} + c_2(y) + c_3(x),$$

ahol $c_2, c_3 \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

5.4. Megoldás. a) Az x változó szerint egymás után háromszor integrálva kapjuk:

$$u(x,y,z) = \frac{x^2}{2}c_1(y,z) + xc_2(y,z) + c_3(y,z),$$

ahol $c_1, c_2, c_3 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges függvények.

b) Az x, y, z változók szerint egymás után integrálva adódik:

$$u(x,y,z) = \frac{x^2y^2z^2}{8} + c_1(y,z) + c_2(x,z) + c_3(x,y),$$

ahol $c_1, c_2, c_3 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges függvények.

5.5. Megoldás. Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók szerint egymás után n-szer integrálva kapjuk:

$$u(x_1, \dots, x_n) = c_1(x_2, \dots, x_n) + c_2(x_1, x_3, \dots, x_n) + c_n(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

ahol $c_1, c_2, \dots, c_n \in C^n(\mathbb{R}^{n-1})$ tetszőleges függvények.

5.6. Megoldás. a) A $v := \partial_1 u$ jelölést bevezetve a következő egyenletet nyerjük v-re:

$$\partial_1 v(x,y) + v(x,y) = y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ez az egyenlet minden rögzített $y \in \mathbb{R}$ esetén az $x \mapsto v(x,y)$ függvényre nézve egy állandó együtthatós elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet,

amelynek összes megoldása: $v(x,y) = c(y)e^{-x} + y$. Az u függvényre így kapjuk, hogy

$$\partial_1 u(x,y) = c(y)e^{-x} + y,$$

ahonnan az x változó szerinti integrálással

$$u(x,y) = xy + c_1(y)e^{-x} + c_2(y)$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

b) A $v := \partial_2 u$ jelölés bevezetésével kapjuk, hogy

$$\partial_1 v + 2xv = x \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ami minden rögzített $y \in \mathbb{R}$ esetén egy elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet. Ennek összes megoldása $v(x,y) = c(y)e^{-x^2} + \frac{1}{2}$, tehát

$$\partial_2 u(x,y) = c(y)e^{-x^2} + \frac{1}{2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ebből az y változó szerinti integrálás után

$$u(x,y) = \frac{y}{4} + c_1(y)e^{-x^2} + c_2(x)$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

5.7. Megoldás. a) Az 5.9. és 5.10. Példában levezetett (5.9) és (5.12) összefüggések, valamint a hasonlóan adódó $\partial_x \partial_y u = \partial_\xi^2 U - \partial_\eta^2 U$ megfeleltetés felhasználásával:

$$\partial_1^2 u(x,y) + 2\partial_1 \partial_2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 4\partial_1^2 U(\xi,\eta).$$

Mivel $x = \frac{\xi+\eta}{2}$, ezért az U függvényre a

$$\partial_1^2 U(\xi,\eta) = \frac{\xi+\eta}{8} \quad ((\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2)$$

differenciálegyenletet nyerjük. Ezt az egyenletet a ξ változó szerint egymás után kétszer integrálva

$$U(\xi,\eta) = \frac{\xi^3}{48} + \frac{\xi^2\eta}{16} + c_1(\eta)\xi + c_2(\eta),$$

és innen $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ visszahelyettesítése után végül

$$u(x,y) = \frac{(x+y)^3}{48} + \frac{(x+y)^2(x-y)}{16} + c_1(x-y)\cdot(x+y) + c_2(x-y),$$

ahol $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

b) Legyen $U(\xi,\eta) := u(x,y)$, ahol $\xi = 3x + y$ és $\eta = x - y$. Ekkor a láncszabály alkalmazásával

$$\begin{cases} \partial_x u = 3\partial_\xi U + \partial_\eta U, \\ \partial_y u = \partial_\xi U - \partial_\eta U, \end{cases}$$

így

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = 9\partial_\xi^2 U + 6\partial_\xi\partial\eta U + \partial_\eta^2 U, \\ \partial_y^2 u = \partial_\xi^2 U - 2\partial_\xi\partial\eta U + \partial_\eta^2 U, \\ \partial_x\partial_y u = 3\partial_\xi^2 U - 2\partial_\xi\partial\eta U - \partial_\eta^2 U. \end{cases}$$

Mivel $y = \frac{\xi - 3\eta}{4}$, ezért U-ra a következő differenciálegyenletet nyerjük:

$$16\partial_\xi\partial\eta U(\xi,\eta) = \frac{\xi - 3\eta}{4} \quad ((\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2).$$

Ezt az egyenletet a ξ, majd az η változó szerint integrálva kapjuk:

$$U(\xi,\eta) = \frac{1}{64}\left(\frac{\xi^2\eta}{2} - \frac{3}{2}\xi\eta^2\right) + c_1(\xi) + c_2(\eta),$$

ahonnan végül

$$u(x,y) = \frac{1}{32}(3x + y)(x - y)y + c_1(3x + y) + c_2(x - y),$$

ahol $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

5.8. Megoldás. a) A továbbiakban a megfelelő változók szerinti parciális deriválások operátoraira a ∂_x, ∂_y, valamint ∂_ξ és ∂_η megkülönböztető jelöléseket fogjuk használni. Némi próbálgatást követően észrevehetjük, hogy

$$\partial_1^2 u - \partial_1\partial_2 u - 2\partial_2^2 u - \partial_1 u - \partial_2 u \\ = (\partial_x + \partial_y)(\partial_x - 2\partial_y)u - (\partial_x + \partial_y)u.$$

Célszerűnek mutatkozik olyan (ξ,η) változók bevezetése, amelyekkel

$$\begin{aligned} \partial_\xi &= \partial_x + \partial_y, \\ \partial_\eta &= \partial_x - 2\partial_y, \end{aligned}$$

azaz mátrixos alakban

$$(\partial_\xi, \partial_\eta) = (\partial_x, \partial_y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ekkor az 5.11. Példa előtt leírt módszer alapján

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2x\\ y & \end{pmatrix}.$$

Minthogy

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

ezért az új változóink

$$\xi = \frac{2x+y}{3},$$
$$\eta = \frac{x-y}{3}.$$

Bevezetve az $U(\xi,\eta) = u(x,y)$ új ismeretlen függvényt, az előbbiek alapján az egyenletünk így fest:

$$\partial_\xi\partial_\eta U(\xi,\eta) - \partial_\xi U(\xi,\eta) = 0 \quad ((\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2).$$

A kapott egyenletet a ξ változó szerint integrálva

$$\partial_\eta U(\xi,\eta) - U(\xi,\eta) = c(\eta),$$

ahol $c\in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. Ez utóbbi egyenlet minden rögzített ξ esetén az η változóban egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet. Mindkét oldalát az $e^{-\eta}$ integráló tényezővel megszorozva:

$$\partial_\eta\left(e^{-\eta}U(\xi,\eta)\right) = -e^{-\eta}c(\eta),$$

amit η szerint integrálva kapjuk, hogy

$$e^{-\eta}U(\xi,\eta) = C(\eta) + D(\xi).$$

Végül tehát

$$U(\xi,\eta) = (C(\eta) + D(\xi))e^{\eta},$$

ahol $C, D\in\mathbb{R}$ tetszőleges függvények. Így végeredményben

$$u(x,y) = \left(C(x-y) + D(2x+y)\right)e^{\frac{x-y}{3}}.$$

(Mivel C, D tetszőleges, elhagyhattuk az argumentumaikban az $1/3$ tényezőt.)

b) A megfelelő változók szerinti parciális deriválások operátoraira továbbra is a ∂_x, ∂_y, valamint ∂_ξ és ∂_η megkülönböztető jelöléseket fogjuk használni. Némi ötletelgetés után észrevehetjük, hogy

$$\partial_1^2 u - 2\partial_1\partial_2 u + \partial_2^2 u + \partial_1 u - \partial_2 u - 2u \\ = (\partial_x - \partial_y)^2 u + (\partial_x - \partial_y)u - 2u.$$

Ez alapján célravezetőnek tűnik olyan (ξ, η) változók bevezetése, hogy

$$\partial_\xi = \partial_x - \partial_y,$$
$$\partial_\eta = \partial_y,$$

azaz mátrixos alakban

$$(\partial_\xi, \partial_\eta) = (\partial_x, \partial_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Természetesen a ∂_η deriválásra egyéb más lehetőség is kínálkozik, ám ennek valójában nincs lényeges szerepe, a végén ugyanaz fog adódni – a kíváncsi Olvasó ezt akár végig is gondolhatja.) Ekkor az 5.11. Példa előtt ismertetett módszer szerint

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Minthogy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ezért az új változóink

$$xi = x,$$
$$\eta = x + y.$$

Bevezetve az $U(\xi, \eta) = u(x, y)$ új ismeretlen függvényt, az iménti levezetésből következően a feladat egyenlete így néz ki:

$$\partial_\xi^2 U(\xi, \eta) + \partial_\xi U(\xi, \eta) - 2U(\xi, \eta) = 0 \quad ((\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2).$$

Ez az egyenlet minden rögzített η esetén a ξ változóban egy állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris közönséges differenciálegyenlet, amelynek megoldásait a karakterisztikus egyenletének segítségével nyerhetjük:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

amelynek gyökei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -2$, ezért

$$U(\xi, \eta) = c_1(\eta)e^{\xi} + c_2(\eta)e^{-2\xi},$$

ahol $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Végül tehát a feladatban szereplő egyenlet összes megoldása

$$u(x,y) = c_1(x+y)e^x + c_2(x+y)e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőlegesek.

5.9. Megoldás. a) A szóban forgó elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Ennek megoldásai $x(t) = c_1 e^t$ és $y(t) = c_2 e^{-t}$, így a $\varphi(x,y) = xy$ képlettel adott függvény állandó a karakterisztikus görbék mentén, tehát első integrál. (Ez utóbbi összefüggést úgy is láthattuk volna, hogy a karakterisztikus rendszer első egyenletét y-nal, míg a második egyenletét x-szel szorozzuk, és a kapott egyenleteket összegezve $\dot{x}y + x\dot{y} = 0$ adódik, vagyis $(xy)^{\cdot} = 0$.) Vigyázzunk, első ránézésre azt gondolhatnánk, hogy a karakterisztikus görbék az $xy = c$ egyenlet által meghatározott hiperbolák (beleértve a koordinátatengelyeket mint elfajuló eseteket), amelyeket éppen az 5.3. ábra szemléltet. Azonban ez így nem teljesen pontos: a hiperbolák két ága külön karakterisztikus görbének számít, hiszen a karakterisztikus rendszer egy adott pontból induló megoldásaként egyszerre csak az egyik állhat elő. Ez azt jelenti, hogy a két ágon eltérő állandó értéket vehet fel egy megoldás, tehát u nem csak $u(x,y) = \Phi(xy)$ alakú lehet. Könnyen látható például, hogy az

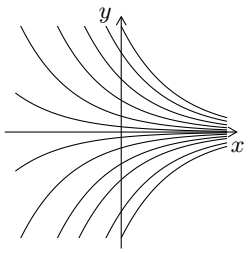
$$u(x,y) = \begin{cases} (xy)^2, & \text{ha } y \geq 0, \\ -(xy)^2, & \text{ha } y < 0 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonosan differenciálható (az x tengely mentén is), és kielégíti az egyenletet az egész $\mathbb{R}^2$ síkon, viszont nem áll elő $u(x,y) = \Phi(xy)$ alakban, hiszen $u(1,1) = 1$, de $u(-1,-1) = -1$.

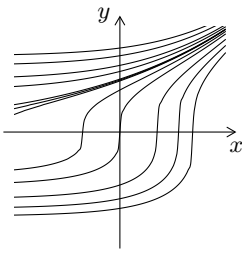
5.10. Megoldás. a) A feladatban szereplő parciális differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Ennek megoldásai $x(t) = t + c_1$ és $y(t) = c_2 e^{-t}$, így a $\varphi(x,y) = e^x y$ képlettel adott függvény állandó a karakterisztikus görbék mentén. (Ez utóbbi összefüggést úgy is láthattuk volna, hogy a karakterisztikus rendszer első egyenletét $e^x y$-nal, míg a második egyenletét e^x-szel szorozzuk, és a kapott



(a) Az $y = ce^{-x}$ görbék



(b) Az $y = \sqrt[3]{e^x - c}$ görbék

18.1. ábra. Az 5.10. Feladat a) és b) részének karakterisztikái

egyenleteket összegezve $\dot{x}e^x y + e^x y\dot{y} = 0$ adódik, vagyis $(e^x y)^{\cdot} = 0$.) Következésképpen az egyenlet általános megoldásai $u(x, y) = \Phi(e^x y)$ alakúak, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. A karakterisztikus görbék az $e^x y = c$ egyenlettel megadott görbék, vagyis exponenciális függvények grafikonjai (beleértve az x tengelyt mint elfajuló esetet), amelyek a 18.1. (a) ábrán láthatók. b) Írjuk fel a szóban forgó egyenlethez tartozó karakterisztikus differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = e^x. \end{cases}$$

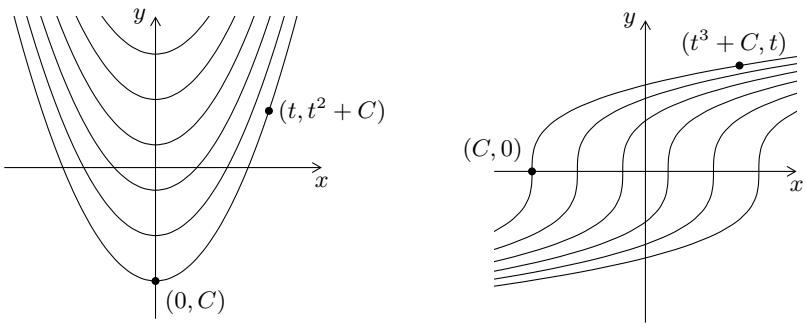
Ebből adódóan $\dot{x}e^x - \dot{y}y^2 = 0$, azaz $\left(e^x - \frac{1}{3}y^3\right)^{\cdot} = 0$, tehát a $\varphi(x, y) = e^x - \frac{1}{3}y^3$ képlettel megadott függvény állandó a karakterisztikus görbék mentén. Következésképpen az egyenlet általános megoldása $u(x, y) = \Phi\left(e^x - \frac{1}{3}y^3\right)$ alakú, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. A karakterisztikus görbék az $y = \sqrt[3]{e^x - c}$ függvények grafikonjai, amelyeket a 18.1. (b) ábra szemléltet.

5.11. Megoldás. Az 5.13. Példa (és az előtte lévő elméleti bevezető) mintájára járhatunk el. Először megkeressük a homogén egyenlet karakterisztikus görbéit. A karakterisztikus rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1, \\ \dot{y}(t) = 2x(t). \end{cases}$$

Az első egyenlet alapján $x(t) = t + c$, így a másodikból következően $y(t) = (t + c)^2 + C = x^2(t) + C$, vagyis a karakterisztikus görbék az $y = x^2 + C$ függvények grafikonjai (lásd a 18.2. (a)ábrát). Mindezt úgy is láthattuk volna, hogy a karakterisztikus rendszer első egyenletének $2x(t)$-szeresét levonjuk a második egyenletből, ekkor

$$0 = \dot{y}(t) - 2x(t)\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(y(t) - x^2(t)\right),$$



(a) $y = x^2 + C$ grafikonjai (b) $x = y^3 + C$ grafikonjai

18.2. ábra. Az 5.11. és 5.12. Feladat karakterisztikus görbéi

tehát $y(t) - x^2(t) = C$. Rögzítsünk most egy $t \mapsto (t, t^2 + C)$ karakterisztikus görbét, és ennek mentén integráljuk az inhomogén egyenlet $f(x, y) = y$ jobb oldalát a karakterisztikus görbe és a kezdeti görbe (vagyis az y tengely) $(0, C)$ metszéspontjából kiindulva:

$$u(t, t^2 + C) = u(0, C) + \int_0^t f(\tau, \tau^2 + C)\, d\tau = u(0, C) + \int_0^t (\tau^2 + C) d\tau.$$

Innen az $u(0, C) = C$ feltétel figyelembevételével kapjuk, hogy

$$u(t, t^2 + C) = C + \frac{t^3}{3} + Ct,$$

ahonnan az $x = t$ és $y = t^2 + C = x^2 + C$ jelölésekkel $C = y - x^2$, így végül

$$u(x, y) = y(x + 1) - x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

adódik. Könnyen ellenőrizhető, hogy u valóban kielégíti az egyenletet, és a mellékfeltétel szintén teljesül.

5.12. Megoldás. Az 5.13. Példa (és az előtte lévő elméleti bevezető) alapján okoskodhatunk. Első lépésben megkeressük a homogén egyenlet karakterisztikus görbéit. A karakterisztikus rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3y^2(t), \\ \dot{y}(t) = 1. \end{cases}$$

A második egyenlet alapján $y(t) = t + c$, és így az elsőből $y(t) = (t + c)^3 + + C = x^3(t) + C$, vagyis a karakterisztikus görbék az $x = y^3 + C$ (avagy

$y = \sqrt[3]{x - C}$) függvények grafikonjai (lásd a 18.2. (b) ábrát). Mindezt oly módon is láthattuk volna, hogy a karakterisztikus rendszer második egyenletének $3y^2(t)$-szeresét levonjuk az első egyenletből, és ekkor

$$0 = \dot{x}(t) - 3y^2(t)\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(x(t) - y^3(t)\right),$$

tehát $x(t) - y^3(t) = C$. Rögzítsünk most egy $t \mapsto (t^3 + C, t)$ karakterisztikus görbét, és ennek mentén integráljuk az inhomogén egyenlet $f(x, y) = x + y$ jobb oldalát a karakterisztikus görbe és a kezdeti görbe (vagyis az x tengely) $(C, 0)$ metszéspontjából kiindulva:

$$u(t^3 + C, t) = u(C, 0) + \int_0^t f(\tau^3 + C, \tau)\, d\tau = u(C, 0) + \int_0^t (\tau^3 + C + \tau) d\tau.$$

Innen az $u(C, 0) = C$ feltétel figyelembevételével kapjuk, hogy

$$u(t^3 + C, t) = C + \frac{t^4}{4} + Ct + \frac{t^2}{2},$$

ahonnan az $y = t$ és $x = t^3 + C = y^3 + C$ jelölésekkel $C = x - y^3$, így végül

$$u(x, y) = x - y^3 + xy - \frac{3}{4}y^4 + \frac{y^2}{2}$$

adódik. Könnyen ellenőrizhető, hogy u valóban kielégíti az egyenletet, és a mellékfeltétel szintén teljesül.

5.13. Megoldás. a) Vegyük észre, hogy H állandó a karakterisztikus görbék mentén, ugyanis

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) \\
&= \partial_1 H(x(t), y(t))\dot{x}(t) + \partial_2 H(x(t), y(t))\dot{y}(t) \\
&= \partial_1 H(x(t), y(t))\partial_2 H(x(t), y(t)) - \partial_2 H(x(t), y(t))\partial_1 H(x(t), y(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Egy első integrál tehát a $\varphi(x, y) = H(x, y)$ függvény. b) A szóban forgó rendszer speciális esete az a) részben szereplőnek. Valóban, legyen az f, g függvények egy-egy primitív függvénye rendre F és G. Ekkor a $H(x, y) = F(y) - G(x)$ függvényre $f(y) = \partial_2 H(x, y)$ és $-\partial_1 H(x, y) = g(x)$. Az a) rész alapján ez azt jelenti, hogy $H(x, y) = F(y) - G(x)$ első integrál.

Megjegyezzük, hogy az a) részbeli rendszer egy úgynevezett *Hamilton-féle rendszer*. Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) ír fizikus, matematikus 1833-ban a newtoni mechanikát új alapokra helyezte, a Hamilton-féle függvény bevezetése ehhez kapcsolódik. Az (x, y) változókra gondolhatunk mint

tér- és momentumkoordinátákra, ekkor a Hamilton-függvény a rendszer mozgási és potenciális energiájának összege (amely állandó). Hamilton nevéhez egyébként a kvaterniók felfedezése is fűződik, vagy például a ∇ vektor bevezetése (ezzel kapcsolatban lásd a 4.5. szakaszt).

5.14. Megoldás. A két egyenletet összeadva:

$$\dot{x}+\dot{y}=x+y+(x+y)^2=(x+y)(x+y+1)=\dot{x}(x+y+1),$$

amit úgy is írhatunk, hogy

$$\frac{d}{dt}(x+y+1)=\dot{x}(x+y+1).$$

Célszerű most a kapott összefüggés mindkét oldalát megszorozni e^{-x}-szel, mert ekkor nullára rendezés után a következő adódik:

$$0=\left(\frac{d}{dt}(x+y+1)\right)e^{-x}-(x+y+1)\dot{x}e^{-x}=\frac{d}{dt}\left((x+y+1)e^{-x}\right).$$

Ebből következően $\varphi(x,y)=(x+y+1)e^{-x}$ a rendszer egy első integrálja.

Természetesen szükséges némi próbálkozás, mire rátalálunk az iménti megoldásra. Az ötletelgetés kikerülhető a következő módszerrel. Tegyük fel, hogy a karakterisztikus görbék függvénygrafikonként állnak elő (ez megfelelő feltételek mellett lokálisan teljesül az implicit függvény-tétel miatt), azaz $y(t)=$ $=f(x(t))$ valamilyen differenciálható függvénnyel. Ezt t szerint deriválva $\dot{y}=$ $=f'(x)\dot{x}$, vagyis

$$f'(x)=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Jelen esetben

$$f'(x)=\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y=x+f(x).$$

Az f függvényre tehát az

$$f'(x)-f(x)=x$$

elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet adódott. Ennek általános megoldása

$$f(x)=ce^x-x-1,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Visszatérve az $x(t)$ és $y(t)$ függvényekre:

$$y(t)=ce^{x(t)}-x(t)-1,$$

ahonnan a c konstanst kifejezve

$$(x(t)+y(t)+1)e^{-x(t)}=c.$$

Tehát a $\varphi(x,y)=(x+y+1)e^{-x}$ függvény állandó a karakterisztikus görbék mentén. Az iménti okoskodást tovább egyszerűsíthetjük, ha az f függvényt egyszerűen kihagyjuk, és az alábbi formális átalakítást hajtjuk végre:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y.$$

Ezáltal az $y(x)$ függvényre megkaptuk az

$$y'(x)-y(x)=x$$

differenciálegyenletet.

5.15. Megoldás. a) Az egyenlet karakterisztikus rendszere:

$$\begin{cases}\dot x(t)=x(t),\\ \dot y(t)=1,\\ \dot z(t)=-1.\end{cases}$$

A rendszer megoldásait most akár expliciten is meghatározhatjuk, hiszen

$$x(t)=c_1e^t,\quad y(t)=t+c_2,\quad z(t)=-t+c_3,$$

ahol c_1, c_2, c_3 tetszőleges konstansok. Ebből jól látható, hogy $y(t)+z(t)=$ $=c_2+c_3$, tehát $\varphi_1(x,y,z)=y+z$ állandó a karakterisztikus görbék mentén, vagyis első integrál. Ezenkívül azt sem nehéz észrevenni, hogy

$$x(t)e^{z(t)}=c_1e^{c_3},$$

ezért $\varphi_2(x,y,z)=xe^z$ szintén első integrál. A kapott két első integrál parciális deriváltjaiból álló mátrix:

$$(\partial_\ell\varphi_j(x,y,z))_{j=1,2}^{\ell=1,2,3}=\begin{pmatrix}0&1&1\\ e^z&0&xe^z\end{pmatrix},$$

amelynek rangja mindenütt 2. Az egyenletben szereplő együtthatófüggvények az x tengely kivételével nem egyenlők 0-val, így az 5.14. Tétel szerint az x tengely elhagyásával nyert összefüggő halmazon $u(x,y,z)=\Phi(y+z,xe^z)$ alakú, ahol $\Phi\in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges. A kapott megoldás nyilvánvalóan folytonosan kiterjed az x tengelyre is, így végül az egész $\mathbb{R}^3$ térben $u(x,y,z)=\Phi(y+$ $+z,xe^z)$ alakú.

Érdemes megjegyeznünk, hogy első integrálokat természetesen a karakterisztikus rendszer megoldásainak ismerete nélkül is találhattunk volna. Valóban, a karakterisztikus rendszer második és harmadik egyenletét összeadva:

$$0=\dot y(t)+\dot z(t)=\frac{d}{dt}(y(t)+z(t)),$$

így $\varphi_1(x,y,z) = y+z$ konstans a karakterisztikus görbék mentén. Másrészt pedig (némi ötletelés után), az első egyenletet $e^{z(t)}$-vel, a harmadikat $x(t)e^{z(t)}$-vel szorozva, majd összegezve kapjuk, hogy

$$0 = \dot{x}(t)e^{z(t)} + x(t)\dot{z}(t)e^{z(t)} = \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{z(t)}\right),$$

tehát $\varphi_2(x,y,z) = xe^z$ ugyancsak állandó a karakterisztikus görbék mentén.

b) Az egyenlethez tartozó karakterisztikus rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t)z(t), \\ \dot{y}(t) = x(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = x^2(t) + y^2(t). \end{cases}$$

A rendszer megoldásait (nagy valószínűséggel) explicit módon nem tudjuk megadni, de első integrálokat könnyen találhatunk. Először használjuk csak az első két egyenletet, szorozzuk az elsőt $x(t)$-vel, a másodikat $y(t)$-vel és vonjuk ki egymásból őket. Ekkor

$$\dot{x}(t)x(t) - \dot{y}(t)y(t) = 0$$

adódik, azaz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2(t) - \frac{1}{2}y^2(t)\right) = 0,$$

vagyis $\varphi_1(x,y,z) = x^2 - y^2$ első integrál. Most szorozzuk meg a harmadik egyenletet $z(t)$-vel és használjuk fel az első két egyenletet. Ekkor

$$\dot{z}(t)z(t) = x(t)x(t)z(t) + y(t)y(t)z(t) = x(t)\dot{y}(t) + y(t)\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(x(t)y(t)),$$

vagyis

$$\frac{d}{dt}\left(z^2(t) - 2x(t)y(t)\right) = 0,$$

tehát $\varphi_2(x,y,z) = z^2 - 2xy$ első integrál. A megtalált két első integrál parciális deriváltjaiból álló mátrix:

$$(\partial_\ell \varphi_j(x,y,z))_{j=1,2}^{\ell=1,2,3} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ -2y & -2x & 2z \end{pmatrix},$$

amelynek rangja az $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ halmazon 2. Az egyenletben szereplő együtthatófüggvények a koordinátatengelyek kivételével nem egyenlők 0-val, így az 5.14. Tétel szerint a koordinátatengelyek elhagyásával keletkező összefüggő halmazon a megoldás $u(x,y,z) = \Phi(x^2 - y^2, z^2 - 2xy)$ alakú, ahol $\Phi \in$ $\in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges. A kapott megoldás nyilvánvalóan folytonosan kiterjed

a tengelyekre is, így végül az egész $\mathbb{R}^3$ térben $u(x,y,z)=\Phi(x^2-y^2, z^2-2xy)$ alakú.

5.16. Megoldás. A koordináta-transzformáció azt jelenti, hogy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$\begin{cases} x = \xi + \eta + \zeta, \\ y = -\xi + \eta + \zeta, \\ z = -2\eta + \zeta. \end{cases}$$

Innen egyszerű számolással

$$\xi = \frac{x-y}{2}, \quad \eta = \frac{x+y-2z}{6}, \quad \zeta = \frac{x+y+z}{3}. \tag{18.1}$$

Az $u(x,y,z)=U(\xi,\eta,\zeta)$ egyenlőséget az (x,y,z) változók szerint a többváltozós láncszabálynak megfelelően deriválva:

$$(\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u) = (\partial_\xi U, \partial_\eta U, \partial_\zeta U) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix},$$

így a (18.1) összefüggések felhasználásával

$$\begin{cases} \partial_x u = \frac{1}{2}\partial_\xi U + \frac{1}{6}\partial_\eta U + \frac{1}{3}\partial_\zeta U, \\ \partial_y u = -\frac{1}{2}\partial_\xi U + \frac{1}{6}\partial_\eta U + \frac{1}{3}\partial_\zeta U, \\ \partial_z u = -\frac{1}{3}\partial_\eta U + \frac{1}{3}\partial_\zeta U. \end{cases}$$

Ebből világosan kiolvasható, hogy

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u = \partial_\zeta U,$$

ezért az új (ξ,η,ζ) koordinátákban az eredeti differenciálegyenlet a $\partial_\zeta U = 0$ alakot ölti. Ez azt jelenti, hogy U csak az $\xi = \frac{x-y}{2}$ és $\eta = \frac{x+y-2z}{6}$ változóktól függ, vagyis

$$U(\xi,\eta,\zeta) = \Phi(\eta,\zeta) = \Phi\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y-2z}{6}\right),$$

ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges függvény. Vegyük észre, hogy

$$x - y = (x - z) - (y - z),$$
$$x + y - 2z = (x - z) + (y - z),$$

ennélfogva

$$\Phi\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y-2z}{6}\right) = \tilde{\Phi}(x - z, y - z),$$

tehát végül

$$u(x, y, z) = \tilde{\Phi}(x - z, y - z),$$

ahogy ezt az 5.16. Példában is láttuk.

5.17. Megoldás. Vezessük be a $v(x, y) := (x-y)u(x, y)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y)$ függvényt. Ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_1 v(x, y) = u(x, y) + (x - y)\partial_1 u(x, y),$$

így

$$\partial_1\partial_2 v(x, y) = \partial_2 u(x, y) - \partial_1 u(x, y) + (x - y)\partial_1\partial_2 u(x, y),$$

ahol a jobb oldal a feltevés szerint azonosan 0. Ezért (az x, majd az y változó szerinti integrálás után) $v(x, y) = f(x) + g(y)$, azaz

$$u(x, y) = \frac{f(x) + g(y)}{x - y},$$

ahol $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

5.18. Megoldás. Könnyen észrevehetjük, hogy a $c, d \in C^1(\mathbb{R}^2)$ függvények tetszőleges választása mellett az

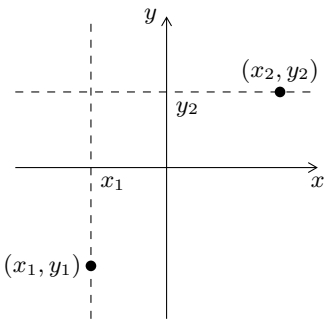
$$u(x, y) = c(x) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

és

$$u(x, y) = d(y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

alakú függvények kielégítik a szóban forgó differenciálegyenletet. Megmutatjuk, hogy más $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldása nincs az egyenletnek. Ehhez belátjuk, hogy az egyenlet bármely $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldására az egész síkon $\partial_1 u = 0$ vagy $\partial_2 u = 0$.

A bizonyítás alapgondolata a következő. Igazolni fogjuk, hogy ha létezik $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, amelyre $\partial_1 u(x_0, y_0) \neq 0$, akkor ez utóbbi a teljes $x = x_0$ függőleges egyenes mentén fennáll, és hasonlóan, ha valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban $\partial_2 u(x_0, y_0) \neq 0$, akkor ugyanez igaz a teljes $y = y_0$ vízszintes egyenes mentén. Ha léteznének olyan különböző $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ pontok,



18.3. ábra. Az 5.18. Feladat megoldásának szemléltetése

amelyekre $\partial_1 u(x_1, y_1) \neq 0$ és $\partial_2(x_2, y_2) \neq 0$, akkor az előbbiek miatt az $x = x_1$ egyenes mentén $\partial_1 u(x_1, y) \neq 0$, továbbá az $y = y_2$ egyenes mentén $\partial_2 u(x_1, y_2) \neq 0$. Ez viszont azt jelentené, hogy a két egyenes (x_1, y_2) metszéspontjában $\partial_1 u(x_1, y_2) \neq 0$ és $\partial_2 u(x_1, y_2) \neq 0$, vagyis $\partial_1(x_1, y_2)\partial_2(x_1, y_2) \neq 0$, ami ellentmond a differenciálegyenletnek.

Tegyük fel tehát, hogy létezik $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, amelyre $\partial_1 u(x_0, y_0) \neq 0$. Ekkor a $\partial_1 u$ függvény folytonossága miatt az (x_0, y_0) pont egy U környezetében $\partial_1 u \neq 0$, így az egyenlet alapján szükségképpen $\partial_2 u = 0$ az U környezetben. Ebből következően az U környezetben $u(x, y) = c(x)$, ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$. Vegyük észre, hogy emiatt $\partial_1 u(x, y) = c'(x) \neq 0$ az U környezet minden pontjában, ami azt jelenti, hogy az $x = x_0$ függőleges egyenesnek az U környezetbe eső szakaszán $\partial_1 u(x_0, y) = c'(x_0) \neq 0$, azaz $y \mapsto \partial_1 u(x_0, y) = c'(x_0) \neq 0$ konstans függvény. Állítjuk, hogy ez valójában az $x = x_0$ függőleges egyenes minden (x_0, y) pontjában teljesül. Ha ugyanis például

$$y^* := \sup \{y : \partial_1 u(x_0, y) = c'(x_0)\} < \infty \tag{18.2}$$

lenne, akkor a $\partial_1 u$ függvény folytonossága miatt $\partial_1(x_0, y^*) = c'(x_0) \neq 0$. Ekkor azonban az (x_0, y^*) pontra szóról szóra megismételhetjük az (x_0, y_0) pontra alkalmazott gondolatmenetet, és kapjuk, hogy az $x = x_0$ egyenesnek az (x_0, y^*) pont egy V környezetébe eső szakaszán $\partial_1 u(x_0, y) = c'(x_0)$. Vagyis találtunk olyan $y > y^*$ értéket, amelyre $\partial_1 u(x_0, y) = c'(x_0)$, és ez ellentmond y^* definíciójának. Ez azt jelenti, hogy a (18.2) szuprémum valójában ∞. (Érvelhettünk volna úgy is, hogy azon y értékek halmaza, amelyre $\partial_1 u(x_0, y) = c'(x_0)$, a derivált folytonossága miatt zárt, és az előbb pedig azt igazoltuk, hogy nyílt is, ami a halmaz nem üres volta miatt csak úgy lehetséges, hogy ez a halmaz maga $\mathbb{R}$, lásd az 1.22. Példát.) Hasonlóan igazolható, hogy $\inf \{y : \partial_1 u(x_0, y) = c'(x_0)\} = -\infty$, tehát az $x = x_0$ egyenes mentén $\partial_1 u(x_0, y) \neq 0$.

Megemlítjük, hogy amennyiben $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ simaságot engedünk meg, akkor másképp is célhoz érhetünk. Az egyenletet először az x, majd az y változó szerint deriválva, és a kapott két egyenleteket rendre $\partial_1 u$ és $\partial_2 u$ függvényekkel beszorozva és összegezve kapjuk, hogy

$$((\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2)\partial_1\partial_2 u = 0.$$

Ha a szorzat második tényezője valamely pontban nem 0, akkor egy egész környezetben sem 0, de ekkor az első tényező 0, ahonnan $\partial_1\partial_2 u = 0$ következne a környezetben, ami ellentmond az előbbi feltevésnek. Ez azt jelenti, hogy mindenképpen $\partial_1\partial_2 u = 0$ az egész síkon, vagyis $u(x, y) = f(x) + g(y)$, és így az egyenlet figyelembevételével $f' = 0$ vagy $g' = 0$ adódik, tehát u csak az egyik változótól függ.

5.19. Megoldás. a) Az 5.9. Példa alapján a differenciálegyenlet összes megoldása $u(x, y) = f(x) + g(y)$ alakú, ahol $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. A mellékfeltételek akkor teljesülnek, ha

$$f(x) + g(0) = x^2 \qquad \text{és} \qquad f(0) + g(y) = 4y^2,$$

azaz

$$f(x) = x^2 - g(0) \qquad \text{és} \qquad g(y) = 4y^2 - f(0).$$

Az első egyenletből $f(0) = -g(0)$ (ugyanez adódik a másodikból is), így

$$u(x, y) = (x^2 - g(0)) + (4y^2 - f(0) = x^2 + 4y^2 - (f(0) + g(0)) = x^2 + 4y^2.$$

A kapott $u(x, y) = x^2 + 4y^2$ függvény könnyen ellenőrizhetően valóban kielégíti a szóban forgó feladatot.

b) A homogén differenciálegyenlet összes megoldása az 5.10. Példa alapján $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$ alakú, ahol $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását másodfokú polinomként keresve egyszerűen adódik, hogy például az x^2 (vagy akár a $(-y^2)$, de $\frac{x^2-y^2}{2}$ is) függvény megoldás. (Úgy is eljárhattunk volna, hogy az 5.10. Példa koordináta-transzformációját alkalmazva az új változókban a $4\partial_\xi\partial_\eta U = 2$ egyenletet kapjuk, amelynek a $\frac{\xi\eta}{2}$ partikuláris megoldása ξ, majd η szerinti integrálás után könnyedén adódik.) A linearitás következtében tehát az inhomogén egyenlet összes megoldása $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y) + x^2$ alakban írható. Az első mellékfeltétel akkor teljesül, ha

$$\sin 2x + 5x^2 = u(x, x) = x^2 + f(2x) + g(0),$$

ahonnan $f(2x) = \sin 2x + 4x^2 - g(0)$, vagyis

$$f(x) = \sin x + x^2 - g(0),$$

ami egyben azt is jelenti, hogy $f(0) = -g(0)$ szükséges. A második mellékfeltétel szerint

$$\sin 2x - 7x^2 = u(x, -x) = x^2 + f(0) + g(2x),$$

tehát $g(2x) = \sin 2x - 8x^2 - f(0)$, így

$$g(x) = \sin x - 2x^2 - f(0).$$

Következésképpen

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 + f(x+y) + g(x-y) \\ &= x^2 + \sin(x+y) + \sin(x-y) + (x+y)^2 - 2(x-y)^2 \\ &= 2\sin x \cos y + 6xy - y^2. \end{aligned}$$

A kapott függvény valóban kielégíti a feladatot.

5.20. Megoldás. A feladat linearitása folytán a megoldás egyértelműségéhez szükséges és elegendő, hogy a

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad & (x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}), \\ u(0,y) = 0 \quad & (y \in \mathbb{R}), \\ \partial_1 u(0,y) = 0 \quad & (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

homogén feladatnak csakis a konstans 0 függvény megoldása a $C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \times \mathbb{R})$ függvénytérben. A mellékfeltételből következik, hogy $\partial_2 u(0,y) = 0$ és $\partial_2^2 u(0,y) = 0$ minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Az $u \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ simasági feltétel mellett a differenciálegyenlet alapján $\partial_1^2 u(0,y) = 0$. Ezért ha az u függvényt $x < 0$ esetén a tükrözés módszerét alkalmazva az

$$u(x,y) := u(-x,y) \quad (y \in \mathbb{R})$$

képlettel értelmezzük, akkor a kiterjesztéssel nyert függvényre $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ és $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$ az egész síkon. Komplex függvénytanból ismeretes, hogy ekkor u előáll mint egy reguláris függvény valós része, azaz található olyan $f(z) = = f(x+\mathrm{i}y)$ az egész komplex síkon reguláris (más szóval holomorf) függvény, amelyre $\operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y)$. Legyen $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y)$, ekkor $v \in \in C^2(\mathbb{R}^2)$ és az u, v függvényekre teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek. Ez speciálisan a képzetes tengelyen is igaz, így $\partial_2 v(0,y) = \partial_1 u(0,y) = 0$, valamint $\partial_1 v(0,y) = -\partial_2 u(0,y) = 0$, vagyis az $y \mapsto v(0,y)$ függvény állandó. Mivel $u(0,y) = 0$, ezért az f reguláris függvény szükségképpen állandó a képzetes tengelyen, ami a komplex függvénytan unicitás tétele miatt csak úgy lehetséges, ha f konstans az egész komplex számsíkon, tehát u is konstans, mégpedig $u = 0$.

5.21. Megoldás. Mivel az egyenlet szerint $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 1$ az Ω tartományon és $u \in C^2(\overline{\Omega})$, ezért $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 1$ érvényes az $\overline{\Omega}$ halmazon is, speciálisan a négyzetlap határán is. Vegyük most a tartomány egyik sarkát, például az origót. Belátjuk, hogy $\partial_1^2 u(0,0) + \partial_2^2 u(0,0) = 0$, ami ellentmond az előbb kapott egyenlőségnek. Az x tengelyen és az y tengelyen is a peremfeltétel miatt $u = 0$, ekkor $u \in C^2(\overline{\Omega})$ felhasználásával kapjuk, hogy $\partial_1 u(x,0) = \partial_2 u(0,y) = 0$, és így $\partial_1^2 u(0,0) = \partial_2^2 u(0,0) = 0$, ahonnan végül $\partial_1^2 u(0,0) + \partial_2^2 u(0,0) = 0$ adódik. Megjegyezzük, hogy a szóban forgó feladatnak létezik $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldása, amelynek előállítása például a Fourier-módszer segítségével történhet, lásd az ehhez nagyon hasonló 8.46. Példát.

5.22. Megoldás. Keressük a feladat $u(x,y) = F(x)G(y)$ alakú megoldásait, ahol $F \in C^1(\mathbb{R})$ és $G \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$F'(x)G(y) - F(x)G''(y) = 0.$$

Az $F(x)G(y)$ kifejezéssel osztás (feltéve, hogy az nem 0), majd átrendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Mivel a bal oldal csak az x változótól, a jobb oldal pedig csak az y változótól függ, ezért mindkét oldal állandó:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \lambda, \qquad \frac{G''(y)}{G(y)} = \lambda.$$

Innen $F(x) = c_1 e^{\lambda x}$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám lehet. A G függvényre $\lambda > 0$ esetén $G(y) = c_2 e^{\sqrt{\lambda} y} + c_3 e^{-\sqrt{\lambda} y}$ adódik, ahol az $u(x,0) = 0$ mellékfeltétel alapján $c_2 + c_3 = 0$. Ha $\lambda < 0$, akkor $G(y) = c_2 \sin \sqrt{|\lambda|} x + c_3 \cos \sqrt{|\lambda|} x$, ahol a mellékfeltétel miatt szükségképpen $c_3 = 0$. Végül $\lambda = 0$ választással $G(y) = c_2 y + c_3$, ahol ismét a mellékfeltétel figyelembevételével kapjuk, hogy $c_3 = 0$. Végeredményben az

$$u(x,y) = \begin{cases} c e^{\lambda x} \left(e^{\sqrt{\lambda} y} - e^{-\sqrt{\lambda} y} \right), & \text{ha } \lambda > 0, \\ c e^{\lambda x} \sin \sqrt{|\lambda|} y, & \text{ha } \lambda < 0, \\ c y, & \text{ha } \lambda = 0 \end{cases}$$

függvényeket nyerjük, ahol $c, \lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott függvények mind kielégítik a szóban forgó feladatot.

18.2. A 6. fejezetbeli feladatok megoldásai

6.1. Megoldás. Ha $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ a feladatban szereplő differenciálegyenlet megoldása, akkor a többváltozós láncszabály alkalmazásával

$$\frac{d}{ds}\left(s \mapsto u(x+sv, t+s)\right) = v \cdot \operatorname{grad} u(x+sv, t+s) + \partial_t u(x+vs, t+s) = 0,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az u függvény állandó az $s \mapsto (x+vs, t+s)$ paraméteres alakú egyenes mentén (amelynek egyébként az irányvektora éppen $(v,1)$ és egy pontja (x,t)), tehát:

$$u(x,t) = u(x+vs, t+s) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Az iménti összefüggésben $s = -t$ választással kapjuk, hogy

$$u(x,t) = u(x-vt, 0),$$

ahonnan a $\Phi(x) := u(x,0)$ függvény bevezetésével $u(x,t) = \Phi(x-vt)$ adódik. Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mellett ez megoldása a szóban forgó differenciálegyenletnek, és az előbbi okoskodás mutatja, hogy ilyen alakú az összes megoldás.

Érdemes röviden kitérni arra, hogy az 5.2.4. alszakaszban bevezetett fogalmi keretbe ágyazva valójában arról van szó, hogy a feladatban szereplő elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenlet karakterisztikus rendszere

$$\dot{x}_1(s) = v_1, \quad \dot{x}_2(s) = v_2, \quad \ldots, \quad \dot{x}_n(s) = v_n, \quad \dot{t}(s) = 1,$$

amelynek megoldásai:

$$x_1(s) = v_1 s + b_1, \quad \ldots, \quad x_n(s) = v_n s + b_n, \quad t(s) = s + b_{n+1}.$$

A karakterisztikus görbék tehát éppen a $(v_1, \ldots, v_n, 1)$ irányvektorú egyenesek, és a karakterisztikus görbék mentén a differenciálegyenlet megoldásai állandók. A karakterisztikus rendszerből az is világosan látszik, hogy bármely $j = 1, \ldots, n$ esetén

$$0 = \dot{x}_j - v_j \dot{t} = \frac{d}{dt}(x_j - v_j t),$$

vagyis a $\varphi_j(x,t) = x_j - v_j t$ függvény állandó a karakterisztikus görbék mentén, tehát első integrál. Ráadásul ezek a függvények bármely $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pontban függetlenek, ugyanis a

$$\left(\partial_\ell \varphi_j(x,t)\right)_{\ell=1,\ldots,n+1}^{j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & v_n \end{pmatrix}$$

mátrix rangja n. Ekkor az 5.14. Tételből tudjuk, hogy az összes megoldás megadható

$$u(x,t) = \Phi(\varphi_1(x,t),\dots,\varphi_n(x,t)) = \Phi(x_1 - v_1 t,\dots,x_n - v_n t) = \Phi(x - vt)$$

alakban, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges függvény.

6.2. Megoldás. a) A 6.1. Feladat szerint

$$u(x,t) = \Phi(x - vt),$$

ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges. Mivel

$$g(x) = u(x,0) = \Phi(x),$$

ezért

$$u(x,t) = g(x - vt).$$

Természetesen ez a képlet csak $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ simaság esetén szolgáltathat $u \in$ $\in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ megoldást, azonban folytonos g esetén is lehet értelmet adni neki valamilyen gyengébb értelemben (ezzel kapcsolatban bővebbet megtudhatunk a [46] könyvben).

b) Vizsgáljuk meg, hogy az $s \mapsto (x+vs, t+s)$ egyenes (azaz egy karakterisztikus görbe) mentén hogyan viselkedik az u megoldás! A differenciálegyenlet szerint

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(s \mapsto u(x+vs,t+s)\right) &= v \cdot \operatorname{grad} u(x+vs,t+s) + \partial_t u(x+vs,t+s)\\ &= f(x+vs,t+s).\end{aligned}$$

Ebből a $[0,-t]$ intervallumon való integrálással a Newton–Leibniz-tétel alapján nyerjük, hogy

$$u(x,t) - u(x-vt,0) = \int_{-t}^{0} f(x+vs,t+s)\,ds.$$

Mivel $u(x-vt,0) = g(x-vt) = 0$, ezért

$$u(x,t) = \int_{-t}^{0} f(x+vs,t+s),$$

amit az integrálási határok eltolása után

$$u(x,t) = \int_{0}^{t} f(x-v(t-\tau),\tau)\,d\tau$$

alakra is hozhatunk. Könnyen ellenőrizhető, hogy $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$ esetén ez valóban megoldás.

c) Vegyük észre, hogy ha

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + v \cdot \operatorname{grad} u_1 = 0 \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} \partial_t u_2 + v \cdot \operatorname{grad} u_2 = f \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

akkor a feladat linearitásából fakadóan az $u = u_1 + u_2$ függvényre

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \operatorname{grad} u = f \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Az u_1 és u_2 megoldások a feladat előző részeiből ismeretesek, így

$$u(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-\tau), \tau)\, d\tau.$$

6.3. Megoldás. Tekintsük az $U(x,t) := e^{ct}u(x,t)$ függvényt. Ekkor

$$\partial_t U = e^{ct}(\partial_t u + cu) \quad \text{és} \quad \operatorname{grad} U = e^{ct} \operatorname{grad} u,$$

továbbá $U(x,0) = u(x,0)$, így az eredeti kezdetiérték-feladat ekvivalens az U-ra vonatkozó alábbi kezdetiérték-feladattal:

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) + v \cdot \operatorname{grad} U(x,t) = e^{-ct} f(x,t) \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ U(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ennek a megoldása a 6.2. Feladat alapján:

$$U(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t e^{-c(t-\tau)} f(x - v(t-\tau), \tau)\, d\tau.$$

Végül tehát

$$u(x,t) = e^{-ct}U(x,t) = e^{-ct}g(x - vt) + \int_0^t e^{-c(2t-\tau)} f(x - v(t-\tau), \tau)\, d\tau.$$

6.4. Megoldás. Az $u(x,y) = Axy + Bx + Cy + D$ függvényt az x és y változók szerint kétszer deriválva kapjuk, hogy

$$\partial_x u = Ay + B, \quad \partial_x^2 u = 0, \quad \partial_y u = Ax + C, \quad \partial_y^2 u = 0,$$

tehát valóban $y\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2(x,y)u = 0$ bármely $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

Az $u(x,y) = A(3x^2 - y^3) + B(x^3 - xy^3) + C(6x^2y - y^4)$ függvényt az x és y változók szerint kétszer deriválva adódik:

$$\begin{aligned}
\partial_x u &= 6Ax + B(3x^2 - y^3) + 12Cxy,\\
\partial_x^2 u &= 6A + 6Bx + 12Cy,\\
\partial_y u &= -3Ay^2 - 3Bxy^2 + C(6x^2 - 4y^3),\\
\partial_y^2 u &= -6Ay - 6Bxy - 12Cy^2,
\end{aligned}$$

így csakugyan $y\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0$ bármely $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

6.5. Megoldás. Deriváljuk a t változó szerint a

$$C\partial_t V + GV + \partial_x I = 0 \tag{18.3}$$

egyenletet és az x változó szerint az

$$L\partial_t I + RI + \partial_x V = 0 \tag{18.4}$$

egyenletet. Ekkor

$$C\partial_t^2 V + G\partial_t V + \partial_t\partial_x I = 0, \tag{18.5}$$

$$L\partial_x\partial_t I + R\partial_x I + \partial_x^2 V = 0. \tag{18.6}$$

A (18.6) egyenletből a $\partial_x\partial_t I = \partial_t\partial_x I$ függvényt kifejezve, majd ezt a (18.5) egyenletbe helyettesítve:

$$C\partial_t^2 V + G\partial_t V - \frac{R}{L}\partial_x I - \frac{1}{L}\partial_x^2 V = 0.$$

Ebbe a (18.3) egyenletből nyert

$$\partial_x I = -C\partial_t V - GV$$

összefüggést beírva

$$C\partial_t^2 V - \frac{1}{L}\partial_x^2 V + G\partial_t V + \frac{RC}{L}\partial_t V + \frac{RG}{L}V = 0.$$

Innen C-vel való osztás után a feladatban szereplő másodrendű egyenletet nyerjük a V függvényre.

Az I függvény esete teljesen hasonló, a (18.3) egyenletet az x, a (18.4) egyenletet pedig a t változó szerint célszerű deriválni, majd ezután a megfelelő kiküszöböléseket kell csupán végrehajtani. A részleteket az olvasóra bízzuk.

6.6. Megoldás. A $v(x,y) = xu(x,y)$ függvényt mindkét változója szerint kétszer parciálisan deriválva:

$$\partial_x v = u + x\partial_x u, \qquad \partial_x^2 v = 2\partial_x u + x\partial_x^2 u,$$
$$\partial_y v = x\partial_y u, \qquad \partial_y^2 v = x\partial_y^2 u.$$

Ezért a $\Delta u = 0$ feltétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Delta v = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 2\partial_x u + x\Delta u = 2\partial_x u,$$

így

$$\partial_x(\Delta v) = 2\partial_x^2 u, \qquad \partial_x^2(\Delta v) = 2\partial_x^3 u,$$
$$\partial_y(\Delta v) = 2\partial_y\partial_x u, \qquad \partial_y^2(\Delta v) = 2\partial_y^2\partial_x u.$$

Ebből következően (a Young-tételt figyelembe véve)

$$\Delta^2 v = \partial_x^2(\Delta v) + \partial_y^2(\Delta v) = 2\partial_x^3 u + 2\partial_y^2\partial_x u = 2\partial_x(\Delta u) = 0.$$

Legyen most $v(x,y) = (x^2+y^2)u(x,y)$. Ekkor kétszeri parciális deriválás után kapjuk, hogy

$$\partial_x v = 2xu + (x^2+y^2)\partial_x u, \qquad \partial_x^2 v = 2u + 4x\partial_x u + (x^2+y^2)\partial_x^2 u,$$
$$\partial_y v = 2yu + (x^2+y^2)\partial_y u, \qquad \partial_y^2 v = 2u + 4y\partial_y u + (x^2+y^2)\partial_y^2 u,$$

és így $\Delta u = 0$ figyelembevételével

$$\Delta v = 4u + 4x\partial_x u + 4y\partial_y u.$$

A fentiekhez hasonló egyszerű számolással nyerjük, hogy

$$\partial_x(\Delta v) = 8\partial_x u + 4x\partial_x^2 u + 4y\partial_x\partial_y u,$$
$$\partial_x^2(\Delta v) = 12\partial_x^2 u + 4x\partial_x^3 u + 4y\partial_x^2\partial_y u,$$

valamint

$$\partial_y(\Delta v) = 8\partial_y u + 4x\partial_y\partial_x u + 4y\partial_y^2 u,$$
$$\partial_y^2(\Delta v) = 12\partial_y^2 u + 4x\partial_y^2\partial_x u + 4y\partial_y^3 u,$$

így végeredményben

$$\Delta^2 v(x,y) = \partial_x^2(\Delta v) + \partial_y^2(\Delta v) = 12\Delta u + 4x\partial_x(\Delta u) + 4y\partial_y(\Delta u) = 0.$$

Az előbbi számolások némileg egyszerűsíthetők oly módon, hogy skalármezők szorzatára a Δ operátorra vonatkozó szorzatderiválási szabályt alkalmazzuk:

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g.$$

Vegyük észre, hogy ez formálisan megegyezik az egyváltozós analízis

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

összefüggésével, csupán a deriválásokat kell a ∇ vektorra cserélni, és természetesen ügyelni kell, hogy a különböző objektumok között mindig a megfelelő szorzást használjuk.

6.7. Megoldás. Vezessük be a $\tilde{V}(x,\tau) := V(S,t)$ jelölést. Ekkor

$$\partial_\tau u(x,\tau) = re^{r\tau}\tilde{V}(x,\tau) + e^{r\tau}\partial_\tau \tilde{V}(x,\tau), \tag{18.7}$$

továbbá

$$\partial_x^2 u(x,\tau) = e^{r\tau}\partial_x^2 \tilde{V}(x,\tau). \tag{18.8}$$

A $\tilde{V}$ függvény parciális deriváltjainak kiszámolásához a (többváltozós) láncszabályt fogjuk segítségül hívni:

$$(\partial_x \tilde{V}(x,\tau), \partial_\tau \tilde{V}(x,\tau)) = (\partial_S V(S,t), \partial_t V(S,t)) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial x} & \dfrac{\partial S}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial \tau} \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$x = \log S - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \quad \tau = -t,$$

ezért

$$S = e^{x-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}, \quad t = -\tau,$$

így

$$\frac{\partial S}{\partial x} = e^{x-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} = S,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)e^{x-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} = -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)S,$$

valamint

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = -1.$$

Következésképpen

$$\partial_x \tilde{V} = S\partial_S V, \tag{18.9}$$
$$\partial_\tau \tilde{V} = -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)S\partial_S V - \partial_t V. \tag{18.10}$$

A (18.9) összefüggés formálisan (differenciáloperátorokra gondolva) $\partial_x = S\partial_S$, amit még egyszer alkalmazva (vagy más szóval a láncszabályt ismételten segítségül hívva)

$$\partial_x^2 \tilde{V} = S\partial_S(S\partial_S V) = S\partial_S V + S^2\partial_S^2 V. \tag{18.11}$$

Most a kapott (18.10) és (18.11) összefüggéseket a (18.8) és (18.7) egyenlőségekbe helyettesítve kapjuk:

$$\partial_\tau u - \frac{1}{2}\sigma^2\partial_x^2 u = -e^{r\tau}\left(\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\partial_S^2 V + rS\partial_S V - rV\right) = 0,$$

tehát u valóban kielégíti a megfelelő alakú egydimenziós hővezetési egyenletet.

6.8. Megoldás. Az összetett függvény deriválási szabályából következően

$$\partial_t u_\lambda(x,t) = \lambda^{\alpha+1} u(\lambda^\beta x, \lambda t),$$

továbbá

$$\partial_j^2\left(u_\lambda^\gamma(x,t)\right) = \lambda^{\alpha\gamma+2\beta}\partial_j^2\big(u^\gamma(\lambda^\beta x, \lambda t)\big).$$

Mindezek alapján

$$\partial_t u_\lambda - \Delta(u_\lambda^\gamma) = \lambda^{\alpha+1}u - \lambda^{\alpha\gamma+2\beta}\Delta(u^\gamma).$$

Mivel a feltételek szerint

$$\alpha + 1 = \alpha\gamma + 2\beta,$$

ezért

$$\partial_t u_\lambda - \Delta(u_\lambda^\gamma) = \lambda^{\alpha+1}\left(\partial_t u - \Delta(u^\gamma)\right) = 0,$$

tehát u_λ valóban kielégíti a porózus közeg differenciálegyenletét.

6.9. Megoldás. Vezessük be a

$$v(x,t) := b - \frac{\beta(\gamma-1)}{2\gamma}\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}$$

jelölést. Nyilván elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $v > 0$, ekkor pedig

$$u(x,t) = t^{-\alpha}v^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

A szorzat és összetett függvények deriválási szabályainak alkalmazásával egyszerű számolás után adódik, hogy

$$\partial_t u = -\alpha t^{-\alpha-1}v^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{\beta^2}{\gamma}|x|^2 t^{-\alpha-2\beta-1}v^{-\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}. \tag{18.12}$$

Hasonlóan, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ figyelembevételével nyerjük:

$$\partial_{x_j}(u^\gamma) = -\beta x_j t^{-\alpha\gamma-2\beta} v^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

ezért ismételt szorzatderiválás után

$$\partial_{x_j}^2(u^\gamma) = -\beta t^{-\alpha\gamma-2\beta} v^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{\beta^2}{\gamma} x_j^2 t^{-\alpha\gamma-4\beta} v^{-\frac{\gamma-2}{\gamma-1}},$$

és

$$\Delta(u^\gamma) = \partial_1^2(u^\gamma) + \ldots + \partial_1^2(u^\gamma)$$

alapján végeredményben

$$\Delta(u^\gamma) = -n\beta t^{-\alpha\gamma-2\beta} v^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{\beta^2}{\gamma} |x|^2 t^{-\alpha\gamma-4\beta} v^{-\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}. \tag{18.13}$$

Vegyük észre, hogy az α, β számok értelmezéséből fakadóan

$$\alpha = n\beta, \quad \alpha(\gamma-1) + 2\beta = 1,$$

utóbbi összefüggés folyományaként pedig érvényes

$$-\alpha - 1 = -\alpha\gamma - 2\beta \quad \text{és} \quad -\alpha - 2\beta - 1 = -\alpha\gamma - 4\beta.$$

Mindez azt jelenti, hogy a (18.12) és (18.13) kifejezések jobb oldalain szereplő tagok páronként megegyeznek, és így u valóban kielégíti a

$$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0$$

egyenletet.

6.10. Megoldás. Hasonlóan okoskodhatunk, mint az egydimenziós hővezetési egyenlet levezetésekor, azzal a különbséggel, hogy hőmennyiség helyett az autók összdarabszámának (össztömegének) változását kell nyomon követnünk. Ha egy rövid szakaszon átáramló autók mennyiségét akarjuk felírni, akkor Fourier törvénye helyett azt kell alkalmaznunk, hogy kicsiny δA felszínű, az x tengelyre merőleges felületdarabon δt idő alatt a pozitív irányban áthaladó autók össztömege körülbelül

$$\varrho(x,t)v(x,t)\delta A\delta t.$$

Felhasználva, hogy $\varrho(x,t)v(x,t) = \varrho(x,t)(1-\varrho(x,t))$, az $[x, x+\delta x]$ szakasz (lásd a korábbi 6.3. ábrát) végpontjaiban kicsiny δt idő alatt befelé haladó autók össztömegére kapjuk:

$$\delta m_1 = -\big[\varrho(x+\delta x,t)(1-\varrho(x+\delta x,t)) + \varrho(x,t)(1-\varrho(x,t))\big]\delta A\delta t$$

$$\approx -\partial_x\big(\varrho(x,t)(1-\varrho(x,t))\big)\delta x\delta A\delta t.$$

Másrészt a szakaszon a járművek össztömegének megváltozása

$$\varrho(x,t+\delta t)\delta x\delta A-\varrho(x,t)\delta x\delta A\approx\partial_t\varrho(x,t)\delta x\delta A\delta t,$$

amit a δm_1 mennyiséggel összevetve kapjuk, hogy

$$\partial_t\varrho(x,t)\delta x\delta A\delta t\approx -\partial_x\big(\varrho(x,t)(1-\varrho(x,t))\big)\delta x\delta A\delta t,$$

ahonnan a

$$\partial_t\varrho+\partial_x\big(\varrho(1-\varrho)\big)=0 \tag{18.14}$$

egyenlet adódik.

Bevezetve az $u=1-2\varrho$ függvényt, $\varrho=\frac{1}{2}(1-u)$, így $\partial_t\varrho=-\frac{1}{2}\partial_t u$, továbbá a $\varrho(1-\varrho)=\frac{1}{4}(1-u^2)$ összefüggés alapján

$$\partial_x\big(\varrho(1-\varrho)\big)=-\frac{1}{2}u\partial_x u,$$

tehát a (18.14) egyenlet egyszerű algebrai átalakítás után a következő alakot ölti:

$$\partial_t u+u\partial_x u=0.$$

6.11. Megoldás. a) A többváltozós láncszabály alkalmazásával

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t\mapsto u(x(t),t)&=\partial_x u(x(t),t)\dot x(t)+\partial_t u(x(t),t)\\&=\partial_x u(x(t),t)u(x(t),t)+\partial_t u(x(t),t)=0,\end{aligned}$$

tehát u állandó a $t\mapsto(x(t),t)$ görbék mentén. Bevezetve az $x(0)=x_0$ jelölést, ez azt jelenti, hogy

$$u(x(t),t)=u(x(0),0)=g(x_0),$$

de ekkor a $\dot x(t)=u(x(t),t)$ karakterisztikus egyenlet alapján

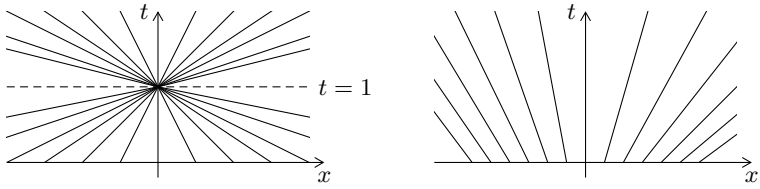
$$\dot x(t)=g(x_0),$$

ezért végül

$$x(t)=x_0+g(x_0)t\quad(t\ge 0).$$

A karakterisztikus görbék tehát az (x,t) síkon $1/g(x_0)$ meredekségű félegyenesek (a $g(x_0)=0$ esetben a t függőleges tengelyről van szó).

b) Ha $g(x)=-x$, akkor $x(t)=x_0(1-t)$ $(t\ge 0)$, amelyek az (x,t) síkon a $(0,1)$ és $(x_0,0)$ pontokra illeszkedő félegyeneseket határoznak meg,



(a) $g(x) = -x$ kezdeti feltétel (b) $g(x) = x$ kezdeti feltétel

18.4. ábra. A 6.11. Feladat a) és b) részének karakterisztikus görbéi

ezeket szemlélteti a 18.4. (a) ábra. Ebből világosan látszik, hogy bármely két karakterisztikus görbe metszi egymást a $(0, 1)$ pontban. Mivel különböző karakterisztikus görbéken az u megoldás különböző állandó (konkrétan $-x_0$), ezért két karakterisztikus görbe metszéspontjában a klasszikus megoldás nem értelmezhető, így u legfeljebb a $t < 1$ időhorizonton létezik. Meg is tudjuk adni a megoldást, hiszen

$$-x_0 = g(x_0) = u(x(t), t) = u(x_0(1 - t), t),$$

ahonnan $x = x_0(1 - t)$ jelöléssel

$$u(x, t) = \frac{x}{t - 1} \quad (0 \le t < 1).$$

Megjegyezzük, hogy ha a klasszikus megoldásnál gyengébb megoldásfogalmat vezetünk be, akkor az előbbiekhez hasonló kritikus esetekben a megoldás bővebb időhorizonton is értelmezhetővé válik. Voltaképpen itt kezdődik a lökéshullámok elmélete.

c) A $g(x) = x$ esetben $x(t) = x_0(1+t)$, amelyek az (x, t) síkon egymást nem metsző félegyeneseket határoznak meg, ez látható a 18.4. (b) ábrán. Mivel semelyik két karakterisztikus görbe nem metszi egymást, így a klasszikus megoldás a teljes $t \ge 0$ időhorizonton létezik, és könnyen meg is adhatjuk, hiszen

$$x_0 = g(x_0) = u(x(t), t) = u(x_0(1 + t), t),$$

ahonnan $x = x_0(1 + t)$ jelöléssel

$$u(x, t) = \frac{x}{t + 1} \quad (t \ge 0).$$

6.12. Megoldás. A (6.15) helyettesítés alapján közvetlenül is kiszámolhatnánk az u függvény megfelelő parciális deriváltjait. Ehelyett a számolás egyszerűsítése érdekében a helyettesítést írjuk át

$$\Phi(x, t) = e^{-\frac{1}{2\nu}\psi(x,t)}$$

alakba, ekkor

$$\Psi(x,t) = -2\nu \log \Phi(x,t),$$

így

$$\partial_x \Psi(x,t) = -2\nu \frac{\partial_x \Phi(x,t)}{\Phi(x,t)} = u(x,t).$$

Most pedig számítsuk ki a Φ parciális deriváltjait. Egyrészt

$$\partial_t \Phi = -\frac{1}{2\nu} e^{-\frac{1}{2\nu}\psi(x,t)} \partial_t \psi = -\frac{1}{2\nu} \Phi \partial_t \psi,$$

másrészt

$$\partial_x \Phi = -\frac{1}{2\nu} e^{-\frac{1}{2\nu}\psi(x,t)} \partial_x \psi = -\frac{1}{2\nu} \Phi u,$$

így

$$\partial_x^2 \Phi = -\frac{1}{2\nu} \partial_x \Phi u - \frac{1}{2\nu} \Phi \partial_x u = \frac{1}{4\nu^2} \Phi u^2 - \frac{1}{2\nu} \Phi \partial_x u.$$

Mindezek alapján

$$\partial_t \Phi - \nu \partial_x^2 \Phi = -\frac{1}{2\nu} \Phi \left(\partial_t \psi + \frac{1}{2} u^2 - \nu \partial_x u \right),$$

ahol a feltételek szerint a bal oldal nulla. Ekkor viszont a jobb oldal is nulla, és így $\Phi \neq 0$ folytán:

$$\partial_t \psi + \frac{1}{2} u^2 - \nu \partial_x u = 0. \tag{18.15}$$

Deriváljuk az iménti egyenletet az x változó szerint, majd vegyük figyelembe, hogy $\partial_x \partial_t \psi = \partial_t \partial_x \psi = \partial_t u$, így végül

$$\partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0, \tag{18.16}$$

tehát u valóban kielégíti a Burgers-egyenletet. Érdemes megjegyezni, hogy az utolsó lépés kivételével minden megfordítható: ott csak annyi igaz, hogy ha u kielégíti a (18.16) egyenletet, akkor a (18.15) bal oldala állandó. Amennyiben azzal a feltételezéssel élünk, hogy u az x változójában egy korlátos intervallumon kívül nulla, akkor már következik, hogy a (18.15) bal oldala szükségképpen a nulla állandó.

