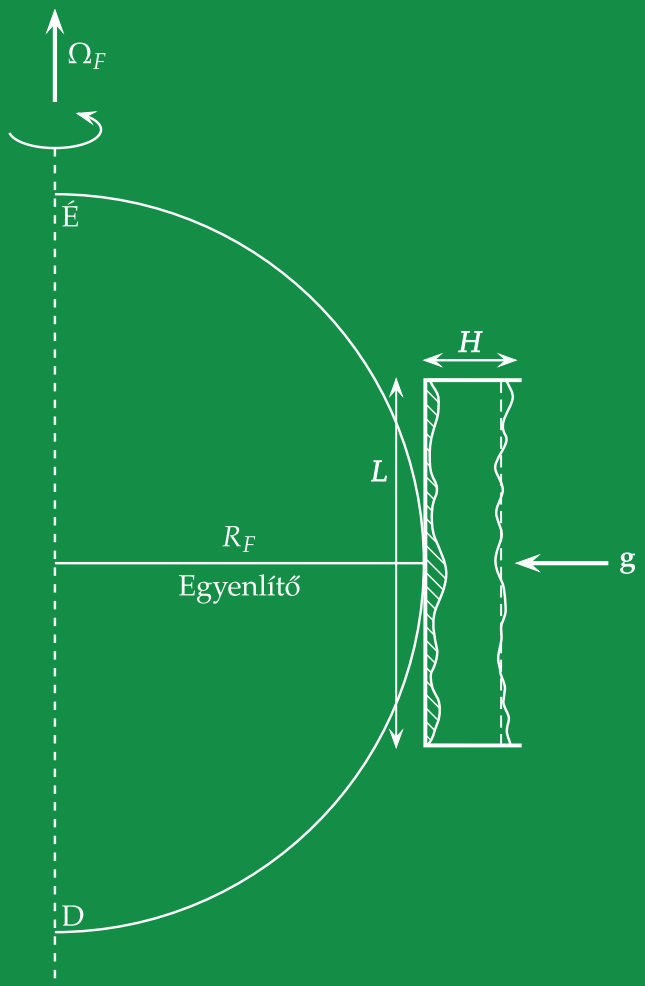
Tél Tamás

Környezeti áramlások

Elméleti alapok, kísérleti jelenségbemutatók



TYPOTEX

Tél Tamás

Környezeti áramlások

Tél Tamás

Környezeti áramlások

Elméleti alapok, kísérleti jelenségbemutatók

TYPOTEX

A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

MTA MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

© Tél Tamás, Typotex, Budapest, 2025

Ez a mű a Creative Commons 4.0 Magyarország
Nevezd meg! – Ne add el! – Ne változtasd!
licencfeltételeinek megfelelően felhasználható.



Általános lektor: Tegze György
A kísérleti vonatkozások lektora: Vincze Miklós

ISBN 978 963 493 352 6

A borítón az Egyenlítő mentén zajló áramlások leírásához használt derékszögű koordináta-rendszert szimbolizáló edény látható. A vizsgált folyadéktartomány méretei: H vízmélység, L vízszintes kiterjedés. R_F a Föld sugara, Ω_F a forgási szögsebessége, g a gravitációs gyorsulás.

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról, akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Balázs Péter
Olvasószerkesztő: Erő Zsuzsa
Az ábrákat készítette: Fried Katalin
Tördelés: Juhász Lehel
Borítóterv: Szalay Éva

Tartalom

Bevezetés **13**

I. Alapismeretek **17**

1. Forgatott homogén közegek áramlása **19**
1.1. A Rossby-számról részletesebben . . . 20
1.1.1. Értelmezések . . . 20
1.1.2. Tipikus értékek . . . 21
1.1.3. A Rossby-szám kicsinységének fizikai jelentése . . . 21
1.2. Coriolis-eltérítés . . . 22
1.3. A Coriolis-erő hatása síkbeli mozgásokra . . . 23
1.3.1. Tehetetlenségi körmozgás . . . 24
1.3.2. Állandó külső erő hatása . . . 25
1.4. A hidrodinamikai mozgásegyenletek . . . 27
1.5. A dimenziótlan alak . . . 29
1.6. Dinamikai nyomás . . . 31
1.7. A gyorsan forgatott folyadék . . . 32
1.7.1. Oszlopos áramlás, a Taylor–Proudman-tétel . . . 32
1.7.2. Geosztrofikus áramlás . . . 34
1.8. A kvázi-geosztrofikus közelítés . . . 37
1.9. Tehetetlenségi hullámok . . . 38
1.9.1. Hullámokról általában . . . 38
1.9.2. A tehetetlenségi hullám . . . 40
1.9.3. Fázis- és csoportsebesség . . . 43

2. A sekélység hatása **45**
2.1. A forgatott sekély folyadék egyenletei . . . 45
2.2. A dimenziótlan egyenlet . . . 49
2.3. A potenciális örvényesség megmaradása . . . 49
2.4. Gyorsan forgatott sekély folyadék