6.13. Megoldás. Célszerű először az $f(y) := \operatorname{sech}^2 y$ függvény deriváltjait kiszámolnunk. Mivel

$$f'(y) = -2 \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^3 y},$$

ezért

$$f''(y) = -2 \frac{\operatorname{ch} y \operatorname{ch}^3 y - \operatorname{sh} y \cdot 3 \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^6 y} = -2 \frac{\operatorname{ch}^2 y - 3 \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^4 y},$$

végül tehát

$$f'''(y) = -2\frac{(2\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - 6\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y)\operatorname{ch}^4 y - \left(\operatorname{ch}^2 y - 3\operatorname{sh}^2 y\right)\cdot 4\operatorname{ch}^3 y \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^8 y}$$
$$= 8\frac{2\operatorname{sh} y \operatorname{ch}^2 y - 3\operatorname{sh}^3 y}{\operatorname{ch}^5 y}.$$

Legyen most

$$y = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x - \sigma t - c),$$

ekkor az

$$u(x,t) = -\frac{\sigma}{2}f(y) = -\frac{\sigma}{2}f\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x-\sigma t - c)\right)$$

függvény parciális deriváltjainak számítása már gyerekjáték, csupán a belső függvény deriváltjára kell ügyelni, amely az x változó szerint $\sqrt{\sigma}/2$, a t változó szerint pedig $-\sigma\sqrt{\sigma}/2$. Így kapjuk:

$$\partial_t u = -\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\sigma}\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^3 y},$$
$$u\partial_x u = -\frac{1}{4}\sigma^2\sqrt{\sigma}\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^5 y},$$
$$\partial_x^3 u = -\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\sigma}\frac{2\operatorname{sh} y \operatorname{ch}^2 y - 3\operatorname{sh}^3 y}{\operatorname{ch}^5 y}.$$

Ebből következően $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$ figyelembevételével

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = -\sigma^2\sqrt{\sigma}\frac{2\operatorname{sh} y \operatorname{ch}^2 y - 6\operatorname{sh} y + 4\operatorname{sh} y \operatorname{ch}^2 y - 6\operatorname{sh}^3 y}{4\operatorname{ch}^5 y}$$
$$= -3\sigma^2\sqrt{\sigma}\frac{\operatorname{sh} y(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y - 1)}{2\operatorname{ch}^5 y} = 0,$$

tehát u valóban kielégíti a Korteweg–de Vries-egyenletet.

6.14. Megoldás. a) Mivel az egypontú $\{x\}$ halmaz korlátos és zárt, K pedig nem üres és zárt, ezért az 1.35. Állítás szerint van olyan $x_K \in K$, amelyre $|x - x_K| = \operatorname{dist}(x, K)$. Ha lenne egy x_K-tól különböző $\tilde{x} \in K$ pont, amelyre $|x - \tilde{x}| = |x - x_K|$, akkor a konvexitás folytán az $(\tilde{x} + x_K)/2$ szakaszfelező-pont a K halmazban egy olyan pont volna, amelynek x-től vett távolsága a háromszög-egyenlőtlenség miatt kisebb, mint $|x - x_K|$ (lásd a 18.5. (a) ábrát), ami lehetetlen.

b) Rögzítsünk egy $a \in \mathbb{R}^n \setminus K$ pontot, és az előző résznek megfelelően jelölje $a_K \in K$ azt az egyértelműen létező pontot, amelyre $|a - a_K| = \operatorname{dist}(a, K)$.

Tekintsük az a_K pontra illeszkedő, (egység hosszú) $\frac{a-a_K}{|a-a_K|}$ normálvektorú S hipersíkot $\mathbb{R}^n$-ben, amelyet a K halmaz támasz hipersíkjának is szokás hívni (az $n=2$ esetet lásd a 18.5. (b) ábrán):

$$S := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : (y - a_K) \cdot \frac{a - a_K}{|a - a_K|} = 0 \right\},$$

ahol „$\cdot$” továbbra is vektorok skalárszorzatát jelöli. Legyen F az S sík által határolt azon zárt féltér, amelyik nem tartalmazza az a pontot, vagyis

$$F := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : (y - a_K) \cdot \frac{a - a_K}{|a - a_K|} \leq 0 \right\}.$$

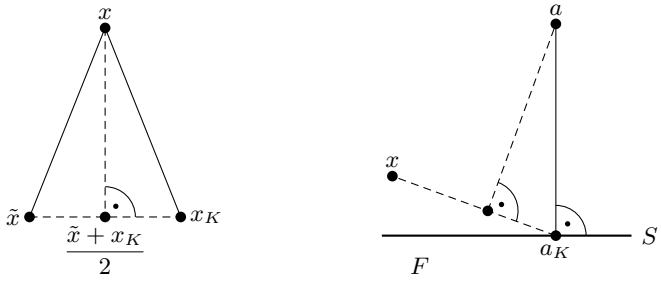
Állítjuk, hogy $K \subset F$. Valóban, ha létezne $x \in K \setminus F$, akkor a konvexitás miatt az x és a_K pontokat összekötő szakasz a K-nak része lenne, és a szakaszon található volna olyan pont (például a-ból a szakaszra állított merőleges talppontja vagy ha az xa_ka háromszög a_k-beli szöge nem hegyesszög esetben x, lásd a 18.5. (b) ábrát), amelyik közelebb van a-hoz, mint maga a_K, ami lehetetlen.

Vezessük most be a

$$v(x) := (x - a_K) \cdot \frac{a - a_K}{|a - a_K|}, \quad w(x) := |x - a_K| \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus K)$$

függvényeket (ahol $\cdot$ vektorok skalárszorzatát jelöli). Szemléletesen $v(x)$ az x pontnak az F féltértől vett távolsága (lásd a 18.6. ábrát), ugyanis $v(x)$ éppen az $(x - a_K)$ vektor azon komponensének nagysága, amelyik az S hipersík egység hosszú normálvektorának irányába esik (ha x az F féltér belsejében helyezkedik el, akkor a távolság ellentettjét kapjuk). Vegyük észre, hogy

$$v(a) = w(a) = |a - a_K|, \tag{18.17}$$



(a) Egyértelműség (b) Támasz hipersík

18.5. ábra. Pont és konvex zárt halmaz távolsága

valamint

$$\partial_\ell v(x) = \partial_\ell \left(\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - a_{K,j})(a_j - a_{K,j})}{|a - a_K|} \right) = \frac{a_\ell - a_{K,\ell}}{|a - a_K|},$$

és

$$\partial_\ell w(x) = \partial_j \left(\sum_{j=1}^n (x_j - a_{K,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x_\ell - a_{K,\ell}}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j - a_{K,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}}},$$

így a v függvény differenciálható a-ban és

$$v'(a) = w'(a) = \frac{a - a_K}{|a - a_K|}. \tag{18.18}$$

Megmutatjuk, hogy teljesül az alábbi közrefogás (amely jól látható a 18.6. ábrán):

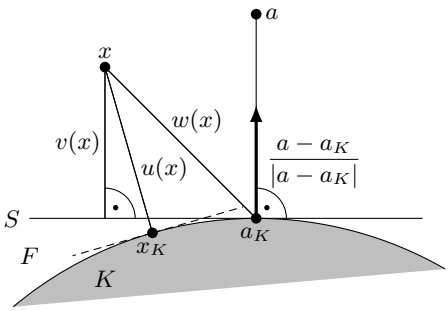
$$v(x) \le u(x) \le w(x). \tag{18.19}$$

Ekkor készen leszünk, ugyanis ennek és a (18.17) és (18.18) összefüggéseknek a felhasználásával

$$\begin{aligned} \frac{v(x) - v(a) - v'(a) \cdot (x - a)}{|x - a|} &\le \frac{u(x) - u(a) - \frac{a - a_K}{|a - a_K|} \cdot (x - a)}{|x - a|} \\ &\le \frac{w(x) - w(a) - w'(a) \cdot (x - a)}{|x - a|}, \end{aligned}$$

ahol az egyenlőtlenséglánccolat két végén álló kifejezés v és w differenciálhatóságából következően 0-hoz tart midőn $x \to a$, így a rendőrelvből kifolyólag a középső kifejezés is 0-hoz tart, ami éppen azt jelenti, hogy u differenciálható a-ban és

$$u'(a) = \frac{a - a_K}{|a - a_K|}.$$



18.6. ábra. Távolságfüggvény közrefogása

Hátravan tehát a (18.19) egyenlőtlenségek igazolása. Mivel definíció szerint

$$u(x) = \inf\{|x - y| : y \in K\},$$

ezért $u(x) \leq |x - a_K| = w(x)$. Ha x az F féltérben helyezkedik el, akkor $v(x) \leq 0$, így ezzel nem kell foglalkoznunk. Különben pedig $v(x)$ az x pontnak az F féltértől vett távolsága, de mivel $K \subset F$, ezért ez legfeljebb akkora, mint a K halmaztól vett távolsága, vagyis $u(x)$, végeredményben tehát $v(x) \leq \leq u(x)$.

6.15. Megoldás. Ha $u(x, y) = X(x)Y(y)$, akkor

$$\operatorname{grad} u(x, y) = (X'(x), Y'(y)),$$

és így a $|\operatorname{grad} u| = 1$ egyenlet alapján

$$(X'(x))^2 + (Y'(y))^2 = 1,$$

ahonnan átrendezéssel kapjuk, hogy

$$(X'(x))^2 = 1 - (Y'(y))^2.$$

Mivel az iménti egyenlet bal oldala csak az x változótól függ, a jobb oldal pedig csak az y változótól, ezért szükségképpen mindkét oldal állandó, tehát $X'(x) = \alpha$ és $Y'(y) = \beta$, ahol $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Innen

$$X(x) = \alpha x + c_1, \quad Y(y) = \beta y + c_2,$$

ahol $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ és c_1, c_2 tetszőleges konstansok.

6.16. Megoldás. Vezessük be az

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

jelölést. A továbbiakban több alkalommal is támaszkodunk arra, hogy

$$\partial_j r = \frac{1}{2} \frac{2x_j}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \frac{x_j}{r}.$$

Legyen először $p \neq n$, és az egyszerűség kedvéért használjuk az $\alpha := \frac{p-n}{p-1}$ jelölést. Ekkor a láncszabály alapján

$$\partial_j u(x) = \alpha r^{\alpha-1} \partial_j r = \alpha x_j r^{\alpha-2},$$

így

$$\operatorname{grad} u(x) = \alpha r^{\alpha-2}(x_1, \ldots, x_n),$$

ahonnan

$$|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} = |\alpha|^{p-2}\, r^{(p-2)(\alpha-1)},$$

végül $(p-2)(\alpha-1)+(\alpha-2) = -n$ felhasználásával

$$|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u(x) = \alpha\, |\alpha|^{p-2}\, r^{-n}(x_1, \dots, x_n). \tag{18.20}$$

Mivel

$$\partial_j \left(x_j r^{-n}\right) = r^{-n} - n x_j r^{-n-1} \partial_j r = r^{-n} - n x_j^2 r^{-n-2},$$

ezért

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j \left(x_j r^{-n}\right) = n r^{-n} - n r^{-n-2} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = n r^{-n} - n r^{-n} = 0,$$

tehát

$$\operatorname{div}\Big(|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u(x)\Big) = \alpha\, |\alpha|^{p-2} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \left(x_j r^{-n}\right) = 0.$$

A $p = n$ esetben hasonló számolással

$$\partial_j u(x) = \frac{1}{r} \partial_j r = x_j r^{-2},$$

így

$$\operatorname{grad} u(x) = r^{-2}(x_1, \dots, x_n),$$

tehát

$$|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} = r^{-(p-2)},$$

ahonnan

$$|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u(x) = r^{-p}(x_1, \dots, x_n) = r^{-n}(x_1, \dots, x_n).$$

Ezzel konstans szorzó erejéig a $p \neq n$ eset (18.20) összefüggését nyertük vissza, ezért valóban teljesül a p-Laplace-egyenlet.

6.17. Megoldás. Hasonlóan okoskodhatunk, mint a hővezetési egyenlet levezetésekor, azzal a különbséggel, hogy hőmennyiség változása helyett az oldott anyag tömegének változását kell nyomon követnünk. Ha egy kis felületdarabon átáramló anyag mennyiségét akarjuk felírni, Fourier törvénye helyett azt kell alkalmaznunk, hogy egy kicsiny δA területű felületdarabon δt idő alatt

$$\delta m \approx \varrho(x,t) v(x,t) \cdot \nu \delta A \delta t$$

tömegű anyag áramlik kifelé (ahol a kifele irány az, amelyik felé a ν mutat és $\cdot$ a skalárszorzást jelöli ismét). Ezt felhasználva a hővezetési egyenlet levezetését a megfelelő módosításokkal szinte szóról szóra megismételhetjük.

A kétdimenziós esetben a $[x, x+\delta x] \times [y, y+\delta y]$ téglalap (lásd a korábbi 6.5. ábrát) oldalain kicsiny δt idő befelé áramló anyagmennyiség

$$\begin{aligned}\delta m_1 &= -\big(\partial_x\big(\varrho(x,y,t)v_1(x,y,t)\big) - \partial_y\big(\varrho(x,y,t)v_2(x,y,t)\big)\big)\,\delta x\,\delta y\,\delta t \\ &= -\operatorname{div}\big(\varrho(x,y,t)v(x,y,t)\big)\delta x\,\delta y\,\delta t,\end{aligned}$$

továbbá a külső források és nyelők révén keletkező anyag mennyisége,

$$\delta m_2 = f(x,y,t)\delta x\delta y\delta t,$$

valamint a téglalapban az oldott anyag tömegének megváltozása

$$\delta m_3 \approx \varrho(x,y,t+\delta t)\delta x\delta y - \varrho(x,y,t)\delta x\,\delta y \approx \partial_t u(x,y,t)\delta t\,\delta x\,\delta y.$$

Mivel

$$\delta m_3 = \delta m_1 + \delta m_2,$$

ezért

$$\partial_t u(x,y,t)\delta x\delta y\,\delta t \approx -\operatorname{div}\big(\varrho(x,y,t)v(x,y,t)\big)\delta x\,\delta y\,\delta t + f(x,y,t)\delta x\,\delta y\,\delta t,$$

ahonnan a kívánt

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = f$$

egyenlet adódik. Mindezek alapján tehát a nem viszkózus Burgers-egyenletre tömegmegmaradási törvényként is tekinthetünk. Megjegyezzük, hogy általában a

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x(F(u(x,t))) = 0$$

alakú egyenleteket *megmaradási törvényeknek* (angolul: conservation law) szokás hívni (a Burgers-egyenlet esetében $F(u) = u^2/2$), és igen kiterjedt matematikai elméletük van (lásd például a [46] könyvet).

6.18. Megoldás. A rotáció definíciójának megfelelően

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)\mathbf{i} + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)\mathbf{j} + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\mathbf{k},$$

ahol $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ és $\mathbf{k} = (0,0,1)$ a bázisvektorok. Ezt ismételten alkalmazva:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = {} & (\partial_2\partial_1 F_2 - \partial_2^2 F_1 - \partial_3^2 F_1 + \partial_3\partial_1 F_3)\mathbf{i} \\ & + (\partial_3\partial_2 F_3 - \partial_3^2 F_2 - \partial_1^2 F_2 + \partial_1\partial_2 F_1)\mathbf{j} \\ & + (\partial_1\partial_3 F_1 - \partial_1^2 F_3 - \partial_2^2 F_3 + \partial_2\partial_3 F_2)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Másrészt

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3,$$

így

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) = &(\partial_1^2F_1+\partial_1\partial_2F_2+\partial_3\partial_1F_3)\mathbf{i}\\ &+(\partial_2\partial_1F_1+\partial_2^2F_2+\partial_2\partial_3F_3)\mathbf{j}\\ &+(\partial_1\partial_3F_1+\partial_2\partial_3F_2+\partial_3^2F_3)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Végül

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{F} = &(\partial_1^2F_1+\partial_2^2F_1+\partial_3^2F_1)\mathbf{i}\\ &+(\partial_1^2F_2+\partial_2^2F_2+\partial_3^2F_2)\mathbf{j}\\ &+(\partial_1^2F_3+\partial_2^2F_3+\partial_3^2F_3)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

A fentiek és a Young-tétel alapján koordinátánként ellenőrizhetjük, hogy

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\Delta\mathbf{F}.$$

18.3. A 7. fejezetbeli feladatok megoldásai

7.1. Megoldás. a) Az egyenlet bal oldalán szereplő másodrendű tagok szimmetrikus együtthatómátrixa (minden pontban)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa -8, ezért a mátrixnak egy pozitív és egy negatív valós sajátértéke van (lásd a 7.2. Megjegyzés végét), tehát az egyenlet (minden pontban) hiperbolikus.

b) A másodrendű deriváltak együtthatóiból alkotott szimmetrikus mátrix (minden pontban)

$$A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 1\\ 4 & 8 & 3\\ 1 & 3 & 10\end{pmatrix},$$

amelynek bal felső sarok-aldeterminánsai rendre $6, 32, 282$, amelyek mind pozitív számok, így az egyenlet (minden pontban) elliptikus (lásd a 7.2. Megjegyzést).

Megjegyezzük, hogy a Gersgorin-tétel (amelyet Szemjon Aranovics Gersgorin (1901–1933) szovjet matematikus 1931-ben fogalmazott meg) segítségével a determináns kiszámítása nélkül is látható, hogy az A mátrix minden

sajátértéke pozitív. Valóban, eszerint a sajátértékek a

$$\overline{B\left(a_{kk}, \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\right)}$$

zárt körlapok uniójában helyezkednek el a komplex számsíkon. Ezek most a $\overline{B(6,5)}$, $\overline{B(8,7)}$ és $\overline{B(10,4)}$ zárt körlapok, tehát a sajátértékek mind pozitívak. Az A egyébként úgynevezett diagonálisan domináns mátrix, ami azt jelenti, hogy a főátló bármely eleme abszolút értékben legalább akkora, mint az ugyanabban a sorban található többi elem abszolút értékeinek összege.

c) A másodrendű deriváltak együtthatói által meghatározott szimmetrikus mátrix

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & \sqrt{xy} \\ \sqrt{xy} & x+y \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa x^2+xy+y^2. Ha $y=0$, akkor a determináns x^2, ami $x\neq 0$ esetén pozitív. Abban az esetben, ha $y\neq 0$, a determináns

$$y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1\right] = y^2 p\left(\frac{x}{y}\right),$$

alakú, ahol a $p(z)=z^2+z+1$ másodfokú polinom diszkriminánsa negatív, így a polinom minden helyettesítési értéke pozitív. Ez azt jelenti, hogy a (0,0) pont kivételével az egész értelmezési tartományon (azaz $xy\geq 0$ esetén, vagyis az első és a harmadik síknegyedben) elliptikus a differenciálegyenlet. Az $x=$ $=y=0$ esetben az egyenletben szereplő összes együttható 0, tehát valójában nincs is szó differenciálegyenletről (de akár nevezhetnénk tágabb értelemben parabolikusnak is).

7.2. Megoldás. Ha az egyenlet elliptikus $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$-on, akkor ott az együtthatókból képzett 2×2-es szimmetrikus mátrix determinánsa pozitív (két azonos előjelű sajátértéke van, a determináns ezek szorzata). Hasonlóan kapjuk, hogy az $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^-$ és $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+$ síknegyedekben a determináns negatív (mert a két sajátérték ellentétes előjelű). Elég tehát olyan együtthatófüggvényeket megadni, amelyekre az $A(x,y)$ mátrix determinánsa az előbb leírtaknak megfelelően viselkedik. Többek között $\det A(x,y)=xy$ megfelel a kívánalmaknak, ami például az

$$x\partial_1^2 u + y\partial_2^2 u = 0$$

egyenlet esetén elő is áll. Ha az együtthatófüggvények folytonosak, akkor az $A(x,y)$ mátrix determinánsa a Bolzano-tétel miatt a $\{0\}\times\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}\times\{0\}$ halmazokon 0-val egyenlő, hiszen az egyik változót rögzítve, a másik változóban felvesz pozitív és negatív értéket is. Mármost $\det A(x,y)=0$ esetén

az $A(x,y)$ mátrixnak a kettő közül az egyik sajátértéke 0, ezért tágabb értelemben parabolikus. Amennyiben az együttható függvények nem folytonosak, akkor természetesen nem szükséges, hogy a szóban forgó egyeneseken a determináns eltűnjön. Egyszerűen módosítsuk az előbbi konkrét egyenletet $(x,y)=(0{,}0)$ esetén úgy, hogy $\partial_1^2 u(0{,}0)+\partial_y^2 u(0{,}0)=0$.

7.3. Megoldás. Tekintsük például az

$$\frac{1}{|x|^2+1}\Delta u = 0 \quad (x\in\mathbb{R}^n)$$

egyenletet. A másodrendű tagok együtthatóinak $A(x)$ mátrixa diagonális, méghozzá a főátló mindegyik eleme $\frac{1}{|x|^2+1}$. Ez azt jelenti, hogy minden sajátértéke $\frac{1}{|x|^2+1}$, amely bármely $x\in\mathbb{R}^n$ pontban pozitív, tehát az egyenlet $\mathbb{R}^n$ összes pontjában elliptikus. Azonban az egyenlet nem egyenletesen elliptikus $\mathbb{R}^n$-en, ugyanis

$$\frac{\langle A(x)p,p\rangle}{|p|^2} = \frac{1}{|x|^2+1} \xrightarrow{|x|\to+\infty} 0,$$

tehát nincs olyan $c>0$ szám, amelyre

$$\langle A(x)p,p\rangle \geq c\,|p|^2$$

teljesülne minden $x\in\mathbb{R}^n$ esetén.

7.4. Megoldás. Legyen $x_0\in\partial\Omega$ tetszőleges, és tekintsük az

$$|x-x_0|^2\,\Delta u = 0 \quad (x\in\Omega)$$

egyenletet. A másodrendű tagok együtthatóiból képzett $A(x)$ mátrix diagonális, amelyben a főátló minden eleme $|x-x_0|^2$, ezért az összes sajátérték $|x-x_0|^2>0$, tehát az egyenlet Ω minden pontjában elliptikus. Viszont az egyenlet nem egyenletesen elliptikus Ω-n, hiszen

$$\frac{\langle A(x)p,p\rangle}{|p|^2} = |x-x_0|^2 \xrightarrow{x\to x_0} 0,$$

ezért nem található olyan $c>0$ szám, amelyre

$$\langle A(x)p,p\rangle \geq c\,|p|^2$$

bármely $x\in\Omega$ esetén fennállna.

7.5. Megoldás. Tekintsük az $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartományban

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_j\partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

lineáris differenciálegyenletet, ahol $a_{jk} \in C(\overline{\Omega})$ (valójában a b_j és c függvények folytonosságára egyáltalán nincs szükségünk). Tudjuk, hogy

$$\langle A(x)p, p\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)p_j p_k > 0 \quad (x \in \overline{\Omega}, p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Belátjuk, hogy alkalmas c_0, c_1 pozitív konstansokkal

$$c_0 |p|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)p_j p_k \leq c_1 |p_0|^2 \quad (x \in \overline{\Omega}, p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Ehhez értelmezzük az

$$F(x,p) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)p_j p_k \quad ((x,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$$

függvényt, amely az a_{jk} függvények folytonosságából kifolyólag maga is folytonos az egész értelmezési tartományán. Vizsgáljuk most az F függvényt az $\overline{\Omega} \times S(0,1)$ korlátos, zárt halmazon, ahol $S(0,1) = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| = 1\}$ az origó középpontú egység sugarú gömbfelület. A feltétel szerint az F függvény az $\overline{\Omega} \times S(0,1) \to \mathbb{R}$ kompakt halmaz minden pontjában pozitív értéket vesz fel, így Weierstrass tétele miatt létező minimuma és maximuma egyaránt pozitív:

$$c_0 := \min\{F(x,p) : (x,p) \in \overline{\Omega} \times S(0,1)\} > 0,$$
$$c_1 := \max\{F(x,p) : (x,p) \in \overline{\Omega} \times S(0,1)\} > 0.$$

Következésképpen

$$0 < c_0 \leq F(x,p) \leq c_1 \quad ((x,p) \in \overline{\Omega} \times S(0,1)).$$

Ekkor tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $p/|p| \in S(0,1)$, ezért

$$0 < c_0 \leq F\left(x, \frac{p}{|p|}\right) \leq c_1.$$

Mivel azonban

$$F\left(x, \frac{p}{|p|}\right) = \left\langle A(x)\frac{p}{|p|}, \frac{p}{|p|}\right\rangle = \frac{1}{|p|^2}\langle A(x)p, p\rangle = \frac{1}{|p|^2}F(x,p),$$

így valóban minden $x \in \overline{\Omega}$ és $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén

$$c_0 |p|^p \leq F(x,p) \leq c_1 |p|^2.$$

7.6. Megoldás. Az egyenlet pontosan akkor elliptikus a felső nyílt félsíkban, ha ott a másodrendű deriváltak együtthatóiból felírt

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$$

szimmetrikus mátrix determinánsa pozitív, továbbá pontosan akkor hiperbolikus az alsó nyílt félsíkban, ha ott a determináns negatív. A $p(x,y) = y$ polinom éppen ilyen tulajdonságú: $y > 0$ esetén pozitív, $y < 0$ esetén pedig negatív. Amennyiben egy pillanatra konstans a, b, c polinomokat is megengedünk, akkor az $a(x,y) = y + 1$ és $b(x,y) = c(x,y) = 1$ választással $\det A(x,y) = y$, tehát az $A(x,y)$ mátrix és a hozzá tartozó differenciálegyenlet megfelel a kívánalmaknak. Most vegyük figyelembe, hogy konstans polinomokat nem engedhetünk meg, ezért szorozzuk meg az a, b, c polinomokat az (x^2+1) sehol sem 0 kifejezéssel. Ekkor a determináns az $(x^2+1)^2$ mindenütt pozitív tényezővel szorzódik, így az előjele minden pontban változatlan marad. Ez azt jelenti, hogy az

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2+1)(y+1) & x^2+1 \\ x^2+1 & x^2+1 \end{pmatrix}$$

és az ennek megfelelő

$$(x^2+1)(y+1)\partial_1^2 u + 2(x^2+1)\partial_1\partial_2 u + (x^2+1)\partial_2^2 u = 0$$

egyenlet eleget tesz a feladat által kirótt feltételeknek.

Egy további megfelelő példa a mátrixával megadva:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2+y \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa y^3.

7.7. Megoldás. Ha az $A(x,y)$ szimmetrikus együtthatómátrixra

$$\det A(x,y) = (1-y)(y+2),$$

akkor a determináns az $-2 < y < 1$ sávban pozitív, így ott az egyenlet elliptikus, továbbá a determináns negatív, ha $y > 1$ vagy $y < -2$, ezért ezeken a félsíkokon az egyenlet hiperbolikus. Konstans polinomokat is megengedve tehát például az

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 2-y & -y \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz tartozó egyenlet kielégítené a feltételeket, ugyanis $\det A(x,y) = (1-y)(y+2)$. Ezt a majdnem jó példát egyszerűen módosítva egy már

megfelelő példát nyerhetünk, ha a mátrix minden elemét megszorozzuk az (x^2+1) polinommal:

$$A(x,y)=\begin{pmatrix}(2-y)(x^2+1) & -y(x^2+1)\\ -y(x^2+1) & x^2+1\end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\det A(x,y)=(x^2+1)^2(1-y)(y+2),$$

amelynek előjele megegyezik $(1-y)(y+2)$ előjelével. Ezek alapján az

$$a(x,y)=(2-y)(x^2+1), b(x,y)=-y(x^2+1) \quad \text{és} \quad c(x,y)=x^2+1$$

polinomok megfelelnek a feladat feltételeinek.

Egy további lehetséges példa:

$$A(x,y)=\begin{pmatrix}y+5 & 1-y\\ 1-y & 1-y\end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa

$$\det A(x,y)=(y+5)(1-y)-(1-y)^2=2(1-y)(y+2).$$

7.8. Megoldás. A szóban forgó egyenlet együtthatóiból alkotott szimmetrikus mátrix:

$$A(x,y)=\begin{pmatrix}a(x,y) & \frac{1}{2}(x^2+y^2)\\ \frac{1}{2}(x^2+y^2) & c(x,y)\end{pmatrix}.$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért használjuk az $r^2=x^2+y^2$ jelölést. Ekkor olyan a,c nem konstans polinomokat kell keresnünk, amelyekre

$$\det A(x,y)=a(x,y)c(x,y)-\frac{1}{4}r^4$$

negatív az $1<r^2<4$ esetben, továbbá $\det A$ pozitív $r^2<1$ és $r^2>4$ esetén. Vegyük észre, hogy az $(r^2-1)(r^2-4)$ polinom teljesíti a $\det A$-ra vonatkozó feltételeket, így

$$a(x,y)c(x,y)=(r^2-1)(r^2-4)+\frac{1}{4}r^4=\frac{5}{4}\left(r^2-2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(r^2-2-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

tehát például

$$a(x,y)=\frac{5}{4}\left(x^2+y^2-2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$c(x,y) = x^2 + y^2 - 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

megfelel a feladat kívánalmainak.

Egy további lehetséges példa:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3r^2-4) & \frac{1}{2}r^2 \\ \frac{1}{2}r^2 & r^2-2 \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa $\frac{1}{2}(r^2-1)(r^2-4)$.

7.9. Megoldás. Az általános Leibniz-szabály (lásd a 3.11. Állítást) egyváltozós speciális esete szerint a k-szor differenciálható f, g valós függvényekre

$$(fg)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}.$$

Mindezt az $y(t) = Y(t)e^{-\alpha t}$ függvényre alkalmazva:

$$y^{(k)} = e^{-\alpha t}Y^{(k)} - k\alpha e^{-\alpha t}Y^{(k-1)} + \dots,$$

ahol a ki nem írt tagok mindegyike $(k-1)$-nél alacsonyabb rendű deriváltakat tartalmaz. Emiatt az

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

összegben csupán az első két tagból nyerünk az $Y^{(n-1)}$ deriváltat tartalmazó tagokat. Ezek a tagok:

$$-n\alpha e^{-\alpha t}Y^{(n-1)} + a_{n-1}e^{-\alpha t}Y^{(n)} = (a_{n-1} - n\alpha)\, e^{-\alpha t}Y^{(n-1)}.$$

Ebből világosan látszik, hogy $\alpha = a_{n-1}/n$ választással az Y-ra adódó egyenletben nem fog szerepelni $Y^{(n-1)}$.

7.10. Megoldás. a) A főrész transzformációjával kezdjük, ennek együtthatómátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

így a karakterisztikus egyenlet

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0,$$

amelynek gyökei, 2 és 0 a sajátértékek. A $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó $s^{(1)} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ sajátvektorokra

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(1)} \\ s_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

azaz $s_1^{(1)} = s_2^{(1)}$, ahonnan (például) az

$$s^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egység hosszú sajátvektort kapjuk. Hasonló módon

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(2)} \\ s_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ezért $s_2^{(2)} = -s_2^{(2)}$, ahonnan (például) az

$$s^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

egység hosszú sajátvektor adódik (amely természetesen merőleges $s^{(1)}$-re). Legyen ekkor

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

amelyre $B^T = B^{-1}$, továbbá

$$D := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és tekintsük a

$$C = BD = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

mátrixot. Vezessük be $(\xi, \eta) = C^T(x, y)$ koordinátákat, azaz

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x+y}{2}, \\ \eta = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \tag{18.21}$$

továbbá legyen $v(\xi, \eta) = u(x, y)$. Ekkor a 7.2.1. alszakaszban ismertetett általános elmélet szerint az új koordinátákra transzformált egyenlet főrészének együtthatómátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Másrészt az összetett függvény deriválási szabályából egyszerű számolással adódik, hogy

$$\partial_x u = \frac{1}{2}\partial_\xi v + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\eta v.$$

Mindezek alapján az egyenletünk a

$$\partial_\xi^2 v + \frac{1}{2}\partial_\xi v + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\eta v + v = \sqrt{2}\eta \tag{18.22}$$

alakot ölti, ahol a jobb oldalon felhasználtuk, hogy (18.21) alapján $x - y = \sqrt{2}\eta$. Ezek után az alacsonyabb rendű tagok transzformálását kell már csak elvégeznünk. Vezessük be a $w(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)e^{\alpha\xi+\beta\eta}$ függvényt, vagyis $v(\xi,\eta) = w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}$, ahol az α, β paraméterek értékeit szeretnénk alkalmasan meghatározni. A 7.17. Példában már kiszámolt (7.13) és (7.14) összefüggéseket a (18.22) egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2 we^{-\alpha\xi-\beta\eta} + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right)\partial_\xi we^{-\alpha\xi-\beta\eta} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\eta we^{-\alpha\xi-\beta\eta} + \left(1 + \alpha^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta - \frac{1}{2}\alpha\right)we^{-\alpha\xi-\beta\eta} = \sqrt{2}\eta\end{aligned}$$

egyenletet. A fenti alakból látszódik, hogy célszerű az $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{15}{16}\sqrt{2}$ választás, hiszen ekkor a ξ szerinti elsőrendű tag és a nulladrendű tag kiesik, ezáltal a fenti egyenlet a

$$\partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{4}\xi-\frac{15}{16}\sqrt{2}\eta} + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{4}\xi-\frac{15}{16}\sqrt{2}\eta} = \sqrt{2}\eta \tag{18.23}$$

alakra egyszerűsödik. Átszorzással kapjuk, hogy a feladatban szereplő egyenlet alakja az új koordinátákban

$$\partial_\xi^2 w + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\eta w = \sqrt{2}\eta e^{\frac{1}{4}\xi+\frac{15}{16}\sqrt{2}\eta}.$$

Majdnem készen vagyunk, már csak a $\partial_\eta w$ tag együtthatóját kell (-1)-re transzformálnunk. Ezt úgy tehetjük meg, ha bevezetjük az $\tilde{\eta} = -\sqrt{2}\eta$ koordinátát és $\tilde{w}(\xi,\tilde{\eta}) = w(\xi,\eta)$ függvényt. Ekkor $\partial_\xi^2 w(\xi,\eta) = \partial_\xi^2\tilde{w}(\xi,\tilde{\eta})$ és

$$\partial_\eta w(\xi,\eta) = -\sqrt{2}\partial_{\tilde{\eta}}\tilde{w}(\xi,\tilde{\eta}).$$

Mindezt a (18.23) egyenletbe helyettesítve nyerjük a feladatban szereplő egyenlet kanonikus alakját:

$$\partial_\eta\tilde{w}(\xi,\tilde{\eta}) - \partial_\xi^2\tilde{w}(\xi,\tilde{\eta}) = -\tilde{\eta}e^{\frac{1}{4}\xi-\frac{15}{16}\tilde{\eta}}.$$

b) A differenciálegyenlet főrészéhez tartozó szimmetrikus mátrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

amelynek karakterisztikus polinomja

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2.$$

Ennek alapján a 0 kétszeres sajátértéke az A mátrixnak, a harmadik sajátértéke pedig a 6. A $\lambda_{1,2} = 0$ sajátértékekhez tartozó $s^{(1)}$ és $s^{(2)}$ egymásra merőleges, egység hosszúságú sajátvektorokra

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(j)} \\ s_2^{(j)} \\ s_3^{(j)} \end{pmatrix} = 0,$$

vagyis

$$s_1^{(j)} + 2s_2^{(j)} + s_3^{(j)} = 0. \tag{18.24}$$

Ennek egy megoldása például az $(1, -1, 1)$ hármas, amelyet lenormálva kapjuk az egység hosszú

$$s^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sajátvektort. A 0 sajátértékhez tartozó, $s^{(1)}$-től független $s^{(2)}$ sajátvektort erre merőlegesnek választjuk, ezért

$$s_1^{(j)} - s_2^{(j)} + s_3^{(j)} = 0,$$

így a (18.24) feltétel figyelembevételével $s_2^{(2)} = 0$ és $s_3^{(2)} = -s_1^{(1)}$ adódik. Ezeknek megfelelő normált sajátvektor például

$$s^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_3 = 6$ sajátértékhez tartozó $s^{(3)}$ sajátvektorra

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(3)} \\ s_2^{(3)} \\ s_3^{(3)} \end{pmatrix} = 0,$$

azaz

$$-5s_1^{(3)} + 2s_2^{(3)} + s_3^{(3)} = 0,$$
$$2s_1^{(3)} - 2s_2^{(3)} + 2s_3^{(3)} = 0.$$

Innen $s_2^{(3)} = 2s_1^{(3)}$ és $s_3^{(3)} = s_1^{(3)}$, amelynek például az

$$s^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

normált vektor felel meg. Mindezek alapján az ortonormált sajátvektorokból (mint oszlopvektorokból) alkotott ortogonális mátrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Tekintsük most a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

diagonális mátrix segítségével képzett $C = BD$ mátrixot:

$$C = BD = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezek után vezessük be a (ξ, η, ζ) új változókat a következőképpen:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} := C^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

azaz

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z,$$
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$
$$\zeta = x + 2y + z.$$

Legyen $U(\xi,\eta,\zeta)=u(x,y,z)$, ekkor a 7.2.1. alszakaszban ismertetett elmélet alapján az egyenlet főrésze $\partial_3^2 U$ alakot ölti, a nulladrendű tag pedig változatlanul marad, így végül az egyenlet kanonikus alakja:

$$\partial_3^2 U + 2U = 0.$$

7.11. Megoldás. a) Mivel (x,y) helyett (ξ,η) koordinátákra fogunk áttérni, ezért az új és régi változók szerinti parciális deriváltak megkülönböztetése érdekében célszerű áttérnünk ∂_x, ∂_y jelölésekre. Vegyük észre, hogy a feladatban szereplő egyenlet bal oldala formálisan – a parciális deriválás operátoraival – így írható:

$$\begin{aligned} &3\partial_1^2 u - 5\partial_1\partial_2 u - 2\partial_2^2 u + 3\partial_1 u + \partial_2 u \\ &= (3\partial_x + \partial_y)(\partial_x - 2\partial_y)u + (3\partial_x + \partial_y)u. \end{aligned} \tag{18.25}$$

Ez azt sugallja számunkra, hogy érdemes lenne olyan (ξ,η) változókat bevezetni, amelyekkel

$$\begin{aligned} \partial_\xi &= 3\partial_x + \partial_y, \\ \partial_\eta &= \partial_x - 2\partial_y, \end{aligned} \tag{18.26}$$

vagy ezzel egyenértékűen

$$(\partial_\xi, \partial_\eta) = (\partial_x, \partial_y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

A 7.9. Megjegyzésben foglaltak szerint ekkor

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

ezért

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y, \\ \eta &= \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y. \end{aligned}$$

Természetesen könnyen ellenőrizhető, hogy az iménti új változókkal fennáll a (18.26) összefüggés a parciális deriváltak operátoraira. Ha most bevezetjük az $U(\xi,\eta)=u(x,y)$ új ismeretlen függvényt, akkor a (18.26) szorzatfelbontásból kifolyólag a feladatban szereplő differenciálegyenlet bal oldala az alábbi alakot ölti:

$$\partial_\xi\partial_\eta U(\xi,\eta) + \partial_\xi U(\xi,\eta) = 0.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát a ξ változó szerint integrálva kapjuk:

$$\partial_\eta U(\xi,\eta) + U(\xi,\eta) = c(\eta),$$

ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. Az így nyert egyenlet az η változóban egy elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet, amelynek általános megoldását például az integráló tényező módszerével kereshetjük meg. Az egyenlet mindkét oldalát az e^η kifejezéssel megszorozva adódik:

$$e^\eta \partial_\eta U(\xi,\eta) + e^\eta U(\xi,\eta) = c(\eta)e^\eta,$$

ahol a bal oldalon éppen az $e^\eta U(\xi,\eta)$ függvénynek az η változó szerinti parciális deriváltja áll, a jobb oldal pedig $c \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges volta miatt egy tetszőleges $\tilde{c} \in C^1(\mathbb{R})$ függvény ($\tilde{c}(\eta) = e^\eta c(\eta)$ a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés közöttük). Ekkor η szerinti integrálás után kapjuk, hogy

$$e^\eta U(\xi,\eta) = C(\eta) + D(\xi),$$

vagyis az U klasszikus megoldás általános alakja

$$U(\xi,\eta) = (C(\eta) + D(\xi))e^{-\eta},$$

ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Végezetül tehát

$$u(x,y) = (C(x-3y) + D(2x+y))e^{-\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}y},$$

ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőlegesek.

b) A 7.18. Példa mintájára járunk el. Annak érdekében, hogy megsejtsük, milyen módon célszerű az egyenletet transzformálnunk, ismét írjuk át operátoros alakba az egyenletünk bal oldalát az I identitás operátor segítségével. Ekkor formálisan

$$\partial_1\partial_2 u - 2\partial_1 u - 3\partial_2 u + 6u = (\partial_1 - 3I)(\partial_2 - 2I)u.$$

Emiatt célravezető a feladatban szereplő egyenlet mindkét oldalát megszoroznunk az e^{-3x-2y} kifejezéssel. Ekkor az előbbi okoskodás alapján a bal oldalon azt kapjuk, hogy

$$e^{-3x-2y}\left(\partial_1\partial_2 u - 2\partial_1 u - 3\partial_2 u + 6u\right) = \partial_1\partial_2\left(e^{-3x-2y}u\right).$$

Ez utóbbi összefüggés egyébként egyszerű számolással is ellenőrizhető, ha az operátoros érvelés nem elég meggyőző. Az egyenletünk tehát így alakul:

$$\partial_1\partial_2\left(e^{-3x-2y}u\right) = 2e^{-2x-y}.$$

Ezt először az x, majd az y változó szerint integrálva adódik, hogy

$$e^{-3x-2y}u(x,y) = e^{-2x-y} + C(x) + D(y),$$

ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Végeredményben a feladat egyenletének összes megoldása:

$$u(x,y) = e^{x+y} + e^{3x+2y}(C(x) + D(y)),$$

ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőlegesek.

Természetesen úgy is eljárhattunk volna, hogy bevezetjük a

$$v(x,y) = e^{\alpha x+\beta y}u(x,y)$$

függvényt, és az α, β paraméterek értékét oly módon próbáljuk meghatározni, hogy a v függvényre adódó egyenletben az első és nulladrendű tagok együtthatói közül minél több legyen 0-val egyenlő. Ekkor a (7.16) és a (7.17) összefüggések felhasználásával egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\partial_1\partial_2 u - 2\partial_1 u - 3\partial_2 u + 6u\\ &\quad = e^{-\alpha x-\beta y}\left(\partial_1\partial_2 v - (\beta+2)\partial_1 v - (\alpha+3)\partial_2 v + (\alpha\beta+2\alpha+3\beta+6)v\right),\end{aligned}$$

ahonnan az $\alpha = -3$ és $\beta = -2$ választás tűnik a legcélszerűbbnek. Ezzel v-re nézve az egyenlet

$$e^{3x+2y}\partial_1\partial_2 v = 2e^{x+y}$$

alakot ölti, ez lényegében ugyanaz, mint amit az első megoldásban kaptunk.

Végül utolsó észrevételként annyit jegyzünk meg, hogy ha az elején észrevesszük, hogy az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása e^{x+y}, akkor ezután már elegendő a homogén egyenlettel foglalkozni (ezzel persze az előbbi okoskodások lényegi részét nem kerülhetjük ki).

7.12. Megoldás. Egy járható út lehetne, hogy elvégezzük az egyenlet főrészének kanonikus alakra hozatalát. A sajátvektorok számítását elkerülendő, ebben a megoldásban inkább az operátoros átírásból sejtjük meg, hogy milyen új változókat célszerű bevezetni. Vegyük észre, hogy

$$\partial_1^2 u + 2\partial_1\partial_2 u + \partial_2^2 u = (\partial_x + \partial_y)^2 u,$$

ezért célravezetőnek látszik olyan (ξ, η) koordinátákra való áttérés, amelyekkel fennáll

$$\begin{aligned}\partial_\xi &= \partial_x + \partial_y,\\ \partial_\eta &= \partial_y.\end{aligned}$$

(Utóbbi összefüggés helyett természetesen sok egyéb más választás is kínálkozhat, ennek nincs számottevő szerepe a végeredmény szempontjából – ezt a kíváncsi olvasó meggondolhatja.) Mátrixos alakban ez azt jelenti, hogy

$$(\partial_\xi, \partial_\eta) = (\partial_x, \partial_y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

ahonnan a (7.9). Megjegyzésben foglaltak szerint

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

ezért

$$\begin{aligned}\xi &= x,\\ \eta &= -x+y.\end{aligned}$$

Bevezetve az $U(\xi,\eta)=u(x,y)$ új ismeretlen függvényt, a feladatban szereplő egyenlet az U függvényre nézve így alakul:

$$\partial_\xi^2 U(\xi,\eta)+U(\xi,\eta)=1+\xi(\xi+\eta).$$

Ez minden rögzített η esetén egy másodrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet. Az ilyen típusú egyenletek elméletéből jól ismert, hogy a homogén egyenlet összes megoldása

$$U_h(\xi,\eta)=c_1(\eta)\cos\xi+c_2(\eta)\sin\xi$$

alakú, ahol $c_1,c_2\in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények (azért nem konstansok most, mert minden rögzített η mellett más-más értéket vehetnek fel). Egy partikuláris megoldást célszerű a következő próbafüggvény alakjában keresni:

$$U_p(\xi,\eta)=\xi^2+\xi\eta+c.$$

Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\partial_\xi^2 U_p+U_p=\xi^2+\xi\eta+2+c,$$

így $c=-1$, tehát

$$U(\xi,\eta)=U_h(\xi,\eta)+U_p(\xi,\eta)=c_1(\eta)\cos\xi+c_2(\eta)\sin\xi+\xi^2+\xi\eta-1,$$

vagyis végül az egyenlet összes megoldása:

$$u(x,y)=c_1(x-y)\cos x+c_2(x-y)\sin x+xy-1.$$

(Mivel c_1,c_2 tetszőlegesek voltak, ezért $c_1(y-x)$, $c_2(y-x)$ helyett $c_1(x-y)$ és $c_2(x-y)$ is írható, ami kicsit kényelmesebb lesz számunkra.) Most már

csupán annyi van hátra, hogy a két mellékfeltétel teljesülését garantáljuk. Az $u(x,0)=0$ feltétel alapján

$$c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x - 1 = 0, \tag{18.27}$$

a $\partial_2 u(x,0)=0$ feltétel miatt pedig

$$-c_1'(x)\cos x - c_2'(x)\sin x + x = 0. \tag{18.28}$$

A (18.27) egyenletet az x változó szerint deriválva

$$c_1'(x)\cos x - c_1(x)\sin x + c_2'(x)\sin x + c_2(x)\cos x = 0,$$

amit a (18.28) egyenlethez hozzáadva kapjuk, hogy

$$c_1(x)\sin x - c_2(x)\cos x = x. \tag{18.29}$$

Szorozzuk a (18.27) egyenletet $\cos x$-szel, a (18.29) egyenletet pedig $\sin x$-szel, majd adjuk össze a kapott egyenleteket, ekkor

$$c_1(x) = x\sin x + \cos x$$

adódik. Hasonló módon, a (18.27) egyenlet $\sin x$-szeresét és a (18.29) egyenlet $(-\cos x)$-szeresét összeadva

$$c_2(x) = -x\cos x + \sin x.$$

Végeredményben tehát a Cauchy-feladat egyetlen megoldása

$$\begin{aligned} u(x,y) = (x-y)\,&[\sin(x-y)\cos x - \cos(x-y)\sin x] \\ &+ \cos(x-y)\cos x + \sin(x-y)\sin x + xy - 1, \end{aligned}$$

ami a

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

trigonometrikus addíciós képletek felhasználásával az

$$u(x,y) = -(x-y)\sin y + \cos y + xy - 1$$

alakot ölti.

7.13. Megoldás. Első lépésben meghatározzuk az egyenlet összes klasszikus megoldását, majd ezt követően kiválasztjuk ezek közül azt, amelyik kielégíti

a két mellékfeltételt. Használjuk a ∂_x, ∂_y parciális deriváltak operátorait, továbbá legyen I az identitás, azaz $Iu = u$ minden u függvényre. Ekkor vegyük észre, hogy

$$\partial_x^2 u - \partial_y^2 u - 2\partial_x u + u = (\partial_x - I)^2 u - \partial_y^2 u = (\partial_x + \partial_y - I)\,(\partial_x - \partial_y - I)\,u.$$

Célszerű tehát olyan (ξ, η) új változókat bevezetni, amelyekkel

$$\begin{aligned} \partial_\xi &= \partial_x + \partial_y, \\ \partial_\eta &= \partial_x - \partial_y, \end{aligned} \tag{18.30}$$

vagy ezzel egyenértékűen

$$(\partial_\xi, \partial_\eta) = (\partial_x, \partial_y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A 7.9. Megjegyzésben foglaltak szerint ekkor

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ezért

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x+y}{2}, \\ \eta &= \frac{x-y}{2}, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta, \\ y &= \xi - \eta. \end{aligned}$$

Ezek alapján a $v(\xi, \eta) = u(x, y) = u(\xi+\eta, \xi-\eta)$ függvényre nézve az egyenlet a következő alakot ölti:

$$(\partial_\xi - I)(\partial_\eta - I)v = \xi - \eta.$$

Innen a 7.18. Példa mintájára folytatjuk a megoldást. Mivel

$$e^{-\xi-\eta}(\partial_\xi - I)v = \partial_\xi \left(e^{-\xi-\eta} v\right),$$

továbbá

$$e^{-\xi-\eta}(\partial_\eta - I)v = \partial_\eta \left(e^{-\xi-\eta} v\right),$$

ezért világosan látható, hogy érdemes az egyenletet az $e^{-\xi-\eta}$ kifejezéssel szorozni és átírni a

$$V(\xi,\eta) := e^{-\xi-\eta}v(\xi,\eta)$$

függvényre. Ekkor kapjuk:

$$\partial_\xi\partial_\eta V(\xi,\eta) = (\xi-\eta)e^{-\xi-\eta}.$$

Ezt a ξ, majd az η változó szerint integrálva, és felhasználva, hogy

$$\int ze^{-z}\,dz = -e^{-z}(z+1)+c,$$

a $V(\xi,\eta)$ függvény általános alakját nyerjük:

$$V(\xi,\eta) = e^{-\xi-\eta}(\xi-\eta) + C(\xi) + D(\eta).$$

Ebből adódóan

$$v(\xi,\eta) = e^{\xi+\eta}V(\xi,\eta) = \xi-\eta+e^{\xi+\eta}(C(\xi)+D(\eta)),$$

tehát

$$u(x,y) = y + e^x(C(x+y)+D(x-y)),$$

ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. (Az y partikuláris megoldást persze rögtön az elején is észrevehettünk volna, ezzel némileg egyszerűbbé válna az előbbi számolás.) Most már csak a mellékfeltételek garantálása van hátra. Az $u(x,0) = e^x$ feltétel alapján

$$C(x) + D(x) = 1, \tag{18.31}$$

a $\partial_2 u(x,0) = e^x + 1$ feltétel miatt pedig

$$C'(x) - D'(x) = 1. \tag{18.32}$$

Deriváljuk a (18.31) egyenletet a változója szerint, majd a kapott egyenletet a (18.32) egyenlethez adjuk hozzá. Ekkor $2C'(x) = 1$ adódik, ezért $C(x) = \frac{1}{2}x + \tilde{C}$, ahol $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Innen a (18.31) egyenlet alapján $D(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \tilde{C}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} u(x,y) &= y + e^x(C(x+y)+D(x-y)) \\ &= y + e^x\Big(\frac{1}{2}(x+y) + \tilde{C} + 1 - \frac{1}{2}(x-y) - \tilde{C}\Big) = y + e^x(1+y). \end{aligned}$$

Végeredményben tehát a Cauchy-feladat egyetlen klasszikus megoldása

$$u(x,y) = y + e^x(1+y).$$

7.14. Megoldás. Az $u = v \circ \Phi = u \circ (\varphi, \psi)$ függvényre fogjuk a többváltozós láncszabályt alkalmazni. Hogy a deriválás során kapott kifejezéseinket tömörítsük, célszerű szummás jelölésre áttérni, és ennek érdekében legyen $\varphi_2 := \psi$. Ekkor $\ell = 1, 2$ esetén

$$\partial_\ell u = \sum_{j=1}^{2} \left((\partial_j v) \circ \Phi\right) (\partial_\ell \varphi_j),$$

amit még egyszer parciálisan deriválva a k-adik ($k = 1, 2$) változó szerint:

$$\partial_k \partial_\ell u = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} \left((\partial_i \partial_j v) \circ \Phi\right) (\partial_k \varphi_i)(\partial_\ell \varphi_j) + \sum_{j=1}^{2} \left((\partial_j v) \circ \Phi\right) (\partial_k \partial_\ell \varphi_j). \tag{18.33}$$

Az $a_{11} := a$, $a_{12} := a_{21} := b$ és $a_{22} := c$ egyszerűsítő jelölésekkel

$$a\partial_1^2 u + 2b\partial_1 \partial_2 u + c\partial_2^2 u = \sum_{k,\ell=1}^{2} a_{k\ell} \partial_k \partial_\ell u,$$

ahova a (18.33) kétszeres parciális deriváltakat behelyettesítve látható, hogy $\partial_i \partial_j v \circ \Phi$ együtthatója

$$\sum_{k,\ell=1}^{2} a_{k\ell} (\partial_k \varphi_i)(\partial_\ell \varphi_j).$$

Ha most visszatérünk az eredeti a, b, c és φ, ψ jelölésekre (és a kapott egyenlet mindkét oldalába a Φ^{-1} függvényt helyettesítjük), akkor a v-re adódó egyenlet főrészének együtthatói a kívánt α, β, γ kifejezéseket adják. Megjegyezzük, hogy például $\partial_1 v$ együtthatója

$$\left(a\partial_1^2 \varphi + 2b\partial_1 \partial_2 \varphi + c\partial_2^2 \varphi\right) \circ \Phi^{-1}$$

lesz, és hasonló adódik $\partial_2 v$ együtthatójára φ helyett ψ-vel.

7.15. Megoldás. A feladat állítása következik a 7.14. Feladatból, hiszen ha φ kielégíti a karakterisztikus egyenletet, akkor $\partial_1^2 v$ együtthatója

$$\alpha = a(\partial_1 \varphi)^2 + 2b(\partial_1 \varphi)(\partial_2 \varphi) + c(\partial_2 \varphi)^2 = 0.$$

7.16. Megoldás. a) Jelen esetben a karakterisztikus egyenlet teljes négyzetté alakítható:

$$\left(\partial_1 w(x, y) - x\partial_2 w(x, y)\right)^2 = 0,$$

vagyis az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletről van szó:

$$\partial_1 w(x,y) - x\partial_2 w(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2). \tag{18.34}$$

Az ehhez tartozó karakterisztikus (közönséges) differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1, & (18.35) \\ \dot{y}(t) = -x(t). & (18.36) \end{cases}$$

Az első egyenletből $x(t) = t + c_1$, így a második alapján $\dot{y}(t) = -t - c_1$, ezért

$$y(t) = -\frac{1}{2}(t+c_1)^2 + c_2 = -\frac{x^2(t)}{2} + c_2.$$

A közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásgörbéi tehát

$$y + \frac{x^2}{2} = c$$

egyenletű parabolák. Ezek mentén az elsőrendű (18.34) egyenlet megoldásai állandók, így a

$$w(x,y) = F\left(y + \frac{x^2}{2}\right)$$

függvények kielégítik a (18.34) egyenletet, ahol $F \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. Megjegyezzük, hogy mindezt az $x(t)$, $y(t)$ függvények konkrét meghatározása nélkül úgy is megkaphattuk volna, hogy a (18.35) egyenletet $x(t)$-vel szorozzuk, majd a kapott egyenlethez a (18.36) egyenletet hozzáadjuk:

$$0 = \dot{x}(t)x(t) + \dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2(t)}{2} + y(t)\right).$$

A $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + y$ függvény tehát első integrálja a rendszernek, és így $w(x,y) = F(\varphi(x,y))$ alakban adódik az általános megoldás.

b) A feladatban szereplő függvényegyüttthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet karakterisztikus görbéi az

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F\left(y + \frac{x^2}{2}\right) = 0\right\}$$

görbék. Ezek a 18.7. ábrán látható $y = -\frac{x^2}{2} + c$ egyenletű parabolák.

c) Tekintsük a $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + y$ megoldást, és az

$$u(x,y) = v\left(x, \frac{x^2}{2} + y\right)$$

összefüggés által meghatározott ismeretlen függvényt. Az egyszerűség kedvéért használjuk a $\xi = x$ és $\eta = \frac{x^2}{2} + y$ jelöléseket, ezáltal $y = \eta - \frac{\xi^2}{2}$, tehát könnyen láthatóan $(x, y) \mapsto (x, \varphi(x, y))$ kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijekció. Mivel

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix},$$

ezért a többváltozós láncszabály alapján

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= \partial_\xi v(\xi, \eta) + x \partial_\eta v(\xi, \eta), \\ \partial_y u(x, y) &= \partial_\eta v(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Ismételt deriválással hasonló módon adódik:

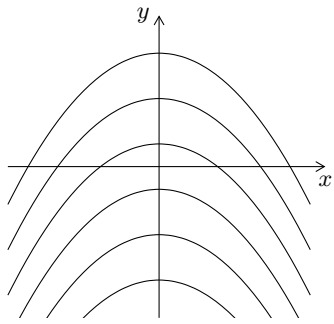
$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &= \partial_\xi^2 v + 2x \partial_\xi \partial_\eta v + \partial_\eta v + x^2 \partial_\eta^2 v, \\ \partial_x \partial_y u &= \partial_\xi \partial_\eta v + x \partial_\eta^2 v, \\ \partial_y^2 u &= \partial_\eta^2 v. \end{aligned}$$

Mindezek felhasználásával

$$\partial_x^2 u - 2x \partial_x \partial_y u + x^2 \partial_y^2 u = \partial_\xi^2 v + \partial_\eta v,$$

tehát a feladatban szereplő differenciálegyenlet a

$$\partial_1^2 v(\xi, \eta) + \partial_2 v(\xi, \eta) = 0 \quad ((\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2)$$



18.7. ábra. $y = -\frac{x^2}{2} + c$ grafikonjai

alakot ölti, amely lényegében a kanonikus alak a parabolikus esetben. Ebből a $\tilde{v}(\xi,\eta)=v(\xi,-\eta)$ függvény bevezetésével nyerhetjük a

$$\partial_2\tilde{v}-\partial_1^2\tilde{v}=0$$

alakot, amely az egydimenziós hővezetési egyenlet, ha a második változót tekintjük az időnek.

18.4. A 8. fejezetbeli feladatok megoldásai

8.1. Megoldás. a) Az u függvény képletéből az x és y változók szerinti parciális deriválással kapjuk, hogy

$$\partial_x u(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \partial_y u(x,y)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

ahonnan ismét a megfelelő változók szerinti deriválással

$$\partial_x^2 u(x,y)=\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3},\quad \partial_y^2 u(x,y)=\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

adódik, így valóban $\Delta u=\partial_x^2 u+\partial_y^2 u=0$ az u értelmezési tartományán.

Vegyük észre, hogy $z=x+\mathrm{i}y$ esetén $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$, így $x=\operatorname{Re}\overline{z}$ és $x^2+y^2=$ $=|z|^2=z\overline{z}$, emiatt a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kipontozott komplex számsíkon

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\operatorname{Re}\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\operatorname{Re}\frac{1}{z}.$$

Minthogy a $z\mapsto\frac{1}{z}$ függvény az értelmezési tartományán holomorf, ezért a 8.65. Tétel alapján u harmonikus.

b) Az u függvény alakjából az x és y változók szerinti parciális deriválással adódik, hogy

$$\partial_x u(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \partial_y u(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2},$$

ahonnan ismét a megfelelő változók szerinti deriválással kapjuk, hogy

$$\partial_x^2 u(x,y)=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \partial_y^2 u(x,y)=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

így csakugyan $\Delta u=\partial_x^2 u+\partial_y^2 u=0$ az u értelmezési tartományán.

Komplex függvénytanból ismeretes, hogy a $\log z$ függvény a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kipontozott komplex számsík bármely pontja körül lokálisan holomorf módon értelmezhető, mégpedig

$$\log z=\log r+\mathrm{i}\varphi,$$

ahol r a $z = x + \mathrm{i}y$ komplex szám abszolút értéke, φ pedig az argumentuma (amely a 2π szerinti periodicitás erejéig van egyértelműen meghatározva). Ekkor

$$u(x,y) = \log(x^2+y^2) = 2\log\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{Re}(2\log z),$$

tehát a 8.65. Tétel alapján u harmonikus függvény.

c) Az u függvényt az x és y változók szerint parciálisan deriválva:

$$\partial_x u(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \partial_y u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

ahonnan a megfelelő változók szerinti újbóli deriválással kapjuk, hogy

$$\partial_x^2 u(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_y^2 u(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

így valóban $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ az u értelmezési tartományán.

Vegyük észre (lásd a 8.14. ábrát), hogy $x > 0$ esetén $u(x,y)$ éppen a $z = x + \mathrm{i}y$ komplex szám φ argumentumát (szögét) adja meg, ezért u a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kipontozott komplex számsík bármely pontja körül lokálisan holomorf módon értelmezhető $\log z = \log r + \mathrm{i}\varphi$ függvény képzetes része, tehát a 8.65. Tétel és a 8.66. Megjegyzés alapján u harmonikus. Mivel az arctg függvény értékkészlete a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum, ezért az $x < 0$ esetben u a φ argumentumnak az iménti intervallumba eső, rögzített szöggel való eltoltját adja meg. A konstans hozzáadása nem befolyásolja a függvény harmonikus mivoltát, ezért u ebben az esetben is harmonikus függvény.

d) Mivel az u függvény felbomlik egy csak x-től és egy csak y-tól függő tényező szorzatára, ezért az x és y változók szerinti parciális deriválások könnyedén elvégezhetők a megfelelő tényezők kétszeri deriválásával, így

$$\partial_x^2 u(x,y) = e^x(\cos y + \sin y), \quad \partial_y^2 u(x,y) = -e^x(\cos y + \sin y),$$

tehát valóban $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ az egész síkon.

Vegyük észre, hogy az u függvény valójában a komplex számsíkon holomorf

$$e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

exponenciális függvény valós és képzetes részeinek összege. Mivel a 8.65. Tétel és a 8.66. Megjegyzés alapján mind a valós, mind pedig a képzetes rész harmonikus, ezért az összegük, vagyis u is harmonikus.

8.2. Megoldás. Az $U(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ függvényt a többváltozós láncszabály alkalmazásával az r változó szerint parciálisan deriválva nyerjük, hogy

$$\partial_r U = (\partial_x u)\cos\varphi + (\partial_y u)\sin\varphi,$$

így

$$r\partial_r U = (\partial_x u)(r\cos\varphi) + (\partial_y u)(r\sin\varphi) = x\partial_x u + y\partial_y u.$$

Ezt ismét a láncszabály alapján r szerint deriválva

$$\partial_r(r\partial_r U) = \partial_x\left(x\partial_x u + y\partial_y u\right)\cos\varphi + \partial_y\left(x\partial_x u + y\partial_y u\right)\sin\varphi,$$

ahonnan

$$\partial_r(r\partial_r U) = (\partial_x u + x\partial_x^2 u + y\partial_x\partial_y u)\cos\varphi + (x\partial_y\partial_x u + \partial_y u + y\partial_y^2 u)\sin\varphi,$$

tehát rendezés után

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r U) = \partial_x^2 u\cos^2\varphi + \partial_y^2 u\sin^2\varphi + \partial_x u\frac{\cos\varphi}{r} + \frac{\sin\varphi}{r}\partial_y u + 2\partial_x\partial_y u\cos\varphi\sin\varphi. \tag{18.37}$$

Hasonlóképpen nyerjük az $U(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ függvény φ szerinti parciális deriváltját a láncszabály segítségével:

$$\partial_\varphi U = (\partial_x u)(-r\sin\varphi) + (\partial_y u)(r\cos\varphi),$$

ahonnan a szorzatfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\partial_\varphi^2 U = \partial_\varphi(\partial_x u)(-r\sin\varphi) + \partial_x u(-r\cos\varphi) + \partial_\varphi(\partial_y u)(r\cos\varphi) + \partial_y u(-r\sin\varphi).$$

Mivel

$$\partial_\varphi(\partial_x u) = (\partial_x^2 u)(-r\sin\varphi) + (\partial_y\partial_x u)(r\cos\varphi),$$

valamint

$$\partial_\varphi(\partial_y u) = (\partial_x\partial_y u)(-r\sin\varphi) + (\partial_y^2\partial_x u)(r\cos\varphi),$$

ezért rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 U = \partial_x^2 u\cos^2\varphi + \partial_y^2 u\sin^2\varphi - \partial_x u\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_y u - 2\partial_x\partial_y u\cos\varphi\sin\varphi. \tag{18.38}$$

Ezek után a (18.37) és (18.38) összefüggések figyelembevételével adódik, hogy

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r U) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 U = (\partial_x^2 + \partial_y^2 u)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \Delta u.$$

8.3. Megoldás. Egyszerű deriválással nyerjük, hogy az $U_1(r,\varphi) = r^t \cos t\varphi$ függvényre

$$\partial_r(r\partial_r U_1) = t^2 r^{t-1}\cos t\varphi, \quad \partial_\varphi^2 U_1 = -t^2 r^t \cos t\varphi,$$

továbbá az $U_2(r,\varphi) = r^t \sin t\varphi$ függvényre

$$\partial_r(r\partial_r U_2) = t^2 r^{t-1}\sin t\varphi, \quad \partial_\varphi^2 U = -t^2 r^t \sin t\varphi.$$

Mindezek alapján

$$\frac{1}{r}\left(\partial_r(r\partial_r U_j) + \frac{1}{r}\partial_\varphi^2 U_j\right) = 0 \quad (j=1,2),$$

tehát a 8.2. Feladatban szereplő összefüggésből következően a polárkoordinátás alakban megadott U_j függvények valóban kielégítik a Laplace-egyenletet.

Tekintsük most a

$$z^t = e^{t\log z}$$

függvényt, ahol $\log z = \log r + \mathrm{i}\varphi$ a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kipontozott komplex számsík bármely pontja körül lokálisan holomorf módon értelmezhető. Ekkor

$$z^t = e^{t(\log r + \mathrm{i}t\varphi)} = r^t(\cos t\varphi + \mathrm{i}\sin t\varphi),$$

vagyis

$$U_1(r,\varphi) = \operatorname{Re} z^t = \operatorname{Re}(x+\mathrm{i}y)^t \quad \text{és} \quad U_2(r,\varphi) = \operatorname{Im} z^t = \operatorname{Im}(x+\mathrm{i}y)^t.$$

Ezekből az alakokból a 8.65. Tétel és a 8.66. Megjegyzés alapján következik, hogy U_1 és U_2 harmonikus függvények a kipontozott komplex síkon. Amennyiben $t=n$ pozitív egész szám, akkor z^n nyilvánvalóan az egész síkon holomorf (ilyenkor nincs szükség a komplex logaritmus közbeiktatására).

8.4. Megoldás. a) Egy n-edfokú homogén kétváltozós polinom a következő általános alakban írható:

$$p(x,y) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j y^{n-j},$$

ahol a c_j $(j=0,1,\dots,n)$ együtthatók nem mind nulla valós számok. Az $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ polárkoordinátákra áttérve

$$P(r,\varphi) := p(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^n \sum_{j=0}^{n} \cos^j\varphi \sin^{n-j}\varphi = r^n F(\varphi), \qquad (18.39)$$

ahol $F(\varphi)$ a $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$ kifejezéseknek n-edfokú homogén polinomja. A Laplace-operátornak a 8.2. Feladatban szereplő polárkoordinátás alakját felhasználva kapjuk, hogy $\Delta p = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $r \neq 0$ esetén

$$\frac{1}{r}\left[\partial_r\Big(r\partial_r\big(r^n F(\varphi)\big)\Big) + \frac{1}{r}\partial_\varphi^2\big(r^n F(\varphi)\big)\right] = 0,$$

vagyis

$$r^{n-2}\left(n^2 F(\varphi) + F''(\varphi)\right) = 0,$$

tehát az F függvényre az alábbi állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris közönséges differenciálegyenletet nyerjük:

$$F''(\varphi) + n^2 F(\varphi) = 0.$$

Ennek összes megoldása a következő két lineárisan független megoldás lineáris kombinációjaként állítható elő (lásd az 5.2.5. alszakaszban az (5.29) függvényeket és az 5.17. Megjegyzést):

$$F_1(\varphi) = \cos n\varphi \quad \text{és} \quad F_2(\varphi) = \sin n\varphi.$$

A trigonometrikus addíciós tételek segítségével teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy $\cos n\varphi$ és $\sin n\varphi$ egyaránt a $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$ kifejezéseknek n-edfokú homogén polinomjai. Mindez azonban a komplex számok exponenciális alakját, a de Moivre-képletet és a binomiális tételt használva azonnal látható:

$$\begin{aligned}\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi &= (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n \\ &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} \cos^{n-2j}\varphi \sin^{2j}\varphi \\ &\quad + \mathrm{i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \cos^{n-2j-1}\varphi \sin^{2j+1}\varphi.\end{aligned}$$

Ezek után a (18.39) összefüggés figyelembevételével nyerjük a

$$P_1(r,\varphi) = r^n\cos n\varphi \quad \text{és} \quad P_2(r,\varphi) = r^n\sin n\varphi$$

polinomokat, amelyek lineáris kombinációi előállítják az összes n-edfokú homogén harmonikus polinomot. Vegyük észre, hogy

$$\mathrm{Re}(x+\mathrm{i}y)^n = r^n\cos n\varphi \quad \text{és} \quad \mathrm{Im}(x+\mathrm{i}y)^n = r^n\sin n\varphi,$$

így a binomiális tétel alapján azonnal látszódik, hogy P_1 és P_2 az x, y változók n-edfokú homogén polinomjai, továbbá a 8.65. Tétel és a 8.66. Megjegyzés figyelembevételével a P_1 és P_2 függvények harmonikus volta is következik.

b) Az előző rész alapján minden $1 \le k \le n$ esetén két lineárisan független k-adfokú homogén harmonikus polinomot nyertünk:

$$u_k^{(1)}(x,y) = \mathrm{Re}(x+\mathrm{i}y)^n = r^n \cos n\varphi,$$
$$u_k^{(2)}(x,y) = \mathrm{Im}(x+\mathrm{i}y)^n = r^n \sin n\varphi,$$

amelyek lineáris kombinációi előállítják az összes k-adfokú homogén harmonikus polinomot. A $k=0$ esetben a konstans polinomok mind harmonikusak és a konstans $u_0(x,y)=1$ polinommal generálhatók. Nyilván a különböző fokú polinomok függetlenek egymástól, így az előbbi $u_k^{(j)}$ $(1 \le k \le n, j = 1,2)$, u_0 polinomok egy $(2n+1)$ elemű lineáris független rendszert alkotnak a legfeljebb n-edfokú homogén harmonikus polinomok vektorterében. Megmutatjuk, hogy ez generátorrendszer is egyúttal, tehát bázis, így a vektortér dimenziója valóban $(2n+1)$. Ehhez tegyük fel, hogy p egy tetszőleges n-edfokú harmonikus polinom és $\Delta p = 0$. Ekkor u felírható

$$p(x,y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x,y)$$

alakban, ahol p_j a p polinom k-adfokú tagjai alkotta k-adfokú homogén polinom. A feltétel szerint

$$0 = \Delta u(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \Delta p_k(x,y).$$

Mivel

$$\Delta\left(x^j y^{k-j}\right) = j(j-1)x^{j-2}y^{k-j} + (k-j)(k-j-1)x^j y^{k-j-2}, \qquad (18.40)$$

ezért Δp_k vagy egy $(k-2)$-edfokú homogén polinom, vagy az azonosan 0 polinom. Ilyenek összege nyilván csakis akkor lehet azonosan 0, ha minden k-ra $\Delta p_k = 0$, tehát p_k egy k-adfokú homogén harmonikus polinom, és így p a szóban forgó $(2n+1)$ elemű lineárisan független rendszer elemeinek lineáris kombinációjaként előáll.

A bizonyítás végeztével érdemes egy másik lehetséges okoskodást is vázolni arra, hogy a dimenzió miért $(2n+1)$. Jelölje $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-edfokú kétváltozós polinomok vektorterét. A fő gondolat az, hogy tekintjük a

$$\Delta\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-2} \qquad (18.41)$$

lineáris leképezést, amelyről be fogjuk látni, hogy szürjektív, vagyis a képtere $\mathrm{Im}\,\Delta = \mathcal{P}_{n-2}$. Vegyük észre, hogy a szóban forgó leképezés magtere, $\mathrm{Ker}\,\Delta$,

éppen a legfeljebb n-edfokú harmonikus polinomok alkotta vektortér. Ekkor a lineáris leképezésekre jól ismert dimenziótételből

$$\dim \operatorname{Ker} \Delta = \dim \mathcal{P}_n - \dim \operatorname{Im} \Delta = \dim \mathcal{P}_n - \dim \mathcal{P}_{n-2},$$

tehát máris megkapjuk a keresett dimenziót, feltéve, hogy a $\mathcal{P}_n$ vektortér dimenzióját már ismerjük. Kezdjük először ennek meghatározásával. Világos, hogy a $\mathcal{P}_n$ tér egy bázisát alkotják az $x^j y^{k-j}$ alakú polinomok, ahol $0 \le j \le$ $\le k$ és $0 \le k \le n$. Tehát minden rögzített k esetén j megválasztására $(k+1)$ lehetőség van, így a bázis elemszáma, vagyis $\mathcal{P}_n$ dimenziója:

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Ezt felhasználva

$$\dim \mathcal{P}_n - \dim \mathcal{P}_{n-2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1,$$

tehát a legfeljebb n-edfokú harmonikus polinomok vektorterének dimenziója $(2n+1)$. Hátravan még a (18.41) lineáris leképezés szürjektivitásának vizsgálata. Először is jegyezzük meg, hogy a (18.40) összefüggés alapján a Δ operátor a $\mathcal{P}_n$ vektorteret valóban a $\mathcal{P}_{n-2}$ vektortérbe képezi. Most megmutatjuk, hogy a leképezés szürjektív. Ehhez tetszőleges rögzített $0 \le k \le n-2$ esetén teljes indukcióval igazoljuk, hogy a $\mathcal{P}_{n-2}$ tér bármely $x^j y^{k-j}$ báziseleme előáll mint egy $\mathcal{P}_{k+2}$-beli (tehát egyúttal $\mathcal{P}_n$-beli) polinomnak a Laplace-operátor általi képe. Egyrészt

$$\Delta\left(\frac{1}{(k+2)(k+1)} y^{k+2}\right) = y^k,$$

másrészt ha $y^k, xy^k, \ldots, x^j y^{k-j}$ előállnak egy-egy alkalmas, $\mathcal{P}_{k+2}$-beli polinom Δ általi képeként (ahol $0 \le j \le k-1$), akkor $x^{j+1} y^{k-j+1}$ is előáll. Valóban,

$$\Delta\left(\frac{1}{(k-j+1)(k-j)} x^{j+1} y^{k-j+1}\right) = \frac{(j+1)j}{(k-j+1)(k-j)} x^{j-1} y^{k-j+1} + x^{j+1} y^{k-j-1},$$

ahol a jobb oldal első tagja vagy az azonosan 0 polinom, vagy pedig az indukciós feltevés alapján előáll mint egy $p \in \mathcal{P}_{k+2}$ polinom Δ általi képe, így végül

$$\Delta\left(\frac{1}{(k-j+1)(k-j)} x^{j+1} y^{k-j+1} - p(x,y)\right) = x^{j+1} y^{k-j-1}.$$

Ezzel a (18.41) operátor szürjektivitásának és egyúttal a magtér dimenziójának bizonyítása kész.

8.5. Megoldás. Mivel $(x+\mathrm{i}y)^n = p+\mathrm{i}q$, ezért

$$(x+\mathrm{i}y)^{2n} = (p+\mathrm{i}q)^2 = (p^2-q^2)+\mathrm{i}2pq,$$

és így

$$p^2-q^2 = \operatorname{Re}(x+\mathrm{i}y)^{2n} \quad \text{és} \quad pq = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(x+\mathrm{i}y)^{2n}.$$

Ekkor a 8.65. Tétel és a 8.66. Megjegyzés alapján p^2-q^2 és pq harmonikus függvények a síkon.

8.6. Megoldás. Legyen

$$p(x,y) = \sum_{k,\ell} c_{k,\ell} x^k y^\ell,$$

ahol $c_{k,\ell}$ egész számok. Vegyük észre, hogy általában

$$\Delta\left(x^k y^\ell\right) = k(k-1)x^{k-2}y^\ell + \ell(\ell-1)x^k y^{\ell-2}$$

(amit $k \le 2$ vagy $\ell \le 2$ esetén természetesen úgy értünk, hogy a jobb oldal megfelelő tagja 0-val egyenlő). Mivel két egymást követő egész szám közül az egyik páros, ezért $k(k-1)$ és $\ell(\ell-1)$ is páros. Következésképpen a $\Delta p(x,y)$ polinom minden együtthatója páros egész szám, de ekkor nem lehet az azonosan 1 polinommal egyenlő. Tehát nincs a feladat kívánalmainak eleget tevő polinom.

8.7. Megoldás. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy Ω valójában egy körlap, hiszen

$$x^2-x+y^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}.$$

A továbbiakban a 8.33. Példa gondolatmenetéhez hasonlóan járunk el. Kézenfekvő az u megoldást

$$u(x,y) = (x^2-x+y^2-2)(ax+by+c)+x^3$$

alakban keresni, hiszen ekkor az $x^2-x+y^2=2$ egyenletű körvonalon a peremfeltétel automatikusan teljesül. Ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\Delta u = (8a+6)x + 8by + 4c - 2a.$$

Ebből következően a differenciálegyenlet akkor áll fenn, ha $a=0, b=1, c=0$, tehát

$$u(x,y) = y(x^2-x+y^2-2)+x^3.$$

Minthogy a 8.59. Tétel szerint a Dirichlet-feladat $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ megoldása Lipschitz-tartományon (márpedig a körlap ilyen) egyértelmű, ezért a kapott u függvény a feladat egyetlen $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ megoldása.

8.8. Megoldás. A 8.33. Példa gondolatmenetének mintájára okoskodunk. Célszerű az u megoldást

$$u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-1)(ax+by+cz+d)+y$$

alakban keresni, hiszen ekkor az $x^2+y^2+z^2=1$ egyenletű gömbfelületen a peremfeltétel automatikusan teljesül. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_x u=2x(ax+by+cz+d)+(x^2+y^2+z^2-1)a,$$

így

$$\partial_x^2 u=6ax+2by+2cz+2d.$$

Szimmetria okok miatt könnyen látható, hogy

$$\partial_y^2 u=2ax+6by+2cz+2d,$$
$$\partial_z^2 u=2ax+2by+6cz+2d,$$

így végül

$$\Delta u=10ax+10by+10cz+6d.$$

Ebből következően a fenti alakú u függvény pontosan akkor elégíti ki a differenciálegyenletet, ha

$$a=\frac{1}{10},\quad b=0,\quad c=\frac{1}{10},\quad d=0.$$

Következésképpen

$$u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-1)\frac{x+z}{10}+y,$$

amely a 8.59. Tétel alapján a peremérték-feladat egyértelmű $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ megoldása.

8.9. Megoldás. Mindhárom részben a következő gondolatot használjuk. Tegyük fel, hogy $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ kielégíti a szóban forgó peremértékfeladatot. Alkalmazzuk az első Green-formulát (a 8.7. Megjegyzésben foglalt gyengébb simasági feltevések mellett) az u és a konstans 1 függvényekre. Ekkor (mivel a konstans 1 deriváltjait tartalmazó tagok eltűnnek)

$$\int_\Omega \Delta u=\int_{\partial\Omega}\partial_\nu u\,d\sigma$$

adódik. Behelyettesítve a $\Delta u = \alpha$ és $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 1$ összefüggéseket:

$$\int_\Omega \alpha = \int_{\partial\Omega} 1 \, d\sigma,$$

ahol a bal oldalon a konstans α függvénynek az Ω halmazon vett integrálja szerepel, ami nem más, mint az Ω területének α-szorosa. A jobb oldalon pedig a konstans 1 függvénynek a $\partial\Omega$ peremen vett felszíni integrálja áll, ez két dimenzióban az ívhossz szerinti vonalintegrál, amely éppen a perem ívhosszát adja meg. Következésképpen

$$\alpha \cdot \mathrm{ter}(\Omega) = \mathrm{hossz}(\partial\Omega).$$

Ebből az $\Omega = B(0,1)$ esetben $\alpha = 2$, az $\Omega = B(0,2)\setminus\overline{B(0,1)}$ esetben $\alpha = 2$, az $\Omega = (0,1)^2$ esetben pedig $\alpha = 4$ adódik. A peremérték-feladatnak tehát csakis ilyen α esetén lehet megoldása. A 8.26. Tétel alapján a Neumann-feladat $C^2(B(0,1))\cap C^1(\overline{B(0,1)})$ megoldásai konstansban térnek el egymástól, így ha az adott α esetén van u megoldás, akkor az összes megoldás $u+C$ alakú, ahol C tetszőleges konstans. Keressük meg most a három esetben a megoldásokat!

a) Célszerű az u megoldást az $r^2 = x^2+y^2$ kifejezés függvényeként keresni, ugyanis a körvonalon a normális irányú derivált az r szerinti deriváltnak felel meg, így könnyen számolható. Mivel $\Delta(x^2+y^2) = 4$ és

$$\partial_\nu(x^2+y^2)|_{\partial B(0,1)} = \left(\frac{d}{dr}r^2\right)\Big|_{r=1} = 2,$$

ezért az $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ függvény megfelelő. A peremérték-feladat összes megoldása tehát

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + C$$

alakú, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

b) Az $\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}r^2$ függvény kielégíti a differenciálegyenletet, a 2 sugarú körvonalon a normális irányú deriváltja:

$$\frac{1}{2}\partial_\nu(x^2+y^2)|_{\partial B(0,2)} = \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dr}r^2\right)\Big|_{r=2} = 2.$$

Az 1 sugarú körvonalon most a kifelé mutató normálvektor az origóba mutat, így a normális irányú derivált az r szerinti derivált ellentettje:

$$\frac{1}{2}\partial_\nu(x^2+y^2)|_{\partial B(0,1)} = \left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dr}r^2\right)\Big|_{r=1} = 1.$$

Annak érdekében, hogy a differenciálegyenlet továbbra is teljesüljön, próbáljuk meg az $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ függvényhez a $\log r$ alapmegoldás konstansszorosát

hozzáadni, hiszen erre $\Delta(\log r) = 0$. Mivel

$$\partial_\nu \log r|_{\partial B(0,2)} = \left(\frac{d}{dr}\log r\right)\Big|_{r=2} = \frac{1}{2}$$

és

$$\partial_\nu \log r|_{\partial B(0,1)} = \left(-\frac{d}{dr}\log r\right)\Big|_{r=1} = -1,$$

ezért az $\frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2\log r$ függvény kielégíti a peremfeltételt és a differenciálegyenlet továbbra is teljesül. A peremérték-feladat összes megoldása tehát

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2\log\sqrt{x^2+y^2} + C,$$

ahol C tetszőleges állandó.

c) Az x^2+y^2 függvény kielégíti a differenciálegyenletet, ezért keressük a megoldást az alábbi polinom alakban:

$$u(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by.$$

Ekkor a differenciálegyenlet továbbra is teljesül, és próbáljuk megválasztani az a és b paramétereket úgy, hogy a peremfeltétel is fennálljon. A négyzet oldalain a normális irányú derivált a megfelelő változó szerint parciális deriválttal vagy annak ellentettjével egyezik meg (lásd a 8.4. ábrát), így a függőleges oldalakon

$$\partial_\nu u(0,y) = -\partial_x u(0,y) = -a, \quad \partial_\nu u(1,y) = \partial_x u(1,y) = 2+a,$$

a vízszintes oldalakon pedig

$$\partial_\nu u(x,0) = -\partial_y u(x,0) = -b, \quad \partial_\nu u(x,1) = \partial_y u(x,1) = 2+b.$$

A $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 1$ peremfeltétel tehát teljesül, ha $a=-1$ és $b=-1$. Ezért a peremérték-feladat összes megoldása

$$u(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + C,$$

ahol C tetszőleges állandó.

8.10. Megoldás. Mindhárom esetben arra támaszkodunk, hogy a $-u'' = \lambda u$ közönséges differenciálegyenlet általános megoldását a (8.22) alakú függvények szolgáltatják λ előjelétől függően, azaz

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2\cos\sqrt{\lambda}x, & \text{ha } \lambda > 0, \\ c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, & \text{ha } \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases}$$

Innen a gondolatmenet úgy folytatódik, hogy az általános megoldások között meg kell keresni azokat, amelyek a peremfeltételeket kielégítik.

a) A $\lambda = 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_2 = 0$, így $u'(a) = 0$ folytán $c_1 a = 0$, azaz $c_1 = 0$, tehát $u = 0$, amelyet nem tekintünk sajátfüggvénynek. A $\lambda < 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_1 + c_2 = 0$, és $u'(a) = 0$ folytán pedig

$$c_1 \sqrt{|\lambda|} \left(e^{\sqrt{|\lambda|}a} + e^{-\sqrt{|\lambda|}a} \right) = 0,$$

ezért szükségképpen $c_1 = 0$, tehát $u = 0$. Marad a $\lambda > 0$ eset. Ekkor $u(0) = 0$ miatt $c_2 = 0$, másrészt $u'(a) = 0$ folytán $\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a = 0$, következésképpen $\sqrt{\lambda} a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ahol k nemnegatív egész szám (hiszen a $\lambda > 0$ esetet vizsgáljuk). Ez azt jelenti, hogy $\lambda = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} \right)^2$, ekkor $u(x) = \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} x \right)$, ahol k a nemnegatív egész számok halmazát futja be. A sajátértékek és sajátfüggvények alábbi rendszerét nyertük tehát:

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} \right)^2, \quad u_k(x) = \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} x \right) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Mivel $u'(a)$ valójában az a pontbeli „normális irányú derivált” (lásd a 4.9. ábrát), ezért az a pontban Neumann-peremfeltétel adott. Ha most bevezetjük a $g, h \colon \{0, a\} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $g(0) = 1$, $g(a) = 0$ és $h(0) = 0$, $h(a) = 1$, akkor az $u(0) = 0$, $u'(a)$ peremfeltétel a két pontból álló $\{0, a\}$ peremen a harmadik peremfeltétel alakjában írható: $gu + h\partial_n u u = 0$. Világos, hogy a g, h függvények kielégítik a 8.40. Tétel feltételeit, így ebből is adódik, hogy a sajátértékek nemnegatívak, sőt a sajátfüggvények az $L^2(0, a)$ térben ortogonális rendszert alkotnak. A kapott sajátfüggvények lenormálásához a kétszeres szög koszinuszára vonatkozó addíciós tétel alapján adódó (8.23) összefüggést használhatjuk:

$$\int_0^a \sin^2 \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} x \right) dx = \int_0^a \frac{1 - \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{a} x \right)}{2} dx = \frac{a}{2}.$$

Ebből következően az operátor $L^2(0, a)$ térben ortonormált sajátfüggvényei:

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} x \right) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

b) A $\lambda = 0$ esetben $u'(0) = u(0)$ miatt $c_1 = c_2$, így $u'(a) = u(a)$ folytán $c_1 a + c_1 = c_1$, azaz $c_1 a = 0$. Ekkor $c_1 = c_2 = 0$, tehát $u = 0$, amelyet nem tekintünk sajátfüggvénynek. A $\lambda < 0$ esetben $u'(0) = u(0)$ miatt

$$\sqrt{|\lambda|}(c_1 - c_2) = c_1 + c_2,$$

azaz

$$c_1(\sqrt{|\lambda|}-1)=c_2(\sqrt{|\lambda|}+1). \tag{18.42}$$

Az $u'(a)=u(a)$ peremfeltételből pedig

$$\sqrt{|\lambda|}(c_1e^{\sqrt{|\lambda|}a}-c_2e^{-\sqrt{|\lambda|}a})=c_1e^{\sqrt{|\lambda|}a}+c_2e^{-\sqrt{|\lambda|}a}$$

adódik, más szóval

$$c_1e^{2\sqrt{|\lambda|}a}(\sqrt{|\lambda|}-1)=c_2(\sqrt{|\lambda|}+1). \tag{18.43}$$

A (18.42) és (18.43) egyenleteket összevetve kapjuk, hogy

$$c_1e^{2\sqrt{|\lambda|}a}(\sqrt{|\lambda|}-1)=c_1(\sqrt{|\lambda|}-1).$$

Ebből $c_1=0$ vagy $\lambda=-1$ következik. A $c_1=0$ esetben a (18.42) összefüggésből $c_2=0$ adódna, vagyis $u=0$, amely nem sajátfüggvény. Marad tehát $\lambda=-1$, ekkor a (18.42) összefüggés alapján $c_2=0$, és így $u(x)=ce^x$ sajátfüggvény.

Tekintsük végül a $\lambda>0$ esetet. Ekkor $u'(0)=u(0)$ miatt $c_2=\sqrt{\lambda}c_1$, és így $u'(a)=u(a)$ folytán

$$c_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a-\lambda c_1\sin\sqrt{\lambda}a=c_1\sin\sqrt{\lambda}a+c_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a,$$

vagyis $2c_1(\lambda+1)\sin\sqrt{\lambda}a=0$. Ebből következően $c_1=0$ vagy $\sqrt{\lambda}a=k\pi$. A $c_1=0$ esetben $c_2=0$, és ennélfogva $u=0$, amely nem sajátfüggvény. Marad így a $\sqrt{\lambda}a=k\pi$ eset, vagyis $\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, ahol k pozitív egész szám. Ebben az esetben tehát a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátfüggvények rendszere a következő:

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2,\quad u_k(x)=\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)+\frac{k\pi}{a}\cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\quad(k=1,2,\dots).$$

Ehhez hozzávéve a $\lambda_0=-1$ sajátértéket és az $u_0(x)=e^x$ sajátfüggvényt, megkapjuk az operátor összes sajátértékét és a hozzá tartozó sajátfüggvényeket (legalábbis konstans szorzótól eltekintve).

A negatív sajátérték létezése nem mond ellent a 8.40. Tételnek, ugyanis ez jelen esetben nem alkalmazható. Bár az $u(0)-u'(0)=0$ és $u(a)-u'(a)=0$ peremfeltételek felírhatók $gu+\partial_\nu u=0$ alakban, azonban a g és h függvények nem elégíti ki a megfelelő előjelfeltételeket. Valóban, mivel a 0 pontban a normális irányú derivált $-u'(0)$, az a pontban pedig $u'(a)$ (lásd a 4.9. ábrát), ezért szükségképpen $g(0)=g(a)=1$, továbbá $h(0)=1$ és $h(a)=-1$. Az a pontban tehát a g és h függvények ellentétes előjelűek, és ez játszik közre a negatív sajátérték létezésében.

c) A $\lambda = 0$ esetben $u(0) = c_2$ és $u(a) = c_1 a + c_2$, így $u(0) = u(a)$ miatt $c_1 a = 0$, vagyis $c_1 = 0$. Ekkor az $u(x) = c_2$ konstansfüggvény teljesíti a másik peremfeltételt, tehát $\lambda = 0$ sajátértéke, amelyekhez a konstansfüggvények tartoznak sajátfüggvényként. A $\lambda < 0$ esetben az $u(0) = u(a)$ feltétel alapján

$$c_1 + c_2 = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}a},$$

továbbá $u'(0) = u'(a)$ folytán

$$(c_1 - c_2) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a} - c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}a},$$

így a két egyenlet mindkét oldalának összegét véve $2c_1 = 2c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a}$, a különbségét véve pedig $2c_2 = 2c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}a}$ adódik. Mivel $\sqrt{|\lambda|}a \neq 0$, így szükségképpen $c_1 = c_2 = 0$. Ekkor viszont $u = 0$, amely nem sajátfüggvény. Hátravan még a $\lambda > 0$ eset. Ekkor az $u(0) = u(a)$ peremfeltételekből

$$c_2 = c_1 \sin\sqrt{\lambda}a + c_2 \cos\sqrt{\lambda}a, \tag{18.44}$$

az $u'(0) = u'(a)$ peremfeltételből pedig

$$\sqrt{\lambda}c_1 = c_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a - c_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a, \tag{18.45}$$

A (18.44) egyenlet $\sqrt{\lambda}c_1$-szereséből a (18.45) egyenlet c_2-szeresét kivonva, 0-ra rendezés után kapjuk, hogy

$$(c_1^2 + c_2^2)\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a = 0.$$

Mivel $\lambda > 0$, az iménti egyenletből $\sqrt{\lambda}a = 2k\pi$ $(k = 1{,}2\ldots)$ következik, és ekkor a (18.44) és (18.45) feltételek tetszőleges c_1, c_2 esetén teljesülnek. Azt kaptuk tehát, hogy az operátor pozitív sajátértékei és a hozzá tartozó sajátfüggvények:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \left(\frac{2k\pi}{a}\right)^2, \\ u_k(x) &= c_1 \sin\left(\frac{2k\pi}{a}x\right) + c_2\cos\left(\frac{2k\pi}{a}x\right) \quad (k = 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{18.46}$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges, egyszerre nem nulla konstansok. Minden pozitív sajátértékhez tehát kétdimenziós sajátaltér tartozik. Ne felejtsük el, hogy a pozitív sajátértékek mellett $\lambda = 0$ is sajátérték, amelyhez a konstansfüggvények tartoznak sajátfüggvényként. Mindezt a $k = 0$ esetben megkapjuk a (18.46) felírásból, így tehát ott $k = 0$ is vehető.

A feladatban egy úgynevezett periodikus peremfeltétel szerepel, amely nem esik a harmadik típusú peremfeltétel családjába, így a 8.40. Tétel nem

alkalmazható. Azonban az L operátor nemnegativitása és szimmetriája közvetlenül igazolható. Pontosabban, ha $u, v \in D(L)$ olyanok, hogy $Lu, Lv \in$ $\in L^2(0,a)$, akkor parciális integrálással adódik, hogy

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(0,a)} = \int_0^a (-u''v) = -\left[u'v\right]_0^a + \int_0^a u'v',$$

ahol a peremfeltételek miatt

$$-\left[u'v\right]_0^a = -u'(a)v(a) + u'(0)v(0) = 0.$$

Végeredményben tehát

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(0,a)} = \int_0^a u'v',$$

amiből a szimmetria miatt azonnal látszódik, és a $v = u$ választással a nemnegativitás szintén:

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(0,a)} = \int_0^a (u')^2 \geq 0,$$

ahol egyenlőség csakis $u' = 0$ esetén, vagyis a konstansfüggvényekre áll fenn.

8.11. Megoldás. A Fubini-tétel alapján

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} (f_{k_1} \times g_{\ell_1})(f_{k_2} \times g_{\ell_2}) = \int_{\Omega_1} f_{k_1}(x) f_{k_2}(x)\,dx \int_{\Omega_2} g_{\ell_1}(y) g_{\ell_2}(y)\,dy,$$

tehát $(k_1, \ell_1) \neq (k_2, \ell_2)$ esetén az $f_{k_1} \times g_{\ell_1}$ és $f_{k_2} \times g_{\ell_2}$ függvények ortogonálisak, másrészt pedig $(k_1, \ell_1) = (k_2, \ell_2)$ esetén

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} (f_{k_1} \times g_{\ell_1})^2 = \int_{\Omega_1} (f_{k_1})^2 \int_{\Omega_2} (g_{\ell_1})^2 = 1.$$

Ebből következően az $(f_k \times g_\ell)$ rendszer ortonormált. Most megmutatjuk, hogy a rendszer teljes is, amit úgy igazolunk, hogy csak a m. m. 0 függvény merőleges a rendszer összes elemére. Tegyük fel tehát, hogy valamilyen $h \in$ $\in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ függvény az $(f_k \times g_\ell)$ rendszer minden elemére ortogonális. Értelmezzük ekkor az

$$F_k(y) := \int_{\Omega_1} h(x,y) f_k(x)\,dx \qquad (y \in \Omega_1)$$

függvényeket. A Fubini-tételből következően $F_k \in L^2(\Omega_1)$, így $F_k g_\ell$ integrálható Ω_2-n, továbbá

$$\int_{\Omega_2} F_k g_\ell = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} h(f_k \times g_\ell) = 0,$$

tehát az F_k merőleges a (g_ℓ) rendszer minden elemére, amiből a rendszer teljessége miatt szükségképpen adódik, hogy $F_k(y) = 0$ m. m. Ω_2-n. Ekkor azonban F_k definíciója alapján minden k-ra és m. m. $y \in \Omega_2$-re

$$\int_{\Omega_1} h(x,y) f_k(x)\,dx = 0,$$

ami az (f_k) rendszer teljessége miatt csak úgy lehetséges, ha $h(x,y) = 0$ m. m. $x \in \Omega_2$ esetén. Végeredményben tehát az $(f_k \times g_\ell)$ rendszer minden elemére csak a 0 függvény merőleges, így az $(f_k \times g_\ell)$ rendszer teljes.

8.12. Megoldás. Érdemes rögtön meggondolnunk, hogy a kissé bonyolultnak látszó peremfeltétel valójában azt jelenti, hogy a Γ_1 és Γ_3 peremszakaszokon Dirichlet-féle peremfeltétel, a Γ_2 és Γ_4 szakaszokon pedig Neumann-féle peremfeltétel adott. A változók szétválasztásának módszerét használva keressük az u megoldást $v(x)w(y)$ alakban. Ekkor a 8.4.2. alszakaszban a kétdimenziós $(-\Delta)$ operátor sajátértékeiről szóló részben látottak alapján a $-\Delta u = \lambda u$ egyenletből (megfelelő feltételezéssel élve) azt kapjuk, hogy létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\lambda = \alpha + \beta$ és

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \alpha, \quad -\frac{w''(y)}{w(y)} = \beta \quad \text{és} \quad \alpha + \beta = \lambda.$$

Most vegyük figyelembe a peremfeltételeket. Ahogy már a megoldás elején említettük, a g, h függvények alakjából világos, hogy a Γ_1 és Γ_3 peremszakaszokon Dirichlet-féle peremfeltétel, a Γ_2 és Γ_4 szakaszokon pedig Neumann-féle peremfeltétel adott. Mivel a Γ_2 oldalon $\nu = (0,1)$, így itt a normális irányú derivált az y változó szerinti deriválttal egyezik meg, a Γ_4 oldalon pedig $\nu = (0,-1)$, ezért itt a normális irányú derivált az y változó szerinti derivált ellentettje (lásd a 8.4. ábrát). Mindezek alapján

$$gu + h\partial_\nu u = \begin{cases} v(x)w'(0), & \text{ha } (x,y) \in (0,a) \times \{0\}, \\ -v(x)w'(b), & \text{ha } (x,y) \in (0,a) \times \{b\}, \end{cases}$$

továbbá

$$gu + h\partial_\nu u = \begin{cases} v(0)w(y), & \text{ha } (x,y) \in \{0\} \times (0,b), \\ v(a)w(y), & \text{ha } (x,y) \in \{a\} \times (0,b). \end{cases}$$

Ebből $v(0) = v(a) = 0$ és $w'(0) = w'(b) = 0$ adódik, tehát v-re homogén első, w-re homogén második peremfeltétel vonatkozik. Ekkor a 8.42. és 8.43. Következmény alapján

$$\alpha_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

valamint

$$\beta_\ell = \left(\frac{\ell\pi}{b}\right)^2, \quad w_0(y) = \frac{1}{\sqrt{b}}, \quad w_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{b}}\cos\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Végeredményben az operátor sajátértékei:

$$\lambda_{k,\ell} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2}\right) \quad (k = 0, 1, \dots; \ell = 0, 1, \dots),$$

a hozzá tartozó, $L^2(T)$-ben ortonormált sajátfüggvények pedig:

$$u_{k,0}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \quad (k = 1, 2\dots),$$
$$u_{k,\ell}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right) \quad (k, \ell = 1, 2\dots).$$

Belátható (lásd a 8.11. Feladatot), hogy ez az ortonormált rendszer teljes $L^2(T)$-ben, mivel a (v_k) függvények rendszere teljes $L^2(0, a)$-ban, és a (w_ℓ) függvények rendszere teljes $L^2(0, b)$-ben. Ezért megkaptuk a kétdimenziós feladat összes sajátértékét (és lényegében összes sajátfüggvényét).

8.13. Megoldás. Mindenekelőtt gondoljuk meg, hogy a kissé bonyolultnak tűnő peremfeltétel valójában azt jelenti, hogy a Γ_1 és Γ_3 peremszakaszokon Dirichlet-féle peremfeltétel, a Γ_2 és Γ_4 szakaszokon pedig Neumann-féle peremfeltétel adott. Vegyük észre, hogy a 8.44. Következmény $a = \pi$ speciális esete alapján a differenciálegyenlet jobb oldalán lévő mindkét tag a $(-\Delta)$ operátornak első peremfeltétel melletti sajátfüggvénye. (Ezt természetesen egyszerű számolással is ellenőrizhetjük.) Emiatt célszerű az u megoldást

$$u(x, y) = c\sin x\sin 2y + d\sin 3x\sin y$$

alakban keresni (valójában arról van szó, hogy a differenciálegyenlet jobb oldala már Fourier-sor alakban adott, mégpedig két bázisfüggvény lineáris kombinációjaként előállítva, így a megoldás is e két bázisfüggvény által meghatározott sajátaltérben keresendő). Ekkor a homogén peremfeltétel automatikusan teljesül, másrészt egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$-\Delta(c\sin x\sin 2y + d\sin 3x\sin y) = 5c\sin x\sin 2y + 10d\sin 3x\sin y,$$

így az u függvényre a differenciálegyenlet akkor áll fenn, ha $c = \frac{1}{5}$ és $d = -\frac{1}{10}$. Minthogy a 8.59. Tétel alapján a peremérték-feladat $C^2(T) \cap C(\overline{T})$ megoldása egyértelmű (hiszen a téglalap Lipschitz-tartomány, mert konvex), ezért szükségképpen

$$u(x, y) = \frac{1}{5}\sin x\sin 2y - \frac{1}{10}\sin 3x\sin y.$$

8.14. Megoldás. Vegyük észre, hogy a 8.45. Következmény $a = \pi$ speciális esete alapján a differenciálegyenlet jobb oldalán lévő mindkét tag a $(-\Delta)$ operátornak második peremfeltétel melletti sajátfüggvénye (ezt persze egyszerű számolással is ellenőrizhetjük). Emiatt célszerű az u megoldást

$$u(x, y) = c \cos x \cos y + d \cos 2x \cos 3y$$

alakban keresni (valójában arról van szó, hogy a differenciálegyenlet jobb oldala már Fourier-sor alakban adott, mégpedig két bázisfüggvény lineáris kombinációjaként előállítva, így a megoldás is e két bázisfüggvény által meghatározott sajátaltérben keresendő). Ekkor a homogén peremfeltétel automatikusan teljesül, másrészt egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$-\Delta(c \cos x \cos y + d \cos 2x \cos 3y) = 2c \cos x \cos y + 13d \cos 2x \cos 3y,$$

így az u függvényre a differenciálegyenlet akkor áll fenn, ha $c = \frac{1}{2}$ és $d = \frac{1}{13}$. Minthogy a 8.26. Tétel alapján a Neumann-feladat $C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$ megoldása csak konstans tag erejéig egyértelmű (a tétel alkalmazható, hiszen a téglalap Lipschitz-tartomány, mert konvex), ezért a peremérték-feladat összes megoldása

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \cos x \cos y + \frac{1}{13} \cos 2x \cos 3y + C,$$

ahol C tetszőleges állandó.

8.15. Megoldás. Vegyük észre, hogy a 8.12. Feladat megoldása alapján a differenciálegyenlet jobb oldalán lévő mindkét tag a $(-\Delta)$ operátornak a megadott peremfeltétel melletti sajátfüggvénye (ezt természetesen egyszerű számolással is ellenőrizhetjük). Mindezek alapján célszerű a peremérték-feladat u megoldását

$$u(x, y) = c \sin x \cos 3y + d \sin 3x \sin 4y$$

alakban keresni (valójában arról van szó, hogy a differenciálegyenlet jobb oldala már Fourier-sor alakban adott, mégpedig két bázisfüggvény lineáris kombinációjaként előállítva, így a megoldás is e két bázisfüggvény által meghatározott sajátaltérben keresendő). Minthogy

$$-\Delta(c \sin x \cos 3y + d \sin 3x \cos 4y) = 10c \sin x \cos 3y + 25d \sin 3x \cos 4y,$$

ezért a differenciálegyenlet abban az esetben teljesül, ha $10c = 1$ és $25d = -5$, vagyis $c = \frac{1}{10}$ és $d = -\frac{1}{5}$. Mivel a 8.26. Tétel alapján a harmadik peremértékfeladat $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása csakis a Neumann-peremfeltétel esetében nem egyértelmű (a tétel alkalmazható, hiszen a téglalap a konvexitás miatt Lipschitz-tartomány), a peremérték-feladat összes megoldása:

$$u(x, y) = u(x, y) = \frac{1}{10} \sin x \cos 3y - \frac{1}{5} \sin 3x \cos 4y.$$

8.16. Megoldás. Mivel

$$|\operatorname{grad} u| = \Big(\sum_{j=1}^{n}(\partial_j u)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

ezért

$$\partial_k\left(|\operatorname{grad} u|\right) = \Big(\sum_{j=1}^{n}(\partial_j u)^2\Big)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n}\partial_k\partial_j u = |\operatorname{grad} u|^{-1}\sum_{j=1}^{n}\partial_k\partial_j u,$$

és így

$$\partial_k^2\left(|\operatorname{grad} u|\right) = -\,|\operatorname{grad} u|^{-\frac{3}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{n}\partial_k\partial_j u\Big)^2 + |\operatorname{grad} u|^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}\partial_k^2\partial_j u.$$

Felhasználva, hogy a parciális deriválások sorrendjének felcserélése miatt

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_k^2\partial_j\Big(u = \sum_{j=1}^{n}\partial_j\sum_{k=1}^{n}\partial_k^2 u\Big) = \sum_{j=1}^{n}\partial_j\Delta u,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Delta\left(|\operatorname{grad} u|\right) &= \sum_{k=1}^{n}\partial_k^2\,|\operatorname{grad} u| \\ &= -\,|\operatorname{grad} u|^{-\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\partial_k\partial_j u\Big)^2 + |\operatorname{grad} u|^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n}\partial_j\Delta u \geq 0,\end{aligned}$$

hiszen $\Delta u = 0$.

8.17. Megoldás. A $\Phi(u)$ összetett függvényt a j-edik változó szerint parciálisan deriválva kapuk, hogy

$$\partial_j\big(\Phi(u)\big) = \Phi'(u)\partial_j u,$$

ahonnan ismételt deriválással a Leibniz-szabály alapján

$$\partial_j^2\big(\Phi(u)\big) = \Phi''(u)(\partial_j u)^2 + \Phi'(u)\partial_j^2 u.$$

Ebből következően

$$\Delta\big(\Phi(u)\big) = \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\big(\Phi(u)\big) = \Phi''(u)\sum_{j=1}^{n}(\partial_j u)^2 + \Phi'(u)\Delta u \geq 0,$$

hiszen $\Delta u = 0$ és Φ konvexitása miatt $\Phi'' \geq 0$. Ezért $\Phi(u)$ valóban szubharmonikus függvény.

8.18. Megoldás. Egyszerű deriválással nyerjük, hogy $\partial_j(u^2) = 2u\partial_j u$, így

$$\partial_j^2(u^2) = 2(\partial_j u)^2 + 2u\partial_j^2 u,$$

tehát

$$\Delta(u^2) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2(u^2) = 2\sum_{j=1}^{n}(\partial_j u)^2 + 2u\Delta u.$$

Ha u és u^2 egyaránt harmonikusak, akkor $\Delta u = 0$ és $\Delta(u^2) = 0$ alapján ebből az következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{n}(\partial_j u)^2 = 0,$$

vagyis szükségképpen minden j-re $\partial_j u = 0$. Mivel Ω összefüggő, így ez azt jelenti, hogy u konstansfüggvény.

8.19. Megoldás. Legyen $x_0 \in \Omega$ tetszőleges rögzített pont, és tekintsük a nemnegatív értékű $v(x) := (u(x) - u(x_0))^2$ függvényt. Mivel

$$v^2 = u^2 - 2u(x_0)u + (u(x_0))^2,$$

és u, u^2 harmonikus függvények, ezért v is harmonikus. Válasszunk most olyan $\varepsilon > 0$ számot, hogy $\overline{B(x_0,\varepsilon)} \subset \Omega$ legyen. Ekkor v a $\overline{B(x_0,\varepsilon)}$ zárt gömbön az x_0 belső pontban felveszi a minimumát, a 0-t, ami az erős minimumelv szerint csak úgy lehetséges, ha v a konstans 0 függvény, tehát $u = u(x_0)$ a gömbön. Innen a gondolatmenetet ugyanúgy fejezhetjük be, ahogy a 8.63. Következmény bizonyításában is eljártunk: a $H = \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$ halmaz nem üres és nyílt az Ω-ban, de u folytonossága miatt zárt is, így Ω összefüggősége következtében $H = \Omega$. Végeredményben tehát u konstansfüggvény.

8.20. Megoldás. Ahhoz, hogy a maximumelvet alkalmazhassuk, célszerű az u függvényt úgy módosítanunk, hogy a kapott függvény harmonikus legyen. Mivel $\Delta(x^2 + y^2) = 4$ és $\Delta u = -4$, ezért a $v(x,y) := u(x,y) + (x^2 + y^2)$ függvény már harmonikus $\mathbb{R}^2$-en. Ekkor a maximumelv alapján $u \leq v$ figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\max_{\overline{B(0,1)}} u \leq \max_{\overline{B(0,1)}} v = \max_{\partial B(0,1)} v \leq \max_{\partial B(0,1)} u + \max_{\partial B(0,1)} (x^2 + y^2) = \max_{\partial B(0,1)} u + 1,$$

hiszen az egységkör határán $x^2 + y^2 = 1$. Az egyenlőtlenségláncolat két vége éppen a feladat állítását adja.

8.21. Megoldás. A 8.55. Tétel bizonyítását követve azt igazoljuk, hogy ha $Lu < 0$ az Ω tartományban, akkor u-nak belső pontban nem lehet nemnegatív értékű lokális maximuma. Valóban, ha az $x_0 \in \Omega$ belső pontban u-nak nemnegatív maximuma volna, akkor ott

$$(Lu)(x_0) = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x_0)\partial_j\partial_k u(x_0) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x_0)\partial_j u(x_0) + q(x_0)u(x_0) \geq 0,$$

ugyanis $\partial_j u(x_0) = 0$ és $\partial_j^2 u(x_0) \leq 0$ minden j-re, valamint $q(x_0)u(x_0) \geq 0$, továbbá azt állítjuk, hogy

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u(x_0) \leq 0.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igazolásához vegyük figyelembe, hogy a másodrendű főrészükben lineáris parciális differenciálegyenletek kanonikus alakjáról szóló 7.2.1. alszakasz szerint alkalmas C mátrixszal, $\xi = C^T x$ új változóval és $v(\xi) = u\left((C^T)^{-1}\xi\right)$ új függvénnyel

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x_0)\partial_j\partial_k u(x) = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \partial_p^2 v(\xi),$$

ahol a jobb oldal a $\xi_0 = C^T x_0$ pontban nempozitív, ugyanis az egyenletes ellipticitás miatt $\lambda_p > 0$, valamint ha az u függvénynek maximuma van az x_0 pontban, akkor a v függvénynek maximuma van a ξ_0 pontban, így $\partial_p^2 v(\xi_0) \leq \leq 0$. Mindezek alapján tehát $(Lu)(x_0) < 0$ esetén u-nak belső pontban nem lehet nemnegatív értékű lokális maximuma, így az u^+ függvény a $\partial\Omega$ peremen veszi fel az $\overline{\Omega}$-beli maximumát.

Tekintsük ezek után az $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$ függvényt, ahol $\varepsilon > 0$ és $\lambda > 0$. Ekkor

$$L(e^{\lambda x_1}) = e^{\lambda x_1}\left[\lambda(-a_{11}\lambda + b_1) + q\right].$$

Az egyenletes ellipticitás 7.5. Definíció szerinti feltételét a $p = (1, 0, \ldots, 0)$ vektorra alkalmazva adódik, hogy $a_{11}(x) \geq c_0 > 0$ minden $x \in \Omega$ esetén, így

$$\lambda(-a_{11}\lambda + b_1) + q \leq \lambda\left(-\lambda c_0 + \max_{\overline{\Omega}} |b_1|\right) + \max_{\overline{\Omega}} |q|,$$

ahol a jobb oldal $\lambda \to +\infty$ esetén $-\infty$-hez tart. Következésképpen elég nagy λ esetén $L(e^{\lambda x_1}) < 0$, emiatt

$$Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon L(e^{\lambda x_1}) < Lu \leq 0.$$

Az u_ε függvényre tehát alkalmazható a bizonyítás első része, ezáltal

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon^+ = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon^+.$$

Mivel $u \le u^+ \le u_\varepsilon^+$, továbbá ha $\Omega \subset B(0,R)$, akkor $u_\varepsilon^+ \le u^+ + \varepsilon e^{\lambda R}$, így végső soron

$$\max_{\overline{\Omega}} u \le \max_{\overline{\Omega}} u^+ \le \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon^+ = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon^+ \le \max_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon e^{\lambda R}.$$

Az egyenlőtlenségláncolat elején és végén található kifejezésekből $\varepsilon \to 0+$ határátmenettel adódik a bizonyítandó összefüggés.

8.22. Megoldás. A kiszámítandó integrál azt sugallja, hogy a harmonikus függvényekre vonatkozó középérték-tulajdonságot lenne célszerű alkalmazni. Ehhez az u függvényt úgy módosítjuk, hogy a kapott függvény harmonikus legyen. Mivel $\Delta(x^2+y^2) = 4$ és $\Delta u = 8$, ezért a $v(x,y) := u(x,y) - 2(x^2+y^2)$ függvény már harmonikus $\mathbb{R}^2$-en. Ekkor a $V(B(0,2)) = \frac{32\pi}{3}$ térfogatú $B(0,2)$ gömbön a középérték-tulajdonság szerint

$$v(0,0) = \frac{1}{V(B(0,2))} \int_{B(0,2)} v = \frac{3}{32\pi} \int_{B(0,2)} u - \frac{3}{32\pi} \int_{B(0,2)} 2(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Itt egyrészt $v(0,0) = u(0,0) = 1$, másrészt pedig a második integrálban kétdimenziós polárhelyettesítést végrehajtva ($dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$ alapján)

$$\int_{B(0,2)} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2r^3\,dr\,d\varphi = \int_0^2 4r^3\pi\,d\varphi = 16\pi,$$

tehát végül

$$\int_{B(0,2)} u = \frac{32\pi}{3} + 16\pi = \frac{80\pi}{3}.$$

8.23. Megoldás. Mivel u és u^2 is harmonikusak, ezért ha $\overline{B(x_0,R)} \subset \Omega$, akkor a középérték-tulajdonság szerint

$$u(x_0) = \frac{1}{V(B(x_0,R))} \int_{B(x_0,R)} u(x)\,dx$$

és

$$u^2(x_0) = \frac{1}{V(B(x_0,R))} \int_{B(x_0,R)} u^2(x)\,dx,$$

következésképpen

$$\left(\int_{B(x_0,R)} u(x)\,dx \right)^2 = \left(\int_{B(x_0,R)} u^2(x)\,dx \right) V(B(x_0,R)).$$

Másrészt viszont a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget az u és a konstans 1 függvényre alkalmazva

$$\left(\int_{B(x_0,R)} u(x)\cdot 1\,dx\right)^2 \le \left(\int_{B(x_0,R)} u^2(x)\,dx\right)\left(\int_{B(x_0,R)} 1\,dx\right),$$

ahol a jobb oldal második tényezője éppen a $B(x_0,R)$ gömb térfogata, vagyis $V(B(x_0,R))$. Ez azt jelenti, hogy szükségképpen egyenlőség áll fenn, ami csak úgy lehetséges, ha az u és a konstans 1 függvény egymás konstansszorosai, tehát u konstansfüggvény.

8.24. Megoldás. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ pontokat véve $u(x_1) = u(x_2)$, amiből rögtön adódik, hogy u konstansfüggvény. Ha $u \ge C$, ahol C állandó, akkor az $u - C$ függvény nemnegatív és továbbra is harmonikus, valamint pontosan akkor konstans, amikor u az. Emiatt feltehető, hogy u nemnegatív. Legyen most $r > 0$ tetszőleges és $R := r + |x_1 - x_2|$. Ekkor $B(x_1,r) \subset B(x_2,R)$ (lásd a 18.8. ábrát), hiszen $|x_1 - x| < r$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|x_2 - x| \le |x_1 - x| + |x_2 - x_1| + \le r + |x_2 - x_1| = R.$$

Mivel u nemnegatív függvény, így a bővebb gömbön vett integrálja legalább akkora, mint a szűkebb gömbön, ezért

$$\int_{B(x_1,r)} u \le \int_{B(x_2,R)} u.$$

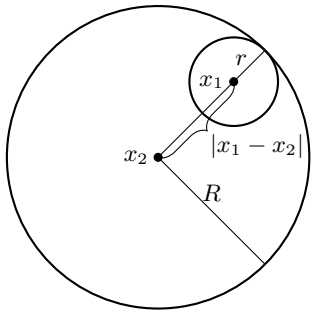
A harmonikus függvényekre vonatkozó középérték-tulajdonság alapján az iménti egyenlőtlenség bal oldala az $u(x_1)V(B(x_1,r))$ kifejezéssel, a jobb oldala pedig az $u(x_2)V(B(x_2,R))$ kifejezéssel egyezik meg, ennélfogva

$$u(x_1)V(B(x_1,r)) \le u(x_2)V(B(x_1,R)).$$

Most használjuk fel, hogy az n dimenziós gömb térfogata a sugár n-edik hatványával arányos, így azt kapjuk, hogy

$$u(x_1) \le \frac{(r + |x_1 - x_2|)^n}{r^n} u(x_2), \tag{18.47}$$

ahonnan $r \to \infty$ határátmenettel $u(x_1) \le u(x_2)$ adódik. Nyilván x_1 és x_2 szerepe felcserélhető, vagyis szükségképpen $u(x_1) = u(x_2)$, amit bizonyítani akartunk. Vegyük észre, hogy a bizonyításban csak u alulról korlátosságát használtuk. A felülről korlátos, $u \le C$ esetben a $-u + C$ függvény alulról korlátos és továbbra is harmonikus.



18.8. ábra. A $B(x_1, r) \subset B(x_2, R)$ tartalmazás

Az előbbi gondolatmenet valamelyest bonyolultabb változata Edward Nelson (1932–2014) amerikai matematikus érdeme, aki képleteket egyáltalán nem használva, némi heurisztikára támaszkodva 9 sorban írta le a [131] cikkében.[1] A (18.47) becslés egy jóval kifinomultabb változata szerepel a 8.30. és a 8.31. Feladatban, ez az úgynevezett Harnack-egyenlőtlenség, amelynek segítségével hasonlóan igazolható Liouville tétele (lásd a 8.32. Feladatot). Fontos megemlítenünk, hogy Liouville tétele $\mathbb{R}^n$ helyett féltéren már általában nem igaz, lásd a 8.25. Feladatot.

Az előbbiekben ismertetett elegáns bizonyítás mellett mutatunk még egy okoskodást a Liouville-tétel bizonyítására. Felhasználjuk (lásd a 8.93. Következményt), hogy egy harmonikus függvény akárhányszor differenciálható. Belátjuk, hogy ha u harmonikus a síkon és ott korlátos, akkor minden j-re $\partial_j u = 0$, ahonnan már adódik az u konstans volta. Vegyük észre, hogy ha u harmonikus, akkor $\partial_j u$ is az, hiszen a deriválások sorrendjének felcserélhetősége miatt $\Delta(\partial_j u) = \partial_j(\Delta u) = 0$. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ és $R > 0$, ekkor a $\partial_j u$ függvényre a $B(x_0, R)$ gömbön alkalmazott középérték-tulajdonság szerint

$$\partial_j u(x_0) = \frac{1}{V(B(x_0, R))} \int_{B(x_0,R)} \partial_j u(x)\, dx,$$

ahol a jobb oldali integrál a Gauss–Osztrogradszkij-tétel skalár változatának megfelelően az $S(x_0, R)$ gömbfelületen vett felszíni integrállá írható át. Így kapjuk, hogy

$$\partial_j u(x_0) = \frac{1}{V(B(x_0, R))} \int_{S(x_0,R)} u(x)\nu_j\, d\sigma_x.$$

[1] Nelson gondolata lényegében megtalálható már Riesz Frigyes 1914-es kolozsvári előadásaiban is; lásd [156, 47. o.].

Használjuk ki, hogy u korlátos, $|u| \le C$, továbbá $|\nu_j| \le 1$, ezáltal a jobb oldali felszíni integrál abszolút értékét felülről becsülhetjük:

$$\left| \frac{1}{V(B(x_0,R))} \int_{S(x_0,R)} u(x)\nu_j \, d\sigma_x \right| \le C \cdot A(S(x_0,R)).$$

Ebből a $V(B(x_0,R))) = \omega_n R^n/n$ és $A(S(x_0,R)) = \omega_n R^{n-1}$ összefüggések figyelembevételével a

$$|\partial_j u(x_0)| \le C \frac{A(S(x_0,R))}{V(B(x_0,R))} = \frac{C}{nR}$$

becslés adódik, ahonnan $R \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $\partial_j u(x_0) = 0$.

8.25. Megoldás. A felső félsíkban holomorf módon globálisan értelmezhető a komplex logaritmus függvény $\log z = \log r + \mathrm{i}\varphi$ alakban, ahol r a z szám abszolút értéke, $0 < \varphi < \pi$ pedig az argumentuma (szöge). Ekkor a 8.65. Tétel és a 8.66. Megjegyzés alapján $\operatorname{Im} \log z$ harmonikus függvény, amely ráadásul korlátos. Könnyen ellenőrizhető, hogy a szóban forgó függvény (x,y) koordinátás alakja:

$$u(x,y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Természetesen ha csak ez utóbbi formulát tekintjük, akkor erről világosan látszik a korlátosság, másrészt pedig deriválással ellenőrizhető, hogy harmonikus a felső félsíkban. Valóban,

$$\partial_x u(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \partial_y u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

ahonnan a megfelelő változók szerinti újbóli deriválással kapjuk, hogy

$$\partial_x^2 u(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_y^2 u(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

így csakugyan $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ a felső félsíkban.

8.26. Megoldás. Ha a (8.37) középérték-tulajdonság bármely, Ω-beli zárt gömbre teljesül és $\overline{B(x_0,R)} \subset \Omega$, akkor minden $0 < r \le R$ esetén

$$u(x_0) = \frac{1}{A(S(x_0,r))} \int_{S(x_0,r)} u(x) \, d\sigma_x = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S(x_0,r)} u(x) \, d\sigma_x,$$

következésképpen

$$r^{n-1}\omega_n u(x_0) = \int_{S(x_0,r)} u(x) \, d\sigma_x. \tag{18.48}$$

Mindkét oldalt r szerint integrálva a $[0,R]$ intervallumon a 4.15. Állítás felhasználásával nyerjük, hogy

$$\frac{R^n\omega_n}{n}u(x_0)=\int_{B(x_0,R)}u(x)\,dx,$$

ahonnan $V(B(x_0,R))=R^n\omega_n/n$ figyelembevételével leosztás után adódik a (8.36) középérték-tulajdonság:

$$u(x_0)=\frac{1}{V(B(x_0,R))}\int_{B(x_0,r)}u(x)\,dx.$$

Most tegyük fel, hogy minden zárt gömbre Ω-ban teljesül a (8.36) középérték-tulajdonság, és legyen $\overline{B(x_0,R)}\subset\Omega$. Ekkor $0\le r\le R$ esetén

$$\frac{r^n\omega_n}{n}u(x_0)=\int_{B(x_0,r)}u(x)\,dx=\int_0^r\left(\int_{B(x_0,\varrho)}u(x)\,dx\right)d\varrho,$$

amit r szerint deriválva (a végpontokban egy oldalról) éppen a (18.48) összefüggés adódik, ahonnan $r=R$ választással $A(S(x_0,R))=R^{n-1}\omega_n$ alapján éppen a (8.37) középérték-tulajdonságot nyerjük.

8.27. Megoldás. Legyen $\overline{B(x_0,R)}\subset\Omega$. Első lépésben belátjuk, hogy az x_0 középpontú koncentrikus gömbfelületeken vett felszíni integrálátlagok a sugárnak monoton növő függvényei, pontosabban a

$$\Phi(\varrho):=\frac{1}{\varrho^{n-1}}\int_{S(x_0,\varrho)}u(x)\,d\sigma_x\quad(0<\varrho\le R)$$

függvény monoton növő $(0,R]$-en. Ehhez megmutatjuk, hogy $\Phi'(\varrho)\ge 0$. A deriváláshoz először célszerű az integrált az $S(0,1)$ gömbfelületre átírni, ezért legyen $\xi=\frac{x-x_0}{\varrho}$, azaz $x=x_0+\varrho\xi$. Ekkor formálisan $d\sigma_\xi=\frac{1}{\varrho^{n-1}}d\sigma_x$ (hiszen a felszíni mérték az eltolás során nem változik meg, a hasonlóság során pedig a hasonlóság arányának $(n-1)$-edik hatványával szorzódik), így

$$\frac{1}{\varrho^{n-1}}\int_{S(x_0,\varrho)}u(x)\,d\sigma_x=\int_{S(0,1)}u(x_0+\varrho\xi)\,d\sigma_\xi.$$

A jobb oldal ϱ szerinti deriválását a paraméteres integrálok differenciálhatósági tétele (feltételezve, hogy az felszíni integrálokra is érvényben van), valamint a többváltozós láncszabály felhasználásával elvégezve kapjuk, hogy

$$\Phi'(\varrho)=\int_{S(0,1)}\operatorname{grad}u(x_0+\varrho\xi)\cdot\xi\,d\sigma_\xi,$$

ahol „·” a skalárszorzást jelöli. Most visszatérve az $S(x_0,\varrho)$ gömbfelületre

$$\int_{S(0,1)} \operatorname{grad} u(x_0+\varrho\xi)\cdot\xi\,d\sigma_\xi = \frac{1}{\varrho^{n-1}}\int_{S(x_0,\varrho)} \operatorname{grad} u(x)\cdot\frac{x-x_0}{\varrho}\,d\sigma_x,$$

ahol az $\frac{x-x_0}{\varrho}$ vektor éppen az $S(x_0,\varrho)$ gömbfelületen a ν egység hosszú külső normálvektor, így

$$\Phi'(\varrho) = \frac{1}{\varrho^{n-1}}\int_{S(x_0,\varrho)} \partial_\nu u(x)\,d\sigma_x.$$

Minthogy a szubharmonikus u és harmonikus $v=1$ függvényekre a $B(x_0,\varrho)$ gömbön alkalmazott második Green-formula szerint

$$\int_{S(x_0,\varrho)} \partial_\nu u\,d\sigma = \int_{B(x_0,\varrho)} \Delta u(x)\,dx \ge 0,$$

ezért $\Phi'(\varrho)\ge 0$, amit első lépésben bizonyítani akartunk.

Mivel a (8.42) összefüggés alapján $\Phi(\varrho)\to\omega_n u(x_0)$ midőn $\varrho\to 0+$, ezért Φ monotonitása miatt $0<\varrho\le R$ esetén

$$u(x_0)\le\frac{1}{\varrho^{n-1}\omega_n}\int_{S(x_0,\varrho)} u(x)\,d\sigma_x \le \frac{1}{R^{n-1}\omega_n}\int_{S(x_0,R)} u(x)\,d\sigma_x.$$

Szorozzuk meg az iménti egyenlőtlenségláncolatot a ϱ^{n-1} kifejezéssel, majd integráljunk ϱ szerint a $[0,R]$ intervallumon. Ekkor

$$\frac{R^n}{n}u(x_0)\le\frac{1}{\omega_n}\int_0^R\int_{S(x_0,\varrho)} u(x)\,d\sigma_x\,d\varrho \le \frac{R}{n\omega_n}\int_{S(x_0,R)} u(x)\,d\sigma_x,$$

ahol a középen álló kettős integrál a 4.15. Állításnak megfelelően a $B(x_0,R)$ gömbön vett térfogati integrál, így az egyenlőtlenségláncolatot az $\frac{n}{R^n}$ kifejezéssel szorozva

$$u(x_0)\le\frac{n}{\omega_n R^n}\int_{B(x_0,R)} u(x)\,dx \le \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{S(x_0,R)} u(x)\,d\sigma_x,$$

adódik, és így $V(B(x_0,R))=\omega_n R^n/n$ és $A(S(x_0,R))=\omega_n R^{n-1}$ figyelembevételével éppen a bizonyítandó egyenlőtlenségeket nyertük.

8.28. Megoldás. A 8.26. Feladat szerint a két középérték-tulajdonság teljesülése ekvivalens, ezért feltehető, hogy az u függvényre minden, Ω-beli zárt gömbre teljesül a (8.36) összefüggés. Legyen most $\overline{B(x_0,R)}\subset\Omega$, ekkor a 8.90. Tétel alapján létezik olyan $v\in C^2(B(x_0,R))\cap C(\overline{B(x_0,R)})$ függvény, amely harmonikus a $B(x_0,R)$ gömbön és az $S(x_0,R)$ peremen az u-val egyezik

meg. Belátjuk, hogy $u = v$ a $B(x_0, R)$ gömbön, tehát u harmonikus tetszőleges $B(x_0, R)$ gömbön, ezzel készen leszünk. Mivel v harmonikus a gömbön, ezért a (8.36) összefüggés v-re is teljesül minden zárt gömbre $B(x_0, R)$-ben. De ekkor az integrál linearitása folytán az $u - v$ függvényre is érvényes a szóban forgó középérték-tulajdonság tetszőleges $\overline{B(y_0, \varrho)} \subset B(x_0, R)$ gömbön:

$$u(y_0) - v(y_0) = \frac{1}{V(B(y_0, \varrho))} \int_{B(y_0,\varrho)} (u(x) - v(x))\, dx.$$

Most felhasználjuk a 8.64. Megjegyzésben megfogalmazott eredményt, miszerint, ha egy folytonos függvényre teljesül valamelyik középérték-tulajdonság, akkor alkalmazható rá a(z) (erős) maximumelv és nyilván a minimumelv is. Az $u - v$ függvényre tehát érvényes a maximum- és minimumelv, vagyis az $\overline{B(x_0, R)}$ zárt gömbön a maximuma, illetve minimuma az $S(x_0, R)$ peremen felvett maximummal, illetve minimummal egyezik meg. De az $S(x_0, R)$ peremen $u = v$, tehát szükségképpen $u = v$ a $B(x_0, R)$ gömbön is, így u harmonikus a gömbön.

Megemlítjük, hogy a 8.27. Feladat megoldásában leírtak alapján a következőképpen is okoskodhatunk. Most abból indulunk ki, hogy az u függvényre minden, Ω-beli zárt gömbre teljesül a (8.37) összefüggés. Indirekt tegyük fel, hogy u nem harmonikus, azaz valamely $x_0 \in \Omega$ pontban $\Delta u(x_0) \neq 0$, például $\Delta u(x_0) > 0$ (a negatív eset hasonló). Ekkor Δu folytonossága miatt az x_0 egy $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ környezetében $\Delta u > 0$. A 8.61. Tétel bizonyításában láttuk, hogy az x_0 középpontú koncentrikus gömbfelületeken vett átlagintegrálok értéke állandó, vagyis

$$\Phi(\varrho) := \frac{1}{\varrho^{n-1}} \int_{S(x_0,\varrho)} u(x)\, d\sigma_x \quad (0 < \varrho \leq R)$$

konstansfüggvény, tehát $\Phi'(\varrho) = 0$. Másrészt azonban a 8.27. Feladat megoldásában leírtak szerint

$$\Phi'(\varrho) = \frac{1}{\varrho^{n-1}} \int_{B(x_0,\varrho)} \Delta u(x)\, dx,$$

de ekkor $\Delta u > 0$ miatt $\Phi'(\varrho) \neq 0$, ami ellentmondás.

8.29. Megoldás. A harmonikus függvényekre vonatkozó erős maximumelv, vagyis a 8.63. Következmény bizonyítását módosítjuk. Tegyük fel, hogy az $x_0 \in \Omega$ pontra $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u = M$. Ekkor elég kis R-et választva $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$, ezért a 8.27. Feladatban szereplő középérték-tulajdonság szerint

$$M = u(x_0) \leq \frac{1}{V(B(x_0, R))} \int_{B(x_0,R)} u(x)\, dx$$

$$\leq \frac{1}{V(B(x_0,R))}\int_{B(x_0,R)} M\,dx = M.$$

Ekkor az u függvény folytonosságának következtében $u(x) = M$ az egész $B(x_0,R)$ gömbön, ennélfogva a $H = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ nem üres halmaz nyílt Ω-ban. Innen a befejezés ugyanaz, mint a 8.63. Következmény bizonyításában: a H halmaz egyúttal nyílt is, ami Ω összefüggősége miatt csakis úgy lehetséges, ha $H = \Omega$, tehát u konstansfüggvény.

8.30. Megoldás. A 8.90. Tétel szerint ha $x \in B(x_0,R)$, akkor

$$u(x) = \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{R\omega_n}\int_{S(x_0,R)} \frac{u(y)}{|x-y|^n}\,d\sigma_y,$$

speciálisan

$$u(x_0) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n}\int_{S(x_0,R)} u(y)\,d\sigma_y,$$

ami egyébként nem más, mint a (8.37) középérték-tulajdonság. Az iménti két összefüggés alapján a bizonyítandó két egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$\int_{S(x_0,R)} \frac{R-|x-x_0|}{(R+|x-x_0|)^{n-1}}u(y)\,d\sigma_y \leq \int_{S(x_0,R)} \frac{R^2-|x-x_0|^2}{|x-y|^n}u(y)\,d\sigma_y$$

és

$$\int_{S(x_0,R)} \frac{R^2-|x-x_0|^2}{|x-y|^n}u(y)\,d\sigma_y \leq \int_{S(x_0,R)} \frac{R+|x-x_0|}{(R-|x-x_0|)^{n-1}}u(y)\,d\sigma_y.$$

Ezekhez nyilván elegendő belátni, hogy az integrandusok között fennáll a megfelelő egyenlőtlenség. A háromszög-egyenlőtlenség alapján $y \in S(x_0,R)$ esetén

$$|x-y| \leq |x_0-y| + |x-x_0| = R + |x-x_0|,$$

továbbá

$$|x-y| \geq |x_0-y| - |x-x_0| = R - |x-x_0|,$$

tehát

$$\frac{u(y)}{(R+|x-x_0|)^n} \leq \frac{u(y)}{|x-y|^n} \leq \frac{u(y)}{(R-|x-x_0|)^n}.$$

Ebből pedig u nemnegativitása és

$$R^2 - |x-x_0|^2 = (R-|x-x_0|)(R+|x-x_0|)$$

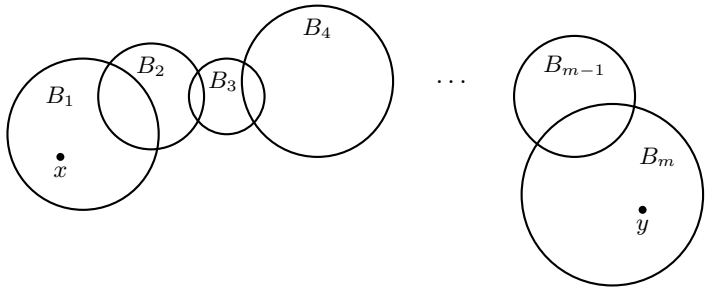
figyelembevételével adódik az integrandusokra a kívánt egyenlőtlenség:

$$\frac{R-|x-x_0|}{(R+|x-x_0|)^{n-1}}u(y) \le \frac{R^2-|x-x_0|^2}{|x-y|^n}u(y) \le \frac{R+|x-x_0|}{(R-|x-x_0|)^{n-1}}u(y).$$

8.31. Megoldás. Legyen $r := \frac{1}{4}\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, ekkor tetszőleges $y \in K$ esetén $\overline{B(y,\,2r)} \subset \Omega$. Ha $|x-y| < r$, akkor $x \in B(y,\,2r)$, így a 8.30. Feladat állítását a $B(y,\,2r)$ gömbre alkalmazva kapjuk, hogy

$$u(x) \le (2r)^{n-2}\frac{2r+|x-y|}{(2r-|x-y|)^{n-1}}u(y) \le (2r)^{n-2}\frac{3r}{r^{n-1}}u(y) \le 2^n u(y).$$

(Valójában ezt a becslést megkaphattuk volna a gömbre vonatkozó Harnack-egyenlőtlenség nélkül is, csupán a középérték-tulajdonságra támaszkodva, ahogy a 8.24. Feladat megoldásában a (18.47) összefüggést igazoltuk.)



18.9. ábra. Az x és y pontokat összekötő lánc

Azt kaptuk tehát, hogy legfeljebb r távolságra lévő pontok esetében érvényes a feladat egyenlőtlensége $C = 2^n$ választással. Mivel K kompakt halmaz, ezért az $\cup_{x\in K} B(x,r)$ nyílt gömbökből álló fedéséből kiválasztható véges sok gömb, amelyek uniója továbbra is tartalmazza a K halmazt. Jelölje a gömbök darabszámát N, halmazukat pedig $\mathscr{B}$. A gömbök egy $B_1, B_2, \dots, B_m \in \mathscr{B}$ véges sorozatát nevezzük láncnak, ha $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ minden $j = 1, 2 \dots, m-1$ esetén. Azt mondjuk, hogy az $x \in K$ pontból az $y \in K$ elérhető láncon keresztül, ha létezik olyan $B_1, B_2, \dots, B_m \in \mathscr{B}$ lánc, amelyre $x \in B_1$ és $y \in B_m$ (lásd a 18.9. ábrát). Megmutatjuk, hogy bármely két, K-beli pont egymásból elérhető láncon keresztül. Valóban, legyen $x \in K$ rögzített, ekkor az x pontból láncon keresztül elérhető K-beli pontok halmaza nem üres (hiszen x nyilván elérhető) és relatív nyílt K-ban, ugyanis ha egy y pont elérhető, akkor a lánc utolsó gömbjének minden K-beli pontja is elérhető. Másrészt az x-ből nem elérhető pontok halmaza szintén relatív nyílt, mert ha y nem elérhető és $y \in B \in \mathscr{B}$, akkor B többi pontja sem érhető el, hiszen ha $z \in B$ elérhető lenne láncon keresztül, akkor ezt a láncot a B gömbbel kiegészítve y is elérhető volna. Az x-ből láncon keresztül elérhető és nem elérhető pontok

egyaránt relatív nyílt részhalmazai K-nak, diszjunktak, így K összefüggősége folytán a nem elérhető pontok halmaza szükségképpen üres.

Ezek után legyen $x, y \in K$, és $B_1, B_2, \dots, B_m \in \mathscr{B}$ lánc, amely összeköti x-et y-nal. Válasszunk mindegyik $B_j \cap B_{j+1}$ halmazból egy x_j pontot, és legyen $x_0 = x$, $x_{m+1} = y$. Ekkor nyilván $|x_j - x_{j+1}| < r$, így a megoldás első része alapján

$$u(x_j) \le 2^n u(x_{j+1}) \quad (j = 0, 1 \dots, m),$$

így

$$u(x) \le 2^n u(x_1) \le (2^n)^2 u(x_2) \le \dots \le (2^n)^m u(y),$$

és mivel $m \le N$, ezért végül

$$u(x) \le 2^{nN} u(y),$$

ami a bizonyítandó egyenlőtlenség.

8.32. Megoldás. Mivel u korlátos, ezért alkalmas C állandóval $u \ge C$. Ekkor az $u - C$ függvény nemnegatív, harmonikus és pontosan akkor konstansfüggvény, amikor u. Emiatt feltehető, hogy u nemnegatív harmonikus függvény. Legyenek $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges rögzített pontok és $R > |x_1 - x_2|$. Ekkor $x_2 \in B(x_1, R)$, és így a 8.30. Feladatban szereplő Harnack-egyenlőtlenség szerint

$$R^{n-2} \frac{R - |x_1 - x_2|}{(R + |x_1 - x_2|)^{n-1}} u(x_2) \le u(x_1) \le R^{n-2} \frac{R + |x_1 - x_2|}{(R - |x_1 - x_2|)^{n-1}} u(x_2).$$

Nyilván

$$\lim_{R \to \infty} R^{n-2} \frac{R - |x_1 - x_2|}{(R + |x_1 - x_2|)^{n-1}} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{R \to \infty} R^{n-2} \frac{R + |x_1 - x_2|}{(R - |x_1 - x_2|)^{n-1}} = 1,$$

így a Harnack-egyenlőtlenségből határátmenettel $u(x_2) \le u(x_1) \le u(x_2)$ adódik, tehát szükségképpen $u(x_1) = u(x_2)$ teljesül tetszőleges x_1, x_2 pontokra, vagyis u konstansfüggvény.

8.33. Megoldás. Mivel minden j-re $u_j \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonikus, így nyilván $(u_j - u_k)$ is ilyen tulajdonságú, ezért alkalmazható a maximumelvnek a 8.57. Következményben megfogalmazott alakja:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_j - u_k| = \max_{\partial\Omega} |g_j - g_k| .$$

Itt a jobb oldal a (g_j) függvények egyenletes konvergenciája folytán $j, k \to \infty$ esetén 0-hoz tart, következésképpen a bal oldal is, tehát (u_j) egyenletesen Cauchy-sorozat $\overline{\Omega}$-on, pontosabban Cauchy-sorozat a maximumnormával ellátott $C(\overline{\Omega})$ teljes normált térben. Ekkor azonban (u_j) egyenletesen konvergens, tehát $u_j \to u$ valamilyen $u \in C(\overline{\Omega})$ függvényre, amelyre $u|_{\partial\Omega} = g$. Most

belátjuk, hogy u harmonikus tetszőleges $\overline{B(x_0,R)} \subset \Omega$ gömb belsejében, tehát harmonikus az egész Ω-n. A 8.90. Tételt az u_j függvényre alkalmazva:

$$u_j(x) = \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{R\omega_n} \int_{S(x_0,R)} \frac{u_j(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y \quad (x \in B(x_0,R)).$$

Elegendő megmutatnunk, hogy mindkét oldalon elvégezhető a határátmenet, és u_j helyett u is írható, ugyanis ekkor azt kapjuk, hogy az u függvényt előállítja Poisson-formula a $B(x_0,R)$ gömbön, tehát u harmonikus a gömbön. Természetesen a bal oldalon elvégezhető a határátmenet, hiszen $u_j \to u$ egyenletesen $\overline{\Omega}$-on, így minden x-re $u_j(x) \to u(x)$. Az integrál konvergenciája szintén az egyenletes konvergencia következménye, ugyanis

$$\left| \int_{S(x_0,R)} \frac{u_j(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y - \int_{S(x_0,R)} \frac{u(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y \right| \leq \max_{S(x_0,R)} |u_j - u| \int_{S(x_0,R)} \frac{1}{|x-y|^n}\, d\sigma_y,$$

ahol a felső becslés 0-hoz tart.

8.34. Megoldás. Tegyük fel először, hogy minden $x \in \Omega$ esetén $(u_j(x))$ konvergens, $u_j(x) \to u(x)$ valamilyen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvényre. Legyen $K \subset \Omega$, és rögzítsünk egy $y \in K$ pontot. Mivel az (u_j) függvénysorozat monotonitása miatt $k > j$ esetén az $u_k - u_j$ harmonikus függvény nemnegatív, ezért a 8.31. Feladat alapján létezik $C > 0$ konstans, hogy

$$u_k(x) - u_j(x) \leq C(u_k(y) - u_j(y)) \quad (x \in K).$$

Ebből következően

$$\sup_{x\in K} (u_k(x) - u_j(x)) \leq C(u_k(y) - u_j(y)) \xrightarrow{k,j\to\infty} 0,$$

tehát az (u_j) függvénysorozat egyenletesen Cauchy-tulajdonságú a maximumnormával ellátott $C(K)$ teljes normált téren. A tér teljessége miatt az (u_j) függvénysorozat szükségképpen egyenletesen konvergál az u függvényhez a K halmazon. A 8.33. Feladatban láttuk, hogy ekkor a függvénysorozat határfüggvénye harmonikus függvény a K halmazon, de ekkor természetesen az egész Ω-n is az.

Most tegyük fel, hogy valamely $x \in \Omega$ pontra $u_j(x) \to \infty$, és válasszunk egy tetszőleges $y \in \Omega$ pontot. Mivel Ω nyílt és összefüggő, ezért az 1.29. Megjegyzés szerint egyúttal töröttvonalszerűen is összefüggő, tehát bármely két pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amely része a halmaznak. Ekkor

a 8.33. Feladat állítását az x és y pontokat összekötő töröttvonalra és az $u_j - u_1$ nemnegatív harmonikus függvényre alkalmazva

$$u_j(x) - u_1(x) \le C(u_j(y) - u_1(y)),$$

ahonnan a rendőrelv alapján $j \to \infty$ esetén $u_j(y) \to \infty$ következik.

8.35. Megoldás. a) Definíció szerint az $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pontot az $S(0,R)$ gömbfelületre vonatkozó inverzió az $x' = \frac{R^2}{|x|^2}x$ pontba viszi át. A meglehetősen sok számolás átláthatóbbá tételének érdekében az x' változó helyett a z jelölést használjuk, továbbá legyen

$$\Psi(z) = |z|^{2-n}, \quad \Phi_k(z) = \frac{R^2}{|z|^2} z_k, \quad \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n).$$

Ekkor a

$$\Delta\big(R^{n-2}\Psi(u \circ \Phi)\big) = R^{n-2}\Delta\big(\Psi(u \circ \Phi)\big)$$

deriváltat kell kiszámolnunk. Mivel

$$\partial_j\big(\Psi(u \circ \Phi)\big) = (\partial_j \Psi)(u \circ \Phi) + \Psi \partial_j (u \circ \Phi),$$

ezért

$$\partial_j^2\big(\Psi(u \circ \Phi)\big) = (\partial_j^2 \Psi)(u \circ \Phi) + 2(\partial_j \Psi)\partial_j(u \circ \Phi) + \Psi \partial_j^2 (u \circ \Phi),$$

így $j = 1$-től n-ig összegezve adódik, hogy

$$\Delta\big(\Psi(u \circ \Phi)\big) = (\Delta\Psi)(u \circ \Phi) + 2\big\langle \operatorname{grad}\Psi, \operatorname{grad}(u \circ \Phi)\big\rangle + \Psi\Delta(u \circ \Phi). \quad (18.49)$$

Szükségünk lesz az $u \circ \Phi$ összetett függvény első és másodrendű parciális deriváltjaira is. A többváltozós láncszabály alapján

$$\partial_j(u \circ \Phi) = \sum_{k=1}^{n} \big((\partial_k u) \circ \Phi\big) \cdot \partial_j \Phi_k, \quad (18.50)$$

ahonnan ismételt deriválással

$$\partial_j^2(u \circ \Phi) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \big((\partial_\ell \partial_k u) \circ \Phi\big) \cdot \partial_j \Phi_k \cdot \partial_j \Phi_\ell + \sum_{k=1}^{n} \big((\partial_k u) \circ \Phi\big) \cdot \partial_j^2 \Phi_k,$$

és így $j = 1$-től n-ig összegezve kapjuk, hogy

$$\Delta(u \circ \Phi) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \big((\partial_\ell \partial_k u) \circ \Phi\big)\big\langle \operatorname{grad}\Phi_k, \operatorname{grad}\Phi_\ell\big\rangle + \sum_{k=1}^{n} \big((\partial_k u) \circ \Phi\big)\Delta\Phi_k. \quad (18.51)$$

Ezek után a Ψ és Φ függvények megfelelő parciális deriváltjait számoljuk. A számolások során lépten-nyomon használni fogjuk, hogy

$$\partial_j |z| = \frac{1}{2} \left(z_1^2 + \ldots + z_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2z_j = \frac{z_j}{|z|},$$

ezáltal

$$\partial_j \left(|z|^\alpha\right) = \alpha \left(|z|\right)^{\alpha-1} \frac{z_j}{|z|} = \alpha z_j \, |z|^{\alpha-2}.$$

Ennek alapján

$$\partial_j \Psi(z) = (2-n) z_j \, |z|^{-n},$$

ezért

$$\partial_j^2 \Psi(z) = (2-n) \, |z|^{-n} - (2-n) n z_j^2 \, |z|^{-2-n},$$

amiből $j = 1$-től n-ig összegzéssel nyerjük, hogy

$$\Delta \Psi(z) = (2-n) n \, |z|^{-n} - (2-n) n \, |z|^{-n-2} \sum_{j=1}^{n} z_j^2 = 0 \tag{18.52}$$

(ami egyáltalán nem meglepő, hiszen Ψ a Laplace-egyenlet 8.15. Definícióban értelmezett alapmegoldásának konstansszorosa $n \geq 3$ esetén, az $n = 2$ esetben pedig állandó).

Hasonló számolással adódik, hogy

$$\partial_j \Phi_k(z) = \begin{cases} -2R^2 z_k z_j \, |z|^{-4}, & \text{ha } j \neq k, \\ -2R^2 z_k^2 \, |z|^{-4} + R^2 \, |z|^{-2}, & \text{ha } j = k, \end{cases}$$

továbbá

$$\partial_j^2 \Phi_k(z) = \begin{cases} -2R^2 z_k \, |z|^{-4} + 8R^2 z_k z_j^2 \, |z|^{-6}, & \text{ha } j \neq k, \\ -6R^2 z_k \, |z|^{-4} + 8R^2 z_k^3 \, |z|^{-6}, & \text{ha } j = k, \end{cases}$$

tehát

$$\Delta \Phi_k(z) = -2(n+2) R^2 z_k \, |z|^{-4} + 8R^2 z_k \, |z|^{-6} \sum_{j=1}^{n} z_j^2 = 2(2-n) R^2 z_k \, |z|^{-4}.$$

A Φ_k és Φ_ℓ függvények parciális deriváltjainak figyelembevételével azt kapjuk, hogy $k \neq \ell$ esetén

$$\left\langle \operatorname{grad} \Phi_k, \operatorname{grad} \Phi_\ell \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j \Phi_k)(\partial_j \Phi_\ell)$$

$$= 4R^4 z_k z_\ell \,|z|^{-8} \sum_{j=1}^{n} z_j^2 - 4R^4 z_k z_\ell \,|z|^{-6} = 0,$$

továbbá

$$\big\langle \operatorname{grad} \Phi_k, \operatorname{grad} \Phi_k \big\rangle = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j \Phi_k)^2$$
$$= 4R^4 z_k^2 \,|z|^{-8} \sum_{j=1}^{n} z_j^2 - 4R^4 z_k^2 \,|z|^{-6} + R^4 \,|z|^{-4} = R^4 \,|z|^{-4}.$$

A Φ_k, Φ_ℓ függvényekre vonatkozó előbbi három összefüggést a (18.51) azonosságba visszahelyettesítve:

$$\Delta(u \circ \Phi) = \big((\Delta u) \circ \Phi\big) R^4 \,|z|^{-4} + \sum_{k=1}^{n} \big((\partial_k u) \circ \Phi\big) 2(2-n) R^2 z_k \,|z|^{-4}. \quad (18.53)$$

A (18.49) azonosság jobb oldaláról már csak a középső tag kiszámolása van hátra. Ehhez használjuk a (18.50) összefüggést, ennek alapján

$$\big\langle \operatorname{grad} \Psi, \operatorname{grad}(u \circ \Phi) \big\rangle = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j \Psi) \partial_j (u \circ \Phi) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \Psi \sum_{k=1}^{n} \big((\partial_k u) \circ \Phi\big) \cdot \partial_j \Phi_k,$$

így az összegzések sorrendjének felcserélése után

$$\big\langle \operatorname{grad} \Psi, \operatorname{grad}(u \circ \Phi) \big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \big((\partial_k u) \circ \Phi\big) \sum_{j=1}^{n} (\partial_j \Phi_k)(\partial_j \Psi),$$

ahol a $\partial_j \Psi$ és $\partial_j \Phi_k$ deriváltak figyelembevételével

$$\sum_{j=1}^{n} (\partial_j \Phi_k)(\partial_j \Psi) = (2-n) R^2 z_k \,|z|^{-n-2} - 2(2-n) R^2 z_k \,|z|^{-n-4} \sum_{j=1}^{n} z_j^2$$
$$= -(2-n) R^2 z_k \,|z|^{-n-2}.$$

Következésképpen

$$\big\langle \operatorname{grad} \Psi, \operatorname{grad}(u \circ \Phi) \big\rangle = -\sum_{k=1}^{n} \big((\partial_k u) \circ \Phi\big)(2-n) R^2 z_k \,|z|^{-n-2},$$

így a (18.52) és a (18.53) összefüggéseket a (18.49) azonosságba helyettesítve végül azt kapjuk, hogy

$$\Delta\big(\Psi(u \circ \Phi)\big) = R^4 \,|z|^{-n-2} \,(\Delta u) \circ \Phi,$$

tehát

$$\Delta v = \frac{R^{n+2}}{|z|^{n+2}} \Delta u \left(\frac{R^2}{|z|^2} z \right),$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

b) Legyen $x_0' \in \Omega'$ tetszőleges pont, amelyet az inverzió az $x_0 \in \Omega$ pontnak feleltet meg, és tekintsük az x_0 egy olyan $W := B(x_0, R)$ környezetét, amelyre $\overline{W} \subset \Omega$. Az inverzió W-t a W' tartományba viszi át. Elegendő azt igazolnunk, hogy v harmonikus a W' tartományban. Mivel u harmonikus Ω-ban, így természetesen W-ben is, ezért a W tartományon alkalmazott harmadik Green-formula szerint $x \in W$ esetén

$$u(x) = \int_{\partial W} \left(E(x-y) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_\nu^y (E(x-y)) \right) d\sigma_y,$$

ahol E a $(-\Delta)$ operátornak a 8.15. Definícióban értelmezett alapmegoldása. Az u iménti integrál alakban való előállítását a v függvény definíciójába helyettesítve kapjuk, hogy

$$v(x') = \int_{\partial W} \frac{R^{n-2}}{|x'|^{n-2}} E\left(\frac{R^2}{|x'|^2} x' - y \right) \partial_\nu u(y)\, d\sigma_y - \int_{\partial W} u(y) \partial_\nu^y \left[\frac{R^{n-2}}{|x'|^{n-2}} E\left(\frac{R^2}{|x'|^2} x' - y \right) \right] d\sigma_y.$$

Innen a paraméteres integrálok differenciálhatósági tételének (a felszíni integrálra történő) alkalmazásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \Delta v(x') = &\int_{\partial W} \Delta_{x'} \left[\frac{R^{n-2}}{|x'|^{n-2}} E\left(\frac{R^2}{|x'|^2} x' - y \right) \right] \partial_\nu u(y)\, d\sigma_y \\ &- \int_{\partial W} u(y) \partial_\nu^y \Delta_{x'} \left[\frac{R^{n-2}}{|x'|^{n-2}} E\left(\frac{R^2}{|x'|^2} x' - y \right) \right] d\sigma_y. \end{aligned} \tag{18.54}$$

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy $n \geq 3$ esetén

$$\frac{R^{n-2}}{|x'|^{n-2}} E\left(\frac{R^2}{|x'|^2} x' - y \right) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} E\left(\frac{R^2}{|y|^2} y - x' \right), \tag{18.55}$$

az $n = 2$ esetben pedig

$$\frac{R^{n-2}}{|x'|^{n-2}} E\left(\frac{R^2}{|x'|^2} x' - y \right) = E\left(\frac{R^2}{|y|} y - x' \, |y| \right) - E(x'). \tag{18.56}$$

Ekkor készen leszünk, ugyanis mind (18.55), mind (18.56) jobb oldala az x' változónak harmonikus függvénye, hiszen az összetett függvény deriválási szabálya és $\Delta E = 0$ miatt

$$\Delta_{x'}\left[E\left(\frac{R^2}{|y|^2}y - x'\right)\right] = \Delta_{x'}E\left(\frac{R^2}{|y|^2}y - x'\right) = 0,$$

így a v függvény (18.54) előállításában mindkét integrandus 0-val egyenlő, tehát maguk az integrálok is 0-val egyenlők, vagyis v valóban harmonikus W-n. A (18.55) azonossághoz E definíciójába való behelyettesítés alapján elegendő igazolni, hogy

$$\left|\frac{R^2}{|x'|}x' - y\,|x'|\right| = \left|\frac{R^2}{|y|}y - x'\,|y|\right|. \tag{18.57}$$

Ez utóbbi egyenlőség viszont egyszerűen következik abból, hogy mindkét oldal négyzete az (1.1) kifejtési azonosságot figyelembe véve az

$$R^4 - 2R^2\langle x', y\rangle + |y|^2\,|x'|^2$$

kifejezéssel egyezik meg. A (18.56) egyenlőség pedig a logaritmus azonossága és a (18.57) összefüggés következménye:

$$\log\left|\frac{R^2}{|x'|^2}x' - y\right| = \log\left|\frac{R^2}{|x'|}x' - y\,|x'|\right| - \log|x'| = \log\left|\frac{R^2}{|y|}y - x'\,|y|\right| - \log|x'|\,.$$

8.36. Megoldás. Az R alkalmas csökkentésével feltehető, hogy u folytonos az $S(x_0, R)$ gömbfelületen. Ekkor a 8.88. Tétel alapján tudjuk, hogy létezik (egyetlen) olyan $\tilde{u}$ függvény, amely folytonos a $\overline{B(x_0, R)}$ zárt gömbön, $\Delta\tilde{u} = 0$ a gömb belsejében és $\tilde{u} = u$ az $S(x_0, R)$ gömbfelületen. Elegendő belátnunk, hogy $u(x) = \tilde{u}(x)$ minden $x \in B(x_0, R) \setminus \{x_0\}$ esetén, mert ekkor az $\tilde{u}$ megfelelő kiterjesztése u-nak. Megmutatjuk, hogy a $v := u - \tilde{u}$ függvényre $v(x) = 0$, ha $x \in B(x_0, R) \setminus \{x_0\}$. Mindenesetre az $S(x_0, R)$ gömbfelületen $v = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ és értelmezzük a w_ε függvényt a következőképpen

$$w_\varepsilon(x) := \varepsilon\big(E(x - x_0) - E_R\big) \quad (x \neq x_0),$$

ahol

$$E_R := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log R, & \text{ha } n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3, \end{cases}$$

vagyis E_R az $E(x-x_0)$ függvénynek az $S(x_0,R)$ gömbfelületen felvett állandó értéke. Ekkor $w_\varepsilon \geq 0$ a $\overline{B(x_0,R)}$ gömbön, $\Delta w_\varepsilon = 0$ a $B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$ kipontozott gömbön, továbbá $w_\varepsilon = 0$ az $S(x_0,R)$ gömbfelületen. Mivel $\tilde{u}$ korlátos (hiszen folytonos a zárt gömbön), továbbá

$$\lim_{x\to x_0} E(x-x_0) = +\infty,$$

és a feltétel szerint

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{E(x-x_0)} = 0,$$

ezért választható olyan (kis) $\varrho > 0$ szám, hogy az $S(x_0,\varrho)$ gömbfelületen

$$-w_\varepsilon \leq v \leq w_\varepsilon. \tag{18.58}$$

Alkalmazzuk most a maximumelvet a $B(x_0,R)\setminus\overline{B(x_0,\varrho)}$ „lyukas gömbön" a $v - w_\varepsilon$ harmonikus függvényre. Mivel $w_\varepsilon = v = 0$ az $S(x_0,R)$ gömbfelületen és $v \leq w_\varepsilon$ az $S(x_0,\varrho)$ gömbfelületen, ezért

$$\max_{\overline{B(x_0,R)}\setminus B(x_0,\varrho)} (v-w_\varepsilon) = \max_{S(x_0,R)\cup S(x_0,\varrho)} (v-w_\varepsilon) \leq 0,$$

tehát $v \leq w_\varepsilon$ a $B(x_0,R)\setminus\overline{B(x_0,\varrho)}$ tartományon. Hasonló módon, a $v + w_\varepsilon$ függvényre alkalmazott maximumelv segítségével nyerjük, hogy $v \geq -w_\varepsilon$ a $B(x_0,R)\setminus\overline{B(x_0,\varrho)}$ tartományon, vagyis a (18.58) becslés a $B(x_0,R)\setminus\overline{B(x_0,\varrho)}$ tartományon teljesül. Legyen most $x \in B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$, ekkor a (18.58) becslésből $\lim_{\varepsilon\to 0+} w_\varepsilon(x) = 0$ figyelembevételével $\varepsilon \to 0+$ határátmenet után $v(x) = 0$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $v = 0$ a kipontozott $B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$ gömbön.

8.37. Megoldás. A 8.18. Tétel szerint a

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\,dy$$

függvényre $-\Delta v = f$ az $\mathbb{R}^n$ térben. Mivel $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, ezért f nyilván korlátos, $|f| \leq K$, továbbá f valamely $B(0,R)$ gömbön kívül 0-val egyenlő, ezáltal

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\,dy\right| \leq K\int_{B(0,R)} |E(x-y)|\,dy,$$

ahol a felső becslés véges, hiszen E lokálisan integrálható függvény a 8.16. Tétel alapján. Ha u egy korlátos megoldása a $-\Delta u = f$ egyenletnek, akkor $\Delta(u-v) = 0$, tehát $(u-v)$ harmonikus függvény $\mathbb{R}^n$-en, továbbá korlátos is, ekkor viszont a Liouville-tétel (lásd a 8.24. és a 8.32. Feladatot) miatt csakis konstans lehet. Végeredményben tehát $u = v + C$.

8.38. Megoldás. Alkalmazzuk a harmadik Green-formulát az $F = \mathscr{G}$ függvényre:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \big(\mathscr{G}(x,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\big)\, d\sigma_y \\ - \int_\Omega \big(\mathscr{G}(x,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta\mathscr{G}(x,y)\big)\, dy.$$

Vegyük figyelembe, hogy a Green-függvény 8.77. Definíciójában foglaltak szerint u kielégíti a

$$\partial_\nu u(y) = \varphi(y) - h(y)u(y) \quad (y \in \partial\Omega)$$

peremfeltételt és a $-\Delta u = f$ differenciálegyenletet, továbbá a Green-függvényre teljesül

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) + h(y)\mathscr{G}(x,y) = 0 \quad (y \in \partial\Omega)$$

és $\Delta_y \mathscr{G}(x,y) = 0$, ha $y \in \Omega \setminus \{x\}$. Mindezek alapján az $y \in \partial\Omega$ pontokra

$$\mathscr{G}(x,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = \mathscr{G}(x,y)\varphi(y),$$

így végül Green harmadik formulájából a kívánt összefüggést nyerjük:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\, d\sigma_y + \int_\Omega \mathscr{G}(x,y) f(y)\, dy.$$

8.39. Megoldás. A Poisson-egyenletre vonatkozó Green-függvény 8.70. Definíciója szerint

$$\mathscr{G}(x,y) = E(x-y) - w(x,y),$$

ahol E a $(-\Delta)$ operátor 8.15. Definícióban értelmezett alapmegoldása, továbbá a $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvény tetszőleges rögzített $x \in \Omega$ esetén kielégíti a

$$\begin{cases} -\Delta_y w(x,y) = 0 & \Omega\text{-ban}, \\ \quad w(x,y) = E(x-y) & (y \in \partial\Omega), \end{cases}$$

Dirichlet-feladatot. Az $y \mapsto w(x,y)$ függvényre alkalmazott gyenge minimumelv szerint

$$\min_{y\in\overline{\Omega}} w(x,y) = \min_{y\in\partial\Omega} w(x,y) = \min_{y\in\partial\Omega} E(x-y).$$

Az $n \geq 3$ esetben E pozitív értékű függvény, így

$$E(x-y) - \mathscr{G}(x,y) = w(x,y) > 0 \quad (y \in \Omega).$$

Az $n = 2$ esetben pedig

$$\min_{y\in\partial\Omega} E(x-y) = -\max_{y\in\partial\Omega} \frac{1}{2\pi}\log|x-y|,$$

így ebben az esetben alkalmas C konstanssal

$$E(x-y) - \mathscr{G}(x,y) = w(x,y) > -C \quad (y\in\Omega).$$

A $\mathscr{G}(x,y) > 0$ egyenlőtlenség igazolásához tekintsünk egy olyan, elég kicsiny $r > 0$ sugarú $B(x,r)$ gömböt, amelyre $y \notin \overline{B(x,r)} \subset \Omega$, továbbá az $S(x,r)$ gömbfelületen $\mathscr{G}(x,y) > 0$. Ez utóbbi elérhető, hiszen rögzített $x \in \Omega$ esetén $w(x,y)$ folytonos $\overline{\Omega}$-on, tehát korlátos, másrészt pedig

$$\lim_{y\to x} E(x-y) = +\infty,$$

ezért

$$\lim_{y\to x} \mathscr{G}(x,y) = +\infty.$$

Az r megválasztása után alkalmazzuk a gyenge minimumelvet az $y \mapsto \mathscr{G}(x,y)$ függvényre az $\Omega \setminus \overline{B(x,r)}$ tartományon, így kapjuk:

$$\min_{y\in\overline{\Omega}\setminus B(x,r)} \mathscr{G}(x,y) = \min_{y\in\partial\Omega\cup S(x,r)} \mathscr{G}(x,y) \geq 0,$$

hiszen a Green-függvény tulajdonságai alapján $\mathscr{G}(x,y) = 0$, ha $y \in \partial\Omega$, az $S(x,r)$ gömbfelületen pedig r választása folytán $\mathscr{G}(x,y) > 0$. Következésképpen $\mathscr{G}(x,y) \geq 0$, ha $y \in \Omega \setminus \overline{B(x,r)}$. De $y \in \Omega \setminus \overline{B(x,r)}$ esetén $\mathscr{G}(x,y)$ nem lehet 0, máskülönben az erős minimumelv miatt az $y \mapsto \mathscr{G}(x,y)$ függvény azonosan 0 lenne az $y \in \Omega \setminus \overline{B(x,r)}$ halmazon, azonban ekkor $\mathscr{G}(x,y) = 0$ lenne $y \in S(x,r)$ esetén is ($y \mapsto \mathscr{G}(x,y)$ folytonos az $\Omega \setminus \overline{B(x,r)}$ halmazon), ez viszont ellentmond annak, hogy $y \in S(x,r)$ esetén $\mathscr{G}(x,y) > 0$.

8.40. Megoldás. A Poisson-egyenletre vonatkozó Green-függvény 8.70. Definíciója szerint az Ω_j $(j = 1,2)$ tartományon

$$\mathscr{G}_j(x,y) = E(x-y) - w_j(x,y),$$

ahol E a $(-\Delta)$ operátor 8.15. Definícióban értelmezett alapmegoldása, továbbá a $w_j \in C^2(\Omega_j)\cap C^1(\overline{\Omega_j})$ függvény tetszőleges rögzített $x \in \Omega_j$ esetén kielégíti a

$$\begin{cases} -\Delta_y w_j(x,y) = 0 \quad \Omega_j\text{-ben}, \\ \quad w_j(x,y) = E(x-y) \quad (y\in\partial\Omega_j), \end{cases}$$

Dirichlet-feladatot. Belátjuk, hogy $x \in \Omega_2$ esetén

$$\max_{y\in\partial\Omega_2} (w_1 - w_2) \leq 0.$$

Valóban, tekintsünk az $x \in \Omega_2$ pont körül egy olyan $r > 0$ sugarú gömböt, hogy $\overline{B(x,r)} \subset \Omega_2$ és $y \in S(x,r)$ esetén $E(x-y) \geq w_1(x,y)$. Ilyen r létezik, ugyanis rögzített $x \in \Omega$ mellett $w_1(x,y)$ folytonos $\overline{\Omega}$-on, tehát korlátos, másrészt pedig

$$\lim_{y \to x} E(x-y) = +\infty.$$

Az r megválasztása után alkalmazzuk a gyenge minimumelvet az

$$y \mapsto \mathscr{G}_1(x,y) = E(x-y) - w_1(x,y)$$

függvényre az $\Omega_1 \setminus \overline{B(x,r)}$ tartományon:

$$\min_{y \in \overline{\Omega_1} \setminus B(x,r)} \mathscr{G}_1(x,y) = \min_{y \in \partial\Omega_1 \cup S(x,r)} \mathscr{G}_1(x,y).$$

Mivel az $y \mapsto \mathscr{G}_1(x,y)$ függvény az $S(x,r)$ gömbfelületen nemnegatív, továbbá $\partial\Omega_1$-en a Green-függvény tulajdonságai miatt 0-val egyenlő, ezért $y \in \Omega_1 \setminus \setminus \overline{B(x,r)}$ esetén

$$E(x-y) - w_1(x,y) \geq 0,$$

tehát $y \in \partial\Omega_2 \subset \Omega_1 \setminus \overline{B(x,r)}$ esetén valóban

$$w_2(x,y) - w_1(x,y) = E(x-y) - w_1(x,y) \geq 0.$$

Ezután alkalmazzuk az Ω_2 tartományon a $w_1(x,y) - w_2(x,y)$ függvényre a gyenge maximumelvet:

$$\max_{y \in \overline{\Omega_2}} (w_1(x,y) - w_2(x,y)) = \max_{y \partial\Omega_2} (w_1(x,y) - w_2(x,y)) \leq 0,$$

tehát $y \in \Omega_2$ és $x \in \Omega_2$ esetén

$$w_1(x,y) - w_2(x,y) \leq 0,$$

ezért

$$\mathscr{G}_2(x,y) \leq \mathscr{G}_1(x,y).$$

8.41. Megoldás. Az indukció menete a következő lesz: belátjuk, hogy $n = 2$ és $n = 3$ esetén igaz az állítás, majd megmutatjuk, hogy ha valamilyen n-re igaz, akkor $(n+2)$-re is. Ebből már nyilván következik, hogy tetszőleges páros és páratlan $n \geq 2$ szám esetén igaz az állítás.

Az $n = 2$ esetben az $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ és $y = (y_1, 0) \in \partial\mathbb{R}^2_+$ pontokra

$$|x-y|^2 = x_2^2 + (x_1 - y_1)^2,$$

így

$$\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dy_1}{x_2^2+(y_1-x_1)^2} = \left[\frac{1}{x_2}\operatorname{arctg}\frac{y_1-x_1}{x_2}\right]_{y_1=-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{x_2},$$

tehát $\omega_2 = 2\pi$ alapján

$$\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} \frac{2x_2 d\sigma_y}{\omega_2 |x-y|^2} = \frac{2x_2}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{x_2} = 1.$$

Az $n \geq 3$ esetben $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ és $y = (y_1,\dots,y_{n-1},0) \in \partial\mathbb{R}^n_+$ esetén bevezetve az $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ és $y' = (y_1,\dots,y_{n-1})$ jelöléseket,

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^n} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dy'}{\left(|x'-y'|^2+x_n^2\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\xi}{\left(|\xi|^2+1\right)^{\frac{n}{2}}},$$

ahol a 4.15. Állítás alapján az $\mathbb{R}^{n-1}$-en vett integrált felírhatjuk az $(n-1)$ dimenziós $S(0,r)$ gömbfelületeken vett felszíni integrálok r szerinti integráljaként:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\xi}{\left(|\xi|^2+1\right)^{\frac{n}{2}}} = \int_0^\infty \int_{S(0,r)} \frac{d\sigma_\xi}{\left(|\xi|^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}\,dr.$$

Az $S(0,r)$ gömbfelületen $|\xi| = r$ állandó, így a felszíni integrál az integrandus és a felszín szorzata. Mivel $S(0,r)$ felszíne $\omega_{n-1}r^{n-2}$, ezért

$$\int_0^\infty \int_{S(0,r)} \frac{d\sigma_\xi}{\left(|\xi|^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}\,dr = \omega_{n-1}\int_0^\infty (r^2+1)^{-\frac{n}{2}} r^{n-2}\,dr,$$

tehát végül azt kapjuk, hogy

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^n} = \frac{\omega_{n-1}}{x_n}\int_0^\infty (r^2+1)^{-\frac{n}{2}} r^{n-2}\,dr.$$

Speciálisan $n = 3$ esetén

$$\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^3} = \frac{\omega_2}{x_3}\int_0^\infty (r^2+1)^{-\frac{3}{2}} r\,dr = \left[-\frac{\omega_2}{x_3}(r^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_{r=0}^\infty = \frac{\omega_2}{x_3},$$

így $\omega_3 = 4\pi$ miatt valóban

$$\frac{2x_3}{\omega_3}\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^3} = \frac{2\omega_2}{\omega_3} = 1.$$

Tegyük most fel, hogy n-re igaz az állítás és legyen

$$b_n := \int_0^\infty (r^2+1)^{-\frac{n}{2}} r^{n-2}\,dr,$$

tehát

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^n} = \frac{\omega_{n-1}}{x_n} b_n.$$

Mivel

$$b_{n+2} = \int_0^\infty (r^2+1)^{-\frac{n}{2}-1} r^n \, dr = -\frac{1}{n} \int_0^\infty \left((r^2+1)^{-\frac{n}{2}}\right)' r^{n-1},$$

ezért parciális integrálással nyerjük, hogy

$$b_{n+2} = -\frac{1}{n} \left[\frac{r^{n-1}}{(r^2+1)^{\frac{n}{2}}} \right]_{r=0}^\infty + \frac{n-1}{n} \int_0^\infty (r^2+1)^{-\frac{n}{2}} r^{n-2} \, dr = \frac{n-1}{n} b_n.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{R}^{n+2}_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^{n+2}} &= \frac{\omega_{n+1}}{x_{n+2}} b_{n+2} = \frac{\omega_{n+1}}{x_{n+2}} \cdot \frac{n-1}{n} b_n \\ &= \frac{\omega_{n+1}}{x_{n+2}} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x_n}{\omega_{n-1}} \int_{\partial\mathbb{R}^{n+2}_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^n}, \end{aligned}$$

ezáltal az indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned} \frac{2x_{n+2}}{\omega_{n+2}} \int_{\partial\mathbb{R}^{n+2}_+} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^{n+2}} &= \frac{2x_{n+2}}{\omega_{n+2}} \cdot \frac{\omega_{n+1}}{x_{n+2}} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x_n}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\omega_n}{2x_n} \\ &= \frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_{n+2}} \cdot \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Az indukciós lépés befejezéséhez már csak annyit kell igazolnunk, hogy

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_{n+2}} \cdot \frac{n-1}{n} = 1.$$

Ez viszont következik abból, hogy a 2.15. Állításban szereplő explicit képlet alapján tetszőleges m pozitív egész számra

$$\omega_{m+2} = \frac{2\pi}{m} \omega_m, \tag{18.59}$$

tehát

$$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_{n+2}} = \frac{n}{n-1}.$$

Ezzel az indukció kész.

Megjegyezzük, hogy a (18.59) azonosságot abból is láthattuk volna, hogy a 4.14. Megjegyzés szerint

$$\omega_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

és a Γ függvény ismert tulajdonsága, hogy $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

8.42. Megoldás. A 8.95. Tétel előzményeként megmutattuk azt, hogy az $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ féltéren értelmezett Dirichlet-feladat Green-függvénye

$$\mathscr{G}(x,y) = E(x-y) - E(x'-y), \tag{18.60}$$

ahol $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$. Ebből adódott a bizonyítandó

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \left(-\partial^y_\nu \mathscr{G}(x,y)\right) d\sigma_y = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{2x_n}{\omega_n} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y \tag{18.61}$$

előállítás. A 8.41. Feladat alapján

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{2x_n}{\omega_n |x-y|^n}\, d\sigma_y = 1,$$

így $\varphi \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ miatt

$$|u(x)| \le \sup_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{2x_n}{\omega_n |x-y|^n}\, d\sigma_y = \sup_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi|\,,$$

tehát a (18.61) előállításban szereplő integrál létezik és $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

Ezek után első lépésben meg fogjuk mutatni, hogy $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, sőt $\mathbb{R}^n_+$ pontjaiban alkalmazható a paraméteres integrálok differenciálhatósági tétele, vagyis tetszőleges $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexre

$$\partial^\alpha u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \partial^\alpha_x \left(-\partial^y_\nu \mathscr{G}(x,y)\right) d\sigma_y,$$

ahol ∂^α_x az x változóban az α multiindexnek megfelelő deriváltat jelöli. Ekkor speciálisan $\partial^\alpha = \Delta$ választással

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta\left(-\partial^y_\nu \mathscr{G}(x,y)\right) d\sigma_y,$$

azonban itt a $\mathscr{G}$ Green-függvény (18.60) alakjából (és E alapmegoldás mivoltából) következően $\Delta_x \mathscr{G}(x,y) = 0$, ha $x \in \mathbb{R}^n_+$ és $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$, így

$$\Delta_x\left(-\partial^y_\nu \mathscr{G}(x,y)\right) = -\partial^y_\nu\left(\Delta_x \mathscr{G}(x,y)\right) = 0,$$

tehát egyúttal a $\Delta u(x) = 0$ összefüggést is megkapjuk.

A paraméteres integrálokra vonatkozó tétel feltételeinek ellenőrzéséhez legyen

$$K(x,y) := \frac{2x_n}{\omega_n}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}.$$

Világos, hogy bármely rögzített $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ esetén tetszőleges α multiindexre az $x \mapsto \partial_x^\alpha K(x,y)$ függvény létezik és folytonos az $\mathbb{R}^n_+$ féltér pontjaiban. Másrészt azt állítjuk, az $\mathbb{R}^n_+$ féltér bármely elég kis zárt gömbjén a $\partial_x^\alpha K(x,y)$ deriváltnak létezik az x paramétertől független integrálható majoránsa, és így a paraméteres integrálok differenciálhatósági tételének alkalmazása valóban jogos. Azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges $\overline{B(x_0,r)} \subset \mathbb{R}^n_+$ rögzített gömbhöz és $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexhez létezik (az x_0-tól, r-től és α-tól függő) $C > 0$ konstans úgy, hogy minden $x \in B(x_0,r)$ pontra

$$|\partial_x^\alpha K(x,y)| \le C \cdot \frac{1}{1+|y|^n} \quad (y \in \mathbb{R}^n). \tag{18.62}$$

Az iménti becslés bizonyítására hamarosan visszatérünk, először azonban azt igazoljuk, hogy a jobb oldalon szereplő függvény integrálja a $\partial\mathbb{R}^n_+$ síkon véges, ezzel a paraméteres integrálok differenciálhatósági tételének feltételei valóban teljesülnek. Mivel $\partial\mathbb{R}^n_+$ azonosítható az $\mathbb{R}^{n-1}$ térrel, ezért

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{d\sigma_y}{1+|y|^n} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dy}{1+|y|^n},$$

ami egy véges integrál. Valóban, az integrandus az $\{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| \le 1\}$ gömbön korlátos, azon kívül pedig a 4.15. Állítás felhasználásával kapjuk, hogy

$$\int_{|y|\ge 1} \frac{dy}{1+|y|^n} \le \int_{|y|\ge 1} \frac{dy}{|y|^n} = \int_1^\infty \int_{S(0,\varrho)} \frac{d\sigma_y}{|y|^n},$$

ahol az $(n-1)$ dimenziós $S(0,\varrho)$ gömbfelszínen az $|y|^{-n}$ függvény értéke konstans $|\varrho|^{-n}$, így a felszíni integrálja a szóban forgó konstans és a gömb $\omega_{n-1}\varrho^{n-2}$ felszínének szorzata, vagyis $\omega_{n-1}\varrho^{-2}$, tehát

$$\int_{|y|\ge 1} \frac{dy}{1+|y|^n} \le \int_1^\infty \varrho^{-2}\,d\varrho = \left[-\varrho^{-1}\right]_1^\infty = 1.$$

Végeredményben tehát

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{d\sigma_y}{1+|y|^n} < \infty,$$

ezért a (18.62) becslés szerint a $\partial_x^\alpha K(x,y)$ függvénynek csakugyan létezik az x-től független integrálható majoránsa a szóban forgó gömbön.

A (18.62) összefüggés igazolásához gondoljuk meg, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexre

$$\partial_x^\alpha K(x,y) = p_\alpha(x,y)\,|x-y|^{-n-2|\alpha|}\,\varphi(y), \tag{18.63}$$

ahol p_α olyan $2n$ változós polinomfüggvény, amely az y változójában legfeljebb $2|\alpha|$-fokú. Valóban, $|\alpha| = 0$ esetén az iménti összefüggés a $p_{(0,\dots,0)}(x,y) = x_j$ polinommal igaz, ha pedig valamely α multiindexre teljesül, akkor

$$\partial_{x_j}\partial^\alpha K(x,y) = q(x,y)\,|x-y|^{-n-2(|\alpha|+1)}\,\varphi(y),$$

ahol

$$q(x,y) := \partial_{x_j} p_\alpha(x,y)\,|x-y|^2 - (n+2|\alpha|)p_\alpha(x,y)(y_j - x_j)$$

olyan polinomfüggvény, amelyben y foka legfeljebb $2|\alpha|+2$. A $p_\alpha(x,y)$ polinomot az y változó polinomjának tekintve az együtthatók az x paraméter folytonos függvényei a kompakt $\overline{B(x_0,r)}$ gömbön, így az együtthatók korlátosak, továbbá az y_j változók bármely legfeljebb $2|\alpha|$ tényezős szorzatát az $1+|y|^{2|\alpha|}$ kifejezés konstansszorosa felülről becsüli, ezért a (18.63) becslésből φ korlátosságának felhasználásával egy alkalmas $\tilde{C}$ konstanssal adódik, hogy

$$|\partial_x^\alpha K(x,y)| = \tilde{C}(1+|y|^{2|\alpha|})\,|x-y|^{-n-2|\alpha|}.$$

Ennek alapján a (18.62) becsléshez elegendő belátni, hogy a

$$H(x,y) := \frac{(1+|y|^{|2\alpha|})(1+|y|^n)}{|x-y|^{n+2|\alpha|}}$$

kifejezés felülről korlátos a $B(x_0,r)\times\mathbb{R}^{n-1}$ halmazon. Mivel a háromszög-egyenlőtlenségből következően $x \in \overline{B(x_0,r)}$ esetén $|x| \le |x_0|+r$ és ennélfogva

$$|x-y| \ge |y| - |x| \ge |y| - |x_0| - r,$$

ezért, ha $|y| > |x_0| + r$, akkor

$$H(x,y) \le \frac{(1+|y|^{2|\alpha|})(1+|y|^n)}{(|y|-|x_0|-r)^{n+2|\alpha|}},$$

ahol az x-től független felső becslés $|y| \to \infty$ esetén 1-hez tart (hiszen a számláló és nevező nagyságrendje is $n+2|\alpha|$) . Következésképpen elegendően nagy $R > 0$ számot választva a H függvény felülről korlátos a

$$B(x_0,r)\times\{y\in\mathbb{R}^{n-1} : |y| \ge R\}$$

halmazon. A „maradék” $\overline{B(x_0,r)}\times\overline{B(0,R)}$ kompakt halmazon pedig (a többváltozós) Weierstrass-tétel biztosítja H maximumának létezését, hiszen H

folytonos függvény. Ezzel beláttuk a H függvény felülről korlátosságát, ez elegendő a (18.62) becsléshez, ami pedig a paraméteres integrálok differenciálási tételének alkalmazhatóságát biztosítja.

Ezek után második lépésben belátjuk, hogy tetszőleges $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ esetén

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}^n_+}} u(x) = \varphi(x_0). \tag{18.64}$$

A 8.41. Feladatban szereplő összefüggésből következően

$$\varphi(x_0) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{2x_n}{\omega_n\,|x-y|^n}\varphi(x_0)\,d\sigma_y,$$

ezáltal tetszőleges $\delta > 0$ és $x \in \mathbb{R}^n_+$ mellett

$$\begin{aligned} |u(x)-\varphi(x_0)| &= \left|\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{2x_n}{\omega_n\,|x-y|^n}\big(\varphi(y)-\varphi(x_0)\big)\,d\sigma_y\right| \\ &\le \int\limits_{\substack{|x_0-y|<\delta\\ y\in\partial\mathbb{R}^n_+}} \frac{2x_n}{\omega_n\,|x-y|^n}\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\,d\sigma_y \\ &\quad + \int\limits_{\substack{|x_0-y|\ge\delta\\ y\in\partial\mathbb{R}^n_+}} \frac{2x_n}{\omega_n\,|x-y|^n}\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\,d\sigma_y. \end{aligned} \tag{18.65}$$

Mivel φ folytonos x_0-ban, ezért adott $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $|x_0 - y| < \delta$ esetén

$$|\varphi(y)-\varphi(x_0)| < \varepsilon,$$

és így

$$\int\limits_{\substack{|y-x_0|<\delta\\ y\in\partial\mathbb{R}^n_+}} \frac{2x_n}{\omega_n\,|x-y|^n}\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\,d\sigma_y \le \varepsilon\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{2x_n}{\omega_n\,|x-y|^n}\,d\sigma_y = \varepsilon.$$

Rögzítsünk most egy ilyen tulajdonságú δ számot, ekkor $|x_0 - y| \ge \delta$ és $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ esetén

$$|x-y| \ge |x_0-y| - |x_0-x| \ge |x_0-y| - \frac{1}{2}|x_0-y| = \frac{1}{2}|x_0-y|,$$

ennélfogva φ korlátosságának ($|\varphi| \le C$) figyelembevételével

$$\int\limits_{\substack{|y-x_0|\ge\delta\\ y\in\partial\mathbb{R}^n_+}} \frac{2x_n}{\omega_n\,|x-y|^n}\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\,d\sigma_y \le \frac{2^{n+2}Cx_n}{\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{|x_0-y|^n}\,d\sigma_y.$$

Itt a felső becslésben $x_n \to 0$ midőn $x \to x_0$, továbbá az integrál az x_0-tól független állandó, így van olyan $\mu > 0$ szám, hogy ha $|x - x_0| < \mu$, akkor

$$\int\limits_{\substack{|y-x_0|\geq\delta \\ y\in\partial\mathbb{R}^n_+}} \frac{2x_n}{\omega_n |x-y|^n} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| \, d\sigma_y < \varepsilon.$$

Végeredményben tehát $|x - x_0| < \mu$ esetén a (18.65) felbontásban szereplő mindkét integrál ε-nál kisebb, vagyis $|u(x) - \varphi(x_0)| < 2\varepsilon$, ami igazolja a (18.64) konvergenciát.

8.43. Megoldás. A negyedtér esetében egyrészt a

$$w(x,y) = E(x'-y) + E(\tilde{x}-y) - E(\tilde{x}'-y)$$

képlettel megadott függvény Ω-ban kielégíti a $\Delta_y w = 0$ egyenletet, hiszen $\Delta E = 0$ az origó kivételével, és ha $x \in \Omega$, akkor $x', \tilde{x}, \tilde{x}' \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, így E eltolt argumentumában nem jelenik meg a 0. Másrészt $w(x,y) = E(x-y)$, ha

$$y \in \partial\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : y_{n-1} = 0, y_n \geq 0\} \cup \{y \in \mathbb{R}^n : y_{n-1} \geq 0, y_n = 0\},$$

mert $y_n = 0$ esetén

$$E(x-y) = E(x'-y) \quad \text{és} \quad E(\tilde{x}-y) = E(\tilde{x}'-y),$$

az $y_{n-1} = 0$ esetben pedig

$$E(x-y) = E(\tilde{x}-y) \quad \text{és} \quad E(x'-y) = E(\tilde{x}'-y).$$

Hasonlóan, a félgömb esetében a

$$w(x,y) = E(\tilde{x}-y) + E\left(\frac{|x|}{R}(x'-y)\right) - E\left(\frac{|\tilde{x}|}{R}(\tilde{x}'-y)\right)$$

képlettel megadott függvény Ω-ban kielégíti a $\Delta_y w = 0$ egyenletet, hiszen $\Delta E = 0$ az origó kivételével, és $x \in \Omega$ esetén $x', \tilde{x}, \tilde{x}' \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, így E eltolt argumentumában nem jelenik meg a 0. Másrészt, $w(x,y) = E(x,y)$, ha

$$y \in \partial\Omega = \{y \in B(0,R) : y_n = 0\} \cup \{y \in S(0,R) : y_n \geq 0\},$$

mert $y_n = 0$ esetén $E(x-y) = E(\tilde{x}-y)$ és $|x| = |\tilde{x}|$, $|x'-y| = |\tilde{x}'-y|$ folytán

$$E\left(\frac{|x|}{R}(x'-y)\right) = E\left(\frac{|\tilde{x}|}{R}(\tilde{x}'-y)\right),$$

továbbá $y \in S(0,R)$ esetén pedig az inverzió (8.53) tulajdonsága miatt

$$E(x-y) = E\left(\frac{|x|}{R}(x'-y)\right) \quad \text{és} \quad E(\tilde{x}-y) = E\left(\frac{|\tilde{x}|}{R}(\tilde{x}'-y)\right).$$

18.5. A 9. fejezetbeli feladatok megoldásai

9.1. Megoldás. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\partial_t(\Phi(u)) = \Phi'(u)\partial_t u \quad \text{és} \quad \partial_{x_j}(\Phi(u)) = \Phi'(u)\partial_{x_j} u,$$

így

$$\partial^2_{x_j}(\Phi(u)) = \Phi''(u)(\partial_{x_j} u)^2 + \Phi'(u)\partial^2_{x_j} u.$$

Tehát

$$\begin{aligned}\partial_t(\Phi(u)) - \Delta(\Phi(u)) &= \Phi'(u)(\partial_t u - \Delta u) - \Phi''(u)\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)^2 \\ &= -\Phi''(u)\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)^2 \le 0,\end{aligned}$$

hiszen Φ konvexitásából kifolyólag $\Phi'' \ge 0$.

9.2. Megoldás. Mivel $\partial_t u - \Delta u = 0$, ezért

$$v = \sum_{j=1}^n \left(\partial_{x_j} u\right)^2 + (\Delta u)^2.$$

Felhasználva, hogy a parciális deriválások sorrendje felcserélhető, egyrészt

$$\begin{aligned}\partial_t v &= 2\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_j}\partial_t u) + 2(\Delta u)(\Delta\partial_t u) \\ &= 2\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_j}\Delta u) + 2(\Delta u)(\Delta^2 u).\end{aligned}$$

Másrészt

$$\partial_{x_k} v = 2\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_j}\partial_{x_k} u) + 2(\Delta u)(\Delta\partial_{x_k} u),$$

így

$$\begin{aligned}\partial^2_{x_k} v = 2\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j}\partial_{x_k} u)^2 + 2\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_j}\partial^2_{x_k} u) \\ + 2(\Delta\partial_{x_k} u)^2 + 2(\Delta u)(\Delta\partial^2_{x_k} u).\end{aligned}$$

Tehát

$$\Delta v = \sum_{k=1}^n \partial^2_{x_k} v = 2\sum_{j,k=1}^n (\partial_{x_j}\partial_{x_k} u)^2 + 2\sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_j}\Delta u)$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}(\Delta\partial_k u)^2 + 2(\Delta u)(\Delta^2 u)$$
$$\geq 2\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j} u)(\partial_{x_j}\Delta u) + 2(\Delta u)(\Delta^2 u) = \partial_t u.$$

9.3. Megoldás. Az első részfeladat (amikor a peremfeltétel megtartása mellett az egyenlet jobb oldala homogén) megoldása a megoldóképlet 9.9. Lemmabeli alakja szerint:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\cdot e^{x-2\sqrt{t}\eta}\,d\eta = e^{x+t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\eta+\sqrt{t})^2}\,d\eta = e^{x+t},$$

felhasználva, hogy $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \sqrt{\pi}$.

A második részfeladathoz (tehát amikor az egyenlet jobb oldalának megtartása mellett a peremfeltétel homogén) tartozó segédfeladat-család a következő:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v = 0 & \mathbb{R}^2_+\text{-ban},\\ v(x,0;\tau) = \tau x^3 & (x\in\mathbb{R}), \end{cases}$$

ahol $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. A feladat megoldása a megoldóképlet szerint

$$\begin{aligned} v(x,t;\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\tau(x-2\sqrt{t}\eta)^3\,d\eta\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\tau\left(x^3 - 6x^2\sqrt{t}\eta + 12xt\eta^2 - 8xt^{\frac{3}{2}}\eta^3\right)d\eta\\ &= \frac{\tau x^3}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\,d\eta - \frac{6\tau x^2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\eta\,d\eta + \frac{12\tau xt}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\eta^2\,d\eta\\ &\quad - \frac{8xt^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\eta^3\,d\eta. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az $\eta\mapsto e^{-\eta^2}\eta$ és $\eta\mapsto e^{-\eta^2}\eta^3$ függvények páratlanok, ezért a fenti egyenlőség jobb oldalán szereplő második és negyedik integrál értéke nulla. Az első integrál értéke τx^3, a harmadik integrálban pedig egy parciális integrálást hajthatunk végre az alábbi módon:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\eta^2\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}e^{-\eta^2}\eta\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{1}{2},$$

ahol felhasználtuk, hogy $e^{-\eta^2}\eta\to 0$ valahányszor $|\eta|\to+\infty$, hiszen az exponenciális nullához tartás „legyőzi" a polinomiális végtelenbe tartást. A harmadik integrál értéke tehát $6\tau xt$, mindezek alapján pedig $v(x,t;\tau) = \tau x^3 + 6xt\tau$.

Ekkor a második részfeladat megoldása a Duhamel-elv alapján

$$u_2(x,t) = \int_0^t \left(\tau x^3 + 6x(t-\tau)\tau\right)\, d\tau = \frac{t^2}{2}x^3 + t^3 x.$$

Tehát az eredeti Cauchy-feladat megoldása:

$$u(x,t) = e^{x+t} + \frac{t^2}{2}x^3 + t^3 x.$$

9.4. Megoldás. Először hozzuk a feladatot a „hagyományos" alakra. Helyettesítsünk a feladatban x helyett $2x$-et, és legyen $v(x,t) = u(2x,t)$. Mivel $\partial_t v(x,t) = \partial_t u(2x,t)$ és $\partial_x^2 v(x,t) = 4\partial_x^2 u(2x,t)$, továbbá $v(x,0) = u(2x,0)$, ezért v-re nézve a következő Cauchy-feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t) + v(x,t) = e^{2x} & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ v(x,0) = 4x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát e^t-vel, és legyen $w(x,t) = e^t v(x,t)$. Minthogy

$$\partial_t w - \partial_x^2 w = \left(\partial_t v - \partial_x^2 v + v\right) e^t$$

és $w(x,0) = v(x,0)$, így w-re nézve a következő Cauchy-feladatot nyerjük:

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_x^2 w(x,t) = e^{2x+t} & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ w(x,0) = 4x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{18.66}$$

Ez már a kanonikus alakú Cauchy-feladat. Az első részfeladat (amikor a peremfeltételt megtartva az egyenlet jobb oldalát nullának vesszük) megoldása a 9.9. Lemmában szereplő formula szerint

$$\begin{aligned} w_1(x,t) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2} (x - 2\sqrt{t}\eta)^2\, d\eta \\ &= 4x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\, d\eta - 16x\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\eta\, d\eta + 16t\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\eta^2\, d\eta. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az $\eta \mapsto e^{-\eta^2}\eta$ függvény páratlan volta miatt a fenti egyenlőség jobb oldalán szereplő második integrál értéke nulla. Az első integrál értéke $4x^2$, felhasználva, hogy $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\, d\eta = \sqrt{\pi}$. A harmadik integrálban pedig egy parciális integrálást hajthatunk végre az alábbi módon:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\eta^2\, d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2}e^{-\eta^2}\eta\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{1}{2},$$

ahol felhasználtuk, hogy $e^{-\eta^2}\eta \to 0$ valahányszor $|\eta| \to +\infty$, hiszen az exponenciális nullához tartás dominálja a polinomiális végtelenbe tartást. Végül tehát $w_1(t,x) = 4x^2 + 8t$. A második részfeladat (amikor a peremfeltételt vesszük homogénnek) megoldásához bevezetjük a következő segédfeladatcsaládot:

$$\begin{cases} \partial_t w_2 - \partial_x^2 w_2(x,t) = 0 & \mathbb{R}^2_+\text{-ban}, \\ w_2(x,0;\tau) = e^{2x+\tau} & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Ennek megoldása

$$\begin{aligned} w_2(x,t;\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2} \cdot e^{2x-4\sqrt{t}\eta+\tau}\, d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\eta-2\sqrt{t})^2+4t+2x+\tau}\, d\eta \\ &= e^{2x+\tau+4t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2}\, d\xi = e^{2x+\tau+4t}. \end{aligned}$$

Ekkor a Duhamel-elv szerint a második részfeladat megoldása:

$$w_2(t,x) = \int_0^t e^{2x+\tau+4(t-\tau)}\, d\tau = e^{2x+4t} \int_0^t e^{-3\tau}\, d\tau = -\frac{1}{3} e^{2x+4t}(e^{-3t} - 1).$$

A linearitás miatt a (18.66) Cauchy-feladat megoldása a két részfeladat megoldásainak összege, azaz

$$w(x,t) = 4x^2 + 8t + \frac{1}{3}e^{2x+4t} - \frac{1}{3}e^{2x+t},$$

és így

$$u(x,t) = e^{-t} w\left(\frac{x}{2}, t\right) = x^2 e^{-t} + 8te^{-t} + \frac{1}{3}e^{x+3t} - \frac{1}{3}e^{x}.$$

9.5. Megoldás. a) Először is gondoljuk meg, hogy minden $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ esetén a szóban forgó integrál létezik és véges. Valóban, mivel $|\cos by| \le 1$, ezért az integrandusnak létezik integrálható majoránsa (nevezetesen e^{-ay^2}). Vegyük észre azt is, hogy a speciális $b = 0$ esetben az integrál értékét könnyen meghatározhatjuk, hiszen

$$\int_{-\mathbb{R}} e^{-ay^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Az integrál kiszámításához tekintsük a fenti integrált $a \in \mathbb{R}^+$ és $b \in \mathbb{R}$ függvényeként, és definiáljuk az alábbi $I\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$I(a,b) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} \cos by\, dy.$$

Célunk, hogy az I függvényt a második változója szerint deriváljuk a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tétel szerint. Ez megtehető, ha az integrandus második változó szerinti deriváltjának létezik a paramétertől független integrálható majoránsa. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $\partial_b e^{-ay^2}\cos by = -ye^{-ay^2}\sin by$. Ha az I függvény értelmezési tartományát leszűkítjük az $[a_0,+\infty)\times\mathbb{R}$ halmazra, ahol $a_0>$ rögzített, akkor nyilván $a>a_0$ esetén $\left|-ye^{-ay^2}\sin by\right| \le |y|e^{-a_0y^2}$, ahol a felső becslés integrálható $\mathbb{R}$-en. Tehát a paraméteres integrál deriválására vonatkozó tétel alkalmazható, így

$$\begin{aligned}\partial_b I(a,b) &= \int_{\mathbb{R}} -ye^{-ay^2}\sin by\,dy = \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}} -2aye^{-ay^2}\sin by\,dy\\ &= \frac{1}{2a}\left(\Big[e^{-ay^2}\sin by\Big]_{y=-\infty}^{+\infty} - b\int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2}\cos by\,dy\right) = -\frac{b}{2a}I(a,b).\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az I függvény az alábbi kezdetiérték-feladatot elégíti ki:

$$\frac{\partial_b I(a,b)}{I(a,b)} = -\frac{b}{2a},\quad I(a,0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

A közönséges differenciálegyenlet mindkét oldalát (b szerint) integrálva kapjuk, hogy $\log I(a,b) = -\frac{b^2}{4a} + c(a)$, azaz $I = C(a)e^{-\frac{b^2}{4a}}$, ahol $C(a)$ egy a-tól függő konstans. A $b=0$ helyettesítéssel az $I(a,0)$ kezdeti értéket felhasználva

$$I(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

adódik. A fenti gondolatmenet minden $a>a_0>0$ esetén, vagyis tetszőleges $a>0$ esetén érvényes, ezzel az a) rész állítását beláttuk.

b) A megoldás a 9.9. Lemma alapján:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\eta|^2}\cos(x-2\sqrt{t}\eta)\,d\eta.$$

Alkalmazzuk a cos függvényre vonatkozó $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ addíciós formulát. Ekkor

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\eta|^2}\cos(x-2\sqrt{t}\eta)\,d\eta\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\eta|^2}\left(\cos x\cos 2\sqrt{t}\eta + \sin x\sin 2\sqrt{t}\eta\right)\,d\eta\\ &= \cos x\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\eta|^2}\cos 2\sqrt{t}\eta\,d\eta = e^{-t}\cos x\end{aligned}$$

adódik, felhasználva egyrészt, hogy a sin függvény páratlan, így az integrálja 0, másrészt pedig az a) pontban szereplő összefüggést $a = 1$, $b = 2\sqrt{t}$ választással. Végeredményben tehát $u(x,t) = e^{-t}\cos x$.

9.6. Megoldás. Az első részfeladat (amikor a peremfeltétel megtartása mellett az egyenlet jobb oldala homogén) megoldása a megoldóképlet 9.9. Lemmabeli alakja szerint:

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\eta_1^2-\eta_2^2}(x-2\sqrt{t}\eta_1)(y-2\sqrt{t}\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta_1^2}(x-2\sqrt{t}\eta_1)\,d\eta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta_2^2}(y-2\sqrt{t}\eta_2)\,d\eta_2. \end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő első tényezőt a 9.12. Példában már kiszámoltuk, értéke x, a második tényezőt pedig ebből úgy kapjuk, hogy x helyébe y-t helyettesítünk, így

$$u_1(t,x,y) = xy.$$

A második részfeladathoz (tehát amikor az egyenlet jobb oldalának megtartása mellett a peremfeltétel homogén) tartozó segédfeladat-család a következő:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v - \partial_y^2 v = 0 & \mathbb{R}^3_+\text{-ban}, \\ v(x,y,0;\tau) = \tau xy & ((x,y)\in\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

ahol $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. A feladat megoldása a megoldóképlet szerint

$$v(x,y,t;\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\eta_1^2-\eta_2^2}\tau(x-2\sqrt{t}\eta_1)(y-2\sqrt{t}\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2,$$

ami az első részfeladatban adódott megoldás τ-szorosa, tehát $v(x,y,t;\tau) = \tau xy$. Ekkor a második részfeladat megoldása a Duhamel-elv alapján

$$u_2(x,y,t) = \int_0^t \tau xy\,d\tau = \frac{t^2}{2}xy.$$

Tehát az eredeti Cauchy-feladat megoldása:

$$u(x,y,t) = xy + \frac{t^2}{2}xy = \left(\frac{t^2}{2}+1\right)xy.$$

9.7. Megoldás. A feladat lényegében az 5.22. Feladattal azonos (lásd annak megoldását). A változók szétválasztásának módszerével például az alábbi megoldásokat nyerhetjük:

$$u(x,t) = \begin{cases} ce^{\lambda t}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right), & \text{ha } \lambda > 0, \\ ce^{\lambda t}\sin\sqrt{|\lambda|}x, & \text{ha } \lambda < 0, \\ cx, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases}$$

9.8. Megoldás. a) A szóban forgó Cauchy-feladat megoldásának a 9.9. Lemmában szereplő alakja:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x - 2\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2}\, d\eta.$$

Ekkor g páratlan volta miatt

$$u(-x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(-x - 2\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2}\, d\eta = -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x + 2\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2}\, d\eta,$$

ahol az utóbbi integrálban a $\tilde{\eta} = -\eta$ helyettesítést végrehajtva

$$u(-x,t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x - 2\sqrt{t}\tilde{\eta}) e^{-\tilde{\eta}^2}\, d\eta = -u(x,t),$$

tehát valóban $x \mapsto u(x,t)$ páratlan függvény.

b) Feltehető, hogy g monoton növő (a csökkenő eset teljesen hasonló). Ekkor $x_1 < x_2$ esetén $g(x_1 - 2\sqrt{t}\eta) \le g(x_2 - 2\sqrt{t}\eta)$, így

$$\begin{aligned} u(x_1,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x_1 - 2\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2}\, d\eta \\ &\le \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x_2 - 2\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2}\, d\eta = u(x_2,t), \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az $x \mapsto u(x,t)$ függvény szintén monoton növő.

c) Az $x \mapsto u(x,t)$ függvény konvexitásához elegendő belátnunk, hogy minden $\tau \in [0,1]$ és $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$u\big(\tau x_1 + (1-\tau)x_2, t\big) \le \tau u(x_1,t) + (1-\tau)u(x_2,t).$$

A megoldóképlet szerint

$$u\big(\tau x_1 + (1-\tau)x_2, t\big) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g\big(\tau x_1 + (1-\tau)x_2 - 2\sqrt{t}\eta\big) e^{-\eta^2}\, d\eta.$$

Mivel g konvex függvény, azért

$$\begin{aligned} g\big(\tau x_1 + (1-\tau)x_2 - 2\sqrt{t}\eta\big) &= g\big(\tau(x_1 - 2\sqrt{t}\eta) + (1-\tau)(x_2 - 2\sqrt{t}\eta)\big) \\ &\le \tau g(x_1 - 2\sqrt{t}\eta) + (1-\tau) g(x_2 - 2\sqrt{t}\eta). \end{aligned}$$

Ebből következően

$$u\big(\tau x_1 + (1-\tau)x_2, t\big) \le \tau \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x_1 - 2\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2}\, d\eta$$

$$+ (1-\tau)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} g(x_2 - 2\sqrt{t}\eta)e^{-\eta^2}\,d\eta$$
$$= \tau u(x_1,t) + (1-\tau)u(x_2,t),$$

és éppen ezt akartuk igazolni.

9.9. Megoldás. Az u megoldás két részfeladat összegeként áll elő. Az első részfeladat:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \partial_x^2 u_1 = 0 \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u_1(0,x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Ennek megoldása $u_1(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\,d\eta$, így

$$|u_1(t,x)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\eta|^2}|g(x-2\sqrt{t}\eta)|\,d\eta \le \sup_{\mathbb{R}}|g| \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\eta|^2}\,d\eta = \sup_{\mathbb{R}}|g|.$$

A második részfeladat:

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - \partial_x^2 u_2 = f \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u_2(0,x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Ennek u_2 megoldása az alábbi segédfeladat-család segítségével nyerhető:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v = 0 \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ v(0,x) = f(\tau,x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Az imént igazolt becslés alapján minden $\tau \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén $|v(t,x;\tau)| \le$ $\le \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|f(\tau,\xi)|$. A Duhamel-elv szerint $u_2(t,x) = \int_0^t v(t-\tau,x;\tau)\,d\tau$, így

$$|u_2(t,x)| \le \int_0^t |v(t-\tau,x;\tau)\,d\tau \le \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(\tau,x)|\,d\tau \le t \cdot \sup_{(\tau,\xi)\in[0,t]\times\mathbb{R}}|f(\tau,\xi)|.$$

Végeredményben tehát

$$|u(t,x)| \le |u_1(t,x)| + |u_2(t,x)| \le \max_{\mathbb{R}}|g| + t \cdot \max_{(\tau,x)\in[0,t]\times\mathbb{R}}|f(\tau,x)|,$$

és éppen ezt kellett igazolni.

9.10. Megoldás. Végezzük el az

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\varphi(s)\,ds$$

integrálban az $\eta = \frac{x}{2\sqrt{t-s}}$ helyettesítést. Ekkor $s = t - \frac{x^2}{4\eta^2}$, így formálisan

$$ds = \frac{x^2}{2\eta^3} d\eta = \frac{4}{x}(t-s)^{\frac{3}{2}} d\eta,$$

ezért

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\eta^2} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\eta^2}\right) d\eta.$$

Ebből

$$u(0,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\eta^2} \varphi(t)\, d\eta = \varphi(t).$$

Másrészt $x > 0$ esetén

$$u(x,0) = \lim_{t \to 0+} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\eta^2} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\eta^2}\right) d\eta,$$

hiszen φ korlátos, így az integrandusnak van integrálható majoránsa (mégpedig $e^{-\eta^2}$ konstansszorosa).

Vezessük be a

$$g(x,t,s) = \frac{x}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}$$

jelölést, amellyel

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t g(x,t,s)\varphi(s)\, ds.$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_t g = \left(-\frac{3x}{2}(t-s)^{-\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{4}(t-s)^{-\frac{7}{2}}\right) e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}},$$

$$\partial_x g = \left((t-s)^{-\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}(t-s)^{-\frac{5}{2}}\right) e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}},$$

$$\partial_x^2 g = \left(-x(t-s)^{-\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{4}(t-s)^{-\frac{7}{2}}\right) e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}.$$

A 9.7. Tétel bizonyításában részletezett becslések mintájára nem nehéz (de technikailag kissé hosszadalmas) belátni, hogy ha (x,t) egy rögzített $(x_0,t_0) \in \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ pont környezetében van, akkor az előbbi parciális deriváltaknak létezik az (x,t) változóktól független integrálható majoránsa. Ezenkívül (a becslés miatt) az is igaz, hogy az adott környezetben egyenletesen

$$\lim_{s \to t-} g(x,t,s) = 0.$$

Mindezek alapján alkalmazható a paraméteres integrálok differenciálhatósági tétele, valamint a t változóban a 9.14. Lemma, és így

$$\partial_t u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^t \partial_t g(x,t,s)\, ds + g(x,t,t) \right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \partial_t g(x,t,s)\, ds,$$

továbbá

$$\partial_x^2 u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \partial_x^2 g(x,t,s)\, ds.$$

Ezért

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \big(\partial_t g(x,t,s) - \partial_x^2 g(x,t,s) \big)\, ds = 0,$$

ugyanis világosan látható, hogy $\partial_t g(x,t,s) - \partial_x^2 g(x,t,s) = 0$.

9.11. Megoldás. a) A Fourier-módszert alkalmazzuk. Mivel az egyenlet jobb oldalának első tényezője és a kezdeti függvény is a homogén Dirichlet-peremfeltétellel adott (mínusz) Laplace-operátor sajátfüggvénye, ezért keressük a megoldást

$$u(x,t) = c_1(t) \sin x + c_2(t) \sin 2x$$

alakban. Ekkor az egyenletbe helyettesítve és a kezdeti feltételt figyelembe véve (a 9.48. Példa gondolatmenetére támaszkodva) c_1-re és c_2-re a következő egydimenziós kezdetiérték-feladat adódik:

$$c_1'(t) + c_1(t) = \sin t, \quad c_1(0) = 0 \quad \text{és} \quad c_2'(t) = -4c_2, \quad c_2(0) = 1.$$

Könnyen láthatóan a $c_1'(t) + c_1(t) = \sin t$ egyenlet egy partikuláris megoldása a $t \mapsto \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$, a homogén általános megoldás pedig ce^{-t}, így figyelembe véve a $c_1(t) = 0$ kezdeti feltételt,

$$c_1(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} e^{-t}$$

adódik. A $c_2'(t) = -4c_2, c_2(0) = 1$ probléma megoldása könnyen láthatóan $c_2(t) = e^{-4t}$. Végeredményben tehát

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} e^{-t} + e^{-4t}.$$

Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű (lásd a 9.41. Tételt és a 9.46. Megjegyzést).

b) Vegyük észre, hogy a $w(x,t) = x$ függvény kielégíti a vegyes feladatban szereplő kezdeti feltételeket, sőt a peremfeltételt is. Kézenfekvő ezért a megoldást $u(x,t) = v(x,t) + x$ alakban keresni. Ekkor

$$v(x,0) = u(x,0) - x = 0 \quad \text{és} \quad v(0,t) = u(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = u(\pi,t) - \pi = 0,$$

továbbá $\partial_t u - \partial_x^2 u = \partial_t v - \partial_x^2 v$, ezért a v függvényre nézve a következő vegyes feladatot nyerjük:

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t) = t \sin x & ((x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)), \\ v(x,0) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ v(0,t) = 0,\ v(\pi,t) = \pi & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

A Fourier-módszer alapján ennek megoldását keressük $v(x,t) = c(t) \sin x$ alakban! Ekkor a kezdeti feltétel alapján $c(0) = 0$, továbbá v-t az egyenletbe helyettesítve a $c'(t) + c(t) = t$ közönséges differenciálegyenletet kapjuk. A differenciálegyenlet mindkét oldalát e^t-vel szorozva $e^t c'(t) + e^t c(t) = te^t$ adódik, így $(e^t c(t))' = te^t$, tehát (mivel $(te^t - e^t)' = te^t$, ezért) $c(t) = t - 1 + + c_0 e^{-t}$, így a kezdeti feltétel figyelembevételével $c(t) = t - 1 + e^{-t}$. Tehát $v(x,t) = (e^t + t - 1) \sin x$, és így

$$u(x,t) = (e^t + t - 1) \sin x + x.$$

Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű.

c) Mivel az egyenlet jobb oldala és a kezdeti függvény is a homogén Neumann-peremfeltétellel adott (mínusz) Laplace-operátor sajátfüggvénye, ezért keressük a megoldást

$$u(x,t) = c_1(t) \cos x + c_2(t) \cos 2x$$

alakban. Ekkor az egyenletbe helyettesítve és a kezdeti feltételt figyelembe véve, c_1-re és c_2-re a következő egydimenziós kezdetiérték-feladat adódik:

$$c_1'(t) + c_1(t) = 1, \quad c_1(0) = 0, \quad \text{és} \quad c_2'(t) + 4c_2(t) = 0, \quad c_2(0) = 1.$$

Könnyen láthatóan a $c_1'(t) + c_1(t) = 1$ egyenlet egy partikuláris megoldása a konstans 1 függvény, a homogén általános megoldás pedig ce^{-t}, így figyelembe véve a $c_1(t) = 0$ kezdeti feltételt, $c_1(t) = 1 - e^{-t}$ adódik. A $c_2'(t) + + 4c_2(t) = 0, c_2(0) = 1$ probléma megoldása könnyen láthatóan $c_2(t) = e^{-4t}$. Végeredményben tehát $u(x,t) = (1 - e^{-t}) \cos x + e^{-4t} \cos 2x$.

9.12. Megoldás. d) Mivel az egyenlet jobb oldala és a kezdeti függvény is a homogén Dirichlet-peremfeltétellel adott (mínusz) Laplace-operátor sajátfüggvénye a $(0,\pi)^2$ tartományon, ezért keressük a megoldást

$$u(x,y,t) = c(t) \sin x \sin 2y + d(t) \sin 2x \sin 3y$$

alakban. Ekkor az egyenletbe helyettesítve és a kezdeti feltételt figyelembe véve c-re és d-re a következő egydimenziós kezdetiérték-feladat adódik: $c'(t) + + 5c(t) = 1, c(0) = 0$ és $d'(t) + 13d(t) = 0, d(0) = 1$. Könnyen láthatóan a

$c'(t)+5c(t)=1$ egyenlet egy partikuláris megoldása a konstans $\frac{1}{5}$ függvény, a homogén általános megoldás pedig Ce^{-5t}, így figyelembe véve a $c(t)=0$ kezdeti feltételt $c(t)=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-5t}$ adódik. A $d'(t)+13d(t)=0, d(0)=1$ probléma megoldása könnyen láthatóan $d(t)=e^{-13t}$. Végeredményben tehát

$$u(x,y,t)=\frac{1}{5}(1-e^{-5t})\sin x\sin 2y+e^{-13t}\sin 2x\sin 3y.$$

18.6. A 10. fejezetbeli feladatok megoldásai

10.1. Megoldás. a) A (10.19) d'Alembert-formula szerint a feladat (egyértelműen meghatározott) $u\in C^2(\overline{\mathbb{R}_+{}^2})$ megoldása:

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}4\xi d\xi+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}6d\xi\right]d\tau\\&=\left[x^2+t^2\right]+\left[(x+t)^2-(x-t)^2\right]+3\int_0^t 2(t-\tau)d\tau\\&=x^2+t^2+4xt+3t^2=(x+2t)^2.\end{aligned}$$

b) Vezessük be x helyett az $y=x/2$ független változót és a $v(y,t)=u(x,t)$ függvényt, ekkor

$$\partial_t^2u(x,t)=\partial_t^2v(y,t)\quad\text{és}\quad\partial_x^2u(x,t)=\frac{1}{4}\partial_y^2v(y,t),$$

így az u-ra vonatkozó Cauchy-feladat ekvivalens a v-re vonatkozó alábbi Cauchy-feladattal:

$$\begin{cases}\partial_t^2v-\partial_y^2v=2yt & \mathbb{R}\times(0,\infty)\text{-ben},\\ v(y,0)=4y^2,\quad \partial_tv(x,0)=2y, & y\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Ennek megoldása a d'Alembert-formula szerint

$$\begin{aligned}&v(y,t)\\&=\frac{1}{2}\left[4(y+t)^2+4(y-t)^2\right]+\frac{1}{2}\int_{y-t}^{y+t}2\eta d\eta+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\int_{y-(t-\tau)}^{y+(t-\tau)}2\eta\tau d\eta\right]d\tau\\&=4y^2+4t^2+\frac{1}{2}\left[(y+t)^2-(y-t)^2\right]\\&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t\tau\left[\left(y+(t-\tau)\right)^2-\left(y-(t-\tau)\right)^2\right]d\tau\end{aligned}$$

$$= 4y^2 + 4t^2 + 2yt + 2y \int_0^t \left[\tau t - \tau^2\right] d\tau$$
$$= 4y^2 + 4t^2 + 2yt + \frac{1}{3} yt^3 = x^2 + 4t^2 + xt + \frac{1}{6} xt^3.$$

10.2. Megoldás. A d'Alembert-formula szerint

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi) d\xi.$$

Mivel g és h páratlan függvények, ezért $\xi = -\eta$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} u(-x,t) &= \frac{1}{2}\left[g(-x+t)g(-x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{-x-t}^{-x+t} h(\xi) d\xi \\ &= -\frac{1}{2}\left[g(x-t)g(x+t)\right] - \frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t} h(-\eta) d\eta \\ &= -\frac{1}{2}\left[g(x-t)g(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t} h(\eta) d\eta = -u(x,t), \end{aligned}$$

tehát u valóban páratlan függvény az x változóban.

10.3. Megoldás. Terjesszük ki a g és h függvényeket a $[0,a]$ intervallumról $\mathbb{R}$-re a következőképpen. Legyen a $[-a,0]$ intervallumra a kiterjesztés:

$$g(-x) = -g(x) \quad \text{és} \quad h(-x) = -h(x), \qquad x \in [0,a],$$

majd az egész $\mathbb{R}$-re

$$g(x+2ka) = g(x) \text{ és } h(x+2ka) = h(x), \quad x \in [-a,a], k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Ekkor a kiterjesztéssel nyert g és h függvények nyilván páratlanok:

$$g(-x) = -g(x) \quad \text{és} \quad h(-x) = -h(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{18.67}$$

és a-val történt eltoltjuk is páratlan:

$$g(-x-a) = -g(x-a) \quad \text{és} \quad h(-x-a) = -h(x-a), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{18.68}$$

Ugyanis definíció szerint

$$g(-x) = -g(x) \quad \text{és} \quad h(-x) = -h(x), \qquad \text{ha } x \in [-a,a],$$

és

$$g(-(x+2ka)) = g(-x-2ka) = g(-x) = -g(x) = -g(x+2ka), \quad x \in [-a,a],$$

hasonlóan

$$h(-(x+2ka)) = -h(x+2ka), \qquad x \in [-a,a].$$

Továbbá az előbbiek miatt

$$g(-x-a) = -g(x+a) = -g(x-a), \qquad x \in \mathbb{R},$$

hasonlóan

$$h(-x-a) = -h(x+a) = -h(x-a), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A $g(0) = g(a) = 0$, $g''(0) = g''(a) = 0$ feltétel és (18.67), (18.68) miatt a kiterjesztéssel nyert g függvényre $g \in C^2(\mathbb{R})$ teljesül, továbbá $h(0) = h(a) = 0$ és (18.67), (18.68) alapján $h \in C^1(\mathbb{R})$. Ezért a d'Alembert-formula szerint az

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)d\xi$$

képlettel értelmezett u függvényre $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+{}^2})$ teljesül, így nyilván $u \in C^2(\overline{N})$, ahol $N = (0,a)\times(0,\infty)$, teljesül az

$$u(x,0) = g(x), \qquad \partial_t u(x,0) = h(x), \quad x \in [0,a]$$

feltétel, továbbá (18.67) és (18.68) miatt

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left[g(t) + g(-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{-t}^{+t} h(\xi)d\xi = 0$$

és

$$u(a,t) = \frac{1}{2}\left[g(a+t) + g(a-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{a-t}^{a+t} h(\xi)d\xi = 0.$$

10.4. Megoldás. Az 5.7. Példa szerint

$$\partial_x\partial_y u = 0, \qquad (a,b)\times(c,d)\text{-ben}$$

minden megoldása ilyen alakú:

$$u(x,y) = C(x) + D(y), \qquad \text{ahol } C \in C^1(a,b), D \in C^1(c,d). \tag{18.69}$$

A mellékfeltételek szerint

$$u_0(x) = u(x,\varphi(x)) = C(x) + D(\varphi(x)), \qquad x \in (a,b), \tag{18.70}$$

$$u_1(x) = \partial_y u(x,\varphi(x)) = D'(\varphi(x)), \qquad x \in (a,b). \tag{18.71}$$

A (18.70) egyenletet differenciálva kapjuk:

$$u_0'(x) = C'(x) + D'(\varphi(x))\varphi'(x), \qquad x \in (a,b),$$

tehát (18.71) alapján

$$u_0'(x) = C'(x) + u_1(x)\varphi'(x), \qquad C'(x) = u_0'(x) - u_1(x)\varphi'(x),$$

ezért

$$C(x) = u_0(x) - \int_a^x u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi + c_1 \qquad (a, c_1 \text{ állandók}). \tag{18.72}$$

A (18.70) feltétel és $\varphi' \neq 0$, $e = \inf\varphi$, $d = \sup\varphi$ alapján

$$u_0(\varphi^{-1}(y)) = C(\varphi^{-1}(y)) + D(y), \qquad y \in (c,d),$$

tehát

$$\begin{aligned} D(y) &= u_0(\varphi^{-1}(y)) - C(\varphi^{-1}(y)) \\ &= u_0(x) - \left[u_0(x) - \int_a^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi\right] - c_1 \\ &= \int_a^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi - c_1. \end{aligned} \tag{18.73}$$

A (18.72), (18.73) formulák miatt a szóban forgó probléma megoldása csak az alábbi u függvény lehet:

$$u(x,y) = C(x) + D(y) = u_0(x) + \int_x^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi,$$

tehát szükségképpen

$$u(x,y) = u_0(x) + \int_x^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi, \qquad (x,y) \in (a,b)\times(c,d). \tag{18.74}$$

Most belátjuk, hogy a kapott u függvény valóban megfelel a feltételeknek. Mivel $u_0 \in C^2(a,b)$, $u_1 \in C^1(a,b)$, $\varphi \in C^2(a,b)$, azért

$$\partial_x u(x,y) = u_0'(x) - u_1(x)\varphi'(x), \tag{18.75}$$

$$\partial_y u(x,y) = u_1(\varphi^{-1}(y))\varphi'(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(y), \tag{18.76}$$

így

$$\partial_x\partial_y u(x,y) = 0,$$

és $\varphi^{-1} \in C^2(a,b)$ miatt (18.75), (18.76) alapján $u \in C^2\left((a,b)\times(c,d)\right)$. Továbbá (18.74) szerint

$$u(x,\varphi(x)) = u_0(x),$$

és (18.76) folytán

$$\partial_y u(x,\varphi(x)) = u_1(x)\varphi'(x)\cdot\frac{1}{\varphi'(x)} = u_1(x).$$

10.5. Megoldás. Az 5.7. Példa szerint

$$\partial_x\partial_y u = 0, \qquad (a,b)\times(c,d)\text{-ben}$$

minden megoldása ilyen alakú:

$$u(x,y) = C(x) + D(y), \qquad \text{ahol } C \in C^1(a,b), D \in C^1(c,d). \tag{18.77}$$

Az első mellékfeltétel szerint

$$u_0(x) = u(x,0) = C(x) + D(0), \qquad x \in \mathbb{R},$$

tehát

$$C(x) = u_0(x) - D(0). \tag{18.78}$$

A második mellékfeltétel szerint

$$u_1(x) = \partial_y u(x,0) = D'(0), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{18.79}$$

tehát u_1 állandó. Továbbá (18.77), (18.78) folytán

$$u(x,y) = u_0(x) - D(0) + D(y), \tag{18.80}$$

így $u \in C^2(\mathbb{R})$ miatt szükségszerűen $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $D \in C^2(\mathbb{R})$ és $D'(0) = u_1(x) = u_1(0)$ a (18.79) összefüggés következtében. Könnyen látható, hogy

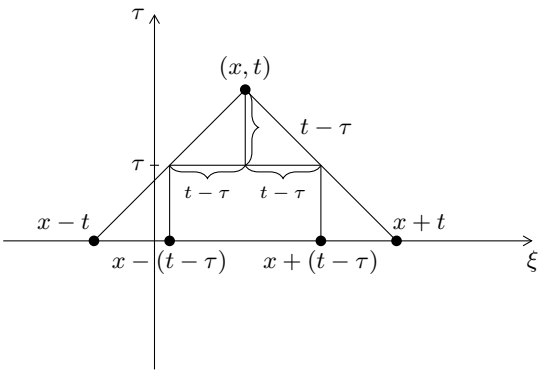
$$D \in C^2(\mathbb{R}), \qquad D'(0) = u_1(0)$$

pontosan akkor teljesül, ha D ilyen alakú:

$$D(y) = f(y) - f(0) + y\left[u_1(0) - f'(0)\right],$$

ahol $f \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. Így a feladat megoldása (18.78) és $D(0) = 0$ miatt szükségképpen

$$u(x,y) = u_0(x) + f(y) - f(0) + y\left[u_1(0) - f'(0)\right].$$



Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az így értelmezett u függvényre $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, továbbá u kielégíti a differenciálegyenletet és a mellékfeltételeket tetszőleges $f \in C^2(\mathbb{R})$ esetén.

10.6. Megoldás.
A d'Alembert-formula szerint a Cauchy-feladat megoldása

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi\right] d\tau. \tag{18.81}$$

Mivel a feladat megoldása lineárisan függ a g, h, f függvényektől, azért elég belátnunk, hogy ha g és h nullával egyenlő az $[x-t, x+t]$ intervallumon, és f nullával egyenlő az (x,t) ponton átmenő 1 és (-1) iránytangensű egyenesek, valamint a ξ tengely által alkotott háromszögben, akkor $u(x,t) = 0$. Feltevésünk szerint

$$g(x+t) = 0, \quad g(x-t) = 0 \quad \text{és} \quad h(\xi) = 0, \ \text{ ha } \xi \in [x-t, x+t],$$

ezért (18.81) jobb oldalának első két tagja nullával egyenlő. A jobb oldal harmadik tagja pedig azért nulla, mert feltevésünk szerint

$$f(\xi,\tau) = 0, \quad \text{ha } x-(t-\tau) \le \xi \le x+(t-\tau)\ (0 \le \tau \le t).$$

10.7. Megoldás. Belátjuk, hogy $E'(t) = 0$, ha $t \in (t_1, t_2)$. Mivel u kielégíti a differenciálegyenletet, azért

$$E'(t) = \int_\Omega \operatorname{grad} u(x,t) \cdot \operatorname{grad} \partial_t u(x,t)\, dx$$

$$+\int_\Omega \left[cu(x,t)\partial_t u(x,t)+\partial_t u(x,t)\partial_t^2 u(x,t)\right]\,dx$$
$$=\int_\Omega \operatorname{grad} u(x,t)\cdot\operatorname{grad}\partial_t u(x,t)\,dx$$
$$+\int_\Omega \left[\Delta u(x,t)-cu(x,t)+cu(x,t)\right]\partial_t u(x,t)\,dx.$$

Ezért az első Green-formula alapján (lásd a 8.3. Tételt)

$$E'(t)=-\int_\Omega \Delta u(x,t)\partial_t u(x,t)dx+\int_{\partial\Omega}\left(\partial_\nu u\right)(x,t)\left(\partial_t u\right)(x,t)d\sigma_x$$
$$+\int_\Omega \Delta u(x,t)\partial_t u(x,t)dx=\int_\Omega \left(\partial_\nu u\right)(x,t)\left(\partial_t u\right)(x,t)d\sigma_x=0$$

a peremfeltétel miatt, tehát $E(t)$ állandó.

Megjegyezzük, hogy a peremfeltétel nyilván teljesül az alábbi speciális esetekben: $t\mapsto u(x,t)$ állandó minden $x\in\partial\Omega$ pontra, vagy

$$\partial_\nu u(x,t)=0,\quad \text{ha}\quad (x,t)\in\left(\partial\Omega\times(t_1,t_2)\right).$$

10.8. Megoldás. A 10.10. Tétel bizonyítását módosítjuk. Tekintsük az $\tilde u(x,t)=e^{-at}(x,t)$ képlettel értelmezett $\tilde u$ függvényre a (10.22) feladatot $f=f_j$, $\varphi_1=\varphi_1^j$, $\varphi_2=\varphi_2^j$ $(j=1,2)$ esetén. Vezessük be a $w=\tilde u_1-\tilde u_2$ és a

$$v(x,t)=\begin{cases}\int_t^s w(x,\tau)d\tau, & 0\le t\le s,\\ 0, & s<t\le T\end{cases}$$

jelölést valamely rögzített $s\in(0,T]$ számmal. Ekkor w és v zérus peremfeltételeknek tesz eleget, továbbá $Q_s=\Omega\times(0,s)$ jelöléssel írhatjuk:

$$v\in C^1(\overline{Q_s}),\ \partial_t v\in C^1(\overline{Q_s}),\ v(x,s)=0,\ \text{ és } \partial_t v=-w\ Q_s\text{-en.}\qquad(18.82)$$

Szorozzuk a v függvénnyel a

$$\partial_t^2 w-\Delta w+a\partial_t w+(a^2+c)w=e^{-at(f_1-f_2)}$$

egyenletet, integráljuk a Q_s hengeren, így parciális integrálással az első Green-tétel (8.3. Tétel), (18.82) és $v(x,s)=0$ alapján

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_s} e^{-at}(f_1-f_2)v \\
&\quad= \int_{Q_s} \left(\partial_t^2 w - \Delta w\right) v + a\int_{Q_s} (\partial_t w)\, v + (a^2+c)\int_{Q_s} wv \\
&\quad= \int_0^s \left\{ \int_\Omega \left[\partial_t^2 w(x,t) - \Delta w(x,t)\right] v(x,t)dx \right\} dt \\
&\qquad + a\int_\Omega \left[\int_0^s \partial_t w(x,t) v(x,t)dt\right] dx \\
&\qquad + (a^2+c)\int_0^s \left[w(x,t)v(x,t)dx\right] dt \\
&\quad= \int_\Omega \partial_t w(x,0)v(x,0)dx - \int_\Omega \left[\int_0^s \partial_t w(x,t)\partial_t v(x,t)dt\right] dx \\
&\qquad + \int_0^s \int_\Omega \left[\operatorname{grad} w \cdot \operatorname{grad} v dx\right] dt - \int_{\partial\Omega\times(0,s)} v\,(\partial_\nu w)\, d\sigma \qquad (18.83)\\
&\qquad + a\int_\Omega w(x,0)v(x,0)dx - a\int_\Omega \left[\int_0^s w(x,t)\partial_t v(x,t)dx\right] dt \\
&\qquad + (a^2+c)\int_0^s \left[\int_\Omega w(x,t)v(x,t)dx\right] dt \\
&\quad= \int_\Omega \left[\varphi_2^1(x) - \varphi_2^2(x)\right] v(x,0)dx \\
&\qquad + \int_{Q_s} \left[(\partial_t w)\, w - \operatorname{grad}\partial_t v \cdot \operatorname{grad} v\right] \\
&\qquad - \int_{\partial\Omega\times(0,s)} v\,(\partial_\nu w)\, d\sigma + a\int_\Omega \left[\varphi_1^1(x) - \varphi_1^2(x)\right] v(x,0)dx \\
&\qquad + a\int_{Q_s} w^2 - (a^2+c)\int_\Omega \left[\int_0^s (\partial_t v)\, v dt\right] dx.
\end{aligned}
$$

Tekintsük most a (18.83) összefüggés jobb oldalának egyes tagjait! A jobb oldal első tagjára érvényes a

$$
\left|\int_\Omega \left[\varphi_2^1(x) - \varphi_2^2(x)\right] v(x,0)dx\right| \le \frac{1}{2}\|\varphi_2^1 - \varphi_2^2\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (18.84)
$$

becslés. A második tag így írható:

$$\begin{aligned}\int_{Q_s}\left[(\partial_t w)\,w-\operatorname{grad}\partial_t v\cdot\operatorname{grad} v\right]&=\frac{1}{2}\int_{Q_s}\partial_t\left[w^2-|\operatorname{grad} v|^2\right]\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(x,s)dx-\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(x,0)dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\operatorname{grad} v(x,0)|^2\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(x,s)dx-\frac{1}{2}\|\varphi_1^1-\varphi_1^2\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\int_\Omega|\operatorname{grad} v(x,0)|^2\,dx.\end{aligned}\tag{18.85}$$

A (18.83) összefüggés jobb oldalának harmadik tagjára (18.82) és a v-re érvényes zérus peremfeltétel miatt

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega\times(0,s)}v\,(\partial_\nu w)\,d\sigma&=\int_0^s\left[\int_{\partial\Omega}v\,(\partial_\nu w)\,d\sigma_x\right]dt\\&=\int_0^s\left[\int_{\substack{\partial\Omega\\h(x)\neq0}}v\frac{g}{h}\,(\partial_t v)\,d\sigma_x\right]dt\\&=\int_{\substack{\partial\Omega\\h(x)\neq0}}\left[\frac{g}{h}\int_0^s\frac{1}{2}\,\partial_t^2 v\,dt\right]d\sigma_x\\&=-\frac{1}{2}\int_{\substack{\partial\Omega\\h(x)\neq0}}\frac{g}{h}v^2(x,0)d\sigma_x\le0.\end{aligned}\tag{18.86}$$

A (18.83) egyenlőség jobb oldalának negyedik tagja így becsülhető:

$$\begin{aligned}&\left|a\int_\Omega\left[\varphi_1^1(x)-\varphi_1^2(x)\right]v(x,0)\right|dx\\&\qquad\le\frac{a}{2}\|\varphi_1^1-\varphi_1^2\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{a}{2}\int_\Omega[v(x,0)]^2\,dx.\end{aligned}\tag{18.87}$$

A jobb oldal utolsó tagjára pedig $v(x,s)=0$ miatt

$$\begin{aligned}-(a^2+c)\int_\Omega\left[\int_0^s(\partial_t v)\,v dt\right]dx&=-\frac{a^2+c}{2}\int_\Omega\left[\int_0^s\partial_t\left(v^2\right)dt\right]dx\\&=\frac{a^2+c}{2}\int_\Omega[v(x,0)]^2\,dx.\end{aligned}\tag{18.88}$$

Végül (18.83) bal oldala így becsülhető: v definíciója alapján

$$|v(x,t)|^2\le T\int_0^s|w(x,\tau)|^2d\tau,$$

így

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_s} e^{-at}(f_1-f_2)v\right| &\le \frac{1}{2}\|e^{-at}(f_1-f_2)\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(Q_s)}\\ &\le \frac{1}{2}\|e^{-at}(f_1-f_2)\|^2_{L^2(Q_s)}\\ &\quad+\frac{T}{2}\int_\Omega\left\{\int_0^s\left[\int_0^s|w(x,\tau)|^2\,d\tau\right]dt\right\}dx\\ &= \frac{1}{2}\|e^{-at}(f_1-f_2)\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{T^2}{2}\int_{Q_s}w^2.\end{aligned}\tag{18.89}$$

Így a (18.83) összefüggésből (18.84)–(18.89) figyelembevételével kapjuk:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{a^2+c}{2}-\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\right]\int_\Omega[v(x,0)]^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega[w(x,s)]^2\,dx\\ &\qquad+\frac{1}{2}\int_\Omega|\operatorname{grad}v(x,0)|^2\,dx+\left(a-\frac{T^2}{2}\right)\int_{Q_s}w^2\\ &\le\frac{1}{2}\|e^{-at}(f_1-f_2)\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\|\varphi_2^1-\varphi_2^2\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\qquad+\frac{a+1}{2}\|\varphi_1^1-\varphi_1^2\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Tehát elég nagy $a>0$ számot választva

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[w(x,s)]^2\,dx+\int_\Omega\left|\int_0^s\operatorname{grad}w(x,\tau)d\tau\right|^2dx\\ &\qquad\le\|e^{-at}(f_1-f_2)\|^2_{L^2(Q_s)}+\|\varphi_2^1-\varphi_2^2\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\qquad\qquad+(a+1)\|\varphi_1^1-\varphi_1^2\|^2_{L^2(\Omega)}:\end{aligned}\tag{18.90}$$

megkaptuk a 10.10. Tétel állítását.

10.9. Megoldás. A Fourier-módszer szerint keressük a megoldást

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(t)\sin(k\pi x)$$

alakban, hiszen a Dirichlet-típusú zérus peremfeltétel adott, amelynek megfelelő sajátfüggvények a (0,1) intervallumon az $x\mapsto\sin(k\pi x)$ függvények ($k=1,2,\dots$), ezek teljes ortogonális rendszert alkotnak az $L^2(0,1)$ térben. Fejtsük sorba az $x\mapsto x^2-x$ kezdeti függvényt a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszere szerint. Parciális integrálással adódik:

$$\int_0^1(x^2-x)\sin(k\pi x)dx$$

$$= -\left[(x^2-x)\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{x=0}^{1} + \int_0^1 (2x-1)\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}dx$$
$$= \left[(2x-1)\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 2\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}$$
$$= 2\left[\frac{\cos(k\pi x)}{k^3\pi^3}\right]_{x=0}^{1} = \frac{2}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k-1\right].$$

Mivel

$$\int_0^1 \sin^2(k\pi x)dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(2k\pi x)}{2}dx = \frac{1}{2},$$

azért az $x \mapsto x^2 - x$ függvény sorfejtése

$$u(x,0) = x^2 - x = \frac{4}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k-1\right]\sin(k\pi x). \tag{18.91}$$

Feltéve, hogy az $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)\sin(k\pi x)$ sor tagonként kétszer differenciálható x és t szerint, a differenciálegyenlet akkor áll fenn, ha

$$0 = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + 4u$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k''(t)\sin(k\pi x) + \xi_k(t)k^2\pi^2\sin(k\pi x) + 4\xi_k(t)\sin(k\pi x)\right].$$

Tekintve, hogy a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2(0,1)$-ben, ebből a ξ_k függvényekre az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\xi_k''(t) + (k^2\pi^2+4)\xi_k(t) = 0, \qquad k = 1,2,\dots,\ t > 0. \tag{18.92}$$

A második kezdeti feltétel szerint

$$0 = \partial_t u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k'(0)\sin(k\pi x), \tag{18.93}$$

feltéve, hogy u sora „elég jól” konvergál. Így (18.91)–(18.93) szerint a ξ_k függvényekre az alábbi kezdetiérték-feladatot nyertük:

$$\xi_k''(t) + (k^2\pi^2+4)\xi_k(t) = 0, \qquad t > 0,$$
$$\xi_k(0) = \frac{4}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k-1\right], \qquad \xi_k'(0) = 0.$$

Ezek megoldása

$$\xi_k(t) = \frac{4}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k-1\right]\cos(\sqrt{k^2\pi^2+4}\,t), \qquad k = 1,2,\dots,\ t \geq 0.$$

Tehát a Fourier-módszerrel a következő u függvényt nyerjük:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin(k\pi x)$$
$$= \frac{4}{k^3\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k - 1\right] \cos(\sqrt{k^2\pi^2 + 4}t) \sin(k\pi x).$$

Mivel a sor tagjai abszolút értékben kisebbek, mint $\frac{8}{\pi^3} \cdot \frac{1}{k^3}$, azért a sor abszolút és egyenletesen konvergens. Ugyanez igaz a tagonkénti t illetve x szerinti deriváltakból álló sorokra, hiszen ezek a tagok konstans/k^2-tel becsülhetők abszolút értékben. Ezért a sor u összegére $u \in C^1([0,1] \times [0,\infty))$ teljesül, és u (klasszikus értelemben) kielégíti a kezdeti és peremfeltételeket.

Belátható, hogy u kielégíti a differenciálegyenletet gyengébb (Szoboljev-térbeli) értelemben (lásd a 15. fejezetet és a [175] tankönyvet). Egyébként a $\varphi_1(x) = x^2 - x$ képlettel értelmezett φ_1 függvényre nem teljesül a (10.39) feltétel, ugyanis $\varphi_1''(x) = 2$, így $\varphi_1''(0) \neq 0$ és $\varphi_1''(1) \neq 0$. Ezért az nem lehet igaz, hogy $u(x,t)$ sorának tagonkénti második deriváltjaiból alkotott sor egyenletesen konvergens, és u sorának összege klasszikus értelemben kielégíti a differenciálegyenletet.

10.10. Megoldás. A Fourier-módszernek megfelelően keressük a megoldást

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin(k\pi x)$$

alakban, ahol az $x \mapsto \sin(k\pi x)$ sajátfüggvények a (0,1) intervallumban kielégítik a zérus első peremfeltételt. Fejtsük sorba az $x \mapsto 1$ függvényt a sajátfüggvények $L^2(0,1)$-ben teljes ortogonális rendszere szerint. Mivel

$$\int_0^1 1 \cdot \sin(k\pi x)dx = \left[-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{k\pi}\left[1 - (-1)^k\right]$$

és

$$\int_0^1 \sin^2(k\pi x)dx = \frac{1}{2},$$

azért

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[1 - (-1)^k\right] \sin(k\pi x).$$

Feltéve, hogy u függvény sora tagonként kétszer differenciálható x és t szerint, az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k''(t)\sin(k\pi x) + \xi_k(t)k^2\pi^2\sin(k\pi x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right]\sin(k\pi x), \quad (18.94)$$

ebből a ξ_k függvényekre a következő differenciálegyenletek adódnak:

$$\xi_k''(t) + k^2\pi^2\xi_k(t) = \frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right], \qquad k = 1,2,\dots,\ t > 0. \quad (18.95)$$

A homogén kezdeti feltételek miatt

$$\xi_k(0) = \xi_k'(0) = 0. \quad (18.96)$$

A (18.95), (18.96) kezdetiérték-feladat megoldása:

$$\xi_k(t) = \frac{2}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]\left[1-\cos(k\pi t)\right], \qquad t \geq 0,$$

így a vegyes feladat megoldására az alábbi függvényt nyerjük:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\left[1-\cos(k\pi t)\right]\sin(k\pi x), \qquad x \in [0,1],\ t \geq 0.$$

Világos, hogy mind u sora, mind a tagonkénti x, illetve t szerinti deriválással nyert sorok abszolút és egyenletesen konvergensek a $[0,1]\times[0,\infty)$ halmazon, így $u \in C^1([0,1]\times[0,\infty))$, és a kezdeti és peremfeltételek a fenti u függvényre teljesülnek. Igazolható, hogy a differenciálegyenlet alkalmas „gyenge értelemben" teljesül (lásd a 15. fejezetet és a [175] tankönyvet). Viszont biztosan nem teljesülhet, hogy az u függvényt előállító sor x és t szerinti tagonkénti deriválással nyert sor egyenletesen konvergens, és a tagonkénti deriválással kapott sor összegére fennáll a differenciálegyenlet, mivel a differenciálegyenlet jobb oldalára nem teljesülhet a (10.37) feltétel, hiszen

$$f(0,t) = 1 \neq 0, \qquad f(1,t) = 1 \neq 0.$$

10.11. Megoldás. Először vezessük vissza a feladatot zérus peremfeltételű problémára a következő módon. Válasszuk meg az u_0 (elegendően sima) függvényt úgy, hogy kielégítse az inhomogén peremfeltételt. Kézenfekvő az u_0 függvényt így megválasztani:

$$u_0(x,t) = x\sin t.$$

Az u függvény akkor és csak akkor elégíti ki az eredeti vegyes feladatot, ha a $v = u - u_0$ függvényre teljesül:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = -\partial_t^2 u_0 + \partial_x^2 u_0 = x \sin t, \quad x \in (0,1), t > 0, \\ v(x,0) = -u_0(x,0) = 0, \quad \partial_t v(x,0) = \partial_t u(x,0) - \partial_t u_0(x,0) = 0, \\ v(0,t) = -u_0(x,0) = 0, \quad v(1,t) = u(1,t) - u_0(1,t) = 0. \end{cases} \tag{18.97}$$

A v függvényre már alkalmazhatjuk a Fourier-módszert: keressük v-t a következő alakban:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin(k\pi x),$$

ahol az $x \mapsto \sin(k\pi x)$ sajátfüggvények kielégítik a (0,1) intervallumon a zérus első peremfeltételt, és teljes ortogonális rendszert alkotnak az $L^2(0,1)$ térben. Rögzített $t > 0$ mellett fejtsük sorba a (18.97) differenciálegyenlet jobb oldalát a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszere szerint. Parciális integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x \sin t) \sin(k\pi x) dx &= -(\sin t) \left[x \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} \right]_{x=0}^1 + (\sin t) \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} dx \\ &= -\frac{(-1)^k}{k\pi} \sin t, \end{aligned}$$

így $\int_0^1 \sin^2(k\pi x) dx = \dfrac{1}{2}$ alapján

$$x \sin t = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k\pi} (\sin t) \sin(k\pi x). \tag{18.98}$$

Feltételezve, hogy v sora x és t szerint tagonként kétszer differenciálható, (18.98) alapján nyerjük:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k''(t) \sin(k\pi x) + \xi_k(t) k^2 \pi^2 \sin(k\pi x) \right] = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k\pi} (\sin t)(\sin k\pi x),$$

amiből (mivel az $x \mapsto \sin(k\pi x)$ függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2(0,1)$-ben) az alábbi differenciálegyenletet nyerjük a ξ_k függvényekre:

$$\xi_k''(t) + k^2 \pi^2 \xi_k(t) = -\frac{2(-1)^k}{k\pi} (\sin t), \qquad t > 0. \tag{18.99}$$

Továbbá a v-re vonatkozó zérus kezdeti feltételek miatt

$$\xi_k(0) = \xi_k'(0) = 0. \tag{18.100}$$

A kapott (18.99), (18.100) kezdetiérték-feladat megoldása:

$$\xi_k(t) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k(k^2\pi^2-1)}\left[-\sin t + \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right],$$

így

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k^2\pi^2-1)}\left[-\sin t + \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]\sin(k\pi x),$$

és

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + v(x,t) \\ &= x\sin t \\ &\quad + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k^2\pi^2-1)}\left[-\sin t + \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]\sin(k\pi x). \end{aligned} \tag{18.101}$$

Könnyen látható, hogy a (18.101) formulával értelmezett sor és annak tagonkénti x, illetve t szerinti deriválásával nyert sorok abszolút és egyenletesen konvergensek $x \in [0,1]$, $t \geq 0$ esetén, így $u \in C^1([0,1]\times[0,\infty))$, továbbá a kezdeti és peremfeltételek teljesülnek. Ugyanakkor a v-re vonatkozó (18.97) differenciálegyenlet jobb oldalára a (10.37) szükséges feltétel nem teljesül, mert

$$[x\sin t]_{x=1} = \sin t$$

nem azonosan nulla, ezért az biztosan nem igaz, hogy a sor tagonkénti kétszeres deriválásával nyert sorok egyenletesen konvergensek és az így kapott sorok összege kielégíti a v-re és u-ra vonatkozó differenciálegyenletet. Viszont belátható, hogy megfelelő „gyenge értelemben" fennáll a differenciálegyenlet. (Lásd a 15. fejezetet és a [175] tankönyvet.)

10.12. Megoldás. A Fourier-módszernek megfelelően először tekintsük az alábbi elliptikus sajátérték-feladatot az $N = (0,1)\times(0,1)$ négyzetben:

$$-\partial_x^2 w - \partial_y^2 w = \lambda w, \qquad (x,y)\in N,\ w|_{\partial N} = 0.$$

A 8.4.2. pontban láttuk, hogy ennek megoldásai a

$$w_{k,l}(x,y) = \sin(k\pi x)\sin(l\pi y), \qquad k,l = 1,2,\ldots,\ (x,y)\in N \tag{18.102}$$

képlettel értelmezett $w_{k,l}$ függvények, amelyek teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2(N)$-ben, továbbá a

$$\lambda_{k,l} = \pi^2(k^2+l^2), \qquad k,l = 1,2,\ldots \tag{18.103}$$

sajátértékek.

Keressük a vegyes feladat megoldását ilyen alakban:

$$u(x,y,t)=\sum_{k,l=1}^{\infty}\xi_{k,l}(t)w_{k,l}(x,y),\qquad (x,y)\in N,\ t>0.$$

Fejtsük sorba az u-ra vonatkozó differenciálegyenlet jobb oldalát rögzített $t>0$ mellett a $w_{k,l}$ sajátfüggvényekből álló teljes ortogonális rendszer szerint. Nyilván

$$\begin{aligned}\int_N fw_{k,l}&=t\int_0^1\left[\int_0^1(x^2-x)(y^2-y)w_{k,l}dx\right]dy\\&=t\left[\int_0^1(x^2-x)\sin(k\pi x)dx\right]\left[\int_0^1(y^2-y)\sin(l\pi y)dy\right].\end{aligned}\tag{18.104}$$

Parciális integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned}&\int_0^1(x^2-x)\sin(k\pi x)dx\\&\qquad=-\left[(x^2-x)\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{x=0}^1+\int_0^1(2x-1)\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}dx\\&\qquad=\left[(2x-1)\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right]_{x=0}^1-\int_0^1 2\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}dx\\&\qquad=-\frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1\sin(k\pi x)dx=\frac{2}{k^2\pi^2}\left[\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{x=0}^1\\&\qquad=\frac{2}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k-1\right],\end{aligned}$$

így (18.104) alapján

$$\int_N fw_{k,l}=\frac{4t}{k^3l^3\pi^6}\left[(-1)^k-1\right]\left[(-1)^l-1\right].\tag{18.105}$$

Mivel $k,l=1,2,\dots$ esetén

$$\int_N\sin^2(k\pi x)\sin^2(l\pi y)dxdy=\left[\int_0^1\sin^2(k\pi x)dx\right]\left[\int_0^1\sin^2(l\pi y)dy\right]=\frac{1}{4},$$

azért (18.105) alapján

$$(x^2-x)(y^2-y)t=\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{16t}{k^3l^3\pi^6}\left[(-1)^k-1\right]\left[(-1)^l-1\right]\sin(k\pi x)\sin(l\pi y).$$

Feltéve, hogy u második deriváltjai a sor tagonkénti kétszeres differenciálásával számolhatók, a differenciálegyenlet így is írható:

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[\xi''_{k,l}(t) w_{k,l}(x,y) + \xi_{k,l}\lambda_{k,l} w_{k,l}(x,y)\right] = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{16t}{k^3 l^3 \pi^6} \left[(-1)^k - 1\right] \left[(-1)^l - 1\right] w_{k,l}(x,y). \quad (18.106)$$

Mivel a $w_{k,l}$ függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2(N)$-ben, így (18.106) alapján a $\xi_{k,l}$ függvényekre az alábbi differenciálegyenletek adódnak:

$$\xi''_{k,l}(t) + \lambda_{k,l}\xi_{k,l}(t) = \frac{16t}{k^3 l^3 \pi^6} \left[(-1)^k - 1\right] \left[(-1)^l - 1\right], \quad k,l = 1,2,\ldots,\ t > 0. \quad (18.107)$$

Az u-ra vonatkozó kezdeti feltételekből pedig nyilván az alábbi kezdeti feltételeket nyerjük a $\xi_{k,l}$ függvényekre:

$$\xi_{k,l}(0) = \xi'_{k,l}(0) = 0, \qquad k,l = 1,2,\ldots. \quad (18.108)$$

A (18.107), (18.108) kezdetiérték-feladatok megoldása (18.103) alapján

$$\xi_{k,l}(t) = \frac{16}{k^3 l^3 \pi^9 (k^2+l^2)} \left[(-1)^k - 1\right] \left[(-1)^l - 1\right] \left[\pi t - \frac{\sin(\pi\sqrt{k^2+l^2}\,t)}{\sqrt{k^2+l^2}}\right],$$

tehát a vegyes feladat megoldására kapjuk:

$$u(x,y,t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \xi_{k,l}(t) w_{k,l}(x,y)$$
$$= \frac{16}{\pi^9} \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)^k - 1\right] \left[(-1)^l - 1\right]}{k^3 l^3 (k^2+l^2)} \left[\pi t - \frac{\sin(\pi\sqrt{k^2+l^2}\,t)}{\sqrt{k^2+l^2}}\right] \sin(k\pi x) \sin(l\pi y).$$

A kapott sor tagjai abszolút értékben

$$\frac{1}{k^3 l^3 (k^2+l^2)} \left[c_1 t + c_2\right]$$

értékkel becsülhetők (c_1, c_2 állandók), a tagok t szerint első és második deriváltjainak abszolút értéke

$$\frac{\text{const}}{k^3 l^3 \sqrt{k^2+l^2}}$$

értékkel, az x és y szerinti első és második deriváltak pedig rendre az

$$\frac{1}{kl^3(k^2+l^2)}\,(c_1't+c_2')\,,\quad \text{illetve}\quad \frac{1}{k^3l(k^2+l^2)}\,(c_1't+c_2')$$

értékekkel becsülhetők (c_1', c_2' állandók). Ebből következik, hogy u sora, továbbá a tagonkénti első és második deriváltak sora abszolút és egyenletesen konvergens $0\le t\le T$ esetén, így a sor összegére $u\in C^2(\overline{N}\times(0,\infty))$ teljesül, és u kielégíti a vegyes feladatot klasszikus értelemben.

18.7. A 11. fejezetbeli feladatok megoldásai

11.1. Megoldás. Mivel Ω nyílt, ezért van olyan $0<r<1$ szám, amelyre $B(a,r)\subset\Omega$. Legyen $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ és tekintsük a $\psi(x)=p\cdot(x_1-a_1)^{\alpha_1}(x_2-a_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x_n-a_n)^{\alpha_n}$ függvényt, ahol a p paraméter értékét később határozzuk meg. Ekkor minden $\beta\ne\alpha$ multiindexre $\partial^\beta\psi(a)=0$, továbbá $\partial^\alpha\psi(a)=p\prod_{\alpha_j\ne0}(\alpha_j!)$, amelyről azt szeretnénk, hogy c legyen, így ebből a p paraméter értéke egyértelműen adódik. Már csak annyit kell tenni, hogy veszünk egy olyan $\eta\in C_0^\infty(\Omega)$ függvényt, amelyre $\eta=1$ a $B(a,r)$ gömb egy nyílt környezetében (ilyen a 3.31. Állítás alapján van), és ekkor a $\varphi:=\eta\psi$ függvényre $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, valamint $\partial^\beta(\eta\psi)(a)=\partial^\beta\psi(a)$.

Legyen φ az előbbi konstrukcióval nyert (nem azonosan 0) függvény, és definiáljuk az $M>$ számot a következőképpen:

$$M:=\max_{|\beta|<|\alpha|}\sup_{\Omega}|\partial^\beta\varphi|.$$

Ha $M\le1$, akkor készen vagyunk, ellenkező esetben értelmezzük a $\tilde\varphi$ függvényt a $\tilde\varphi(x):=\varphi(a+M(x-a))/(M^{|\alpha|})$ hozzárendeléssel. Ekkor minden $|\beta|<|\alpha|$ multiindexre $|\partial^\beta\tilde\varphi|=|\partial^\beta\varphi|/(M^{|\alpha|-|\beta|}\le1$, valamint $\partial^\alpha\tilde\varphi(a)=$ $=\varphi(a)=c$. Még gondoljuk meg, hogy $M>1$ miatt $\operatorname{supp}\tilde\varphi\subset B(a,r/M)\subset$ $\subset B(a,r)\subset\Omega$. Mindezek alapján a $\tilde\varphi$ függvény megfelel a feladat második részében kirótt feltételeknek.

11.2. Megoldás. Ha $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$-nek van egy $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ primitív függvénye, akkor egy olyan kompakt $[a,b]$ intervallumot választva, amelyen kívül $\psi=0$,

$$\int\varphi\,dx=\int\psi'\,dx=\int_a^b\psi'\,dx=\psi(b)-\psi(a)=0.$$

Fordítva, ha $\int\varphi\,dx=0$ és $\varphi=0$ egy kompakt $[a,b]$ intervallumon kívül, akkor a

$$\psi(x):=\int_{-\infty}^x\varphi(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

formula φ-nek olyan primitív függvényét definiálja, amelyik eltűnik a $(-\infty, a)$ intervallumban. Ez a függvény eltűnik a $(b, +\infty)$ intervallumban is, mert

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\ dt = \int_{a}^{x} \varphi(t)\ dt = \int_{a}^{b} \varphi(t)\ dt = 0$$

minden $x > b$-re. Végül $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, hiszen egy $C^\infty(\mathbb{R})$-beli függvény primitív függvénye.

11.3. Megoldás.
a) Minthogy

$$\varphi(x) = \int_{a}^{x} \varphi'(u)\ du = (x-a) \int_{0}^{1} \varphi'(a + (x-a)t)\ dt,$$

elég megmutatni, hogy az

$$x \mapsto \int_{0}^{1} \varphi'(a + (x-a)t)\ dt$$

függvény C^∞-beli. Ez a paraméteres integrálok deriválhatósági tételéből következik, mert az

$$\int_{0}^{1} \frac{d^k}{dx^k} \varphi'(a + (x-a)t)\ dt = \int_{0}^{1} t^k \varphi^{(k+1)}(a + (x-a)t)\ dt$$

integrálok léteznek, és végesek.

b) Elég megjegyezni a) alapján, hogy a $\frac{\varphi(x)}{x-a}$ törtfüggvény eltűnik φ tartóján kívül.

11.4. Megoldás. Alkalmazzuk az előző feladatot φ helyett a $\varphi - \varphi(a)\eta$ függvényre.

11.5. Megoldás.
a) Nyilván $\operatorname{supp} \varphi_j = \operatorname{supp} \varphi$ minden j-re, továbbá minden α multiindex esetén teljesül, hogy $|\partial^\alpha \varphi_j(x)| = |\partial^\alpha \varphi(x)|\,/j \le \sup_\Omega |\partial^\alpha \varphi|\,/j \to 0$, vagyis $\partial^\alpha \varphi_j \to 0$ egyenletesen Ω-n. Következésképpen $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$.

b) Vegyük észre, hogy $\operatorname{supp}(x \mapsto \varphi(x/j)/j)$ origó középpontú j-szeres nagyítással kapható $\operatorname{supp} \varphi$-ből, így $\operatorname{supp} \varphi \neq \emptyset$ esetén nem létezik K kompakt halmaz, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$. Ebből következően a (φ_j) sorozat nem konvergens $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben, kivéve a $\varphi = 0$ esetet.

c) Most $\operatorname{supp}(x \mapsto \varphi(jx)/j)$ origó középpontú $1/j$-szeres kicsinyítéssel nyerhető $\operatorname{supp} \varphi$-ből, ezért ha $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0,R)$, akkor $\operatorname{supp} \varphi_j \subset B(0,R)$ minden j-re. Ezenkívül $|\varphi_j(x)| \le \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi|/j \to 0$, ezért $\varphi_j \to 0$ egyenletesen

$\mathbb{R}^n$-en. Azonban például $|\alpha| = 1$ mellett $\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_j| = \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi|$ csak akkor tart a 0-hoz $j \to \infty$ esetén, ha $\partial^\alpha \varphi = 0$. Következésképpen φ konstans függvény, és mivel kompakt tartójú, ezért csak az azonosan nulla függvény lehet. A (φ_j) sorozat tehát csak a triviális $\varphi = 0$ esetben konvergens $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben.

11.6. Megoldás. A linearitás nyilvánvaló lévén, elég megmutatni a 0-beli folytonosságot:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0 \Longrightarrow \partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0.$$

Minthogy $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$, van olyan K olyan kompakt halmaz, amelyen kívül mindegyik φ_n függvény eltűnik, és

$$\sup \left|\partial^\beta \varphi\right| \to 0$$

minden β multiindexre. Akkor az $\mathbb{R}^n \setminus K$ nyílt halmazon a $\partial^\alpha \varphi_n$ derivált függvények is eltűnnek, és a fenti relációk speciális eseteiként

$$\sup |\partial^\gamma \partial^\alpha \varphi| = \sup \left|\partial^{\gamma+\alpha} \varphi\right| \to 0$$

minden γ multiindexre.

11.7. Megoldás. A linearitás nyilvánvaló lévén, elég megmutatni a 0-beli folytonosságot:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0 \Longrightarrow \psi\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0.$$

Minthogy $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$, van olyan K kompakt halmaz, amelyen kívül mindegyik φ_n függvény eltűnik, és

$$\sup \left|\partial^\beta \varphi_n\right| \to 0$$

minden β multiindexre. Akkor az $\mathbb{R}^n \setminus K$ nyílt halmazon a $\psi\varphi_n$ szorzatfüggvények is eltűnnek. Továbbá a Leibniz-formula alapján tetszőleges α multiindexre

$$\sup |\partial^\alpha (\psi\varphi_n)| \le \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_K \left|\partial^{\alpha-\beta}(\psi)\right| \sup \left|\partial^\beta (\varphi_n)\right| \to 0,$$

mert véges összegről van szó, és ψ minden deriváltja (folytonos, és így) korlátos a kompakt K halmazon.

11.8. Megoldás. A válasz: igen. Valóban, a $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ konvergencia miatt létezik $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, amelyre $\operatorname{supp}(\varphi_j\psi_j) \subset \operatorname{supp}\varphi_j \subset K$. Másrészt minden α multiindexre a Leibniz-szabályból következően

$$\partial^\alpha(\varphi_j\psi_j) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \varphi_j)(\partial^{\alpha-\beta}\psi_j),$$

és mivel (a klasszikus analízisből jól ismert módon) egyenletesen korlátos és egyenletesen konvergens függvénysorozatok szorzata is egyenletesen konvergens, ezért

$$(\partial^\beta \varphi_j)(\partial^{\alpha-\beta}\psi_j) \to (\partial^\beta \varphi)(\partial^{\alpha-\beta}\psi),$$

egyenletesen Ω-n, tehát $\partial^\alpha(\varphi_j\psi_j) \to \partial^\alpha(\varphi\psi)$ is egyenletesen Ω-n.

11.9. Megoldás. Az $u\colon C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál maximumnormára vonatkozó folytonossága azt jelenti, hogy

$$|u(\varphi)| \le C \cdot \sup_\Omega |\varphi| = C \cdot \sup_{\operatorname{supp}\varphi} |\varphi|,$$

vagyis $\operatorname{supp}\varphi \subset K \subset \Omega$ kompakt halmaz esetén $|u(\varphi)| \le C \cdot \sup_K |\varphi|$, tehát u egy nulladrendű disztribúció Ω-n.

A megfordítás nem igaz. Legyen ugyanis $\Omega = \mathbb{R}$ és $u(\varphi) = \varphi'(0)$, amely nyilván disztribúció (a 11.13. Feladat szerint $u = -\delta_0'$). Ekkor u csak egy $C_0(\Omega)$-beli sűrű részhalmazon értelmezett, és nem folytonos a maximumnormára nézve, mert a $\varphi_n(x) = \sin(nx)/n \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}$-en (tehát maximumnormában), de $\varphi'(0) = (\sin(nx)/n)'(0) = 1 \not\to 0$.

11.10. Megoldás. Az u funkcionál linearitása nyilvánvaló, ha pedig $\operatorname{supp}\varphi \subset$ $\subset K \subset \Omega$ kompakt, akkor

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &= \left|\int_\Omega f\partial^\beta\varphi\right| = \left|\int_K f\partial^\beta\varphi\right| \le \int_K \left|f\partial^\beta\varphi\right| \\ &\le \left(\int_K |f|\right) \cdot \sup_K \left|\partial^\beta\varphi\right| \le C_K \cdot \sum_{|\alpha|\le|\beta|} \sup_K |\partial^\alpha|\varphi|, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és véges rendű, mégpedig legfeljebb $|\beta|$ rendű. Megjegyezzük, hogy u nem feltétlenül $|\beta|$ rendű: például az $\Omega = \mathbb{R}$, $f = H$, $\beta = k$ esetben (ahol H a Heaviside-függvény) a Newton–Leibniz-tétel és φ kompakt tartójú volta folytán

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H\varphi^{(k)} = -\varphi^{(k-1)}(0),$$

és így $u = -(-1)^{k-1}\delta_0^{(k-1)}$, u rendje $k-1$.

A 11.11. Állításban láttuk, hogy $|\beta| = 0$ esetén az u disztribúció m.m. egyértelműen meghatározza az f függvényt. Belátjuk, hogy $|\beta| \ge 1$ esetén ez nem igaz, előfordulhat, hogy két mindenütt különböző függvény ugyanazt az u disztribúciót határozza meg. Legyen $n = 1$, $\Omega = (a,b)$, valamint $f \in$ $\in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$, $c \in \mathbb{R}$ és $\beta = 1$. Ekkor minden $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ esetén

$$\int_a^b (f+c)\varphi' = \int_a^b f\varphi' + c\cdot\int_a^b \varphi' = \int_a^b f\varphi' + c(\varphi(b)-\varphi(a)) = \int_a^b f\varphi',$$

hiszen $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy $f + c$ és f ugyanazt a disztribúciót határozzák meg. Hasonlóan látható, hogy tetszőleges $n \geq 1$ és $|\beta| \geq 1$ multiindex esetén sem határozza meg u az f függvényt.

11.11. Megoldás. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ nem üres megszámlálható. A 11.30. Megjegyzés alapján $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ nyílt halmaz, továbbá $u = 0$ ezen a halmazon. E halmazra a 11.11. Állítást alkalmazva kapjuk, hogy $u = T_0 = 0$ az $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ halmazon. Tegyük fel, hogy létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény, amelyre $u = T_f$ az Ω halmazon. Mivel $\operatorname{supp} u$ megszámlálható, ezért nullmértékű, és így a 11.11. Állítást most az Ω halmazra alkalmazva kapjuk, hogy $T_0 = u = T_f$ az egész Ω halmazon, vagyis szükségképpen $f = 0$, tehát $u = 0$. Azonban az azonosan 0 disztribúció tartója az üres halmaz (hiszen minden függvényre 0 az értéke), de ez lehetetlen, mert feltettük, hogy $\operatorname{supp} u$ nem üres.

11.12. Megoldás. A bizonyítás megegyezik a függvényekre vonatkozó analóg állítás bizonyításával.

Világos, hogy ha egy nyílt halmazon u és v egyszerre nulla, akkor ott $u + v$ is nulla, vagyis $(\Omega \setminus \operatorname{supp} u) \cap (\Omega \setminus \operatorname{supp} v) \subset \Omega \setminus \operatorname{supp}(u + v)$, ezért a komplementer halmazokra $\operatorname{supp}(u + v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v$ teljesül. A szigorú tartalmazáshoz elég két folytonos függvényt találnunk, amelyekre szigorú tartalmazás áll fenn, és akkor a 11.24. Feladat alapján készen vagyunk.

Szigorú tartalmazáshoz legyen például $f = 1$ és $g = -1$ az Ω halmazon, ekkor $\operatorname{supp} T_{f+g} = \emptyset$ és $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} T_g = \Omega$. Amennyiben pedig $u = v$, akkor nyilván $\operatorname{supp}(u + v) = \operatorname{supp}(2u) = \operatorname{supp} u = \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} u$.

A másik tartalmazáshoz legyen $x \in \Omega \setminus (\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u)$, ekkor $x \in \Omega \setminus$ $\setminus \operatorname{supp} \psi$ vagy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. Az első esetben létezik x-nek $U_x \subset \Omega$ nyílt környezete úgy, hogy $U_x \cap \operatorname{supp} \psi = \emptyset$. Ebből következően $\psi\varphi = 0$, vagyis $\psi u(\varphi) = u(\psi\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$, ami azt jelenti, hogy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(\psi u)$. Amennyiben $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$, akkor x-nek van olyan $U_x \subset \Omega$ nyílt környezete, amelyen $u = 0$. Ez azt jelenti, hogy $u(\varphi) =$ $= 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$. Nyilván minden ilyen tulajdonságú φ-re $\operatorname{supp}(\psi\varphi) \subset \operatorname{supp} \varphi \subset U_x$, tehát $\psi u(\varphi) = u(\psi\varphi) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\psi u = 0$ az U_x környezetben, vagyis $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} \psi u$. Összefoglalva, ha $x \in \Omega \setminus (\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u)$, akkor $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(\psi u)$, ezért a komplementer halmazokra $\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u$ teljesül.

Szigorú tartalmazáshoz tekintsük például az $\Omega = \mathbb{R}$ esetben az $u = T_H$ disztribúciót (ahol H a Heaviside-függvény), továbbá ψ legyen egy olyan sima függvény, amelynek tartója a $[-1, 0]$ intervallum (ilyen van, lásd például a (11.4) hozzárendeléssel értelmezett függvényt $a = -1/2$ és $r = 1/2$ választással). Ekkor a 11.24. Feladat szerint $\operatorname{supp} T_H = \operatorname{supp} H = [0, \infty)$, így $\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u = \{0\}$. Másrészt viszont, a 11.23. Példa alapján $\psi T_H = T_{\psi H}$, vagyis ψT_H a m.m. nulla ψH függvényhez tartozó reguláris disztribúció, de

ez a 11.11. Állítás miatt megegyezik az azonosan 0 függvényhez tartozó reguláris disztribúcióval, tehát $\operatorname{supp}(\psi T_H) = \emptyset \subsetneq \{0\}$ ($\subsetneq$ jelölés azt jelenti, hogy valódi részhalmaza). Nyilván a $\psi = 1$ függvény esetén

$$\operatorname{supp} u = \operatorname{supp}(\psi u) = \operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u = \Omega \cap \operatorname{supp} u = \operatorname{supp} u,$$

tehát egyenlőség áll fenn.

11.13. Megoldás. A disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén $\partial^\alpha \delta_a(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\delta_a(\partial^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(a)$.

Belátjuk, hogy $\operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_a = \{a\}$. Valóban, ha $x \neq a$, akkor x-nek van olyan U_x nyílt környezete, hogy $a \notin U_x$, és ekkor $\delta_a(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$, ezért $x \notin \operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_a$. Másrészt viszont a 11.1. Feladat alapján az a tetszőleges U nyílt környezetéhez található olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\partial^\alpha\varphi(a) \neq 0$, és így $\partial^\alpha\delta_a(\varphi) \neq 0$, vagyis $a \in \operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_a$.

Most megmutatjuk, hogy $\partial^\alpha\delta_a$ rendje $|\alpha|$. Először is nyilvánvalóan $\varphi \in \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$|u(\varphi)| = |\partial^\alpha\delta_a(\varphi)| = |\partial^\alpha\varphi(a)| \leq \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta\varphi|, \tag{18.109}$$

tehát $\partial^\alpha\delta_a$ rendje legfeljebb $|\alpha|$. Ha a rendje $k < |\alpha|$ lenne, akkor a 11.1. Feladat alapján választhatunk olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $\sup_{\mathbb{R}^n}|\partial^\beta\varphi| \leq \leq 1$ minden $|\beta| < |\alpha|$ multiindexre, valamint $\partial^\alpha\varphi(a) = (k+1)^n + 1$. Ekkor $|u(\varphi)| = |\partial^\alpha\varphi(a)| = (k+1)^n + 1$, azonban a (18.109) becslésből következően (felhasználva, hogy legfeljebb $(k+1)^n$ darab n hosszú β multiindex van, amelyre $|\beta| = k$)

$$|u(\varphi)| \leq \sum_{|\beta|<|\alpha|} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta\varphi| \leq (k+1)^n,$$

ami ellentmondás, tehát $\partial^\alpha\delta_a$ rendje $|\alpha|$.

A $\partial^\alpha\delta_a$ disztribúció semmilyen α multiindex esetén nem reguláris. Ez következik a 11.11. Feladatból, felhasználva az előzőekben belátott $\operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_a = \{a\}$ összefüggést. Sőt, ez $|\alpha| > 0$ esetén egyszerűen abból is következik, hogy a 11.18. Megjegyzés alapján egy reguláris disztribúció nulladrendű, de $\partial^\alpha\delta_0$ rendje $|\alpha| > 0$. Az $|\alpha| = 0$ esettel pedig a 11.14. Feladat foglalkozik.

Egy másik lehetséges bizonyítás, ha az $|\alpha| = 0$ esethez (a 11.14. Feladat 1. megoldásához) hasonlóan járunk el, azzal a különbséggel, hogy a 11.1. Feladat alapján olyan ψ_j függvényeket konstruálunk, amelyekre $\operatorname{supp}\psi_j \subset B(a, 1/j)$, $\partial^\alpha\psi_j(a) = 1$ és $\sup_{\mathbb{R}^n}|\psi_j| \leq 1$ minden j-re.

11.14. Megoldás.

1. megoldás. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = \varphi(a)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. Tekintsük a 3.23. Példában definiált egységapproximációt, amelyet toljunk el az origóból az a pontba, azaz legyen $\psi_\varepsilon(x) := \eta_\varepsilon(a-x)$ $(j = 1{,}2\dots)$. Válasszuk az $\varepsilon = 1/j$ sorozatot, ekkor a ψ_j függvényekre a definíció és (3.3) alapján teljesül, hogy $\operatorname{supp}\psi_j \subset B(a,1/j)$, $\psi_j(a) = 1$ és $\sup_{\mathbb{R}^n}|\psi_j| \le 1$ minden j-re. Ebből következően $x \neq a$ esetén $\psi_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} 0$, tehát $f\psi_j \to 0$ m.m. $\mathbb{R}^n$-en. Mivel $|f\psi_j| \le |f| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ezért a Lebesgue-tétel alkalmazásával az indirekt feltevésből

$$1 = \psi_j(a) = \int_{\mathbb{R}^n} f\psi_j = \int_{B(a,1)} f\psi_j \to 0$$

adódik, ami ellentmondás.

2. megoldás. Ismét indirekt módon bizonyítunk, tegyük fel, hogy $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = \varphi(a)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. Mivel $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ezért a-nak van olyan $B(a,r)$ gömbi környezete, hogy $\int_{B(a,r)}|f| < 1$. Valóban, ha χ_j jelöli a $B(0,1/j)$ gömb karakterisztikus függvényét (azaz $\chi = 1$ a gömbön, és 0 azon kívül), akkor a Lebesgue-tétel miatt

$$\int_{B(0,\frac{1}{j})} f = \int_{B(0,1)} f\chi_j \to \int_{B(0,1)} 0 = 0,$$

így elég kis j-re $\int_{B(0,1/j)} f < 1$, vagyis az $r = 1/j$ választás megfelel.

Most legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ olyan függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset B(a,r)$ és $|\varphi(a)| = \sup_{\mathbb{R}^n}|\varphi|$ (ilyen van, lásd a (11.4) hozzárendeléssel értelmezett függvényt), ekkor az indirekt feltevés és a $B(a,r)$ környezet választása folytán

$$|\varphi(a)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\right| \le \int_{B(a,r)} |f\varphi| \le \sup_{\mathbb{R}^n}|\varphi| \cdot \int_{B(a,r)} |f| < \sup_{\mathbb{R}^n}|\varphi| = |\varphi(a)|,$$

ami ellentmondás.

3. megoldás. A 11.11. Feladat alapján nem üres megszámlálható tartójú disztribúció nem lehet reguláris, és mivel a 11.34. Példa szerint $\operatorname{supp}\delta_a = \{a\}$, így δ_a nem lehet reguláris.

11.15. Megoldás. Legyen $K \subset (0,2)$ kompakt halmaz. Ekkor létezik N pozitív egész szám, amelyre $1/j \notin K$, ha $j > N$, így $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ esetén

$$|u(\varphi)| = \left|\sum_{j=1}^{N} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right)\right| \le \sum_{j=1}^{N} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right|, \tag{18.110}$$

amiből következően u jól definiált. A linearitás is könnyen látható, hiszen formálisan (tudván, hogy csak véges sok nem nulla tag van az összegben) ké-

pezhetjük két végtelen szumma összegét. Végül a folytonosság a fenti (18.110) összefüggésből azonnal adódik, tehát u valóban disztribúció.

Belátjuk, hogy u nem véges rendű. Tegyük fel ugyanis, hogy u rendje $m < \infty$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $K \subset (0,2)$ kompakt halmazt választva létezik $C_K > 0$ konstans úgy, hogy

$$|u(\varphi)| \le C_K \cdot \sum_{k=0}^{m} \sup_K \left|\varphi^{(k)}\right| \tag{18.111}$$

minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Válasszuk a

$$K = \left[\frac{1}{m+1} - \varepsilon, \frac{1}{m+1} + \varepsilon\right]$$

kompakt intervallumot, ahol $\varepsilon = (1/(m+1) - 1/(m+2))/2$. Ekkor $1/(m+2) \notin K$, $1/m \notin K$ és $1/(m+1)$ az egyetlen 1 számlálójú tört, amely benne van K-ban. Következésképpen

$$u(\varphi) = \varphi^{(m+1)}\left(\frac{1}{m+1}\right)$$

minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. A 11.1. Feladat alapján válasszuk meg a $\varphi \in \mathscr{D}(0,2)$ függvényt úgy, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, $\sup_K |\varphi^{(j)}| \le 1$ minden $0 \le j \le m$ esetén, valamint $\varphi^{(m+1)}(1/(m+1)) = C_k(m+1)$. Ekkor $u(\varphi) = \varphi^{(m+1)}(1/(m+1)) = C_k(m+1)$, másrészt (18.111) miatt

$$|u(\varphi)| \le C_K \sum_{j=0}^{m} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right| = C_k \sum_{j=1}^{m} 1 = C_k m,$$

ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy u rendje nem lehet véges.

Egy végtelen rendű disztribúció nem lehet reguláris, hiszen a 11.18. Megjegyzés alapján egy reguláris disztribúció nulladrendű.

11.16. Megoldás. A 11.13. Feladat szerint $\partial^\alpha \delta_a$ rendje $|\alpha|$, így $|\alpha| = k$ esetén k-adrendű disztribúció. Az alábbiakban ennek egy változatát adjuk példaként.

Legyen $\Omega = \mathbb{R}$ és értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=0}^{k} \varphi^{(j)}(j).$$

Az u funkcionál nyilván lineáris, ezenkívül ha $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, akkor $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ esetén

$$|u(\varphi)| = \left|\sum_{j=0}^{k} \varphi^{(j)}(j)\right| \le \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right|, \tag{18.112}$$

tehát u disztribúció, amelynek rendje legfeljebb k.

Indirekt módon tegyük fel, hogy u rendje $m < k$. Ez azt jelenti, hogy minden K halmazhoz létezik $C_K > 0$ konstans úgy, hogy

$$|u(\varphi)| \le C_K \cdot \sum_{j=0}^{m} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right|.$$

Válasszuk a $K = [k-1/2, k+1/2]$ kompakt intervallumot, és a 11.1. Feladat alapján legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, $\sup_K |\varphi^{(j)}| \le 1$ minden $j \le m$ esetén, valamint $C_k\varphi^{(k)}(k) = C_k(m+1)$. Ebben az esetben $u(\varphi) = \varphi^{(k)}(k) = C_k(m+1)$, másrészt a (18.112) becslésből következően

$$|u(\varphi)| \le C_K \sum_{j=0}^{m} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right| = C_k \sum_{j=1}^{m} 1 = C_k m,$$

ami ellentmondás, tehát u rendje k.

11.17. Megoldás. A ψu funkcionál linearitása nyilvánvaló. A folytonossághoz legyen $K \subset \Omega$, ehhez u folytonossága miatt található $C_K > 0$ valós és m_K egész szám úgy, hogy

$$|u(\varphi)| \le C_K \cdot \sum_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|$$

minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Mivel a Leibniz-szabály alapján

$$\partial^\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta\psi \cdot \partial^\gamma\varphi,$$

ezért

$$\begin{aligned} |(\psi u)(\varphi)| = |u(\psi\varphi)| &\le C_K \cdot \sum_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha(\psi\varphi)| \\ &\le \sup_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha\psi| \cdot C_K \cdot \sum_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha\varphi|, \end{aligned}$$

vagyis teljesül a folytonosság ekvivalens feltétele a

$$\tilde{C}_K := C_K \sup_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha\psi|$$

és m_K konstansokkal.

Az $u \mapsto \psi u$ leképezés linearitása is nyilvánvaló, így elegendő megmutatnunk az

$$u_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} 0 \Longrightarrow \psi u_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} 0$$

implikációt, vagy ekvivalens módon az

$$u_n(\varphi) \to 0 \text{ minden } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\text{-ra} \Longrightarrow (\psi u_n)(\varphi) \to 0 \text{ minden } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\text{-ra}$$

implikációt. Ehhez elég megjegyeznünk, hogy $(\psi u_n)(\varphi) = u_n(\psi\varphi)$, és hogy $\psi\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

11.18. Megoldás. Definíció szerint $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\partial^\alpha u_j(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u_j(\partial^\alpha \varphi),$$

így az $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ konvergencia definíciójából közvetlenül adódik, hogy

$$\partial^\alpha u_j(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u_j(\partial^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) = \partial^\alpha u(\varphi).$$

11.19. Megoldás. Tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$-ra fennáll a következő egyenlőség:

$$(\psi\delta_a)(\varphi) = (\delta_a)(\psi\varphi) = \psi(a)\varphi(a) = \psi(a)\delta_a(\varphi).$$

11.20. Megoldás. Ha $\varphi \in \mathscr{D}$, akkor

$$\begin{aligned}\psi\delta^{(n)}(\varphi) &= \delta^{(n)}(\psi\varphi) = (-1)^n\delta\left((\psi\varphi)^{(n)}\right)\\ &= (-1)^n\delta\left(\psi\varphi^{(n)} + n\varphi^{(n-1)}\right) = (-1)^n n\varphi^{(n-1)}(0)\\ &= -n\delta^{(n-1)}(\varphi).\end{aligned}$$

11.21. Megoldás. Tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$-re fennállnak a definíciók alapján a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned}(\psi' u + \psi u')(\varphi) &= u(\psi'\varphi) + u'(\psi\varphi) = u(\psi'\varphi) - u((\psi\varphi)')\\ &= u(\psi'\varphi) - u(\psi'\varphi) - u(\psi\varphi')\\ &= -(\psi u)(\varphi') = (\psi u)'(\varphi).\end{aligned}$$

11.22. Megoldás. Tetszőleges $c \in \mathbb{C}$-re a $cf \in C^\infty(\mathbb{R})$ polinom eltűnik a-ban, így a 11.19. Feladat szerint

$$(cf)\delta_a = c(f\delta_a) = cf(0)\delta_a = 0,$$

mert $f(0) = 0$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $fu = 0$ valamely $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúcióra, és rögzítsünk egy olyan $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $\eta(a) = 1$. A 11.4. Feladat szerint minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény felírható a

$$\varphi = \varphi(a)\eta + f\psi$$

alakban egy alkalmas $\psi \in \mathscr{D}$ függvény segítségével. Következésképpen, bevezetve a $c := u(\eta)$ számot,

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \varphi(a)u(\eta) + u(f\psi) = \varphi(a)u(\eta) + (fu)(\psi) \\ &= c\varphi(a) + 0(\psi) = (c\delta_a)(\varphi) \end{aligned}$$

minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$-re, vagyis $u = c\delta_a$.

11.23. Megoldás. A válasz: nem. Legyen $\Omega := (-1, 1)$, $u := \delta_0'$ és $\psi(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor $\varphi \in \mathscr{D}(-1, 1)$ esetén

$$\psi\delta_0'(\varphi) = \delta_0'(\psi\varphi) = -(\psi\varphi)'(0) = -\varphi(0) = -\delta_0(\varphi) \neq \delta_0'(\varphi) = -\varphi'(0)$$

általában.

11.24. Megoldás. Tegyük fel, hogy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} f$. Ekkor létezik x-nek U_x környezete, amelyen $f = 0$ m.m., ezért $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$ esetén $T_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi = \int_{U_x} f\varphi = 0$, tehát $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$. Az előbbi érvelés visszafele is igaz, így $\Omega \setminus \operatorname{supp} f = \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$, amiből következik, hogy $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

11.25. Megoldás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Ekkor φ-t felírhatjuk $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ alakban, ahol

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(-x)), \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x)) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

vagyis φ_1, φ_2 a φ függvény „páratlan”, illetve „páros” része. Mivel $\varphi_1(0) = 0$, ezért a Lagrange-középértéktételből következően $x > 0$ esetén

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(x) - \varphi_1(0) = \varphi_1'(\xi_x) \cdot x,$$

ahol $\xi_x \in (0, x)$, továbbá φ_2 páros volta folytán $x \mapsto \varphi_2(x)/x$ páratlan függvény, tehát origóra szimmetrikus halmazon az integrálja 0. Mindezek alapján a Lebesgue-tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx &= \int_{\operatorname{supp}\varphi\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(0)}{x}\,dx \\ &= 2\int_{[\varepsilon,\infty)} \varphi_1'(\xi_x)\,dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 2\int_{[0,\infty)} \varphi_1'(\xi_x)\,dx, \end{aligned}$$

tehát $\mathscr{P}_1(\varphi)$ értelmes. Ezenkívül $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_1'| \le \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'|$ miatt a fenti becslésből következően $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$ esetén $|\mathscr{P}_1(\varphi)| \le 2R \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'|$, vagyis $\mathscr{P}_1$ disztribúció és legfeljebb elsőrendű.

A klasszikus analízisből jól ismert, hogy az $x \mapsto \log|x|$ függvény lokálisan integrálható $\mathbb{R}$-en, hiszen létezik az $\int_0^1 |\log x|\,dx = -\int_0^1 \log x\,dx$ improprius integrál, mégpedig $-\int_0^1 \log x\,dx = -[x\log x - x]_0^1 = 1$, felhasználva az ugyancsak ismert $x\log x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ összefüggést. Jelölje $T_{\log}$ az $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ halmazon $x \mapsto \log|x|$ hozzárendeléssel értelmezett lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúciót. Ekkor a disztribúció értelemben vett deriválás definíciója szerint $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$
\begin{aligned}
T'_{\log}(\varphi) &= -T_{\log}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\log|x|\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\log(-x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi'(x)\log x\,dx\right) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left([\varphi(x)\log(-x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + [\varphi(x)\log x]_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\varphi(-\varepsilon)\log\varepsilon - 0 + 0 - \varphi(\varepsilon)\log\varepsilon + \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \mathscr{P}_1(\varphi)\right),
\end{aligned}
$$

ahol parciális integrálásokat hajtottunk végre, valamint felhasználtuk, hogy φ kompakt tartójú.

Belátjuk, hogy $\mathscr{P}_1$ rendje nem lehet 0, vagyis szükségképpen elsőrendű, hiszen korábban igazoltuk, hogy legfeljebb elsőrendű. Ha nulladrendű volna, akkor a $K = [-1,1]$ kompakt intervallumhoz létezne $C_K > 0$ valós szám úgy, hogy

$$
|\mathscr{P}_1(\varphi)| \le C_K \cdot \sup_K |\varphi| \tag{18.113}
$$

minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Legyen most $\varphi_\varepsilon \in$ $\in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset [0,1]$, továbbá $0 \le \varphi_\varepsilon \le 1$ és $\varphi_\varepsilon = 1$ az $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ intervallumon. Ekkor

$$
\mathscr{P}_1(\varphi_\varepsilon) \ge \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx = \log(1-\varepsilon) - \log(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \infty,
$$

azonban $|\varphi_\varepsilon| \le 1$ folytán a (18.113) becslésből $|\mathscr{P}_1(\varphi_\varepsilon)| \le C_K$ következik, ami ellentmondás, tehát $\mathscr{P}_1$ rendje szükségképpen 1.

Megmutatjuk, hogy $\mathscr{P}_1$ nem reguláris disztribúció. Valóban, ha $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset (-\infty, 0)$, akkor $\mathscr{P}_1(\varphi) = \int_{-\infty}^0 \varphi(x)/x\,dx = T_{1/x}(\varphi)$. Hasonló lenne igaz a $(0,\infty)$ intervallum esetében is, ezért ha $\mathscr{P}_1$ reguláris lenne, akkor csakis $\mathscr{P}_1 = T_{1/x}$ teljesülhetne, azonban az $x \mapsto 1/x$ függvény nem lokálisan integrálható.

Végezetül legyen $\psi(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, ekkor $(\psi\delta_0)(\varphi) = \delta_0(\psi\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén, tehát $(\psi\delta_0)\mathscr{P}_1 = 0$. Ezenkívül $(\psi\mathscr{P}_1)(\varphi) = \mathscr{P}_1(\psi\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \varphi = T_1(\varphi)$, vagyis $\psi\mathscr{P}_1$ az azonosan 1 függvényhez tartozó reguláris disztribúció, ezért tekinthető az azonosan 1 függvénynek, és így $(\psi\mathscr{P}_1)\delta_0 = \delta_0$. Ez azt jelenti, hogy $(\psi\delta_0)\mathscr{P}_1 \neq (\psi\mathscr{P}_1)\delta_0$.

11.26. Megoldás. Ha $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned}
&\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right)'(\varphi) = -\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right)(\varphi)\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right]_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} - \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\right)\\
&\overset{!}{=} -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\\
&=: -\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^2}\right)(\varphi),
\end{aligned}$$

mert

$$\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} \to \varphi'(0) - \varphi'(0) = 0,$$

ahonnan

$$\varepsilon \to 0 \Longrightarrow |(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\log\varepsilon| \le 2\,\|\varphi'\|_\infty\,\varepsilon\,|\log\varepsilon| \to 0.$$

Tehát

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right)' = -\mathscr{P}\frac{1}{x^2}.$$

18.1. *Megjegyzés.* Általánosabban, a

$$< \mathscr{P}\frac{1}{x^n}, \varphi > := \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k}{x^n}\,dx$$

képlet minden n természetes számra olyan disztribúciót értelmez, amely eleget tesz a

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^n}\right)' = -n\mathscr{P}\frac{1}{x^{n+1}}$$

egyenlőségnek. Valóban, az $n=1$ esetben ezt már tudjuk. Teljes indukcióval folytatva, ha valamely n-re már fennáll ez az egyenlőség, akkor minden $\varphi \in$ $\in \mathscr{D}$-re

$$\begin{aligned}
\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^n}\right)'(\varphi) &= -\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^n}\right)(\varphi)\\
&= -\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{\varphi'(x)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}x^k}{x^n}\,dx\\
&= -\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}}{x^n}\right]_{\varepsilon}^{-\varepsilon}\right.\\
&\qquad\left.+n\int_{|x|<\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}}{x^{n+1}}\,dx\right)\\
&\overset{!}{=} -n\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}}{x^{n+1}}\,dx\\
&= -n\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k}{x^{n+1}}\,dx\\
&= -n\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^{n+1}}\right)(\varphi),
\end{aligned}$$

mert

$$\begin{aligned}
\varphi(x)-\varphi(0)-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1} &= \varphi(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\varphi^j(0)}{j!}x^j\\
&= \frac{\varphi^n(0)}{n!}x^n+o(x^n),\quad x\to 0,
\end{aligned}$$

úgyhogy a $[\cdots]_{\varepsilon}^{-\varepsilon}$ kifejezés $\varepsilon\to 0$ esetén nullához tart.

11.27. Megoldás. Vegyük észre, hogy $|x|^{\alpha}$ integrálható. ha $\varphi\in\mathscr{D}$, akkor

$$\begin{aligned}
&(|x|^{\alpha})'(\varphi) = -\,|x|^{\alpha}(\varphi') = -\int |x|^{\alpha}\varphi'(x)\,dx\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}|x|^{\alpha}\varphi'(x)\,dx\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left([|x|^{\alpha}\varphi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon}+[|x|^{\alpha}\varphi(x)]_{\varepsilon}^{\infty}-\int_{|x|>\varepsilon}\alpha\,|x|^{\alpha-1}(\operatorname{sgn}x)\varphi(x)\,dx\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left((\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\varepsilon^{\alpha}+\int_{|x|>\varepsilon}\alpha\,|x|^{\alpha-1}(\operatorname{sgn}x)\varphi(x)\,dx\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \alpha\,|x|^{\alpha-1}\,(\operatorname{sgn} x)\varphi(x)\;dx,$$

mert $\varepsilon \to 0$ esetén

$$|(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\varepsilon^{\alpha}| \le 2\,\|\varphi'\|_{\infty}\,\varepsilon^{\alpha+1} \to 0.$$

18.2. *Megjegyzés.* Ha $\alpha > 0$, akkor $\alpha\,|x|^{\alpha-1}\,(\operatorname{sgn} x)$ is integrálható, úgyhogy a feladat megoldása a szokásos

$$(|x|^{\alpha})' = \alpha\,|x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} x$$

egyenlőségre egyszerűsödik.

11.28. Megoldás.

a) Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tetszőleges, ekkor parciális integrálást végrehajtva

$$\begin{aligned} -T_r'(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx \\ &= [x\varphi(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx = -T_H(\varphi). \end{aligned}$$

Mivel ez minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén teljesül, ezért $T_r' = T_H$.

b) Minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned} -T_{\mathrm{abs}}'(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,dx \\ &= [x\varphi(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx - [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\operatorname{sgn}(x)\,dx = -T_{\mathrm{sgn}}(\varphi). \end{aligned}$$

c) Minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned} -T_{\mathrm{sgn}}'(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\operatorname{sgn}(x)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx \\ &= [\varphi(x)]_0^{\infty} - [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} = -2\varphi(0) = -2\delta_0(\varphi). \end{aligned}$$

11.29. Megoldás. A 11.49. Állítás alapján egy szakaszonként konstans ugrófüggvény deriváltja az ugrási pontokra koncentrált Dirac-delta disztribúcióknak az ugrások nagyságával vett lineáris kombinációja. Ennek alapján

például az

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \geq 1, \\ 1, & \text{ha } -1 \leq x < 1, \\ 0, & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

függvényre $f' = \delta_{-1} + \delta_1$ disztribúció értelemben.

11.30. Megoldás. Azt kell belátnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$T_u''(\varphi) + T_u(\varphi) = \delta_0(\varphi).$$

Ez valóban teljesül, hiszen

$$\begin{aligned} T_u''(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi''(x) H(x) \sin x \, dx = \int_0^{\infty} \varphi''(x) \sin x \\ &= [\varphi'(x) \sin x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi'(x) \cos x \, dx \\ &= -[\varphi(x) \cos x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x) \sin x \, dx \\ &= \varphi(0) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) H(x) \sin x \, dx = \delta_0(\varphi) - T_u(\varphi). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a feladat állítását beláthattuk volna a 11.51. Állítás felhasználásával, hiszen a sin függvény kielégíti $\mathbb{R}^+$-on az $y'' + y = 0$ közönséges differenciálegyenletet, továbbá $\sin 0 = 0$ és $\sin'(0) = \cos 0 = 1$.

11.31. Megoldás.

A 11.30. Feladat alapján az $u(x) = H(x) \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvényre $u'' + u = \delta_0$ disztribúció értelemben, ahol H a Heaviside-függvényt jelöli. Szükségünk van még az $f'' + f = -g$ közönséges differenciálegyenlet egy y partikuláris megoldására, mert ekkor a linearitás miatt az $u + y$ függvény megfelel a feladat kívánalmainak. Gondoljuk meg, hogy tetszőleges elsőfokú, azaz $y(x) = ax + b$ alakú valós függvényre $y'' = 0$, így $y'' + y = y$, ezért az $y = -g$ választással $y'' + y = -g$ függvény értelemben, tehát disztribúció értelemben is. Ez azt jelenti, hogy az $f(x) = H(x) \sin x + 2 - x$ függvény megfelel a feladat kívánalmainak.

11.32. Megoldás. A 11.51. Állítás alapján az $y'' - 4y = 0$ közönséges differenciálegyenletnek az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldására $y'' - 4y = \delta_0$ teljesül disztribúció értelemben. Az $y'' - 4y = 0$ egyenlet megoldásai $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$ alakúak. A kezdeti feltételből egyértelműen adódik, hogy $c_1 = -1/4$ és $c_2 = 1/4$, tehát az $y(x) = (e^{2x} - e^{-2x})/4$ függvényre $y'' - 4y = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}$-en.

11.33. Megoldás. Szükséges és elégséges, hogy az (a_j) pontsorozatnak ne legyen torlódási pontja az Ω halmaz belsejében. Valóban, ellenkező esetben

az a torlódási pont egy tetszőleges $B(a,r) \subset \Omega$ gömbi környezetéhez található olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvény, amelyre $\varphi = 1$ a $B(a,r)$ halmaz egy nyílt környezetében és $\varphi = 0$ egy nagyobb sugarú $B(a,R) \subset \Omega$ gömbön kívül (ilyen függvény létezését a 3.31. Állítás biztosítja). Ekkor $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_j}(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} 1 = \infty$, tehát az összeg nem definiál valós értékű funkcionált sem. Ha az (a_j) sorozatnak nincs torlódási pontja Ω belsejében, akkor minden Ω-beli kompakt részhalmazban csak véges sok tagja lehet, tehát véges sok Dirac-delta összegéről van szó, és az nyilván disztribúció.

Megjegyezzük, hogy a fentiek alapján az (a_j) sorozatnak lehet torlódási pontja $\partial\Omega$-n, ehhez hasonló példa szerepelt a 11.15. Feladatban.

11.34. Megoldás. A válasz: igen. Legyen $a_j = 1/j$ $(j = 1{,}2\dots)$, és tekintsük az $u = \delta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_j}/2^j$ formális összeget. Gondoljuk meg, hogy tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ függvényt véve

$$|u(\varphi)| \le |\varphi(0)| + \frac{1}{2}|\varphi(1)| + \ldots \le \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 2 \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|,$$

tehát u értelmes $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funkcionál. Sőt, vegyük észre, hogy lineáris is, hiszen $u(\varphi_1 + \varphi_2) = u(\varphi_1) + u(\varphi_2)$, mert nemnegatív tagú sorok tetszőlegesen átrendezhetők. A fenti becslésből az is következik, hogy u nulladrendű. Végül gondoljuk meg (a Dirac-delta disztribúció esetéhez hasonlóan, lásd a 11.13. Feladatot), hogy $\operatorname{supp} u = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots\right\}$, amely korlátos és zárt halmaz, tehát kompakt, sőt megszámlálható is. A 11.11. Feladat alapján nem üres megszámlálható tartójú disztribúció nem lehet reguláris, tehát u sem lehet reguláris. Ennek egy másik lehetséges bizonyítása, ha úgy járunk el, mint ahogy a Dirac-delta disztribúció esetében, lásd a 11.14. Feladatot.

11.35. Megoldás. Legyen $a \in K \subset \Omega$, ahol K kompakt halmaz (ilyen van, vegyük például egy megfelelően kis sugarú gömb lezártját). Az u disztribúció nulladrendű volta azt jelenti, hogy létezik $C_K > 0$ valós szám, amelyre $|u(\varphi)| \le C_K \sup_K |\varphi|$, ha $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Legyen $(\psi_j) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ sorozat, amelyre $\operatorname{supp} \psi_j \subset B(a,1/j)$, továbbá $\psi_j(x) = 1$, ha $x \in B(a,1/(2j))$ és $x \ne a$ esetén $\psi_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} 0$ (ehhez hasonló függvénysorozatot konstruáltunk a 11.14. Feladat első megoldásában). Elég nagy j-re $B(a,1/j) \subset K$, és így $\psi_j = 1$ a $\operatorname{supp} u = \{a\}$ halmaz egy környezetében, ezért a 11.31. Állítás alkalmazásával $|u(\varphi)| = |u(\varphi\psi_j)| \le C_K \sup_K |\varphi\psi_j| \le C_K |\varphi(a)|$. Azt kaptuk tehát, hogy $|u(\varphi)| \le C_K |\varphi(a)|$ minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Ebből következően, ha $\varphi(a) = 0$, akkor $u(\varphi) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $u(\varphi)$ csak $\varphi(a)$-tól függ, így u linearitása és folytonossága miatt szükségképpen $u(\varphi) = C\varphi(a)$. Ez minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre teljesül, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Mivel $K \subset \Omega$ tetszőleges kompakt halmaz, ezért $u(\varphi) = C\varphi(a)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén fennáll (ugyanazzal a C konstanssal).

11.36. Megoldás. Ha létezik v, amelyre $v' = u$, akkor a deriválás definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén $u(\varphi) = v'(\varphi) = -v(\varphi')$, tehát szükségképpen $v(\varphi') = -u(\varphi)$. Ez azt jelenti, hogy v értéke meg van határozva azokon a $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényeken, amelyek előállnak egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény deriváltjaként. Az ilyen függvények éppen azok, amelyekre $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$, hiszen ekkor az $\int_{-\infty}^{x} \psi$ integrálfüggvény kompakt tartójú, végtelen sokszor differenciálható és a deriváltja φ. Összefoglalva tehát, amennyiben $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ és $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$, akkor minden $C \in \mathbb{R}$ esetén

$$v(\psi) = -u\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \psi\right). \tag{18.114}$$

Kérdés, hogy a többi függvényen milyen értéket kell v-nek felvennie. Válasszunk egy tetszőleges $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$. Ekkor minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény felírható

$$\varphi = \psi + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \chi$$

alakban, ahol

$$\int_{\mathbb{R}} \psi = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{\mathbb{R}} \chi - \int_{\mathbb{R}} \varphi = 0.$$

Ezért a (18.114) összefüggés alapján

$$\begin{aligned} v(\varphi) &= v(\psi) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) v(\chi) = -u\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \psi\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) v(\chi) \\ &= -u\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{-\infty}^{x} \chi\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) v(\chi). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy v szükségképpen az alábbi alakban írható fel:

$$v(\varphi) = -u\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{-\infty}^{x} \chi\right) + T_c(\varphi),$$

ahol c alkalmas (χ választásától függő) konstans. Nyilvánvaló, hogy ekkor v jól definiált, lineáris, és mivel u folytonos, ezért v is, valamint a konstrukció alapján $v'(\varphi) = -v(\varphi') = u(\varphi)$. Az is világos, hogy ha $v' = 0$, azaz $u = 0$, akkor $v = T_c$, tehát konstans függvényhez tartozó reguláris disztribúció. Ebből következően, ha $v_1' = v_2' = u$, vagyis $(v_1 - v_2)' = 0$, akkor $v_1 - v_2$ konstans függvényhez tartozó reguláris disztribúció.

11.37. Megoldás. Ha u rendje k, akkor minden $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmazhoz létezik $c_K > 0$ szám úgy, hogy

$$|u(\varphi)| \le c_K \cdot \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right|$$

minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Ebből következően minden ilyen φ függvényre

$$|u'(\varphi)| = |u(\varphi')| \le c_K \cdot \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left|\varphi^{(j+1)}\right| \le c_K \cdot \sum_{j=0}^{k+1} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right|,$$

tehát u' rendje legfeljebb $k+1$. Másrészt a 11.36. Feladat megoldásában foglaltak alapján alkalmas c konstanssal

$$u(\varphi) = -u'\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{-\infty}^{x} \chi\right) + T_c(\varphi).$$

Ha u' rendje legfeljebb k lenne, akkor

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &\le c_K \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left| \left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{-\infty}^{x} \chi\right)^{(j)} \right| \\ &\quad + |c| \operatorname{diam} K \sup_K |\varphi| \\ &\le |c| \operatorname{diam} K \sup_K |\varphi| + c_K \sum_{j=0}^{k-1} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right| \\ &\quad + c_K \operatorname{diam} K \sup_K |\varphi| C(\chi), \end{aligned} \tag{18.115}$$

ahol

$$C(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi| + \sum_{j=0}^{k-1} \sup_K \left|\chi^{(j)}\right|$$

adott konstans. Azonban a (18.115) becslés ekkor azt mutatja, hogy u rendje legfeljebb $k-1$, ami lehetetlen. Következésképpen u' rendje $k+1$. Megjegyezzük, hogy a $k=0$ esetben a (18.115) becslésben a szumma hiányzik, és így nem jutunk ellentmondásra. Ekkor az állítás nem is igaz, hiszen például a 0 disztribúció deriváltja önmaga, tehát a rend nem növekszik. A Dirac-delta nulladrendű disztribúció deriváltja viszont a 11.13. Feladat alapján elsőrendű.

11.38. Megoldás.

a) A 11.22. Feladat alapján

$$(x-1)T = 0 \Longleftrightarrow T = c\delta_1, \quad c \in \mathbb{C}.$$

b)

$$x(x-1)T = 0 \Longleftrightarrow (x-1)(xT) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\iff xT = c_1\delta_1 && \text{a) miatt}\\
&\iff xT = c_1 x\delta_1 && \text{a 11.19. Feladat szerint}\\
&\iff x(T - c_1\delta_1) = 0\\
&\iff T - c_1\delta_1 = c_2\delta && \text{a 11.22. Feladat szerint}\\
&\iff T = c_1\delta_1 + c_2\delta, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
x^2T = 0 &\iff x(xT) = 0\\
&\iff xT = c_1\delta && \text{a 11.22. Feladat szerint}\\
&\iff xT = -c_1 x\delta' && \text{a 11.20. Feladat szerint}\\
&\iff x(T + c_1\delta') = 0\\
&\iff T + c_1\delta' = c_2\delta && \text{a 11.22. Feladat szerint}\\
&\iff T = -c_1\delta' + c_2\delta, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
xT = 1 &\iff xT = x\mathscr{P}\frac{1}{x} && \text{a 11.25. Feladat szerint}\\
&\iff x\left(T - \mathscr{P}\frac{1}{x}\right) = 0\\
&\iff T - \mathscr{P}\frac{1}{x} = c\delta, \quad c \in \mathbb{C} && \text{a 11.22. Feladat szerint}\\
&\iff T = \mathscr{P}\frac{1}{x} + c\delta, \quad c \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

18.3. *Megjegyzés.* Több okoskodást egyszerűsíthettünk volna a szuperpozíció elve alapján: egy inhomogén egyenlet általános megoldása egy tetszőlegesen választott partikuláris megoldásnak és a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásának az összege. Ezt az elvet fel fogjuk használni a következő feladat megoldása során.

11.39. Megoldás.

a)

$$\begin{aligned}
T' - \alpha T = 0 &\iff e^{-\alpha x}(T' - \alpha T) = 0\\
&\iff (e^{-\alpha x}T)' = 0\\
&\iff e^{-\alpha x}T = c\\
&\iff T = ce^{\alpha x}, \quad c \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

b)

$$T'' - 3T' + 2T = 0 \iff S' - 2S = 0 \quad \text{ahol} \quad S := T' - T$$
$$\iff T' - T = ce^{2x}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Vegyük észre, hogy $T = ce^{2x}$ egy partikuláris megoldás. Minthogy a $T' - T = 0$ homogén egyenlet általános megoldása de^x a) miatt, a szuperpozíció elve alapján az eredeti feladat általános megoldása

$$T = ce^{2x} + de^x, \quad c, d \in \mathbb{C}.$$

c) Az egyenletet formálisan átírva a $T' = \frac{1}{x}$ alakba, megsejthető, hogy az eredeti egyenletnek a $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ disztribúció minden „primitív függvénye", például $\log|x|$ is megoldás.

Egy alternatív megoldás a következő, ahol felhasználjuk az $x\mathscr{P}\frac{1}{x} = 1$ egyenlőséget (lásd a 11.25. Feladatot):

$$xT' = 1 \iff x\left(T' - \mathscr{P}\frac{1}{x}\right) = 0 \qquad \iff T' = \mathscr{P}\frac{1}{x} + c\delta$$
$$\iff T' = (\log|x| + cH)' \qquad \iff T = \log|x| + cH + d.$$

d) Alkalmazva a 11.38. Feladat b) részét,

$$x(x-1)T' = 0 \iff T' = c_1\delta_1 + c_2\delta$$
$$\iff T = c_1H(x-1) + c_2H(x) + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}.$$

e) Alkalmazva a 11.38. Feladat a) részét $(x-1)$ helyett $(x+1)$-gyel,

$$(x+1)T'' = 0 \iff T'' = c_1\delta_{-1}$$
$$\iff (T - c_1(x+1)H(x+1))'' = 0$$
$$\iff (T - c_1(x+1)H(x+1))' = c_2$$
$$\iff (T - c_1(x+1)H(x+1) - c_2x)' = 0$$
$$\iff T - c_1(x+1)H(x+1) - c_2x = c_3$$
$$\iff T = c_1(x+1)H(x+1) + c_2x + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}.$$

f) Alkalmazva a 11.38. Feladat c) részét x^2 helyett $(x+1)^2$-tel,

$$(x+1)^2T'' = 0 \iff T'' = c_1\delta'_{-1} + c_2\delta_{-1}$$
$$\iff (T - c_1H(x+1) - c_2(x+1)H(x+1))'' = 0$$
$$\iff T - c_1H(x+1) - c_2(x+1)H(x+1) = c_3x + c_4$$
$$\iff T = c_1H(x+1) + c_2(x+1)H(x+1) + c_3x + c_4,$$
$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}.$$

11.40. Megoldás. Tekintsük a

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{a_k}, \quad n = 1,2,\dots$$

részletösszegeket. Tetszőlegesen rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre a $(T_n(\varphi))$ számsorozat konstans valamilyen indextől kezdve, mert φ kompakt tartójú, és $|a_k| \to +\infty$. Értelmezhető tehát a

$$T(\varphi) := \lim T_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi(a_k).$$

lineáris forma, és csak a nullabeli folytonosság igazolása marad hátra. Ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R})} 0$, akkor van olyan N természetes szám, hogy $\varphi_j(a_k) = 0$ minden j-re és minden $k > N$-re. Következésképpen

$$|T(\varphi_j)| = \left| \sum_{k=1}^{N} c_k (\varphi_j(a_k) \right| \le \sum_{k=1}^{N} |c_k| \cdot |\sup| \varphi_j \to 0.$$

11.41. Megoldás. Ha $\varphi \in \mathscr{D}$, akkor

$$< nf(nx), \varphi(x) >= \int nf(nx)\varphi(x)\, dx = \int f(y)\varphi(y/n)\, dy$$
$$\to \int f(y)\varphi(0)\, dy = \varphi(0) = \delta(\varphi),$$

mert φ korlátossága miatt alkalmazhatjuk Lebesgue dominált konvergencia tételét.

18.4. *Megjegyzés.* A feladat szerint δ az $L^1(\mathbb{R})$ altér lezárásához tartozik $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben. Ennél sokkal több is igaz: $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ sűrű lineáris altere $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-nek minden n-re.

11.42. Megoldás. Azt kell belátni, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre $\varepsilon \to 0+$ esetén $T_{g_\varepsilon}(\varphi) \to \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. Vegyük észre, hogy $g_\varepsilon(x) = (\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\frac{x}{\varepsilon}))'$, így parciális integrálást végrehajtva

$$\begin{aligned} T_{g_\varepsilon}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} \varphi(x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) \right]_{x=-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi'(x)\, dx \qquad (18.116) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi'(x)\, dx - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi'(x)\, dx. \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon \to 0+$ esetén $\operatorname{arctg}(\frac{x}{\varepsilon}) \to \frac{\pi}{2}$, ha $x > 0$, és $\operatorname{arctg}(\frac{x}{\varepsilon}) \to -\frac{\pi}{2}$, ha $x < 0$, továbbá φ kompakt tartójú, valamint arctg korlátos, ezért a Lebesgue-tétel alapján a (18.116) összefüggésből határátmenettel

$$\lim_{\varepsilon \to +} T_{g_\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \varphi' - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \varphi' = \frac{1}{2}\delta_0(\varphi) + \frac{1}{2}\delta_0(\varphi) = \delta_0(\varphi)$$

adódik.

11.43. Megoldás. A bizonyítás megegyezik a végtelen sokszor differenciálható függvényekre vonatkozó analóg állítás bizonyításával.

Nyilvánvalóan $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ függvényekre igaz, hogy $\operatorname{supp} \partial^\alpha \varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$, hiszen egy nyílt halmazon 0 függvény deriváltja is 0. Áttérve disztribúciókra, $\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$, így $\operatorname{supp} \partial^\alpha u \subset \operatorname{supp} u$, hiszen ha $u = 0$ egy nyílt halmazon, akkor $\operatorname{supp} \partial^\alpha \varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$ miatt szükségképpen $\partial^\alpha u = 0$ is teljesül azon a nyílt halmazon.

Az egyváltozós $f = 1$ függvényre $f' = 0$, így $\emptyset = \operatorname{supp} f' \subsetneq \operatorname{supp} f = \Omega$ függvény értelemben, így disztribúció értelemben is (a megfelelő reguláris disztribúciókra). Egyenlőségre tekintsük $\Omega = \mathbb{R}$ esetén az $f(x) = e^x$ ($x \in \in \Omega$) függvényt, amelyre $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}$, valamint $(e^x)^{(j)} = e^x$, tehát $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} f^{(j)}$ minden j-re függvény értelemben, és ezért disztribúció értelemben is (a megfelelő reguláris disztribúciókra).

11.44. Megoldás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, ekkor a disztribúciók deriválásának definíciójából f tartójának figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\partial_{12} T_f(\varphi) = T_f(\partial_{12}\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\,\partial_{12}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \partial_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \partial_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2}\varphi(0,0) + \frac{1}{2}\varphi(0,0) = \varphi(0,0) = \delta_{(0,0)}(\varphi).
\end{aligned}$$

11.45. Megoldás. Mivel $\partial_{21} T_f = \partial_{12} T_f$, ezért $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén f tartójának figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\partial_{21} T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} f\,\partial_{12}\varphi &= \int_0^1\int_0^1 \partial_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 (\partial_2\varphi(1,y) - \partial_2\varphi(0,y))\,dy \\
&= \varphi(1,1) - \varphi(1,0) - \varphi(0,1) + \varphi(0,0)
\end{aligned}$$

$$= (\delta_{(1,1)} - \delta_{(1,0)} - \delta_{(0,1)} + \delta_{(0,0)})(\varphi).$$

11.46. Megoldás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, ekkor $\partial_1^2 T_f(\varphi) = T_f(\partial_1^2\varphi)$, ezért

$$\begin{aligned}\partial_1^2 T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} f\partial_1^2\varphi &= \int_{-1}^{0}\int_{-y-1}^{y+1} \partial_1^2\varphi(x,y)\,dx\,dy \\ &\quad + \int_0^1\int_{y-1}^{1-y} \partial_1^2\varphi(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-1}^{0} (\partial_1\varphi(y+1,y) - \partial_1\varphi(-y-1,y))\,dy \\ &\quad + \int_0^1 (\partial_1\varphi(1-y,y) - \partial_1\varphi(y-1,y))\,dy.\end{aligned}$$

Hasonló módon

$$\begin{aligned}\partial_2^2 T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} f\partial_2^2\varphi &= \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1} \partial_2^2\varphi(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1\int_{x-1}^{1-x} \partial_2^2\varphi(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} (\partial_2\varphi(x,x+1) - \partial_2\varphi(x,-x-1))\,dx \\ &\quad + \int_0^1 (\partial_2\varphi(x,1-x) - \partial_2\varphi(x,x-1))\,dx \\ &= \int_0^1 (\partial_2\varphi(y-1,y) - \partial_2\varphi(-y-1,y))\,dy \\ &\quad + \int_{-1}^{0} (\partial_2\varphi(1-y,y) - \partial_2\varphi(y+1,y))\,dy.\end{aligned}$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned}\partial_1^2 T_f(\varphi) - \partial_2^2 T_f(\varphi) = &\int_{-1}^{0} (\partial_1\varphi(y+1,y) + \partial_2\varphi(y+1,y))\,dy \\ &+ \int_{-1}^{0} (-\partial_1\varphi(-y-1,y) + \partial_2\varphi(-y-1,y))\,dy \\ &- \int_0^1 (-\partial_1\varphi(1-y,y) + \partial_2\varphi(1-y,y))\,dy \\ &- \int_0^1 (\partial_1\varphi(y-1,y) + \partial_2\varphi(y-1,y))\,dy.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\int_{-1}^{0} (\partial_1\varphi(y+1,y) + \partial_2\varphi(y+1,y))\,dy \\ = \int_{-1}^{0} \frac{d}{dy}\varphi(y+1,y)\,dy = \varphi(1,0) - \varphi(0,-1),$$

hasonlóan

$$\int_{-1}^{0} (-\partial_1\varphi(-y-1,y) + \partial_2\varphi(-y-1,y))\,dy = \varphi(-1,\,0) - \varphi(0,\,-1),$$
$$\int_{0}^{1} (-\partial_1\varphi(1-y,y) + \partial_2\varphi(1-y,y))\,dy = \varphi(0,\,1) - \varphi(1,\,0),$$
$$\int_{0}^{1} (\partial_1\varphi(y-1,y) + \partial_2\varphi(y-1,y))\,dy = \varphi(0,\,1) - \varphi(-1,\,0),$$

így végül

$$\partial_1^2 T_f(\varphi) - \partial_2^2 T_f(\varphi) = 2(\varphi(1,\,0) - \varphi(0,\,1) + \varphi(-1,\,0) - \varphi(0,\,-1)) \\ = 2(\delta_{(1,\,0)} - \delta_{(0,\,1)} + \delta_{(-1,\,0)} - \delta_{(0,\,-1)})(\varphi).$$

11.47. Megoldás.

a) Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges, ekkor

$$(-1)^n\partial_1\cdots\partial_n\tilde{H}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x)\partial_1\cdots\partial_n\varphi(x)\,dx \\ = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \partial_1\cdots\partial_n\varphi(x)\,dx_1\ldots\,dx_n \\ = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty [\partial_2\cdots\partial_n\varphi(x)]_{x_1=0}^{\infty}\,dx_2\ldots\,dx_n \\ = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \partial_2\cdots\partial_n\varphi(0,x_2,\ldots,x_n)\,dx_2\ldots\,dx_n \\ = \cdots = (-1)^n\varphi(0,\ldots,0) = (-1)^n\delta_0(\varphi).$$

b) Az előbbiekhez hasonlóan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén

$$(-1)^n\partial_1\cdots\partial_n r(\varphi) \\ = \int_{\mathbb{R}^n} r(x)\partial_1\cdots\partial_n\varphi(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1 \dots x_n \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \dots\, dx_n \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[x_1 \dots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\right]_{x_1=0}^\infty dx_2 \dots\, dx_n \\
&\qquad - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty x_2 \dots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1\, dx_2 \dots\, dx_n \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_2 \dots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \dots\, dx_n \\
&= \cdots = (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = (-1)^n T_{\check{H}}(\varphi).
\end{aligned}
$$

11.48. Megoldás.

a) Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ és $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Ekkor (mivel K kompakt, így korlátos, ezért) létezik $R > 0$ úgy, hogy a K halmaz benne van az origó középpontú R sugarú körlapban. Ezért

$$
|u(\varphi)| \le \int_0^\infty |\varphi(0,y)|\, dy \le \int_0^R \sup_K |\varphi|\, dy \le R \cdot \sup_K |\varphi|,
$$

vagyis u nulladrendű disztribúció.

b) A disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján

$$
\partial_2 u(\varphi) = -u(\partial_2 \varphi) = -\int_0^\infty \partial_2 \varphi(0,y)\, dy = \varphi(0,0) = \delta_{(0,0)}\varphi.
$$

c) Vegyük észre, hogy $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ esetén minden rögzített y-ra

$$
\begin{aligned}
\varphi(0,y) &= -\left[\varphi(x,y)\right]_{x=0}^\infty = -\int_0^\infty \partial_x \varphi(x,y)\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^\infty H(x) \partial_x \varphi(x,y)\, dx,
\end{aligned}
$$

ahol H az egydimenziós Heaviside-függvény. Ennek alapján

$$
\begin{aligned}
u(\varphi) &= \int_0^\infty \varphi(0,y)\, dy = \int_{-\infty}^\infty H(y) \varphi(0,y)\, dy \\
&= -\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty H(y) H(x) \partial_x \varphi(x,y)\, dx\, dy = \partial_1 T_f(\varphi),
\end{aligned}
$$

ahol $f(x,y) = H(x)H(y)$. Ez azt jelenti, hogy u az f függvényhez tartozó reguláris disztribúció első változó szerinti deriváltja.

11.49. Megoldás. Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ és $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Ekkor (mivel K kompakt, így korlátos, ezért) létezik $R > 0$ úgy, hogy a K halmaz benne van az origó középpontú R sugarú körlapban, így

$$|u(\varphi)| \le \int_0^\infty |\varphi(x,-x)|\,dx \le \int_0^R \sup_K |\varphi|\,dx = R \cdot \sup_K |\varphi|,$$

vagyis u nulladrendű disztribúció. A disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$\begin{aligned}\partial_1 u(\varphi) - \partial_2 u(\varphi) &= -(u(\partial_1\varphi) - u(\partial_2\varphi)) \\ &= -\int_0^\infty (\partial_1\varphi(x,-x) - \partial_2\varphi(x,-x))\,dx \\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{dx}\varphi(x,-x)\,dx = \varphi(0,0) = \delta_{(0,0)}\varphi.\end{aligned}$$

11.50. Megoldás. Az, hogy az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció nem függ a j-edik változótól, azt jelenti, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén az alábbi hozzárendeléssel értelmezett $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konstans:

$$\Phi(h) := u(x \mapsto \varphi(x + he_j) - \varphi(x)),$$

ahol $e_j := (0,\dots,0,1,0\dots,0)$ a j-edik bázisvektor. Ez természetesen ekvivalens azzal, hogy Φ' azonosan 0. A következőkben megmutatjuk, hogy

$$\Phi'(h) = \partial_j u(x \mapsto \varphi(x + he_j)).$$

Legyen $0 < \delta < 1$, ekkor a linearitás folytán

$$\begin{aligned}&\frac{\Phi(h+\delta) - \Phi(h)}{\delta} \\ &= \frac{1}{\delta}\big(u(x \mapsto \varphi(x + (h+\delta)e_j) - \varphi(x)) - u(x \mapsto \varphi(x + he_j) - \varphi(x))\big) \\ &= u\left(x \mapsto \frac{\varphi(x + (h+\delta)e_j) - \varphi(x + he_j)}{\delta}\right). \qquad (18.117)\end{aligned}$$

Legyen φ és h rögzített, valamint

$$\tilde\varphi_\delta(x) := \frac{\varphi(x + (h+\delta)e_j) - \varphi(x + he_j)}{\delta}.$$

Vegyük észre, hogy a Lagrange-középértéktétel miatt létezik $h < \xi_\delta < h + \delta$ úgy, hogy

$$\tilde\varphi_\delta(x) = \partial_j\varphi(x + he_j + \xi_\delta e_j). \qquad (18.118)$$

Ebből következően minden $0 < \delta < 1$ esetén $\operatorname{supp} \tilde{\varphi}_\delta \subset \overline{\operatorname{supp} \varphi + B(0, 1 + |h|)}$, amely kompakt halmaz. Ezen a kompakt halmazon $\partial_j \varphi$ folytonos, tehát Heine tétele miatt egyenletesen is folytonos, ezért $\delta \to 0+$ esetén

$$\partial_j \varphi(x + he_j + \xi_\delta e_j) \to \partial_j \varphi(x + he_j) \qquad \text{(rögzített } h \text{ mellett)}$$

egyenletesen $\mathbb{R}^n$-en. (A $\delta \to 0-$ eset hasonlóan tárgyalható.) Az előbbi gondolatmenetet φ helyett $\partial^\alpha \varphi$-re alkalmazva, ez végeredményben (18.118) szerint azt jelenti, hogy $\delta \to 0$ esetén $\tilde{\varphi}_\delta \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} (x \mapsto \partial_j \varphi(x + he_j))$, így az u disztribúció volta folytán a (18.117) egyenlet alapján

$$\Phi'(h) = u(x \mapsto \partial_j \varphi(x + he_j)) = \partial_j u(x \mapsto \varphi(x + he_j)).$$

A most bizonyított összefüggésből azonnal következik, hogy Φ' pontosan akkor azonosan 0, azaz u nem függ a j-edik változótól, ha $\partial_j u = 0$.

11.51. Megoldás. A disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén $\partial_j T_f(\varphi) = -T_f(\partial_j \varphi) = -\int_\Omega f \partial_j \varphi$. A feltételekből következően f_-, f_+ folytonos függvények ∂U-n, hiszen f deriváltjai folytonosan kiterjednek $\overline{U}$-ra és $\Omega \setminus U$-ra. Jelölje ν az U tartományból kifelé mutató egységnormálist, ekkor a Gauss–Osztrogradszkij-tételből következően

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f \partial_j \varphi &= \int_U f \partial_j \varphi + \int_{\Omega \setminus U} f \partial_j \varphi \\
&= \int_U (\partial_j (f\varphi) - \varphi \partial_j f) + \int_{\Omega \setminus U} (\partial_j (f\varphi) - \varphi \partial_j f) \\
&= \int_{\partial U} f_-(\varphi) \nu_j \, d\sigma - \int_U \varphi \partial_j f - \int_{\partial U} f_+(\varphi) \nu_j \, d\sigma - \int_{\Omega \setminus U} \varphi \partial_j f \\
&= -T_{\partial_j f}(\varphi) + \int_{\partial U} (f_- - f_+)(\varphi) \nu_j \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Ennek alapján

$$\partial_j T_f(\varphi) = T_{\partial_j f}(\varphi) - \int_{\partial U} (f_- - f_+)(\varphi) \nu_j \, d\sigma. \tag{18.119}$$

Megjegyezzük, hogy formálisan

$$\int_{\partial U} (f_+ - f_-)(\varphi) \nu_j \, d\sigma = (f_+ - f_-) \delta_{\partial U}(\varphi),$$

ahol

$$(f_+ - f_-) \delta_{\partial U}(\varphi) := \int_{\partial U} (f_+ - f_-) \varphi \nu_j \, d\sigma \tag{18.120}$$

az úgynevezett $(f_+ - f_-)$ sűrűségű egyszerű réteg. Így (18.119) a

$$\partial_j T_f = T_{\partial_j f} + (f_+ - f_-)\delta_{\partial U}$$

alakban írható, amely általánosítja a 11.49. Állításban szereplő formulát.

11.52. Megoldás. A direkt szorzat definíciója alapján tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ függvényre

$$(\delta_a \times \delta_b)(\varphi) = \delta_a\{x \mapsto \delta_b[y \mapsto \varphi(x,y)]\} = \delta_b\{y \mapsto \varphi(a,y)\} = \varphi(a,b),$$

tehát $\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Másrészt a 11.67. Állítás alapján

$$\begin{aligned}(\delta_a \times T_f)(\varphi) &= \delta_a\{x \mapsto T_f[y \mapsto \varphi(x,y)]\} = T_f\{y \mapsto \delta_a[x \mapsto \varphi(x,y)]\} \\ &= T_f\{y \mapsto \varphi(a,y)\} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\varphi(a,y)\,dy.\end{aligned}$$

11.53. Megoldás. Először megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{R}^{n+m} \setminus (\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v) \subset \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v),$$

amiből következik, hogy $\operatorname{supp}(u \times v) \subset \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Tegyük fel, hogy $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus (\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v)$. Ekkor feltehető, hogy például $x_0 \notin \operatorname{supp} u$, így x_0-nak van olyan $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt környezete, amelyen $u = 0$. Tekintsük az $U_{x_0} \times \mathbb{R}^m$ halmazt, amely nyilván nyílt környezete (x_0, y_0)-nak, továbbá minden $\varphi \in \mathscr{D}(U_{x_0} \times \mathbb{R}^m)$ függvényre az $x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]$ hozzárendeléssel definiált függvény tartója része U_{x_0}-nak, ezért

$$u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\} = 0.$$

Ebből következően $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$.

A másik irányú tartalmazáshoz legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $(x_0, y_0) \in \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Ekkor x_0-nak minden U nyílt környezetéhez található olyan $\varphi_U \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_U \subset U$ és $u(\varphi_U) \neq 0$. Hasonlóan, y_0-nak minden V környezetéhez van olyan $\varphi_V \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_V \subset V$ és $v(\varphi_V) \neq 0$. Az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$ feltétel miatt választhatunk olyan U_{x_0} és V_{y_0} környezeteket, amelyre $(U_{x_0} \times V_{y_0}) \cap \operatorname{supp}(u \times v) = \emptyset$. Ekkor a $\varphi(x,y) = \varphi_{U_{x_0}}(x)\varphi_{V_{y_0}}(y)$ függvényre $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$,

$$\operatorname{supp} \varphi \subset (U_{x_0} \times V_{y_0}),$$

ezért a direkt szorzat definíciója alapján kapjuk, hogy

$$0 = (u \times v)(\varphi) = u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi_{U_{x_0}}(x)\varphi_{V_{y_0}}(y)]\}$$

$$= u(x \mapsto \varphi_{U_{x_0}}(x) v(\varphi_{V_{y_0}})) = u(\varphi_{U_{x_0}}) v(\varphi_{V_{y_0}}) \neq 0,$$

ami ellentmondás.

11.54. Megoldás. A válasz: nem. A 11.53. Feladat alapján $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$, tehát a direkt szorzatként előálló disztribúciók tartója is előáll direkt szorzat alakban. Azonban tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\delta_a + \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció tartója az $\{a, b\}$ halmaz (ezt hasonlóan láthatjuk be, mint ahogy a Dirac-delta disztribúció esetében, lásd a 11.13. Feladatot), amely nem áll elő direkt szorzat alakban.

11.55. Megoldás. A válasz: igen. A 11.53. Feladat alapján $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Ebből következően, ha $u \times v = 0$, akkor $\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v = \emptyset$, vagyis $\operatorname{supp} u = \emptyset$ vagy $\operatorname{supp} v = \emptyset$, tehát $u = 0$ vagy $v = 0$.

11.56. Megoldás. Disztribúciók direkt szorzatának és a 11.63. Tétel bizonyításában elmondottak alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ esetén

$$\begin{aligned} \partial_y^\beta (u \times v)(\varphi) &= (-1)^{|\beta|} (u \times v)(\partial_y^\beta \varphi) = (-1)^{|\beta|} u\{x \mapsto v[y \mapsto \partial_y^\beta \varphi(x, y)]\} \\ &= u\{x \mapsto \partial^\beta v[y \mapsto \varphi(x, y)]\} = (u \times (\partial^\beta v))(\varphi). \end{aligned}$$

A $\partial_x^\alpha (u \times v) = (\partial^\alpha u) \times v$ összefüggés teljesen hasonlóan igazolható.

11.57. Megoldás. A 11.67. Állítás alapján nyilván elég az egyik konvergenciát bizonyítanunk. Tegyük fel, hogy $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$, ekkor azt kell belátni, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ esetén $(u_j \times v)(\varphi) \to (u \times v)(\varphi)$, azaz

$$u_j\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x, y)]\} \to u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x, y)]\}.$$

A 11.63. Tételből következően $x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, így a fenti konvergencia az $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ konvergencia definíciója alapján adódik.

11.58. Megoldás. Világos, hogy az $(y, z) \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y + z)$ függvény végtelen sokszor differenciálható. Belátjuk, hogy kompakt tartójú is. Valóban, az említett függvény csak akkor nem lehet egyenlő 0-val, ha $y \in \operatorname{supp} \psi$, $z \in \operatorname{supp} \chi$ és $y + z \in \operatorname{supp} \varphi$. Ez azt jelenti, hogy

$$y \in \operatorname{supp} \psi \cap (\operatorname{supp} \varphi - \operatorname{supp} \chi) = \bigcup_{w \in \operatorname{supp} \varphi} (\operatorname{supp} \psi \cap (w - \operatorname{supp} \chi)),$$

amely egy korlátos halmaz, hiszen rögzített w esetén $\operatorname{supp} \psi \cap (w - \operatorname{supp} \chi)$ egy féltér és annak normálisával párhuzamos tengelyű, de ellentétes irányú konvex körkúp metszete, tehát korlátos, és $w \in \operatorname{supp} \varphi$, amely ugyancsak korlátos. Amennyiben y korlátos halmazt fut be, akkor $z = \operatorname{supp} \varphi - y$ is korlátos halmazt jár be. Mindezek alapján az $(y, z) \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y + z)$ függvény tartója korlátos, tehát $\mathbb{R}^{2n}$-ben kompakt.

Innen a bizonyítás a 11.85. Állításához hasonlóan történik a 11.31. Állítás, a $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ konvergencia és a Leibniz-szabály felhasználásával. Mindezek végiggondolását az Olvasóra bízzuk.

11.59. Megoldás. Disztribúciók konvolúciójának 11.82. Definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(\delta_a * \delta_b)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (\delta_a \times \delta_b)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)].$$

A 11.52. Feladat megoldásában igazoltuk, hogy $\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)}$, így a $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ konvergencia felhasználásával kapjuk, hogy

$$(\delta_a * \delta_b)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \zeta_k(a,b)\varphi(a+b) = \varphi(a+b) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

tehát $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Hasonlóan, a 11.52. Feladat alapján

$$(\delta_a \times T_f)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(a,y))\,dy \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

ezért a $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ konvergencia figyelembevételével

$$(\delta_a * T_f)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\zeta_k(a,z)\varphi(a,z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(a+z)\,dz.$$

11.60. Megoldás. A bizonyítás a függvények körében értelmezett konvolúcióra vonatkozó analóg állítás bizonyításához hasonlóan történik, valamint a példák is ennek megfelelően adódnak.

Megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v} \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(u * v),$$

és így a komplementerek halmazokra $\operatorname{supp}(u*v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$ következik. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$, ekkor x-nek van olyan U_x környezete, hogy $U_x \cap \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v} = \emptyset$. Ha $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$, akkor a konvolúció definíciója alapján

$$(u * v)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)].$$

A 11.53. Feladat szerint $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$, vagyis az $(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)$ függvényt elég $y \in \operatorname{supp} u$, $z \in \operatorname{supp} v$ esetén tekinteni, ám ekkor $y + z \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v \subset \mathbb{R}^n \setminus U_x \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\varphi$, azaz $(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)$ azonosan 0. Azt kaptuk tehát, hogy ekkor

$$(u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] = 0,$$

ezért $(u*v)(\varphi) = 0$, és így $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(u*v)$.

Szigorú tartalmazáshoz tekintsük például az $u = T_0$ és $v = T_1$ disztribúciókat $\mathbb{R}^n$-en (azaz az azonosan 0 és azonosan 1 függvényekhez tartozó reguláris disztribúciókat). Ekkor a 11.24. Feladat alapján $\operatorname{supp} T_0 = \emptyset$, $\operatorname{supp} T_1 = \mathbb{R}^n$, továbbá nyilvánvalóan az azonosan 0 és azonosan 1 függvényeknek függvény értelemben létezik a konvolúciója, és az azonosan 0 függvénnyel egyenlő. Így a 11.84. Állításból következően $T_0 * T_1 = T_0$, ezért $\operatorname{supp}(T_0 * T_1) = \emptyset \subsetneq \mathbb{R}^n$.

A következőkben megadunk olyan f, g lokálisan integrálható függvényeket, amelyekre $\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$ teljesül, de a $\operatorname{supp}(f * g)$ halmaznak a $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ halmaz valódi részhalmaza. Ekkor a 11.84. Állítás alapján a $\operatorname{supp}(T_f * T_g) = \overline{\operatorname{supp} T_f + \operatorname{supp} T_g}$, de a $\operatorname{supp}(T_f * T_g)$ halmaznak a $\operatorname{supp} T_f + \operatorname{supp} T_g$ valódi részhalmaza. Megjegyezzük, hogy a lezárás szükségessége azon az egyszerű észrevételen múlik, hogy két zárt halmaz összege nem feltétlenül zárt halmaz, azonban a tartóknak $\Omega = \mathbb{R}^n$ esetén zártaknak kell lenniük.

Mindenekelőtt tekintsük a $H_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 1/x\}$ és $H_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = -1/x\}$ halmazokat, és mutassuk meg, hogy $H_1 + H_2 = \mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Ezután vegyünk K_1 és K_2 halmazokat, amelyekre $H_i \in \operatorname{int} K_i$, és a K_i halmaz területe 1 (ilyen van, hiszen a H_1, H_2 halmazok 0 területűek $\mathbb{R}^2$-ben).

Legyen f a K_1, illetve g a K_2 halmaz karakterisztikus függvénye (tehát az a függvény, amelynek értéke 1 az adott halmazon és 0 azon kívül). Világos, hogy $\operatorname{supp} f = K_1$, $\operatorname{supp} g = K_2$, és gondoljuk meg, hogy $K_1 + K_2 = \mathbb{R}^2_+$. Állítjuk, hogy függvény értelemben létezik $f * g$, továbbá $\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\mathbb{R}^2_+} \supsetneq \mathbb{R}^2_+ = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Ehhez egyrészt gondoljuk meg, hogy rögzített $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén az $(x, y) \mapsto f(x, y)g((x_0, y_0) - (x, y))$ függvény tartója a $K_1 \cap ((x_0, y_0) - K_2)$ halmaz. Az $(x_0, y_0) - K_2$ „lefelé álló félhiperbola tartomány" pontosan akkor metszi a K_1 „felfelé álló félhiperbola tartományt", ha K_2-t az x tengely fölé toljuk el, azaz $y_0 > 0$. Ekkor a metszeten az $(x, y) \mapsto f(x, y)g((x_0, y_0) - (x, y))$ értéke 1, így e függvény integrálja $\mathbb{R}^2$-en a metszet területe, ami pozitív, de legfeljebb K_1 területe, vagyis 1. Azt kaptuk tehát, hogy $(f*g)(x, y)$ minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik és legfeljebb 1 az értéke, tehát teljesülnek a 11.72. Definícióban megfogalmazott feltételek, ezért $f*g$ értelmes. Azt is láttuk, hogy $(f*g)(x, y) \neq 0$ csak akkor teljesülhet, ha $y > 0$, így $\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\mathbb{R}^2_+}$, hiszen $y < 0$ esetén minden pontnak van olyan környezete, ahol $f * g$ azonosan 0.

11.61. Megoldás. A 11.94. Állítás, a 11.95. Következmény és a 11.46. Példa alapján

$$(u * v) * w = (T_H * \delta_0') * T_1 = (T_H' * \delta_0) * T_1 = (\delta_0 * \delta_0) * T_1 = T_1.$$

Ugyanakkor

$$u * (v * w) = T_H * (\delta_0' * T_1) = T_H * T_1' = T_H * T_{1'} = T_H * 0 = 0.$$

11.62. Megoldás. A konvolúció definíciója és a 11.66. Következmény alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(T_1 * T_1)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (T_1 \times T_1)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(y+z)\,dy\,dz.$$

Világos, hogy $\varphi = \eta_{0,1}$ esetén, ahol $\eta_{0,1}$ a (11.4) hozzárendeléssel $a = 0$, $r = 1$ esetén definiált függvény,

$$\operatorname{supp}[(y,z) \mapsto \varphi(y+z)] = \big\{(y,z) \in \mathbb{R}^{2n} : |y+z| \le 1\big\}$$

egy végtelen sáv, így könnyen belátható, hogy az $\eta_{0,1}$ függvény integrálja végtelen, azaz $(T_1 * T_1)(\varphi) = \infty$, tehát $T_1 * T_1$ nem értelmezett.

Másrészt viszont, a 11.95. Következmény és a 11.42. Megjegyzés alapján

$$T_1 * (T_1 * \delta_0') = T_1 * T_1' = T_1 * T_{1'} = T_1 * T_0 = T_1 * 0 = 0.$$

11.63. Megoldás. A válasz: nem. Tekintsük például a $\partial^\alpha \delta_a$ és T_1 disztribúciókat, ahol T_1 az azonosan 1 lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúció, valamint $|\alpha| \ge 1$ multiindex. Ezek nyilván nem azonosan nulla disztribúciók, azonban a 11.94. Állítás és a 11.42. Megjegyzés alapján

$$(\partial\delta_a) * T_1 = \delta_a * (\partial^\alpha T_1) = \delta_a * T_{\partial^\alpha 1} = \delta_a * T_0 = \delta_a * 0 = 0.$$

11.64. Megoldás. A 11.91. Állítás folytán $u_j * v = v * u_j$, ezért elég az egyik konvergenciát bizonyítanunk. A 11.85. Állításból következően

$$(u_j * v)(\varphi) = (u_j \times v)[(y,z) \mapsto \psi(z)\varphi(y+z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n}), \quad (18.121)$$

ahol $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} v$ halmazon (e felírás létezésénél felhasználjuk, hogy v kompakt tartójú). A 11.57. Feladat szerint $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ esetén $u_j \times v \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})} u \times v$, így (18.121) alapján $u_j * v \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u * v$.

18.8. A 12. fejezetbeli feladatok megoldásai

12.1. Megoldás. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ a 12.16. Feladat megoldása. Ekkor a 11.70. Állítás folytán $\partial_t^2(u \times h) = (\partial_t^2 u) \times h$, továbbá $j = 1, \dots, n-1$ esetén $\partial_j^2(u \times h) = (\partial_j^2 u) \times h$, $j = n$ esetén pedig (felhasználva a 11.69. Állítást)

$$\partial_n^2(u \times h) = u \times (\partial_n^2 h) = u \times (k^2 h) = k^2(u \times h).$$

Ebből következően

$$F \times h = \partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j u - k^2 u = \partial_t^2 v - \sum_{j=1}^{n} \partial_j v.$$

Végül a 11.71. Állítás alapján

$$\operatorname{supp} v = \operatorname{supp}(u \times h) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} h \subset \overline{\mathbb{R}_+^n} \times \overline{\mathbb{R}^+} \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}.$$

12.2. Megoldás. Legyen $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ a 12.17. Feladat megoldása. Belátjuk, hogy ekkor $\partial_n \left(\frac{1}{\tilde{h}} v\right) = 0$, és így a 11.50. Feladat alapján u nem függ az n-edik változótól, tehát tekinthető $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli disztribúciónak.

A 12.5. Tétel szerint $v = (F \times h) * E$, ahol E az n dimenziós hullámegyenlet alapmegoldása. A jelölések egyszerűsítése érdekében legyen

$$\tilde{x} := (t, x_1, \dots, x_n), \quad \tilde{y} := (t, y_1, \dots, y_n).$$

Mivel $h(x_n) = e^{kx_n}$ végtelen sokszor differenciálható pozitív valós függvény, ezért $1/\tilde{h}$ végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}^{n+1}$-en. Legyenek $\psi, \chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ a 11.88. Állításbeli függvények, ekkor $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ esetén

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\tilde{h}} v\right)(\varphi) &= [(F \times h) * E] \left(\frac{1}{\tilde{h}} \varphi\right) \\
&= [F \times h) \times E]\big\{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \psi(\tilde{x}) \chi(\tilde{y}) e^{-k(x_n + y_n)} \varphi(\tilde{x} + \tilde{y})\big\} \\
&= E\big\{\tilde{y} \mapsto F[\bar{x} \mapsto h(x_n \mapsto \psi(\tilde{x}) \chi(\tilde{y}) e^{-k(x_n + y_n)} \varphi(\tilde{x} + \tilde{y}))]\big\} \\
&= E\left\{\tilde{y} \mapsto \chi(\tilde{y}) e^{-k y_n} F\left[\bar{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(\tilde{x}) \varphi(\tilde{x} + \tilde{y})\, dx_n\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Ebből következően

$$\begin{aligned}
\partial_n \left(\frac{1}{\tilde{h}} v\right)(\varphi) &= -\left(\frac{1}{\tilde{h}} v\right)(\partial_n \varphi) \\
&= -E\left\{\tilde{y} \mapsto \chi(\tilde{y}) e^{-k y_n} F\left[\bar{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(\tilde{x}) \partial_n \varphi(\tilde{x} + \tilde{y})\, dx_n\right]\right\}. \quad (18.122)
\end{aligned}$$

Most válasszuk meg ψ-t a 11.88. Állításnak megfelelően oly módon, hogy csak t-től függjön (ez megtehető, lásd a 11.89. Megjegyzést). Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\tilde{x}) \partial_n \varphi(\tilde{x} + \tilde{y})\, dx_n = \psi(\tilde{x}) \int_{\mathbb{R}} \partial_n \varphi(\tilde{x} + \tilde{y})\, dx_n = 0,$$

hiszen φ kompakt tartójú függvény. Ezzel beláttuk, hogy $\partial_n \left(\frac{1}{\tilde{h}} v\right) = 0$.

A rövidség kedvéért legyen $w := \frac{1}{\tilde{h}}v$, amelyre tehát $\partial_n w = 0$. A 11.45. Állítás felhasználásával kapjuk, hogy $\partial_t^2 v = \tilde{h}\partial_t^2 w$, továbbá $j = 1, \dots, n-1$ esetén $\partial_j^2 v = \tilde{h}\partial_j^2 w$, $j = n$ esetén pedig $\partial_n w = 0$ miatt $\partial_n v = (\partial_n^2 \tilde{h})w = k^2\tilde{h}w$. Ennek megfelelően a (12.17) egyenlet

$$F \times h = \partial_t^2 v - \sum_{j=1}^{n} \partial_j v = \tilde{h}\left(\partial_t^2 w - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j w - k^2 w\right)$$

alakban írható, és így mindkét oldalt $1/\tilde{h}$-mal beszorozva a 11.69. Állítás felhasználásával kapjuk, hogy

$$\partial_t^2 w - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j w - k^2 w = F \times 1. \tag{18.123}$$

Legyen most $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan, amelyre $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0 = 1$, és definiáljuk az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciót az

$$u(\varphi) := w(\varphi \times \varphi_0)$$

összefüggéssel. Ekkor $\operatorname{supp} u \subset \operatorname{supp} w \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, továbbá a 11.70. Állításból következően $\partial_t^2 u(\varphi) = \partial_t^2 w(\varphi \times \varphi_0)$, hasonlóan $j = 1, \dots, n-1$ esetén $\partial_j^2 u(\varphi) = \partial_j^2 w(\varphi \times \varphi_0)$, ezért a (18.123) egyenletből $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(\varphi) - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2 u(\varphi) - k^2 u(\varphi) &= (F \times 1)(\varphi \times \varphi_0) \\ &= F\left\{\bar{x} \mapsto \varphi\left(\bar{x} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x_n)\, dx_n\right)\right\} = F(\varphi),\end{aligned}$$

tehát u valóban megoldása a (12.16) feladatnak.

12.3. Megoldás. A 12.5. Tétel alapján $u_j = E * F_j$ és $u = E * F$. Ezenkívül a 11.88. Állításból következően $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ esetén

$$\begin{aligned}(E * F_j)(\varphi) &= (E \times F_j)[(y,z) \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y+z)] \\ &= F_j\{z \mapsto E[y \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y+z)]\},\end{aligned} \tag{18.124}$$

ahol ψ és χ a 11.88. Állításnak megfelelő függvények. Az $F_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})} F$ konvergencia folytán a (18.124) összefüggés jobb oldala $j \to \infty$ esetén az alábbi kifejezéshez tart:

$$F\{z \mapsto E[y \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y+z)]\} = (E * F)(\varphi).$$

12.4. Megoldás. Az f, g, h függvények (12.18) alapján történő kiterjesztésével nyert $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ függvényekre nyilvánvalóan teljesül, hogy $\tilde{f} \in C^2(\overline{\mathbb{R}^4_+})$, $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R}^3), \tilde{h} \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Ekkor a 12.11. Tétel alapján a

$$\partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f}, \quad \tilde{u}(0,\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x}), \quad \partial_t \tilde{u}(0,\tilde{x}) = \tilde{h}(x) \quad (\tilde{x} \in \mathbb{R}^3) \tag{18.125}$$

klasszikus Cauchy-feladatnak létezik egyetlen $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^4_+})$ megoldása, mégpedig

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t,\tilde{x}) = {} & \frac{1}{4\pi} \int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{f}(t-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|,\tilde{\xi})}{|\tilde{x}-\tilde{\xi}|}\, d\tilde{\xi} \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{S(\tilde{x},t)} \tilde{g}\, d\sigma \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{S(\tilde{x},t)} \tilde{h}\, d\sigma. \end{aligned} \tag{18.126}$$

A fenti formulában szereplő integrálokat úgy alakítjuk, hogy a (12.14) formulát nyerjük. Vegyük észre egyrészt, hogy

$$\int_{S(\tilde{x},t)} \tilde{g}\, d\sigma = 2t \int_{B(x,t)} \frac{g(\xi)}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi, \tag{18.127}$$

és hasonlóan

$$\int_{S(\tilde{x},t)} \tilde{h}\, d\sigma = 2t \int_{B(x,t)} \frac{h(\xi)}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi. \tag{18.128}$$

Másrészt pedig

$$\begin{aligned} \int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{f}(t-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|,\tilde{\xi})}{|\tilde{x}-\tilde{\xi}|}\, d\tilde{\xi} &= \int_0^t \int_{S(\tilde{x},\tau)} \frac{\tilde{f}(t-\tau,\tilde{\xi})}{\tau}\, d\tilde{\xi}\, d\tau \\ &= \int_0^t \int_{B(x,\tau)} \frac{2\tau f(t-\tau,\xi)}{\tau\sqrt{\tau^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi\, d\tau \\ &= \int_0^t \int_{B(x,t-\tau)} \frac{2f(\tau,\xi)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi\, d\tau. \end{aligned} \tag{18.129}$$

Most a (18.127), a (18.128) és (18.129) összefüggéseket a (18.126) formulába helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t,\tilde{x}) = {} & \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{B(x,t-\tau)} \frac{f(\tau,\xi)}{\sqrt{(t-\tau^2) - |x-\xi|^2}}\, d\xi\, d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{B(x,t)} \frac{g(\xi)}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi \right) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t)} \frac{h(\xi)}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi. \end{aligned} \tag{18.130}$$

Mivel $\tilde{u}$ nem függ az x_3 változótól, ezért $\partial_3 \tilde{u} = 0$, így (18.125) és a (12.18) megfeleltetés alapján az $u(t,x) = \tilde{u}(t,\tilde{x})$ függvényre

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f, \quad u(0,x) = g(x), \quad \partial_t u(0,x) = h(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2),$$

tehát a (18.130) formulával értelmezett függvény kielégíti a kétdimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot.

12.5. Megoldás. Tegyük fel, hogy $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $g \in C^3(\mathbb{R})$ és $h \in C^2(\mathbb{R})$, ekkor a (12.19) kiterjesztésével nyert $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}$ függvényekre nyilvánvalóan $\tilde{f} \in$ $\in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{h} \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Ekkor a 12.11. Tétel alapján a

$$\partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f}, \quad \tilde{u}(0,\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x}), \quad \partial_t \tilde{u}(0,\tilde{x}) = \tilde{h}(x) \quad (\tilde{x} \in \mathbb{R}^2) \tag{18.131}$$

klasszikus Cauchy-feladatnak létezik egyetlen $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$ megoldása, mégpedig

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t,\tilde{x}) = {} & \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{B(\tilde{x},t-\tau)} \frac{\tilde{f}(\tau,\tilde{\xi})}{\sqrt{(t-\tau^2) - |\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}} \, d\tilde{\xi} \, d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{g}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2 - |\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}} \, d\tilde{\xi} \right) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{h}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2 - |\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}} \, d\tilde{\xi}. \end{aligned} \tag{18.132}$$

A $B(\tilde{x},t)$ gömbön vett integrált a $B(\tilde{0},t)$ gömbre transzformálva a Fubini-tétel és $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(x)$ felhasználásával

$$\begin{aligned} & \int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{h}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2 - |\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}} \, d\tilde{\xi} \\ & = \int_{B(\tilde{0},t)} \frac{\tilde{h}(\tilde{\xi}-\tilde{\eta})}{\sqrt{t^2 - |\tilde{\eta}|^2}} \, d\tilde{\eta} \\ & = \int_{B(0,t)} h(x-\eta_1) \int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}} \frac{1}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} \, d\eta_2 \, d\eta_1 \\ & = \int_{B(0,t)} h(x-\eta_1) \left[\arcsin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} \right) \right]_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}} d \, d\eta_1 \\ & = \pi \int_{x-t}^{x+t} h(s) \, ds. \end{aligned} \tag{18.133}$$

Teljesen hasonlóan adódik, hogy

$$\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{g}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi} = \pi \int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds,$$

így a $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R}^2)$ simasági feltétel miatt

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{g}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi}\right) = \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)). \tag{18.134}$$

Végül a fentiek mintájára

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{B(\tilde{x},t-\tau)} \frac{\tilde{f}(\tau,\tilde{\xi})}{\sqrt{(t-\tau^2)-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi}\,d\tau \\ = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,s)\,ds\,d\tau.\end{aligned} \tag{18.135}$$

A (18.135), (18.134), és (18.133) összefüggések alapján

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t,\tilde{x}) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau \\ + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{18.136}$$

Az $u(t,x) = \tilde{u}(t,\tilde{x})$ megfeleltetés és a (18.131) feltételek folytán

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f, \quad u(0,x) = g(x), \quad \partial_t u(0,x) = h(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

tehát a (18.136) formulával értelmezett függvény kielégíti az egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot. Vegyük észre még azt, hogy minden $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ és $h \in C^2(\mathbb{R}^2_+)$ helyett a gyengébb $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ feltételek mellett is érvényben marad.

18.9. A 13. fejezetbeli feladatok megoldásai

13.1. Megoldás. Vegyük észre (ahogyan a 13.12. Tétel előtt is megjegyeztük), hogy a 11.46. Példa, a 11.70. Állítás és a 11.66. Következmény alapján

$$\delta \times T_g = T'_H \times T_g = \partial_t(T_H \times T_g) = \partial_t T_{H\times g},$$

ahol H a Heaviside-függvény. Mivel $H \times g \in \mathscr{M}$, sőt $H \times g \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, ezért $\delta \times T_g \in \tilde{\mathscr{M}}$, tehát létezik $(\delta \times g) * E$, továbbá a 11.94. Állítás folytán

$$(\delta \times g) * E = \partial_t[(H \times g) * E] = \partial_t[E * (H \times g)].$$

13.2. Megoldás. Mivel $H \times g \in \mathscr{M}$, mégpedig

$$(H \times g)(t,x) = H(t)g(x),$$

ezért

$$\begin{aligned}[E * (H \times g)](t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)H(t-\tau)g(x-\xi)\,d\xi\,d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi\,d\tau.\end{aligned} \tag{18.137}$$

Belátjuk, hogy minden rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén a

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)H(t-\tau)g(x-\xi)\,d\xi\,d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi\,d\tau \tag{18.138}$$

függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, folytonosan differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, a deriváltja $t < 0$ esetén 0, $t > 0$ esetén pedig a

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi\,d \tag{18.139}$$

függvény, amely lokálisan integrálható $\mathbb{R}$-en. Ekkor a 11.49. Példa szerint a $\partial_t[E * (H \times g)]$ disztribúció értelemben vett derivált a (0 pont kivételével definiált) klasszikus deriválthoz tartozó reguláris disztribúció.

A (18.138) függvény folytonossága a (18.137) összefüggésből az integrálfüggvény folytonossága alapján következik. Az E alapmegoldás (13.5) formulájából nyilvánvaló, hogy a (18.138) függvény $t < 0$ esetén azonosan 0, így a deriváltja is 0. Másrészt, az $\eta := \xi/2\sqrt{\tau}$ helyettesítést alkalmazva $d\xi = (2\sqrt{\tau})^n d\eta$, így

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right)d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\eta|^2)g(x-2\sqrt{\eta})\,d\eta,\end{aligned}$$

ezért a paraméteres integrál folytonossági tételéből (lásd a 2.18. Tételt) adódóan a (18.139) függvény folytonos $t > 0$ esetén. Ebből következően a (18.138) függvény $t > 0$ esetén is folytonosan differenciálható, és a deriváltja a (18.139) függvény.

Végül a (18.139) függvény a 0 környezetében is integrálható (másutt a folytonosságából következően), hiszen a 9.3. Állítás felhasználásával

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi) g(x-\xi)\, d\xi \right| d\tau \\ \leq \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi) |g(x-\xi)|\, d\xi\, d\tau \\ \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau = t_0 \cdot \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

13.3. Megoldás. Az $\eta := (x-\xi)/2\sqrt{t-\tau}$ és $\tilde{\tau} := t - \tau$ helyettesítéseket alkalmazva $d\xi = (-1)^n (2\sqrt{t-\tau})^n d\eta$, $d\tau = -d\tilde{\tau}$, így a (9.15) formulából kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}u(t,x) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t-\tilde{\tau}, x - 2\sqrt{\tilde{\tau}}\eta) \exp(-|\eta|^2)\, d\eta\, d\tilde{\tau} \\ + \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi.\end{aligned} \tag{18.140}$$

A (18.140) jobb oldali első tagja a 2.19., 2.20. Tételek folytán a $C^{1,2}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ térben van. A második tag t szerinti $t > 0$ esetén $\mathbb{R}_+^{n+1}$-on való folytonos differenciálhatósága (sőt, valójában végtelen sokszor való differenciálhatósága) a 2.19. Tételből következik, hiszen az integrandus és a deriváltja tetszőleges (t_0, ∞) $(t_0 > 0)$ intervallumon az alábbi módon becsülhető:

$$\begin{aligned}\left| g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) \right| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t_0}\right), \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) \right| = \left| g(\xi) \frac{|x-\xi|^2}{4t^2} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) \right| \\ \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{|x-\xi|^2}{4t_0^2} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t_0}\right),\end{aligned}$$

amelyek integrálható függvények. Az x szerinti folytonos differenciálhatóság hasonló módon igazolható, a részletes bizonyítást az Olvasóra bízzuk.

Az $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ feltételhez a (18.140) formulát alakítjuk tovább, a jobb oldal második tagjában az $\eta := \xi/2\sqrt{t}$ helyettesítést végrehajtva:

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t-\tilde{\tau}, x - 2\sqrt{\tilde{\tau}}\eta) \exp(-|\eta|^2)\, d\eta\, d\tilde{\tau} + \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - 2\sqrt{t}\eta) \exp(-|\eta|^2)\, d\eta.$$

Ebből a 2.18. és 2.19. Tételek felhasználásával $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ adódik, sőt a 2.17. Állítás folytán $u(0,x) = g(x)$ is nyilvánvalóan következik.

A 12.5. Tétel alapján az általánosított Cauchy-feladatnak az $F := T_{\tilde{f}} + \delta \times$ $\times\, T_g$ jobb oldalhoz tartozó $v \in \tilde{\mathscr{M}}$ egyértelműen meghatározott megoldása $v = E * F$. A 13.1.–13.2. Feladatokból következően az $E*F$ disztribúció éppen a (9.15) formulával értelmezett lokálisan integrálható u függvényhez tartozó reguláris disztribúció. A 13.3. Feladat szerint $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, és $u(0,x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, így a 13.4. Állításból adódóan u kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot.

13.4. Megoldás. Az $\eta := (x-\xi)/2\sqrt{t-\tau}$ helyettesítéssel

$$d\xi = (-1)^n (2\sqrt{t-\tau})^n d\eta,$$

így a 2.17. Állítás felhasználásával

$$\left| \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau,\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau \right| = \left| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x - 2\sqrt{t-\tau}\eta) \exp(-|\eta|^2)\, d\eta\, d\tau \right| \le t \|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)}.$$

Másrészt, az $\eta := (x - \xi/2\sqrt{\tau})$ helyettesítés alkalmazásával $|d\xi| = (2\sqrt{\tau})^n d\eta$, így a 2.17. Állítás felhasználásával

$$\left| \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - 2\sqrt{\tau}\eta) \exp\left(-|\eta|^2\right) d\eta \right| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

ezért a (9.15) formulából közvetlenül adódik, hogy

$$|u(t,x)| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t\|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)} \qquad (t \ge 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

18.10. A 14. fejezetbeli feladatok megoldásai

14.1. Megoldás. a) Számítsuk ki f Fourier-együtthatóit. Egyrészt

$$2\pi c_0 = \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \, dx = \left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{3}.$$

Másrészt, ha n nem nulla egész, akkor

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 e^{-inx} \, dx \\ &= \left[(x-\pi)^2 \frac{e^{-inx}}{-in} - 2(x-\pi)\frac{e^{-inx}}{(-in)^2} + 2\frac{e^{-inx}}{(-in)^3}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{-2\pi}{-n^2} - \frac{2\pi}{-n^2} = \frac{4\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

A kívánt eredmény a 14.6. Állításból következik.

b) Az egyenletes konvergencia miatt az a)-beli egyenlőség $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$-ben is érvényes. Minthogy f folytonos és f klasszikus deriváltja L^1_{loc}-hoz tartozik, innen deriválással a

$$T_f' = T_{f'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i}{n}(e^{inx} - e^{-inx}) \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R})\text{−}ben \tag{18.141}$$

egyenlőséget kapjuk. Vegyük észre, hogy a klasszikus f' deriváltnak minden $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ pontban -4π ugrása van, az $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ nyílt halmazon viszont folytonosan differenciálható, és a klasszikus deriváltja konstans: $f'' = 2$, úgyhogy

$$T_f'' = 2 - 4\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R})\text{−}ben.$$

Következésképpen (18.141) deriválásával a Poisson-formulával ekvivalens

$$2 - 4\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi} = -2\sum_{n=1}^{\infty}(e^{inx} + e^{-inx}) \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R})\text{−}ben$$

egyenlőség adódik.

14.2. Megoldás. A 11.3. Feladat szerint létezik olyan $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ függvény, hogy $\varphi = \mathrm{id}\cdot\psi$. Igazolnunk kell még, hogy tetszőleges m, n indexekre az $x^m\psi^{(n)}(x)$ függvény korlátos $\mathbb{R}$-en. Minthogy e függvények folytonosak, elég megmutatni tetszőleges m, n indexekre a

$$\sup_{|x|\geq 1} \left|x^m \psi^{(n)}(x)\right| < \infty$$

relációkat. Mivel $x \neq 0$ esetén

$$\begin{aligned} x^m \psi^{(n)}(x) &= x^m \left(\varphi(x) \cdot x^{-1}\right)^{(n)} \\ &= x^m \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi^{(n-j)}(x) \left(x^{-1}\right)^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!} (-1)^j x^{m-j-1} \varphi^{(n-j)}(x), \end{aligned}$$

$$\sup_{|x|\geq 1} \left| x^m \psi^{(n)}(x) \right| \leq (n!) \sum_{j=0}^{n} \left| x^m \varphi^{(n-j)}(x) \right| = (n!) \sum_{j=0}^{n} p_{m,n-j}(\varphi) < \infty.$$

14.3. Megoldás. Rögzítsük $\mathbb{R}$-nek egy $(\psi_k)_{k=-\infty}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ egységosztását, akkor tetszőleges $\varphi \in \mathscr{S}$-re $(\psi_k \varphi) \subset \mathscr{D}$, és $\psi_k \varphi \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} \varphi$.

14.4. Megoldás. Elég észrevenni, hogy a definíciókból azonnal adódóan $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R})} \varphi \Longrightarrow \varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} \varphi$.

14.5. Megoldás. Az integrál létezik és véges, mert $f/p \in L^1(\mathbb{R})$ és $p\varphi \in \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$. T_f linearitása nyilvánvaló. Végül T_f folytonos is, mert

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} 0 \Longrightarrow p\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} 0 \Longrightarrow \sup_{\mathbb{R}} |p\varphi_k| \to 0,$$

és így

$$|T_f \varphi_k| = \left| \int (f/p)(p\varphi_k)\, dx \right| \leq \int |f/p|\ dx \cdot \sup_{\mathbb{R}} |p\varphi_k| \to 0.$$

18.5. *Megjegyzés.* Az előző feladat alapján azonosíthatunk minden $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tesztfüggvényt a T_ψ temperált disztribúcióval, és tekinthetjük $\mathscr{S}(\mathbb{R})$-t az $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ tér lineáris alterének. Igazolható, hogy $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *sűrű* altere $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-nek.

18.11. A 15. fejezetbeli feladatok megoldásai

15.1. Megoldás. Az azonosság a Newton–Leibniz-formulából adódik, mert $\lim_{-\infty} u = 0$. Innen minden x-re

$$u(x)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} 2\,|uu'|\ dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} u^2 + |u'|^2\ dt = \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})},$$

vagyis

$$\|u\|_\infty \le \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

15.2. Megoldás. Minden $u \in H^1(\mathbb{R})$-hez válasszunk egy $H^1(\mathbb{R})$-ben u-hoz tartó $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ sorozatot. Az előző feladat szerint (u_n) Cauchy-sorozat a $C_0(\mathbb{R})$ Banach-térben, és így egyenletesen konvergál valamely $\tilde{u}$ függvényhez.

Minthogy $u_n \to u$ az $L^2(\mathbb{R})$ térben, Riesz egyik lemmája alapján (u_n)-nek van egy majdnem mindenütt u-hoz tartó részsorozata. Ez a részsorozat $\tilde{u}$-hoz is konvergál majdnem mindenütt, úgyhogy $\tilde{u}$ az u ekvivalenciaosztályához tartozik.

Az előző feladat szerint $\|u_n\|_\infty \le \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R})}$ minden n-re. Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, innen $\|\tilde{u}\|_\infty \le \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$ adódik.

15.3. Megoldás. Tetszőlegesen rögzített $u \in H^1(\mathbb{R})$-hez válasszunk egy $H^1(\mathbb{R})$-ben hozzá tartó $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ sorozatot; akkor u_n egyenletesen konvergál $\tilde{u}$-hoz az előző feladat szerint.

Rögzítsük a-t és b-t úgy, hogy $-\infty < a < b < \infty$. A Newton–Leibniz-formula szerint

$$\int_a^b u_n'\,dt = u_n(b) - u_n(a),$$

vagy ekvivalens módon

$$(u_n', \chi_{(a,b)})_{L^2(\mathbb{R})} = u_n(b) - u_n(a)$$

minden n-re, ahol $\chi_{(a,b)}$ az (a,b) intervallum karakterisztikus függvénye.

Minthogy $u_n' \to u$ az $L^2(\mathbb{R})$ térben, és $u_n(b) \to \tilde{u}(b)$, $u_n(a) \to \tilde{u}(a)$, $n \to \infty$ esetén a skaláris szorzat folytonosságát felhasználva a

$$(u', \chi_{(a,b)})_{L^2(\mathbb{R})} = \tilde{u}(b) - \tilde{u}(a),$$

vagyis az

$$\int_a^b u'\,dt = \tilde{u}(b) - \tilde{u}(a)$$

egyenlőség adódik.

15.4. Megoldás. Ha $u \in H^1(\mathbb{R})$ és $u' = 0$ m.m., akkor $\tilde{u}$ konstans az előző feladat alapján. Mivel $\lim_{-\infty} \tilde{u} = 0$ a 15.2. Feladat szerint, $\tilde{u} = 0$.

15.5. Megoldás. Igazolnunk kell, hogy $uv \in L^2(\mathbb{R})$, $u'v + uv' \in L^2(\mathbb{R})$ és

$$\int uv\varphi'\,dt = -\int (u'v + uv')\varphi\,dt$$

minden $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ esetén.

Az első két tulajdonság a Hölder-egyenlőtlenségből adódik, mert $u, v, u', v' \in$ $\in L^2(\mathbb{R})$, és $u, v \in L^\infty(\mathbb{R})$ a 15.2. Feladat szerint. A harmadik tulajdonság $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ esetén a Leibniz- és Newton–Leibniz-formulákból következik:

$$\int uv\varphi'\,dt + \int (u'v + uv')\varphi\,dt = \int (uv\varphi)'\,dt = [uv\varphi]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Az általános esetben válasszunk két olyan $(u_n), (v_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ sorozatot, amelyek $H^1(\mathbb{R})$-ben u-hoz és v-hez tartanak. Az előzőek szerint minden n-re

$$\int u_n v_n \varphi'\,dt = -\int (u_n' v_n + u_n v_n')\varphi\,dt,$$

vagy ekvivalens módon

$$(u_n, v_n\varphi')_{L^2(\mathbb{R})} = -(u_n', v_n\varphi)_{L^2(\mathbb{R})} - (u_n, v_n'\varphi)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Minthogy u_n, v_n, u_n', v_n' konvergálnak $L^2(\mathbb{R})$-ben rendre az u, v, u', v' függvényekhez, és mivel $\varphi, \varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$, a $v_n\varphi', v_n\varphi, v_n'\varphi$ sorozatok szintén konvergálnak rendre a $v\varphi', v\varphi, v'\varphi$ függvényekhez. Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, és felhasználva a skaláris szorzat folytonosságát, a keresett eredményt kapjuk.

15.6. Megoldás. Rögzítsünk egy olyan $u \in H^1(\mathbb{R})$ függvényt, amely eltűnik egy egységintervallumon kívül, és amelyre

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1.$$

Akkor az $u_n(x) := u(x+n)$ eltolt függvények ortonormált sorozatot alkotnak $L^2(\mathbb{R})$-ben. Ez a Hilbert-térbeli ortonormált sorozat korlátos, de nincs konvergens részsorozata, hiszen $\|u_n - u_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}$ minden $n \neq k$-ra, úgyhogy egyetlen részsorozat sem Cauchy-sorozat.

15.7. Megoldás. Az abs és sgn függvények $L^2(-1, 1)$-hez tartoznak. Megmutatjuk, hogy

$$\int (\mathrm{abs})\varphi'\,dt = -\int (\mathrm{sgn})\varphi\,dt$$

minden $\varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$-re. Ebből következni fog, hogy $\mathrm{abs} \in H^1(-1, 1)$ és $\mathrm{abs}' = \mathrm{sgn}$.

Az egyenlőség közvetlen számítással adódik:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (\mathrm{abs})\varphi'\,dt &= \int_{-1}^{1} |t|\,\varphi'(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{0} -t\varphi'(t)\,dt + \int_{0}^{1} t\varphi'(t)\,dt\end{aligned}$$

$$= [-t\varphi(t)]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(t)\,dt + [t\varphi(t)]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(t)\,dt$$
$$= -\int_{-1}^{1} (\operatorname{sgn})\varphi\,dt.$$

15.8. Megoldás. Ha $u \in C^\infty([a,b])$ és $x, y \in [a,b]$, akkor

$$u(x)^2 - u(y)^2 = \int_y^x 2uu'\,dt \le \int_a^b u^2 + |u'|^2\,dt = \|u\|^2_{H^1(a,b)},$$

ahonnan y szerint integrálva

$$(b-a)u(x)^2 - \|u\|^2_{L^2(a,b)} \le (b-a)\,\|u\|^2_{H^1(a,b)}$$

minden x-re.

15.9. Megoldás. Tetszőleges $u \in H^1(a,b)$ esetén válasszunk egy $H^1(a,b)$-ben (és így $L^2(a,b)$-ben is) hozzá tartó $(u_n) \subset C^\infty([a,b])$ sorozatot. Az előző feladat szerint (u_n) Cauchy-sorozat a $C([a,b])$ Banach-térben, és így egyenletesen konvergál egy ottani $\tilde{u}$ függvényhez.

Minthogy $u_n \to u$ az $L^2(a,b)$ térben, Riesz lemmája alapján van (u_n)-nek egy majdnem mindenütt u-hoz tartó részsorozata. Ez a részsorozat majdnem mindenütt (sőt mindenütt) $\tilde{u}$-hoz is tart, úgyhogy $\tilde{u}$ az u ekvivalenciaosztályának eleme.

Az előző feladat alapján $\|u_n\|_\infty \le \|u_n\|_{H^1(a,b)}$ minden n-re. Innen $n \to \infty$ esetén $\|\tilde{u}\|_\infty \le \|u\|_{H^1(a,b)}$ adódik.

Az előjelfüggvénynek szakadása van 0-ban, így nem tartozhat $H^1(-1,1)$-hez.

15.10. Megoldás. Ha $u \in C^\infty([a,b])$ és $a \le y < x \le b$, akkor

$$u(x) - u(y) = \int_x^y u'\,dt = (u', \chi_{(x,y)})_{L^2(a,b)},$$

és így

$$|u(x) - u(y)| \le \|u'\|_{L^2(a,b)} \left\|\chi_{(x,y)}\right\|_{L^2(a,b)} = \|u'\|_{L^2(a,b)}\,|x-y|^{1/2}$$

a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség miatt.

Az általános $u \in H^1(a,b)$ esetben válasszunk egy $H^1(a,b)$-ben hozzá tartó $(u_n) \subset C^\infty([a,b])$ sorozatot: ekkor $u_n' \to u'$ az $L^2(a,b)$ térben, és $u_n(x) \to \tilde{u}(x)$, $u_n(y) \to \tilde{u}(y)$ az előző feladatok alapján. Az előzőek szerint

$$|u_n(x) - u_n(y)| \le \|u_n'\|_{L^2(a,b)}\,|x-y|^{1/2}$$

minden n-re, és innen a kívánt reláció az $n \to \infty$ határátmenettel adódik.

15.11. Megoldás. Az $u(x) := x^p$ és $g(x) := px^{p-1}$ függvények folytonosak $(0,1)$-ben, és

$$\int_0^1 u(x)^2\,dx = \frac{1}{2p+1} < \infty, \quad \int_0^1 g(x)^2\,dx = \frac{p^2}{2p-1} < \infty,$$

úgyhogy $u, g \in L^2(0,1)$. Ha $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, akkor olyan kis $0 < \varepsilon < 1$ számot választva, hogy $\varphi = 0$ a $(0,\varepsilon)$ intervallumban,

$$\begin{aligned}\int_0^1 u\varphi'\,dx + \int_0^1 g\varphi\,dx &= \int_\varepsilon^1 x^p\varphi'(x) + px^{p-1}\varphi(x)\,dx \\ &= \int_\varepsilon^1 (x^p\varphi(x))'\,dx = [x^p\varphi(x)]_\varepsilon^1 = 0.\end{aligned}$$

Ez bizonyítja, hogy $u \in H^1(0,1)$ és $u' = g$.

Mivel $u \in C^1(0,1)$ és u' nem korlátos, u nem Lipschitz-folytonos. Sőt, u nem is Hölder-folytonos semmilyen $\alpha > p$ kitevővel sem, mert

$$\frac{u(x) - u(0)}{(x-0)^\alpha} = x^{p-\alpha}$$

nem korlátos $x \in (0,1)$ esetén.

15.12. Megoldás. Minthogy az u függvény és annak klasszikus u' deriváltja $C([a,b])$-hoz, és így $L^2(a,b)$-hoz is tartozik, elegendő megjegyeznünk, hogy tetszőleges $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ esetén

$$\int_a^b u\varphi' + u'\varphi\,dt = \int_a^b (u\varphi)'\,dt = [u\varphi]_a^b = 0$$

a Leibniz- és Newton–Leibniz-formulák alapján.

15.13. Megoldás. Minthogy $u \in C([a,b])$, $u \in L^2(a,b)$ is teljesül. Mivel $u_i' \in L^2(x_{i-1}, x_i)$ minden $i = 1, \dots, n$-re, az a g függvény, amelyik u_i'-vel egyenlő mindegyik (x_{i-1}, x_i) intervallumban, $L^2(a,b)$ eleme. Hátravan annak az igazolása, hogy

$$\int_a^b u\varphi'\,dx = -\int_a^b g\varphi\,dx$$

minden $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$-re. Ez közvetlen számítással adódik:

$$\int_a^b u\varphi'\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_i\varphi'\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [u_i\varphi]_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_i'\varphi \, dx$$
$$= -\int_a^b g\varphi \, dx,$$

mert $(u_1\varphi)(x_0) = (u_n\varphi)(x_n) = 0$, és $(u_i\varphi)(x_i) = (u_{i+1}\varphi)(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$.

15.14. Megoldás. Mivel Pu eltűnik a korlátos $[c, d]$ intervallumon kívül, az előző feladatból következik, hogy $Pu \in H^1(\mathbb{R})$, és

$$(Pu)'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < c; \\ u(a), & \text{ha } c < x < a; \\ u'(x), & \text{ha } a < x < b; \\ -u(b), & \text{ha } b < x < d; \\ 0, & \text{ha } d < x. \end{cases}$$

P linearitása nyilvánvaló lévén, már csak egy olyan C konstanst kell találnunk, hogy $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R})} \le C \|u\|_{H^1(a,b)}$ minden $u \in H^1(a, b)$-re. Ez közvetlen számítással adódik. Legyen $\varepsilon := \max\{a - c, d - b\}$, akkor először is

$$\int |Pu|^2 \, dx = \frac{\varepsilon^2}{2} u(a)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} u(b)^2 + \|u\|_{L^2(a,b)}^2 \le \varepsilon^2 \|u\|_{L^\infty(a,b)}^2 + \|u\|_{L^2(a,b)}^2$$

és

$$\int |(Pu)'|^2 \, dx = \varepsilon u(a)^2 + \varepsilon u(b)^2 + \|u'\|_{L^2(a,b)}^2 \le 2\varepsilon \|u\|_{L^\infty(a,b)}^2 + \|u'\|_{L^2(a,b)}^2 .$$

Alkalmazva a 15.8. Feladat eredményét, innen

$$\begin{aligned} \|Pu\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\le (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) \|u\|_{L^\infty(a,b)}^2 + \|u\|_{H^1(a,b)}^2 \\ &\le (\varepsilon + 1)^2 \|u\|_{H^1(a,b)}^2 + \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}{b - a} \|u\|_{L^2(a,b)}^2 \\ &\le C \|u\|_{H^1(a,b)}^2 , \end{aligned}$$

ahol

$$C = (\varepsilon + 1)^2 + \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}{b - a}.$$

15.15. Megoldás. A $\langle \delta_c, v\rangle := v(c)$ képletet úgy értelmezzük, hogy minden $v \in H^1(a,b)$-re v folytonos reprezentánsát tekintjük. A kapott lineáris $v \mapsto v(c)$ leképezés folytonos $H_0^1(a,b)$-n, mert alkalmas C konstanssal

$$|v(c)| \le \|u\|_{L^\infty(a,b)} \le C\,\|u\|_{H^1(a,b)}$$

minden $v \in H^1(a,b)$-re a 15.9. Feladat szerint.

Válasszunk egy olyan $u \in H_0^1(a,b)$ függvényt, amelyre $u(c) > 0$, és legyen $u_n(x) = \min\{u(x), n\,|x-c|\}$, $x \in (a,b)$, $n = 1{,}2,\dots$. Akkor $u_n \in H_0^1(a,b)$, $u_n(c) = 0$, és $u_n \to u$ $L^2(a,b)$-ben a Lebesgue-tétel szerint. Ha valamely $f \in L^2(a,b)$ függvényre $\int_a^b f u_n\,dx = u_n(c)$ volna minden n esetén, akkor innen az

$$\int_a^b fu\,dx = \lim \int_a^b f u_n\,dx = \lim u_n(c) = \lim 0 = 0 \ne u(c)$$

ellentmondás adódna.

A Lebesgue-tétel alkalmazása elkerülhető. Ha például $u(a) = u(b) = 0$, $u(c) = 1$, és u affin az $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumokban, akkor u_n affin az $[a, c-n^{-1}]$, $[c-n^{-1}, c]$, $[c, c+n^{-1}]$, $[c+n^{-1}, b]$ intervallumokban, és

$$\int_a^b |u_n - u|^2\,dx \le 2/n \to 0.$$

15.16. Megoldás. Ha $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, akkor minden elég kis $r > 0$-ra fennállnak az

$$\int_{\substack{x\in\Omega\\ |x|>r}} u(\partial_j\varphi)\,dx = -\int_{\substack{x\in\Omega\\ |x|>r}} (\partial_j u)\varphi\,dx + \int_{|x|=r} u\varphi\nu_j\,d\Gamma$$

egyenlőségek minden $j = 1,\dots,N$-re, ahol ν a kis kör középpontja felé mutató egységvektort jelöli. Innen $r \to 0$ mellett az állítás adódik.

15.17. Megoldás. Explicit számolás az $|x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$ képletből kiindulva.

15.18. Megoldás. Minthogy $\alpha < 0$, $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$, ahonnan $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$.

Ha $\alpha > 1 - \frac{N}{2}$, akkor

$$\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2\,dx = \int_{|x|<R} |x|^{2\alpha} + \alpha^2\,|x|^{2\alpha-2}\,dx < \infty,$$

mert $2\alpha - 2 > -N$, és

$$\lim_{x\to 0} |x|^{N-1}\,u(x) = |x|^{N-1+\alpha} = 0,$$

mert $\alpha > 1 - N$. Innen $u \in H_0^1(\Omega)$ a 15.16. Feladat szerint.

A v-re vonatkozó tulajdonságok bizonyítása hasonló.

15.19. Megoldás. Használjuk a minden $\varepsilon > 0$-ra érvényes

$$\log t = o(t^{-\varepsilon}), \quad t \searrow 0$$

relációkat.

15.20. Megoldás. Minthogy $\beta > 0$, $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$, ahonnan $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$.

Minthogy $\beta < 1/2$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \; dx &= \int_{|x|<R} \left|\log|x|\right|^{2\beta} + \left|\beta\left|\log|x|\right|^{\beta-1}|x|^{-1}\right|^2 \; dx \\ &= 2\pi \int_0^R r\,|\log r|^{2\beta} + \beta^2\,|\log r|^{2\beta-2}\,r^{-1} \; dr < \infty,\end{aligned}$$

mert $2\beta - 2 > -1$. Minthogy nyilván

$$\lim_{x\to 0} |x|\,u(x) = 0,$$

úgyhogy $u \in H_0^1(\Omega)$ a 15.16. Feladat szerint.

A v-re vonatkozó tulajdonságok bizonyítása hasonló.

15.21. Megoldás. Megismételhetjük apró változtatásokkal a 15.18. Állítás bizonyítását: az

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx + \left|\int_\Omega u_n(x)\,dx\right|^2 \to 0$$

relációt a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx + \left|\int_\Gamma u_n(x)\,dx\right|^2 \to 0$$

relációra cseréljük, a bizonyítás végén szereplő harmadik $\int_\Omega u\,dx = 0$ feltételt pedig $\int_\Gamma u\,dx = 0$-ra.

15.22. Megoldás. Az

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{\frac{2\pi i}{a}(k,x)}$$

jelöléssel élve az eredmény a következő három azonosságból adódik:

$$\int_C |u|^2 \; dx = a^N \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} |c_k|^2\,,$$

$$\int_C |\nabla u|^2 \; dx = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 a^N \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} |k|^2 \, |c_k|^2 \,,$$
$$\left|\int_C u \; dx\right|^2 = a^{2N} \, |c_0|^2 \,.$$

Pontosan akkor áll egyenlőség, ha alkalmas c_j konstansokkal

$$u(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\frac{2\pi i}{a} x_j}.$$

18.12. A 16. fejezetbeli feladatok megoldásai

16.1. Megoldás. Mivel $f \in L^2(a,b)$, a gyenge megoldás definíciója szerint $u \in H_0^1(a,b)$, és

$$\int_a^b u'v' \, dx = \int_a^b fv \, dx$$

minden $v \in H_0^1(a,b)$-re. Speciálisan

$$\int_a^b u'\varphi' \, dx = -\int_a^b (-f)\varphi \, dx$$

minden $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$-re. Minthogy $u' \in L^2(a,b)$ és $-f \in L^2(a,b)$, ez definíció szerint azt jelenti, hogy $u' \in H^1(a,b)$ és $(u')' = -f$, vagyis $u \in H^2(a,b)$ és $u'' = -f$.

16.2. Megoldás. Számítsuk ki f második primitív függvényét: alkalmas c, d konstansokkal először az

$$u'(x) = c - \int_a^x f(t) \; dt,$$

majd az

$$\begin{aligned} u(x) &= cx + d - \int_a^x \left(\int_a^y f(t) \; dt\right) \; dy \\ &= cx + d - \int_a^x \left(\int_t^x f(t) \; dy\right) \; dt \\ &= cx + d - \int_a^x (x-t) f(t) \; dt \end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk.

Az $u(a) = u(b) = 0$ feltételek segítségével meghatározható c és d; végül az

$$u(x) = \frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-t)f(t)\ dt - \int_a^x (x-t)f(t)\ dt$$

képletet kapjuk.

16.3. Megoldás. Minthogy u folytonos, és $u'' = 0$ az (a, c) és (c, b) intervallumokban, olyan megoldást keresünk, amelyik lineáris ezekben az intervallumokban, és eltűnik az a, b pontokban. Konstans szorzótól eltekintve egyetlen ilyen függvény van: alkalmas α konstanssal

$$u(x) = \begin{cases} \alpha(b-c)(x-a) & [a,c]\text{-ben}, \\ \alpha(b-x)(c-a) & [c,b]\text{-ben}. \end{cases}$$

Minthogy ekkor tetszőleges $v \in H_0^1(a, b)$-re

$$\begin{aligned} \int_a^b u'v'\ dx &= \alpha(b-c)\int_a^c v'(x)\ dx - \alpha(c-a)\int_c^b v'(x)\ dx \\ &= \alpha(b-a)v(c), \end{aligned}$$

látható, hogy az $\alpha = 1/(b-a)$ választással

$$\int_a^b u'v'\ dx = v(c)$$

minden $v \in H_0^1(a, b)$-re, vagyis u gyenge megoldás.

16.4. és 16.5. Megoldás. Felejtsük el egyelőre a peremfeltételeket, és keressük meg a differenciálegyenlet általános megoldását az állandók variálásának a módszerével. A homogén egyenlet megoldása jól ismert: alkalmas c, d konstansokkal

$$u(x) = ce^x + de^{-x}.$$

Keressük az inhomogén egyenlet megoldását alkalmas $c(x), d(x)$ függvényekkel az

$$u(x) = c(x)e^x + d(x)e^{-x}$$

alakban, akkor

$$u'(x) = \left(c(x)e^x - d(x)e^{-x}\right) + \left(c'(x)e^x + d'(x)e^{-x}\right).$$

A képlet egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy

$$c'(x)e^x + d'(x)e^{-x} = 0,$$

akkor ismételt deriválással az

$$\begin{aligned} u''(x) &= \big(c(x)e^x + d(x)e^{-x}\big) + \big(c'(x)e^x - d'(x)e^{-x}\big) \\ &= u(x) + \big(c'(x)e^x - d'(x)e^{-x}\big) \end{aligned}$$

egyenlet adódik.

A

$$c'(x)e^x + d'(x)e^{-x} = 0 \quad \text{és} \quad c'(x)e^x - d'(x)e^{-x} = -f(x),$$

illetve az ekvivalens

$$c'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}f(x) \quad \text{és} \quad d'(x) = \frac{1}{2}e^x f(x)$$

egyenletrendszert megoldva, alkalmas c_0, d_0 konstansokkal végül is

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(c_0 + \int_a^x -\frac{1}{2}e^{-t}f(t)\ dt\right)e^x + \left(d_0 + \int_a^x \frac{1}{2}e^t f(t)\ dt\right)e^{-x} \\ &= c_0e^x + d_0e^{-x} + \int_a^x f(t)\sinh(t-x)\ dt \end{aligned}$$

adódik.

A c_0, d_0 konstansok konkrét értéke az aktuális peremfeltételekből meghatározható.

16.6. Megoldás. Vezessük be r/p-nek egy R primitív függvényét, és írjuk át a feladatot a

$$\begin{cases} -\big(pe^{-R}u'\big)' + qe^{-R}u = fe^{-R} & (a,b)\text{-ben}, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

alakba.

16.7. Megoldás. Egyszerűen adaptálható a 16.23. Tétel bizonyítása. A részleteket az olvasóra hagyjuk.

16.8. Megoldás.

a) Alkalmazva a Gauss–Osztrogradszkij-Tételt tetszőlegesen rögzített i, j indexekre, a következő egyenlőségeket kapjuk minden $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ függvényre:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\partial_i^2 u)(\partial_j^2 u)\ dx &= -\int_\Omega (\partial_i u)(\partial_i \partial_j^2 u)\ dx + \int_\Gamma (\partial_i u)\nu_i(\partial_j^2 u)\ d\Gamma \\ &= \int_\Omega (\partial_i\partial_j u)^2\ dx + \int_\Gamma (\partial_i u)\nu_i(\partial_j^2 u) - (\partial_i u)(\partial_i\partial_j u)\nu_j\ d\Gamma. \end{aligned}$$

Összegezve őket az

$$\int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega (\partial_i \partial_j u)^2 \, dx + \int_\Gamma (\Delta u)\partial_\nu u - \sum_{i=1}^{2} (\partial_i u)\partial_\nu(\partial_i u) \, d\Gamma$$

azonosság adódik, amelyik sűrűségi meggondolásokkal minden $u \in H^2(\Omega)$-ra is érvényes marad. A peremen vett integrál egyszerűsítése érdekében tekintsük a perem egy adott a pontjának a környezetében a peremet egy olyan $x_2 = f(x_1)$ függvény gráfjának, hogy a tartomány a-beli külső normálisa a negatív x_2-tengely irányába mutasson (lásd a 18.10. ábrát). Az $u(x_1, f(x_1)) = 0$ egyenletet kétszer deriválva a

$$(\partial_1 u)(x) + (\partial_2 u)(x) f'(x_1) = 0$$

és

$$(\partial_1^2 u)(x) + (\partial_2^2 u)(x)(f'(x_1))^2 + (\partial_2 u)(x) f''(x_1) + 2(\partial_1 \partial_2 u)(x) f'(x_1) = 0$$

egyenleteket kapjuk. Az egyszerűbb jelölés érdekében feltéve, hogy $a = (0,0)$,

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{1}{R} \quad \text{és} \quad (\partial_2 u)(0) = -(\partial_\nu u)(0),$$

úgyhogy a fenti relációk $x = 0$-ban a következő alakot öltik:

$$\partial_1 u = 0, \quad \partial_1^2 u = \frac{1}{R} \partial_\nu u,$$

majd

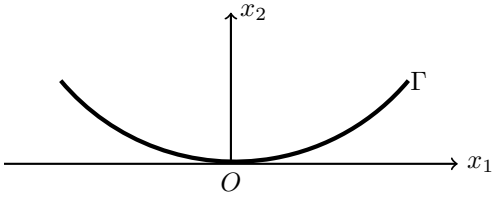
$$\begin{aligned} (\Delta u)\partial_\nu u - \sum_{i=1}^{2} (\partial_i u)\partial_\nu(\partial_i u) &= \left(\partial_1^2 u + \partial_2^2 u\right) \partial_\nu u - (\partial_1 u)\partial_\nu(\partial_1 u) - (\partial_2 u)\partial_\nu(\partial_2 u) \\ &= \frac{1}{R}(\partial_\nu u)^2. \end{aligned}$$

b) Igazolnunk kell, hogy alkalmas c abszolút konstanssal

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega (\partial_i \partial_j u)^2 \, dx + \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le c \, \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

A

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le c_1 \, \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}$$



18.10. ábra. A 16.8. Feladat segédábrája

becslés már ismeretes a 16.3. Tételből, a

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} (\partial_i \partial_j u)^2 \, dx \le \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

becslés pedig a)-ból következik, mert konvex tartományokra az R görbület pozitív.

18.13. A 17. fejezetbeli feladatok megoldásai

17.1. Megoldás. Ha $r < s$ és $u \in D^s$, akkor az

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k$$

függvényre

$$\|u\|^2_{D^r} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r \, |c_k|^2 \le \lambda_1^{r-s} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \, |c_k|^2 = \|u\|^2_{D^s} < \infty.$$

Innen $u \in D^r$, és a $D^s \subset D^r$ beágyazás folytonos. (A $\lambda_k \to \infty$ reláció felhasználásával az is igazolható, hogy a beágyazás kompakt.)

Minthogy $Z \subset D^s$, és Z sűrű D^r-ben, D^s is sűrű D^r-ben.

A $D^0 = H$, $D^1 = V$ és $D^{-1} = V'$ egyenlőségek a definíciókból adódnak.

Az A leképezés definíció szerint lineáris. Továbbá tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ és

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \in D^{s+2}$$

esetén

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k w_k,$$

és

$$\|Au\|_{D^s}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \left|\lambda_k c_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{s+2} \left|c_k\right|^2 = \|u\|_{D^{s+2}}^2$$

a D^s- és D^{s+2}-beli normák definíciója miatt. Innen $Au \in D^s$, és $A : D^{s+2} \to D^s$ folytonos.

Ha $H = L^2(0,\pi)$ és $V = H_0^1(0,\pi)$, akkor D^s azokból az

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$$

függvényekből áll, amelyek együtthatóira

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2s} \left|c_k\right|^2 < \infty.$$

Ha $u \in D^2$, akkor $u \in H^2(0,\pi)$. Valóban, elegendő ehhez megmutatnunk, hogy az

$$u_n(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k \sin kx$$

részletösszegekre az (u_n), (u_n') és (u_n'') sorozatok konvergálnak $L^2(0,\pi)$-ben. Minthogy

$$u_n'(x) := \sum_{k=1}^{n} k c_k \cos kx \quad \text{és} \quad u_n''(x) := -\sum_{k=1}^{n} k^2 c_k \sin kx,$$

ez ekvivalens a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2s} \left|c_k\right|^2, \quad s = 0, 1, 2,$$

numerikus sorok konvergenciájával, ezeket pedig az $u \in D^2$ feltétel biztosítja.

Mivel $D^2 \subset D^1 = H_0^1(0,\pi)$, ezzel a $D^2 \subset H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ relációt igazoltuk.

Megfordítva, ha $u \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$, akkor

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$$

alkalmas, négyzetesen szummálható együtthatókkal, és

$$u''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k \sin kx.$$

Minthogy $u'' \in L^2(0,\pi)$, innen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 \left|c_k\right|^2 < \infty,$$

ez pedig azt jelenti, hogy $u \in D^2$.

17.2. Megoldás. (i) igazolásához adaptáljuk a 17.2. Tétel (c) részének a bizonyítását. Helyettesítsük a

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k (-\lambda_k)^p e^{-\lambda_k t} w_k \right\|_V^2 \leq \sum_{k=m+1}^{n} (\lambda_k)^{2p+1} e^{-2\lambda_k t_0} \left|a_k\right|^2$$

egyenlőtlenséget a következővel:

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k (-\lambda_k)^p e^{-\lambda_k t} w_k \right\|_{D^r}^2 \leq \sum_{k=m+1}^{n} (\lambda_k)^{2p+r} e^{-2\lambda_k t_0} \left|a_k\right|^2.$$

Minthogy a $\lambda \mapsto (\lambda_k)^{2p+r} e^{-2\lambda_k t_0}$ leképezés a $[\lambda_1, \infty)$ intervallumban felülről korlátos valamely $c(p,r,t_0)$ konstanssal, innen

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k (-\lambda_k)^p e^{-\lambda_k t} w_k \right\|_{D^r}^2 \leq c(p,r,t_0) \sum_{k=m+1}^{\infty} \left|a_k\right|^2 \to 0,$$

ha $n \to \infty$.

(ii) közvetlen számolással adódik: tetszőleges $0 < s < t$ esetén

$$\|u(t)\|_{D^r}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k\right|^2 (\lambda_k)^r e^{-2\lambda_k t} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k\right|^2 (\lambda_k)^r e^{-2\lambda_k s} = \|u(s)\|_{D^r}^2,$$

mert $\lambda_k > 0$ minden k-ra.

17.3. Megoldás. Megismételhetjük a 17.6. Tétel bizonyítását néhány apró változtatással: a bizonyítás elején legyen $w_1, w_2, \ldots$ a D^s Hilbert-tér ortonormált bázisa H helyett (vagyis írjunk w_k-t $(\lambda_k)^{-s/2} w_k$ helyett), és cseréljük a bizonyítás során mindenhol a H, V, V' tereket rendre a D^s, D^{s+1}, D^{s-1} terekre.

Idézetek forrásai

Az alábbi kommentárok túlnyomó részét Besenyei Ádám készítette, kivéve az 11, 29, 53, 77, 295, 369, 381, 389 oldalakat.

11. oldal: Az idézett mondatokat Galileo Galilei (1564–1642) írta az 1623-ban megjelent „*Il Saggiatore*" (*A vizsgáló*) című munkájában. A szöveget L. Geymonat „*Galileo Galilei*" című 1957-es életrajzának 1961-es magyar kiadásából vettük (Gondolat, 1961), fordította Fogarasi Miklós.

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

11. oldal: Albert Einstein (1879–1955) „*Az elméleti fizika módszereiről*" szóló írásában szerepel ez a mondat, lásd Albert Einstein: *Hogyan látom a világot?*, Faust Kiadó, Budapest, 1935, harmadik kiadás: Gladiátor Kiadó, 1996, 133. oldal. Az eredeti német kiadás 1934-ben jelent meg „*Mein Weltbild*" címmel, a magyar fordítás Szécsi Ferenc munkája. Az eredeti német szöveg a következő:

> Durch rein mathematische Konstruktion vermögen wir nach meiner Überzeugung diejenigen Begriffe und diejenige gesetzliche Verknüpfung zwischen ihnen zu finden, die den Schlüssel für das Verstehen der Naturerscheinungen liefern.

11. oldal: Részlet Wigner Jenő (1902–1995) „*The unreasonable effectivenss of mathematics in the natural sciences*" című cikkéből (Communications in Pure and Applied Mathematics, 13 (1960), No. 1.). Az eredeti szöveg:

> The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.

15. oldal: Az 1908. április 6. és 11. között Rómában megrendezett 4. Nemzetközi Matematikai Kongresszus egyik plenáris előadójának a szervezők Jules Henri Poincarét kérték fel. Poincaré hirtelen megbetegedése miatt „*A matematika jövője*" címmel beharangozott előadását április 10-én Jean-Gaston Darboux (1842–1917) olvasta fel. Ebben többek között a jól megválasztott matematikai elnevezések fontosságáról is szó esett, az idézett mondat ennek kapcsán hangzott el. Az eredeti francia szöveg a következőképpen szól [Rend. di Palermo **26** (1908), p. 156.; Rev. gén. sci. pures appl. **18** (1908) p. 932.]:

> „. . . la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes."

Az elmondott beszéd szerkesztett és helyenként némileg rövidített változata Poincaré 1908-ban „*Science et méthode*" (*Tudomány és módszer*) címmel kiadott művének 2. fejezeteként is megjelent. Az idézet magyar fordítása az interneten számos helyen fellelhető, a fordító kiléte jelen sorok szerzője számára ismeretlen.

29. oldal: Az idézet Henri Lebesgue (1875–1941) „*Notices sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*" című 1922-es dolgozatából való, Toulouse, 1922, 13–14. o. Az eredeti szöveg a következő:

> [. . .] dés que j'essayais de prendre part à une conversation mathématique il se trouvait un Analyste pour me dire : "Cela ne peut vous intéresser, il s'agit de fonctions ayant une dérivée", et un Géomètre pour répéter en son langage : "Nous nous occupons de surfaces ayant un plan tangent".

37. oldal: Charles Hermite 1893. május 20-án Párizsban kelt levelében egy matematikai levezetés végeztével írta az idézett sorokat Thomas Joannes Stieltjesnek. Az eredeti francia szöveg így szól [Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, vol. 2, szerk. B. Baillaud és H. Bourget. Gauthier-Villars, 1905, p. 317–319.]:

> „Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées."

A magyar fordítás Szőkefalvi-Nagy Béla (1913–1998) „*Valós függvények és függvénysorok*" című 1965-ben írt kitűnő tankönyvéből származik, a Bevezetés 15. oldalán található. Érdekességképpen megemlítjük, hogy az idézet felbukkan Ottlik Géza (1912–1990) 1980-ban „*Próza*" címmel megjelent kötetének „*Egyetem, BH*" címet viselő írásában az alábbi formában:

> „Borzalommal és iszonyodva fordulok el ezektől a függvényektől, amelyeknek nincsen deriváltjuk."

53. oldal: Az 1980-as évek végén Jacques-Louis Lions (1928–2002) a Collège de France renoválása miatt az Henri Poincaré Intézet Darboux termében tartotta a szemináriumait. Az egyik alkalommal Haïm Brézis (1944–2024) adott elő, és az egyik résztvevő megkérdezte, hogy lehetnek-e az eredményeinek gyakorlati alkalmazásai. Erre reflektált Jean Leray (1906–1998), majdnem egy fél évszázaddal Lebesgue halála után. A történetet Alain Haraux (1949–), az esemény szemtanúja mesélte a jelen sorok írójának (K. V.). Az eredeti hozzászólás a következő:

> Il est intéressant qu'il y a quelques années, exactement la même question a été demandée, dans cette même salle par un mathématicien appelé . . .Lebesgue.

77. oldal: Az idézet Neumann János (1903–1957) megjegyzése az amerikai Számítógép Társaság 1947-es első országos konferenciáján tartott főelőadásában, amint azt Franz L. Alt említi „*Archaeology of computers: Reminiscences, 1945–1947*" című dolgozatának a végén. A cikk adatai: Communications of the ACM, volume 15, issue 7, July 1972, special issue: *Twenty-fifth anniversary of the Association for Computing Machinery*, p. 694.

Az eredeti szöveg a következő:

> If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

103. oldal: Az idézet Joseph Fourier „*A hővezetése analitikus elmélete*" című 1822-ben megjelent művének bevezetőjében, a xiii. oldalon található. Az eredeti francia szöveg ekképpen szól:

> „L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques."

Sajnos jelen sorok szerzője már nem emlékszik arra, hogy vajon a magyar fordítást maga készítette-e, vagy valahol olvasta azt.

105. oldal: Az idézet George Berkeley „*The Analyst*" (*Az analizáló*) című művének 35. paragrafusában olvasható angolul eredetiben:

> „And what are these Fluxions? The Velocities of evanescent Increments? And what are these same evanescent Increments? They are neither finite Quantities nor Quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the Ghosts of departed Quantities?"

A magyar fordítás Fehér Márta munkája: „*Tanulmány az emberi megismerés alapelveiről és más írások*", Gondolat, Budapest, 1985., 540. oldal.

143. oldal: Louis Pasteur a „*Le salut Lyon*" című napilapban 1871 márciusában „*Pourquoi la France n'a pas trouvé d'homme supérieur au moment du péril?*" címmel közölt egy írást [Revue scientifique, 22 juillet 1871, 2e sér., 1, p. 73–76.; Œvres complètes, vol 7., Masson, Paris, 1924. p. 211–221.], amelyben az eredeti francia szöveg olvasható:

> „Non, mille fois non, il n'existe pas une catégorie de sciences auxquelles on puisse donner le nom de sciences appliquées. Il y a la science et les applications de la science, liées entre elles comme le fruit à l'arbre qui l'a porté."

Az idézet magyar fordítása a

`https://www.kfki.hu/~cheminfo/osztaly/emlek/vas.html`

weboldalon található cikkből származik.

167. oldal: Az eredeti francia idézet François Arago (1786–1853) francia fizikus, csillagász és politikus Poisson életéről és munkásságáról írott esszéjében, a Poisson haláláról szóló szakaszban olvasható (*Œuvres complètes de François Arago, secrétaire perpétuel de l'académie des sciences*, Gide et J. Baudry, Paris, 1854, Tome 2, p. 662.):

> „La vie n'est bonne qu'à deux choses : à faire des mathématiques et à les professer."

Arago elbeszélése szerint Poisson szokása volt ezt mondogatni. A közölt magyar fordítás a jelen sorok írójától származik.

249. oldal: Az idézet Joseph Fourier „*A hővezetés analitikus elmélete*" című 1822-ben megjelent művének bevezetőjében, a xv. oldalon található. Az eredeti francia szöveg ekképpen szól:

> „[...] l'analyse mathématique [...] semble être une faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièvité de la vie et à l'imperfection des sens [...]"

Sajnos a jelen sorok szerzője már nem emlékszik arra, hogy vajon a magyar fordítást maga készítette-e vagy valahol olvasta azt.

295. oldal: Az idézet d'Alembert 1821-ben megjelent Összes műveinek első kötetében, Condorcet laudációjában olvasható a ii. oldalon. Az eredeti francia szöveg a következő:

> „Vous ne serez jamais qu'un philosophe, lui disait-elle ; et qu'est-ce qu'un philosophe ! — c'est un fou qui se tourmente pendant sa vie, pour qu'on parle de lui lorsqu'il n'y sera plus."

317. oldal: Az idézet Oliver Heaviside (1850–1925) „*Electromagnetic theory*" című könyve 1899-ben megjelent második kötetének 9. oldalán olvasható; az eredeti szöveg a következő:

> „Shall I refuse my dinner because I do not fully understand the process of digestion?"

Lásd `https://en.wikiquote.org/wiki/Oliver_Heaviside`.

369. oldal: Idézet Jean le Rond d'Alembert-nek (1717–1783) a francia Enciklopédiához írott bevezetőjéből: „*Discours préliminaire de l'Encyclopédie*", Paris, Vrin, 1984, d'après l'édition de 1763, pp. 79–80. Az eredeti megfogalmazás így szól:

> Le pays de la raison et des découvertes est d'une assez petite étendue ; et souvent au lieu d'y apprendre ce que l'on ignorait, on ne parvient à force d'étude qu'à désapprendre ce qu'on croyait savoir.

381. oldal: Idézet Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) 1945-ben megjelent „*An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*" című könyvéből (124. o.). Az eredeti szöveg a következő:

> „Practical application is found by not looking for it, and one can say that the whole progress of civilization rests on that principle."

389. oldal: Részlet Fourier 1811-es pályamunkájának az akadémiai bírálóbizottsági jelentéséből, idézi J.-P. Kahane a [88] dolgozatában. Az eredeti francia szöveg a következő:

> „[...] Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface ; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque choses à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur. [...]"

411. oldal: Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002) önéletrajzi könyvének kezdőmondatai, lásd [170]. Az eredeti szöveg a következő:

„Je suis mathématicien. Les mathématiques ont rempli ma vie."

437. oldal: Az idézet angol fordításban J. W. Krutch „*The Colloid and the Crystal*" című cikkében olvasható:„Nature laughs at the difficulties of integration". A cikk az „*The Armchair Science Reader*" című könyvben jelent meg (szerk. I. Gordon és S. Sorkin, New York, 1959). Laplace műveiben nincs nyoma, de gyakran tett hasonló értelmű megjegyzéseket.

457. oldal: William Thomson (Lord Kelvin) (1824–1907) így jellemezte „*Treatise On Natural Philosophy*" című könyvében Joseph Fourier „*A hővezetés analitikus elmélete*" című munkáját.

Az eredeti szöveg a következő:

„[. . .] Fourier's great mathematical poem [. . .]"

471. oldal: Az idézet Pólya György (1887–1985) világhírű matematikus, a matematikatanítás egyik megreformálója és a heurisztika kidolgozója „*A gondolkodás iskolája*" című könyvéből származik. A mű először angol nyelven jelent meg „*How to solve it*" címmel 1945-ben, de később számtalan nyelvre, köztük magyarra is lefordították. A magyar fordítás a nemzetközi hírű tudományfilozófus Lakatos Imre (1922–1974) munkája. A műben Pólya azt a kérdést járja körül részletesen, hogy milyen stratégia mentén érdemes egy probléma megoldásának nekilátni. Ennek egyik sarkalatos lépése a tervkészítés, amelynek során az idézett tanácsot is érdemes átgondolnia a problémamegoldónak.

Ábrák jegyzéke

1.1. Koszinusztétel 17
1.2. Háromszög-egyenlőtlenség 18
1.3. Tégla és gömb 19
1.4. Halmaz belső, külső és határpontja 21
1.5. Összefüggő nyílt halmaz 23
1.6. A topológus szinuszgörbéje 24
1.7. Nulla távolságú diszjunkt zárt halmazok 25
1.8. A H halmaz ε sugarú környezete 26
1.9. Az 1.42. Állítás bizonyításának szemléltetése 27

3.1. Az η_ε függvények 44
3.2. Ha $x \notin \overline{K_\varepsilon}$, akkor K és $\overline{B(x,\varepsilon)}$ diszjunktak 45
3.3. Az Ω^δ halmaz 49
3.4. A 3.31. Állítás bizonyításának szemléltetése 51

4.1. Lipschitz-tartomány két dimenzióban 55
4.2. A körlap mint sima peremű tartomány 56
4.3. A négyzetlap mint Lipschitz-tartomány 57
4.4. Konvex halmaz 58
4.5. Külső normális 59
4.6. Érintő paralelogrammák 60
4.7. Felületi vektormező 65
4.8. Kifelé áramlás az x pontban 66
4.9. Külső normális egy dimenzióban 67
4.10. Vektormezők divergenciája 69
4.11. Az $f(x,y,z) = (-y,x,z)$ vektormező és rotációja 72
4.12. Egyszerű zárt görbe által határolt felület és külső normális . . 73

5.1. Az $x + y = c$ egyenletű egyenesek 85
5.2. Áttérés új koordinátákra 87
5.3. Karakterisztikák 90
5.4. Karakterisztikák 91

5.5. Karakterisztikák és kezdeti görbe 93
5.6. Karakterisztikus görbék 96

6.1. Izoterma és gradiens 106
6.2. Hőáramlás kicsiny felületdarabon keresztül 107
6.3. Kifelé haladó hőáram vékony rúddarabban 108
6.4. Hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladat 111
6.5. Kifelé haladó hőáram téglalaptartományon 113
6.6. Vegyes feladat n dimenzióban 117
6.7. Húrdarabra ható erők 121
6.8. Szabadon mozgó végű húr 123
6.9. Rugalmasan rögzített végű húr 124
6.10. Hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladat 125
6.11. Membrán rezgései 126
6.12. Membrán rezgésének fizikai leírása 127
6.13. Szoliton 133

7.1. Koordináta-transzformáció 155

8.1. Pontszerű forrás vektormezője 178
8.2. A $B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}$ „lyukas” gömb 181
8.3. Szappanhártya drótkereten 189
8.4. Külső normális téglalapon 200
8.5. „Hegycsúcs levágása” 209
8.6. Az $\Omega \setminus \overline{B(x_0,\varepsilon)}$ „lyukas” tartomány 221
8.7. Az $\Omega \setminus (\overline{B(x_1,\varepsilon)} \cup \overline{B(x_2,\varepsilon)})$ „kétlyukú” tartomány 225
8.8. Gömbre vonatkozó inverzió 228
8.9. Az inverzió egy tulajdonsága 230
8.10. Peremfelbontás 233
8.11. Tükrözés hipersíkra 237
8.12. Tükrözés negyedtéren 239
8.13. Tükrözés félgömbön 239
8.14. Polárkoordináták 240
8.15. Vegyes peremfeltétel 242

10.1. A 10.7. Megjegyzés szemléltetése (a hullámterjedés sebessége) 301

11.1. Az $\{x_0 \geq |x_1|\}$ konvex körkúp 336
11.2. A 11.88 Állítás szemléltetése (konvolúció) 349

15.1. Ω résztartományokra bontása 420

18.1. Az 5.10. Feladat a) és b) részének karakterisztikái 478

18.2. Az 5.11. és 5.12. Feladat karakterisztikus görbéi 479
18.3. Az 5.18. Feladat megoldásának szemléltetése 486
18.4. A 6.11. Feladat a) és b) részének karakterisztikus görbéi . . . 499
18.5. Pont és konvex zárt halmaz távolsága 502
18.6. Távolságfüggvény közrefogása 503
18.7. $y = -\frac{x^2}{2} + c$ grafikonjai 527
18.8. A $B(x_1, r) \subset B(x_2, R)$ tartalmazás 551
18.9. Az x és y pontokat összekötő lánc 557
18.10A 16.8. Feladat segédábrája 658

Irodalomjegyzék

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon, A. Douglisk L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value condition, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 623–727.

[3] V. I. Arnold, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[4] V. I. Arnold, On teaching of mathematics, *Russian Math. Surveys* **53** (1998), no. 1, 229–236.

[5] I. Babuška, Error-bounds for finite element method, *Numer. Math.* **16** (1971), 322–333.

[6] R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. di Mat.* **3** (1899), 1–123.

[7] G. Berkeley, *The Analyst: a Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, London, 1734.

[8] D. Bernoulli, Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748, *Hist. de l'Acad. Royale, Berlin 9 (1753), 147–172*, 173–195, megjelent 1755-ben.

[9] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Verlag von Veit., Leipzig, 1916.

[10] L. E. Blumenson, A derivation of the n-dimensional spherical coordinates, *Amer. Math. Monthly*, **67** (1960), 63–66.

[11] S. Bochner, Fourier series came first, *Amer. Math. Monthly* **86** (1979), no. 3, 197—199.

[12] V. I. Bogachev, *Measure Theory Vol I–II*, Springer, Berlin, 2007.

[13] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, 2010.

[14] H. Brezis, F. Browder, Partial Differential Equations in the 20th Century, *Adv. Math.* **135** (1998), 76–144.

[15] I. G. Bubnov, On the stability of elastic systems (orosz nyelven), *Sbornik St. Petersburg Inst. Inzh. Put. Soobsch.* **81** (1913), 33–36.

[16] V. Bunyakovszkij [Bouniakowsky], Sur quelques inegalités concernant les intégrales aux différences finies, *Mem. Acad. Sci. St. Petersbourg*, ser. 7, tome **1**(9) (1859), 1–18.

[17] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. App. Mech.*, **1** (1948), 171–199.

[18] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. des Sci. Inst. Nat. France, XXIII, pp. 1–680, 1877.

[19] A. Calderón, A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* **88** (1952), 85–139.

[20] A. Calderón, A. Zygmund, On singular integrals, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 289–309.

[21] G. Cantor, De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur, *Acta Math.*, **4** (1884), 381–392.

[22] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.*, **116** (1966), 135-–157.

[23] Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1945.

[24] A.-L. Cauchy, Sur les formules qui résultent de l'emploie du signe et sur $>$ ou $<$, et sur les moyennes entre plusieurs quantités, In: Cours d'Analyse, 1er Partie: Analyse algébrique 1821; In: *Œuvres de Cauchy*, Ser. 2 Vol. 3, 373–377.

[25] A.-L. Cauchy, *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, tome premier, Debure, Paris, 1823. In: *Œuvres de Cauchy* Ser. 2, Vol. 4., 9–261.

[26] A.-L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions complémentaires, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **19** (1844), 1377–1384. In: *Œuvres de Cauchy* Ser. 1, Vol. 8, 378–385.

[27] A.-L. Cauchy, *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1882–1958.

[28] P. R. Chernoff, Pointwise convergence of Fourier series, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 399–400.

[29] G. Chilov, *Analyse mathématique, fonctions de plusieurs variables réelles I–II*, Éditions Mir, Moscou, 1978.

[30] E. Chladni, *Die Akustik*, Breitkopf ind Härtel, Leipzig, 1802.

[31] W. K. Clifford, *Elements of Dynamic (An introduction to motion and rest in solid and fluid bodies)*, MacMillan and co., London, 1878.

[32] Császár Ákos, *Valós analízis I-II*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

[33] Czách László, Simon László, *Parciális differenciálegyenletek (1. félév)*, Eötvös Loránd Tudományegyetem jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[34] J. d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Histoire de l'Académie Royale, Berlin, 3, 1747* (1749), 214–219.

[35] J. d'Alembert, Suites des recherches, *Histoire de l'Académie Royale, Berlin, 3, 1747* (1749), 220–249.

[36] E. de Giorgi, Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **3** (1957), 25–43.

[37] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[38] L. Dirichlet, Über einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale, wenn der Werth des Potentials derselben in jedem Punkte ihrer Oberfläche gegeben ist, *Abh. Preuss. Akad. Wiss.*, 1850, 99–116.

[39] P. du Bois-Reymond, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln (mit drei lithografierten Tafeln), *Abhandlungen der Mathematisch-Physicalischen Classe der K. Bayerische Akademie der Wissenschaften* 12 (1876), 1–103.

[40] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[41] A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik* **322** (1905), 549–560.

[42] L. Euler, De vibratione chordarum exercitatio, *Nova Acta Erud., 1749, 512–527*; *Opera* (2) X, 50–62.

[43] L. Euler, Principia motus fluidorum, *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. VI (1756–1757), 271–311* (készült 1752-ben, megjelent 1761-ben); *Opera* (2) XII, 133–168.

[44] L. Euler, Supplément aux recherches sur la propagation du son, *Mém. de l'Acad. de Berlin XV (1759), 210–240* (megjelent 1766-ban); *Opera* (3) I, 452–483.

[45] L. Euler, *Opera Omnia*, Teubner, Leipzig és Berlin, majd Füssli, Zürich, 1911–.

[46] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Volume 19, AMS, Providence, RI, 2010.

[47] Fejér Lipót, Sur les fonctions bornées et intégrables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **131** (1900), 984–987; lásd meg: *Fejér Lipót összegyűjtött munkái*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970. első kötet, 37–41.

[48] G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung I–III*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975–1987.

[49] E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1022–1024.

[50] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Chez Firmin Didot, Paris, 1822.

[51] I. Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet, *Öfversigt Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar* **57** (1900), 39–46.

[52] I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.* **27** (1903), 365–390.

[53] A. P. French, *Vibrations and Waves*, The MIT Introductory Physics Series, W. W. Norton & Company Inc, New York, 1971.

[54] K. O. Friedrichs, Die Rand- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten (Anwendungen der direkten Methoden der Variationsrechnung), *Math. Ann.* **98** (1928), 205–247.

[55] K. O. Friedrichs, On differential operators in Hilbert spaces, *Amer. J. Math.* **61** (1939), 523–544.

[56] K. O. Friedrichs, The identity of weak and strong extensions of differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **55** (1944), 132–151.

[57] E. Gagliardo, Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, *Ricerce Mat.* **7** (1958), 102–137.

[58] B. G. Galerkin, On electrical circuits for the approximate solution of the Laplace equation (orosz nyelven), *Vestnik Inzh.* **19** (1915), 897–908.

[59] L. Gårding, An inequality for hyperbolic polynomials, *J. Math. Mech.* **8** (1959) 957–965.

[60] C. F. Gauss, Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo novo tractate, *Commentationes societas scientiarum Gottingensis recentiores*, Vol II, 1813, Werke Bd. V, 1–22.

[61] C. F. Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte, 1839, *Resultate aus den Beobachtungen des magnestischen Vereins*, IV, 1840, Werke Bd. V, 197–242.

[62] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol 224, Springer-Verlag, New York, 1977.

[63] Gnädig Péter, *Bevezetés a disztribúcióelméletbe és a fizikai alkalmazásaiba*, ELTE egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[64] G. Green, *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.* Printed for the Author by T. Wheelhouse, Nottingham, 1828.

[65] G. Green, On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities, *Trans. Camb. Philos. Soc.* **5**(3), 1835, 395–429., Presented 6 May 1833.

[66] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1985.

[67] K. Gustafson, A. Takehisa, (Victor) Gustave Robin: 1855–1897, *The Mathematical Intelligencer* **20** (1998), 47–53.

[68] K. Gustafson, T. Abe, The third boundary condition – was it Robin's?, *The Mathematical Intelligencer* **20** (1998), 63–71.

[69] J. Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, *Princeton University Bulletin* **13** (1902), 49–52.

[70] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, New Haven, 1923.

[71] Halász Gábor, *Bevezető komplex függvénytan*, Komplex függvénytani füzetek II, ELTE, Budapest, 2002.

[72] Paul R. Halmos, *Mértékelmélet*, Typotex, Budapest, 2010.

[73] W. R. Hamilton, On differences and differentials of functions of zero, *Trans. R. Irish Acad.*, XVII (1837), 235–236.

[74] H. Hankel, *Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten*, Dieterische Univ. Buchdruckerei, Göttingen, 1861.

[75] A. Harnack, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene*, Teubner, Leipzig, 1887.

[76] M. R. Hestenes, Extensions of the range of a differentiable function, *Duke Math. J.* **8** (1941), 183–192.

[77] Hilbert, D., Über das Dirichletsche Prinzip, *Jahresber. Deut. Math. Verein*, **8** (1900), 184–188.

[78] O. Hölder, Ueber einen Mittelwertsatz, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, 1889 (2): 38–47.

[79] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV*, Springer, Berlin, 1983–1985.

[80] J. Horváth, An introduction to distributions, *Amer. Math. Monthly* **77** (1970), 227–240.

[81] R. A. Hunt, On the convergence of Fourier series, *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues*, Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967, Carbondale, Ill.: Southern Illinois Univ. Press, 235—255.

[82] C. G. J. Jacobi, De determinantibus Functionalibus, *J. reine angew. Math.*, **22** (1841), 319–352

[83] F. John, *Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, 1982.

[84] M. Kac, Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly* **73** (1966), 1–23.

[85] Jan Kadlec, The regularity of the solution of the Poisson problem in a domain whose boundary is similar to that of a convex domain (Russian), *Czechoslovak Math. J.* **14(89)** (1964), 386-393.

[86] J.-P. Kahane, *Fourier Series*, in J.-P. Kahane, P.-G. Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach, 1995.

[87] J.-P. Kahane, Sommes partielles des séries de Fourier (d'après L. Carleson), *Séminaire Bourbaki*, **9** 1995, 491—507.

[88] J.-P. Kahane, Le retour de Fourier, Institut de France, Académie des Sciences, 2005.

[89] V. J. Katz, The history of Stokes' theorem, *Math. Mag.*, Vol. 52, No. 3 (May, 1979), 146-156.

[90] G. Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *J. Reine Angew. Math.* **40** (1850), 51–89.

[91] P. Koebe, Herleitung der partie lien Differentialgleichungen der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschajt, *Sitzungsber. Berlin. Math. Gessellschaft*, **5** (1906), 39–42.

[92] A. N. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **183** (1926), 1327-–1329.

[93] A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[94] Komornik Vilmos, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, Collection RMA, vol. 36, Masson–John Wiley, Paris–Chicester, 1994.

[95] Komornik Vilmos, *Valós analízis előadások I–II.*, TypoTEX, Budapest, 2003. Átdolgozott és bővített angol nyelvű kiadás: *Topology, Calculus and Approximation*, Springer, Universitext, 2017 és *Lectures on Functional Analysis and the Lebesgue integral*, Springer, Universitext, 2016.

[96] Komornik Vilmos, *Introduction aux EDP*, kézirat (23 o.), Strasbourg, 2007.

[97] D. J. Korteweg, G. de Vries, On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves, *Philosophical Magazine*, **39** (240) (1895): 422–443.

[98] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis 1–2.*, Typotex, Budapest, 2012, 2013.

[99] J.-L. Lagrange, Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son, *Miscellanea Taurinensis*, t. II, 1760-61; Oeuvres t. I, 151–316.

[100] E. Landau, *Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion*, Rend. Circolo Mat. Palermo **25** (1908), 337–345.

[101] P.-S. Laplace, Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1782*, 1785. 341–419. In: Œuvres de Laplace, Tome 10, 341–419.

[102] P.-S. Laplace, Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1787*, 1789. In: Œuvres de Laplace, Tome 11, 275–292.

[103] P.-S. Laplace, *Traité de mécanique céleste*, Paris, 1799–1825. In: Œuvres de Laplace, Tome 1–5.

[104] P.-S. Laplace, *Œuvres complètes*, 14 vols., Gauthier-Villars, Paris, 1878–1912.

[105] P. D. Lax, A. Milgram, Parabolic equations, in: *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, No. 33. Princeton University Press, 1954.

[106] H. Lebesgue, Sur une généralisation de l'intégrale définie, *C. R. Acad. Sci. Pairs*, **132** (1901), 1025–1027.

[107] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[108] A. M. Legendre, Mémoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le Calcul des Variations, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1786, 7–37, Paris, 1788.

[109] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, **63** (1934), 193–248.

[110] E. Levi, Sopra una proprietà caratteristica delle funzione armoniche, *Rend. Accad. d. Lincei Roma* **18** (1909), 10–15.

[111] L. Lichtenstein, Eine elementare Bemerkung zur reellen Analysis, *Math. Zeit.* **30** (1929), 794–795.

[112] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications 1–3*, Dunod, Paris, 1968.

[113] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[114] R. Lipschitz, De explicatione per series trigonometricas insttuenda functionum unius variablis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variablis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infintum disquisitio, *J. Reine Angew. Math.*, **63** (1864) 296–308.

[115] R. Lipschitz, Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **2** (1868), 288–302.

[116] R. Lipschitz, Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles, *Bull. Sci. Math.*, **10** (1876), 149–159.

[117] N. N. Luzin, *The integral and trigonometric series*, Moscow–Leningrad (1953) , p. 219 (In Russian) (Thesis; also: Collected Works, Vol. 1, Moscow, 1953, 48—212).

[118] E. Magenes, G. Stampacchia, I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **12** (1958), 247–358.

[119] L. Maligranda, Why Hölder's inequality should be called Rogers' inequality, *Math. Inequal. Appl.*, **1** (1998), 69–83.

[120] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873.

[121] E. J. McShane, Extension of range of functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **40** (1934), 837–842.

[122] N. Meyers, J. Serrin, $H = W$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **51** (1964), 1055–1056.

[123] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig, 1896.

[124] C. S. Morawetz (ed.), *Kurt Otto Friedrichs, Selecta*, Vol. 1, Birkhäuser Verlag, 1986.

[125] J. Moser, A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 457–468.

[126] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 577–591.

[127] R. Murphy, *Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions, Part I, On Electricity*, Printed at the Pitt Press by John Smith, Cambridge, 1833.

[128] J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.* **80** (1958), 931–954.

[129] J. Naumann, Remarks on the prehistory of Sobolev spaces, Preprint Nr. 02-2, Inst. für Mathematik, Humboldt Univ., Berlin, 2002., elektronikusan elérhető:
`www.mathematik.hu-berlin.de/publ/pre/2002/P-02-2.ps`

[130] C.-L. Navier, Sur les lois des mouvements des fluides, en ayant égard c l'adhésion des molécules *Ann. de Chimie*, **19** (1821), 244–260.

[131] E. Nelson, A proof of Liouville's theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961) 995.

[132] C. G. Neumann, Über die Integration der partiellen Differentialgeichung $\partial^2\Phi/\partial x^2 + \partial^2\Phi/\partial y^2$, *J. Rein. Angew. Math*, **85** (1861), 335–366.

[133] C. G. Neumann, Zur Theorie des Logaritmischen und des Newton'schen Potentials I–II., *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* **22** (1870), 49–56, 264–321.

[134] C. G. Neumann, *Untersuchungen über das logaritmische und Newton'sche Potential*, Leipzig, 1877.

[135] I. Newton (anonim publikáció), Scala graduum Caloris. Calorum Descriptiones & signa., *Phil. Trans.*, **22** (1701), 824–829.

[136] I. Newton, *The Method of Fluxions and Infinite Series: With Its Application to the Geometry of Curve-lines* (Translated by John Colson), Henry Woodfall and John Nourse, London, 1736.

[137] I. Netuka, J. Veselý, Mean value property and harmonic functions, In: K. GowriSankaran, J. Bliedtner, D. Feyel, M. Goldstein, W. K. Hayman, I. Netuka (eds), *Classical and Modern Potential Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1994., 359–398.

[138] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, *Ann. Sc. Norm. Pisa* **13** (1959), 115–162.

[139] M. Ostrogradsky, Première note sur la théorie de la chaleur, *Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg*, ser. 6, v. 1 (1831), 129–133.

[140] B. C. Patterson, The origins of the geometric principle of inversion, *Isis*, **19** (1933), 154–180.

[141] Petruska György, *Analízis II.*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1999.

[142] H. Poincaré, Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *Amer. J. Math.* **12** (1890), 211–294.

[143] H. Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **8** (1894), 57–156.

[144] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécaniques céleste*, v. III, p. 10, Gauthier-Villars, Paris, 1899., Dover, N.Y., 1957.

[145] S. D. Poisson, Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes, *Nouveau Bull. Soc. Philomathique de Paris*, **3** (1813), 388–392.

[146] S. D. Poisson, Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, *Mém. Acad. Sci. Inst. France*, v. VIII (1829), 357–571.

[147] Pólya György, *A gondolkodás iskolája (A matematika új módszerei új megvilágításban)*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1957.

[148] J. Priwaloff, Sur les fonctions harmoniques, *Mat. Sb.*, **32** (1925), 3, 464–471.

[149] H. Rademacher, Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale, *Math. Ann.*, **79**(4) (1919), 340–359.

[150] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.

[151] F. Rellich, Ein Satz über mittlere Konvergenz, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1930), 30–35.

[152] I. Richards, On the Fourier inversion theorem for $\mathbb{R}^1$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), 145.

[153] F. Riesz, Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, **144** (1907), 615–619.

[154] F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, **149** (1909), p 974–977.

[155] F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.*, **69** (1910), 449–497.

[156] Riesz Frigyes, *Fourier-sorok, komplex és valós függvénytan előadások*, Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2024.

[157] Riesz Frigyes, Lebesgue integrálfogalmának fejlődése, *Mat. Lapok*, **1** (1950), 79–90.

[158] Riesz Frigyes, Nullahalmazok és szerepük az analízisben, in: *Az I. Magyar Matematikai Kongesszus Közleményei*, 1952, 204–214.

[159] F. Riesz, B. Szőkefalvi-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. Magyar fordítás: *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[160] W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. Reine Angew. Math.* **135** (1908), 1–61.

[161] A. P. Robertson, W. Robertson, *Topological Vector Spaces*, Cambridge, 1964.

[162] L. J. Rogers, An extension of a certain theorem in inequalities, *Messenger of Mathematics*, New Series, **XVII** (10) (1888), 145–150

[163] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[164] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2. kiadás, McGraw Hill, New York, 1991.

[165] F. Sarrus, Mémoire sur les oscillations des corps flottants, *Annales de mathématiques pures et appliquées* (Nismes), **19** (1828), 185–211.

[166] E. Schrödinger, An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules, *Phys. Rev.*, **28** (1926), 1049–1070.

[167] L. Schwartz, Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques, *Ann. Univ. Grenoble* **21** (1945), 57–74.

[168] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1950–1951.

[169] L. Schwartz, Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, *C. R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954), 847–848.

[170] L. Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob Paris, 1997.

[171] H. A. Schwarz, Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ unter vorgeschrieben Grenz- und unstetigkeitsbedingungen, *Montatsber. Berliner Akad.*, 1870, 767–795.

[172] H. A. Schwarz, Über ein die Flächen kleinsten Flächenhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, *Acta Soc. Sci. Fenn.* **15** (1885), 315–362.

[173] B. Simon, *Uniform convergence of Fourier series*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 55–56.

[174] Simon László, *Parciális differenciálegyenletek (2. félév)*, Eötvös Loránd Tudományegyetem jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[175] Simon László, E. A. Baderko, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[176] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 258, Springer-Verlag, New York, 1983.

[177] S. Sobolev, Cauchy-probléma funkcionálterekben, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **3** (1935), 291–294 (oroszul).

[178] S. L. Sobolev, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Mat. Sb.* **43** (1936), 39–72.

[179] S. L. Sobolev, A funkcionálanalízis egy tételéről (oroszul), *Mat. Sb.* **46** (1938), 471–497.

[180] S. L. Sobolev, *A funkcionálanalízis néhány alkalmazása a matematikai fizikában* (orosz nyelven), Leningrad Univ., Leningrad, 1950. (Angol fordításban: Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.

[181] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, *C. R. Acad. Sci.* **258** (1964), 4413–4416.

[182] J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class (An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities)*, Cambridge Univ. Press, NY, 2004.

[183] V. A. Steklov, A matematikai fizika differenciálegyenleteiről (oroszul), *Math. Sb.* **19** (1896–97), 469–585.

[184] G. G. Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **8** (1845), 287–319.

[185] Stoyan Gisbert, Takó Galina, *Numerikus módszerek 3.*, TypoTEX Kiadó, Budapest, 1997.

[186] J. W. Strutt (Lord Rayleigh), On the theory of resonance, *Phil. Trans. Royal Soc.*, Series A **161** (1870), 77–118.

[187] C. Sturm, J. Liouville, Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable, *J. Math. Pures Appl.* **2** (1837), 220–222.

[188] Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok*, Polygon, Szeged, 2002.

[189] Szűcs András, *Topológia*, elektronikus jegyzet, ELTE TTK Matematikai Intézet, `http://web.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf`

[190] P. G. Tait, *An Elementary Treatise on Quaternions*, MacMillan and co, London, 1867.

[191] B. Taylor, De motu Nervi tensi., *Phil. Trans.*, **28** (1713), 26–32.

[192] M. E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton Univ. Press 1981.

[193] W. Thomson [Lord Kelvin], Extraits d'une lettre de M. Thomson à M. Liouville, *J. Math. Pures Appl.*, **10** (1845), 364–367.

[194] W. Thomson [Lord Kelvin], Extraits de deux lettres adressées à M. Liouville, *J. Math. Pures Appl.*, **12** (1847), 256–264.

[195] W. Thomson [Lord Kelvin], Note sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusieurs questions de physique mathématique, *J. Math. Pures Appl.* **12** (1847), 493–496.

[196] W. Thomson [Lord Kelvin], Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations, *Camb. Dublin Math. J.*, **3** (1848), 84–87.

[197] W. Thomson [Lord Kelvin], P. G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Oxford University Press, 1867.

[198] H. Tietze, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, *J. Reine Angew. Math.* **145** (1915), 9–14.

[199] F. Trèves, *Introduction to Pseudo Differential and Fourier Integral Operators*, University Series in Mathematics, Plenum Publ. Co. 1981.

[200] F. Tricomi, Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto, *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Nat.*, (5) **14** (1923), 133–247.

[201] A. N. Tyihonov, Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, *Math. Sb.* **42** (1935), 199–216.

[202] P. Urysohn, Über die Machtigkeit der zusammenhangenden Mengen, *Math. Ann.* **94** (1925), 262–295.

[203] Verhóczki László, *Klasszikus differenciálgeometria*, elektronikus jegyzet, ELTE TTK Matematikai Intézet,
`http://web.cs.elte.hu/geometry/vl/KlasszDiffGeo.pdf`

[204] Verhóczki László, *Sokaságok differenciálgeometriája*, elektronikus jegyzet, ELTE TTK Matematikai Intézet,
`http://web.cs.elte.hu/geometry/vl/dgjegy22.pdf`

[205] V. Sz. Vlagyimirov, *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[206] V. Sz. Vlagyimirov, *Parciális differenciálegyenletek feladatgyűjtemény*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.

[207] V. Volterra, Delle Variabili Complesse Negli Iperspazi, *Rendiconti della R. Accad. der Lincei*, ser. IV, v. V, 1889, 158–165; Opere, v. I, 403–411.

[208] P. Wagner, A new constructive proof of the Malgrange-Ehrenpreis theorem, *Amer. Math. Monthly* **116** (2009), no. 5, 457–462.

[209] K. Weierstrass, Über das sogenannte Dirichlet'sche Prinzip, Gelesen in der Königl. Akad. Wiss. 14 Juli 1870, In: *Mathematische Werke von*

Karl Weierstrass, 2 Band, Abhandlungen II, Berlin, Mayer & Müller, 1895.

[210] H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.* **1** (1940), 414–444.

[211] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** 1934), 63–89.

[212] D. V. Widder, Positive temperatures on an infinite rod, *Trans. Amer. Math. Soc.* **55** (1944), 85–95.

[213] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, *Phys. Rev. Lett.*, **15** (6) (1965), 240–243.

Tárgymutató

abszolút érték
  szám, 15
  vektor, 16
alapfüggvény, 321
alapmegoldás, 334, 341, 352
  hullámegyenlet
    egy dimenzióban, 334, 354
    három dimenzióban, 354
    két dimenzióban, 354
  hővezetési egyenlet, 254, 336, 356
  közönséges differenciálegyenlet, 333, 353
  Laplace-egyenlet, 177
  Poisson-egyenlet, 358
  példák, 353
alaprendszer, 94
állandó együtthatós lineáris differenciáloperátor, 352
állapotváltozó, 77
általánosított
  derivált, 319
  függvény, 319, 322
általánosított Cauchy-feladat
  hiperbolikus egyenletekre, 369, 372
  parabolikus egyenletekre, 381, 383
Annus Mirabilis
  Einstein, 120
  Newton, 105

Barenblatt-megoldás, 138
Bessel-egyenlőtlenség, 392
biharmonikus egyenlet, 130
Black–Scholes-egyenlet, 131
Brown-mozgás, 118
Burgers-egyenlet, 132

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, 31
Cauchy-egyenlőtlenség, 17
Cauchy-feladat, 80
  hullámegyenletre, 125
  hővezetési egyenletre, 111, 116
Cauchy-féle főérték, 363
Cauchy-integrálformula, 219, 235
co-area formula, 64
curl, 71

d'Alembert-formula, 300, 375
derivált disztribúció értelemben, 332
dipólus, 224
Dirac-delta, 49, 178, 318, 325
  tartója, 329
direkt szorzat
  disztribúciók, 336
    definíció, 339

műveleti tulajdonságok, 340
függvények, 337
Dirichlet-elv, 190, 192
Dirichlet-energia, 190
Dirichlet-feladat, 437, 439
erős megoldás, 438, 439
gyenge megoldás, 438, 439
disztribúció, 319, 322
algebrai műveletek, 326
deriváltja, 329–331, 403
direkt szorzata, 336
Fourier-sora, 396
globális egyenlőség, 327
kompakt tartójú, 329
konvolúciója, 341, 344
lokális egyenlőség, 328
periodikus, 396
példák, 323
reguláris, 324, 403
konvolúciója, 346
tartója, 329
rendje, 326
szorzása, 403
tartója, 328
temperált, 402
divergencia, 67
divergenciatétel
skalár alak, 66
vektor alak, 67
Duhamel-elv, 263, 299, 406

egyszerű réteg, 227, 355
ponteciálja, 227
egységapproximáció, 37, 43, 322
egységosztás
fedésnek alárendelt, 52
tétele, 51
eikonal egyenlet, 133
elliptikus egyenlet, 144
egyenletesen, 147
első integrál, 91, 94
energia függvény, 313
evolúciós feladat, 457

faktornorma, 440
felszíni integrál, 59
Fick törvénye, 115
fluens, 104
fluxió, 104
fluxus, 66
forrás, 69
forrástag, 110
Fourier törvénye, 105
Fourier-módszer
vegyes hiperbolikus feladatokra, 306
vegyes parabolikus feladatokra, 284
Fubini–Tonelli-tétel, 32
függőségi kúp, 374

Gamma-függvény, 64
Gauss–Osztrogradszkij-tétel, 420
skalár alak, 66
vektor alak, 67
gömb, 19
felszíne, 63
térfogata, 33
gömbfelület, 19
gradiens, 70
Green reprezentációs tétele, 224, 226
Green-formula
első, 170, 171
harmadik, 220
második, 172
Green-függvény, 224, 226
félgömb, 239
féltér, 236
gömb esetén, 230
negyedtér, 238
szimmetriatétele, 225
gyenge maximumelv
$\partial_t u - \Delta u$ operátorra, 277

Hadamard példája, 82, 96
halmaz
  átmérője, 25
  belseje, 21
  határa, 21
  külseje, 21
  lezártja, 21
harmonikus függvény, 205
harmonikus polinom, 240
  homogén, 240
Harnack
  -egyenlőtlenség, 235, 244, 245
  első konvergenciatétele, 245
  -elv, 245
  második konvergenciatétele, 245
Harnack-egyenlőtlenség, 551, 558
háromszög-egyenlőtlenség, 18
Heaviside-függvény, 318, 363
  n dimenziós, 366
  deriváltja, 331
hiperbolikus egyenlet, 144
  ultrahiperbolikus, 145
Hooke törvénye, 124
Hopf–Cole-transzformáció, 140
hossz, 16
Hölder-egyenlőtlenség, 31
hőmérséklet-vezetési tényező, 110
hővezetés
  két dimenzióban, 112
  n dimenzióban, 112
  stacionárius, 116
  vékony rúdban, 108
hővezetési egyenlet
  egy dimenzióban, 110, 406
  két dimenzióban, 114
  n dimenzióban, 115
hővezetési tényező, 108
hullámegyenlet
  n dimenzióban, 127
  egydimenziós, 87, 122, 407
  három dimenzióban, 127
  két dimenzióban, 126
hullámegyenlet megoldása
  egy dimenzióban, 374
  három dimenzióban, 377
  két dimenzióban, 377
hullámmozgás, 295
Huygens-elv, 378

infinitezimális mennyiség, 104
integrálható egyenlet, 83
integrálközép, 214
integrálszámítás alaptétele, 82
integráltranszformáció, 33
integrálátlag, 214
inverzió, 227
iránymenti derivált, 70

Jacobi-
  determináns, 33, 38
  mátrix, 33, 38

karakterisztika, 90, 139
karakterisztikus
  egyenlet, 139, 164
  kúp, 374
  rendszer, 90, 93
Kelvin-transzformáció, 228, 246
kettős réteg, 224
  potenciálja, 224
kezdeti feltétel, 80, 110, 115
kezdetiérték-feladat, 80
  hullámegyenletre, 125
  hővezetési egyenletre, 111, 116
Kirchhoff-formula, 378
kiterjesztési tétel, 418
klasszikus Cauchy-feladat
  hiperbolikus egyenletekre, 370
  hővezetési egyenletre, 256
  parabolikus egyenletekre, 382
klasszikus kezdetiérték-feladat
  hővezetési egyenletre, 256

klasszikus vegyes feladat
hővezetési egyenletre, 276
kompakt beágyazás, 419
kompakt halmaz, 24
konjugált kitevők, 31
kontinuitási egyenlet, 136, 141
konvergencia
$(*)$, 344
$\mathscr{D}(\Gamma)$-ban, 395
$\mathscr{D}(\Omega)$-ban, 321
$\mathscr{S}(\mathbb{R})$-ben, 398
gyenge $\mathscr{D}'(\Gamma)$-ban, 396
gyenge $\mathscr{D}'(\Omega)$-ban, 326
gyenge $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$-ben, 403
konvex halmaz, 58
konvolúció, 48
disztribúciók, 341, 344
definíció, 345
műveleti tulajdonságok, 349
függvények, 342
korlátosság, 20
korrekt kitűzésű feladat, 80, 81
Korteweg–de Vries-egyenlet, 132
környezet, 20
adott sugarú, 26
középérték-tulajdonság, 215
közönséges differenciálegyenletre visszavezethető egyenlet, 84
külső normális, 59

Laplace-egyenlet, 117
p-Laplace-egyenlet, 133
Laplace-operátor, 73
Lebesgue-pontok, 32
Lebesgue-tétel, 32
Leibniz-szabály, 39
leszállás módszere, 378
levágás módszere, 419
lényeges szuprémum, 30
Liouville-tétel, 219, 220, 243, 245
Lipschitz-
folytonosság, 54
konstans, 54
perem, 54
lökéshullám, 132
lokálisan integrálható függvény, 31

maximumelv
erős, 217
gyenge, 206, 209, 278
Maxwell-egyenletek, 134
másodrendű lineáris egyenletek
kanonikus alakja, 148
osztályozása, 143
megengedhető állapot, 190
megmaradási törvény, 506
megoldás
általánosított, 79
egyértelműsége, 81
folytonos függése, 81
gyenge, 79
klasszikus, 78
létezése, 81
megszüntethető szingularitás tétele, 246
mellékfeltétel, 80
membrán, 296
minimumelv
erős, 208, 218
gyenge, 208, 211
Minkowski-egyenlőtlenség, 18
mollifier, 49
momentumegyenletek, 136
monoton konvergencia tétele, 32
multiindexek, 39
abszolút értéke, 39
faktoriálisa, 39
rendezése, 39
összege, 39

nabla, 70
Navier–Stokes-egyenletek, 135

negatív rész, 211, 279
Neumann-feladat, 441, 443
  erős megoldás, 441
  gyenge megoldás, 441
Newton lehűlési törvénye, 110, 111
Newton-potenciál, 182
nyelő, 69
nyomtétel, 422
nyílt halmaz, 21
  relatív, 22

örvénymentes, 72
összefüggő halmaz, 22
  töröttvonalszerűen, 23
  útszerűen, 23
összefüggőségi komponens, 23
összenyomhatatlan, 69

parabolikus egyenlet, 145
  szigorúbb értelemben, 145
  tágabb értelemben, 145
parabolikus henger, 267
parabolikus perem, 267
parabolikus simítás, 260
paraméteres integrálok, 34
  differenciálhatósága, 34
  folytonossága, 34
parciális differenciálegyenlet
  elsőrendű lineáris, 90
  fogalma, 78
  főrésze, 79
  főrészükben lineáris, 79
  homogén, 80
  inhomogén, 80
  klasszikus megoldása, 78
  kvázilineáris, 79
  lineáris, 79
  rendje, 78
  szemilineáris, 79
  típusok, 79
  állandó együtthatós lineáris, 80, 352
Parseval-egyenlőség, 392
perem, 80
  C^k, 55
  Lipschitz-, 54
peremfeltétel, 80
  Dirichlet-féle, 110, 115, 117, 183
  első, 110, 115, 117, 183
  harmadik, 111, 116, 118, 184
  homogén, 80
  inhomogén, 80
  második, 110, 116, 118, 184
  Neumann-féle, 110, 116, 118, 184
  Robin-féle, 111, 116, 118, 184
  vegyes, 184
peremérték-feladat, 80
  megoldás egyértelműsége, 212
  első, 183
  harmadik, 184
  kitűzése, 183
  megoldás folytonos függése, 213
  második, 184
Plancherel-egyenlőség, 401
Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség, 414, 419
Poincaré-egyenlőtlenség, 425
Poisson-egyenlet, 117
Poisson-formula, 408
  $B(0,R)$ gömbön, 231, 232
  $B(x_0,R)$ gömbön, 234
  $\mathbb{R}^n_+$ féltéren, 237
Poisson-mag
  féltérre vonatkozó, 237
  gömbre vonatkozó, 231
pont
  belső, 20
  határ, 20
  külső, 20
porózus közeg egyenlete, 131

potenciálfüggvény, 72, 169
pozitív rész, 209, 278

Rademacher-tétel, 54
radiális megoldás, 173, 175
Rellich-tétel, 419
rezgés
  húr, 120
  lemez, 125
  longitudinális, 122
  transzverzális, 122
Riesz–Fischer-tétel, 30
Riesz-lemma, 31
rotáció, 71

sajátfüggvény, 194
  egydimenziós
    Laplace-operátor, 196
  kétdimenziós
    Laplace-operátor, 198
sajátérték, 194
  egydimenziós
    Laplace-operátor, 196
  kétdimenziós
    Laplace-operátor, 198
sajátérték-feladat
  harmadik, 194
Schrödinger-egyenlet, 129
sima függvény, 37
skalármező, 59
skalárszorzat, 16
spektráltétel
  Laplace-operátor, 449
stabilitás, 81
szakasz, 20
Szoboljev-tér, 320, 332
szoliton, 133, 140
szubharmonikus függvény, 205
szuperharmonikus függvény, 205

tartomány, 23
  C^k, 55
  Lipschitz-, 54
  lokálisan téglaszerű, 55
tartó, 40
távíróegyenlet, 129
távolság
  halmazoké, 24
  pontok, 16
tégla, 19
tesztfüggvény, 321
Thomson-elv, 192
topológus szinuszgörbéje, 23
töröttvonal, 20
transzportegyenlet, 128
Tricomi-egyenlet, 128
trigonometrikus sor, 396
turbulencia, 132
tükrözés módszere, 227

valeur principale, 363
variációs egyenlet, 438
változók szétválasztása, 96, 198
vegyes feladat, 80
  „fordított irányú”, 282
  hullámegyenletre, 125, 128, 462
  hővezetési egyenletre, 111, 116, 457
  megoldás egyértelműsége, 280–282
  megoldás folytonos függése, 280
vektormező, 59

Weierstrass példája, 192
Weierstrass-kritérium, 312
Weyl-lemma, 236

zárt halmaz, 21
  relatív, 22

Névmutató

Arago, François (1786–1853), 664

Baire, René-Louis (1874–1932), 21
Banach, Stefan (1892–1945), 30
Barenblatt, Grigorij Iszakovics (1927–2018), 138
Berkeley, George (1685–1753), 105, 663
Bernoulli, Daniel (1700-1782), 301
Bernoulli, Johann (1667–1748), 157
Besenyei, Ádám (1982–2022), 12
Bessel, Friedrich Wilhelm (1784–1846), 392
Black, Fischer Sheffey (1938–1995), 131
Boussinesq, Joseph Valentin (1842–1929), 132
Brézis, Haïm (1944–2024), 663
Brown, Robert (1773–1858), 118
Bunyakovszkij, Viktor Jakovlevics (1804–1889), 17
Burgers, Johannes Martinus (1895–1981), 132

Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp (1845–1918), 22
Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), 33
Carleson, Lennart Axel Edvard (1928–), 394
Cartan, Élie Joseph (1869–1951), 73
Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857), 17, 54, 81, 219, 220, 235
Charles Hermite (1822–1901), 37, 662
Chernoff, Paul Robert (1942–2017), 392
Chladni, Ernst (1756–1827), 130
Clifford, William Kingdon (1845–1879), 70
Cole, Julian David (1925–1999), 140
Coulomb, Charles-Augustin de (1736–1806), 182
Courant, Richard (1888–1972), 379, 432

d'Alembert, Jean le Rond (1717–1783), 295, 301, 369, 375, 665
Darboux, Jean-Gaston (1842–19917), 662
Dini, Ulisse (1845–1918), 391
Dirac, Paul Adrien Maurice (1902–1984), 318

Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (1805–1859), 112, 183, 192, 393
du Bois-Reymond, Paul David Gustav (1831–1889), 394
Duhamel, Jean-Marie Constant (1797–1872), 264

Ehrenpreis, Leon (1930–2010), 360
Einstein, Albert (1879–1955), 11, 118, 661
Euler, Leonhard Paul (1707–1783), 131, 157, 301
Evans, Griffith Conrad (1887–1973), 432

Fejér, Lipót (1880–1959), 394
Fick, Adolf Eugen (1829–1901), 115
Fischer, Ernst Sigismund (1875–1954), 30
Flanders, Donald Alexander (1900–1958), 50
Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768–1830), 103, 105, 249, 389, 390, 457, 663, 664, 666
Fresnel, Augustin-Jean (1788–1827), 379
Friedrichs, Kurt Otto (1901–1982), 49, 319, 432
Fubini, Guido (1879–1943), 32, 431

Galilei, Galileo (1564–1642), 11, 661
Gauss, Johann Carl Friedrich (1777–1855), 68, 192, 217
Germain, Marie-Sophie (1776–1831), 130
Gersgorin, Szemjon Aranovics (1901–1933), 507
Green, George (1793–1841), 68, 171, 173, 192, 227, 427
Gregory, James (1638–1675), 122

Hadamard, Jacques Salomon (1865–1963), 80, 81, 96, 378, 381, 665
Hamilton, Sir William Rowan (1805–1865), 70, 480
Hankel, Hermann (1839–1873), 73
Haraux, Alain (1949–), 663
Harnack, Carl Gustav Axel von (1851–1888), 235, 244, 245
Haüy, René-Just (1743-1822), 389
Heaviside, Oliver (1850–1925), 70, 130, 134, 317, 318, 665
Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von (1821–1894), 159
Hermite, Charles (1822–1901), 401
Hilbert, David (1862–1943), 192, 432, 452
Hölder, Otto Ludwig (1859–1937), 31, 54
Hooke, Robert (1635–1703), 124
Hopf, Eberhard Frederich Ferdinand (1902–1983), 140
Hunt, Richard Allen (1937–2009), 394
Huygens, Christiaan (1629–1695), 378

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851), 38
Jordan, Marie Ennemond Camille (1838–1922), 393

Kadlec, Jan (1939–1967), 456
Kelvin, Lord (Thomson, William) (1824–1907), 107
Kirchhoff, Gustav Robert (1824–1887), 378
Koebe, Paul (1882–1945), 217
Kolmogorov, Andrej Nyikolajevics (1903–1987), 394
Kruskal, Martin David (1925–2006), 133

Lagrange, Joseph-Louis (1736–1813), 68, 104, 130, 389, 390
Lakatos, Imre (1922–1974), 666
Landau, Edmund (1877–1938), 49
Laplace, Pierre-Simon (1749–1827), 118, 169, 389, 390, 437
Lax, Peter David (1926–2025), 49, 379
Lebesgue, Henri Léon (1875–1941), 29, 30, 32, 391, 662
Legendre, Adrien-Marie (1752–1833), 38, 389
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), 39, 67, 157
Leray, Jean (1906–1998), 53, 432, 663
Levi, Beppo (1875–1961), 32, 217, 431
Levi, Eugenio Elia (1883–1917), 217
Lions, Jacques-Louis (1928–2002), 418, 663
Liouville, Joseph (1809–1882), 219, 220, 228, 243, 245, 246
Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund (1832–1903), 54, 391
Luzin, Nyikolaj Nyikolajevics (1883–1950), 394

Magenes, Enrico (1923–2010), 418
Malgrange, Bernard (1928–2024), 360
Malus, Étienne Louis (1775–1812), 389
Maxwell, James Clerk (1831–1879), 70, 71, 118, 134
Merton, Robert Cox (1944–), 131
Minkowski, Hermann (1864–1909), 18
Moivre, Abraham de (1667–1754), 532
Morrey, Charles Bradfield (1908–1984), 432
Murphy, Robert (1806–1843), 118, 173

Napóleon, Bonaparte (1769–1821), 130
Navier, Claude-Louis (1785–1836), 136, 432
Nelson, Edward (1932–2014), 551
Neumann, Carl Gottfried (1832–1925), 112, 184, 192, 227
Neumann, János (1903–1957), 77, 663
Newton, Sir Isaac (1643–1727), 67, 104, 111, 131, 182
Nikodým, Otton Marcin (1887–1974), 432

Osztrogradszkij, Mihail Vasziljevics (1801–1862), 68
Ottlik, Géza (1912–1990), 662

Parseval des Chênes, Marc-Antoine (1755–1836), 392

Pasteur, Louis (1822–1895), 143, 664
Plancherel, Michel (1885–1967), 401
Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858–1947), 129
Poincaré, Jules Henri (1854–1912), 15, 73, 192, 414, 419, 425, 662
Poisson, Siméon Denis (1781–1840), 68, 118, 130, 167, 169, 235, 358, 408
Pólya, György (1887–1985), 471, 666
Ponthieux, Etiennette Gabrielle (1683–1775), 295, 665
Privalov, Ivan Ivanovics (1891–1941), 207

Quetelet, Lambert Adolphe Jacques (1796–1874), 228

Rademacher, Hans Adolph (1892–1969), 54
Radon, Johann Karl August (1887–1956), 432
Rayleigh, Lord (Strutt, John William) (1842–1919), 132
Rellich, Franz (1906–1955), 419, 432
Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826–1866), 192, 391
Riesz, Frigyes (1880–1956), 30–32
Robin, Victor Gustave (1855–1897), 112, 184
Rogers, Leonard James (1862–1933), 31
Russell, John Scott (1808–1882), 132

Sarrus, Pierre Frédéric (1798–1861), 68
Scholes, Myron (1941–), 131
Schrödinger, Erwin Rudolf Josef Alexander (1887–1961), 129
Schwartz, Laurent-Moïse (1915–2002), 39, 319, 396, 411, 666
Schwarz, Karl Hermann Amandus (1843–1921), 17, 192
Simon, Barry Martin (1946–), 393
Simon, László (1940–2021), 12
Smith, William Robertson (1846–1894), 70
Sommerfeld, Arnold (1868–1951), 108
Stampacchia, Guido (1922–1978), 418
Steiner, Jakob (1796–1863), 228
Stieltjes, Thomas Joannes (1856–1894), 37, 662
Stokes, Sir George Gabriel (1819–1903), 72, 136, 432
Strutt, John William (Lord Rayleigh) (1842–1919), 132
Szoboljev, Szergej Lvovics (1908–1989), 50, 319
Szőkefalvi-Nagy, Béla (1913–1998), 30, 662

Tait, Peter Guthrie (1831–1901), 70, 206
Taylor, Brook (1685–1731), 122, 301
Thomson, William (Lord Kelvin) (1824–1907), 72, 173, 192, 206, 228, 246, 457, 666
Tonelli, Leonida (1885–1946), 32, 431

Tricomi, Francesco Giacomo (1897–1978), 129
Tyihonov, Andrej Nyikolajevics (1906–1993), 272, 387

Vitali, Giuseppe (1875–1932), 432
Volterra, Vito (1860–1940), 73

Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897), 192
Weyl, Hermann Klaus Hugo (1885–1955), 236
Widder, David Vernon (1898–1990), 271, 387
Wigner, Jenő (1902–1995), 11, 661
Wirtinger, Wilhelm (1865–1945), 414, 419

Zabusky, Norman J. (1929–2018), 133

Jelölések

$'$, 331
$A(S(x,r))$, 63
$B(a,r)$, 19
$C^k(\Omega)$, 37
$C^k(\overline{\Omega})$, 38
$C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, 382
$C^{2,1}(Q_T)$, 267
$C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, 256
$C^{2,1}(\overline{Q_T})$, 267
$C^{2,1}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, 256
$C^k_0(\Omega)$, 41
$H^1(\Omega)$, 417
$H^1(\Omega)'$, 429
$H^1(\mathbb{R}^N)$, 412
$H^1_0(\Omega)$, 424
$H^2(\Omega)$, 426
$H^k(\Omega)$, 428
$H^{-1}(\Omega)$, 429
$H^{-k}(\Omega)$, 431
$H^k_0(\Omega)$, 428
H_ε, 26
$L^\infty(\Omega)$, 29
$L^p(\Omega)$, 29
$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 31
$L_{2\pi}$, 390
$S(a,r)$, 19
T_f, 324, 403
$V(B(x,r))$, 33
Δ, 73
Γ, 64
curl, 71
$\mathscr{D}'(\Gamma)$, 396
$\mathscr{D}(\Gamma)$, 395
$\mathscr{D}(\Omega)$, 321
$\mathscr{D}'(\Omega)$, 326
δ_a, 325
diam, 25
dist, 24
div, 67
$\mathscr{M}$, 383
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+_0$, $\mathbb{R}^-$, 15
$\mathbb{R}^{n+1}_+$, 16
$\mathbb{R}^{n+1}_0$, 16
ext H, 21
grad, 39
int H, 21
$\langle\cdot,\cdot\rangle$, 16
∇, 70
ω_n, 63
$\overline{H}$, 21
$\overline{B(a,r)}$, 19
∂H, 21
∂^α, 39
∂_ν, 71
rot, 71
$\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, 402
$\mathscr{S}(\mathbb{R})$, 398
$d\sigma$, 63
u^+, 209, 278
u^-, 211, 279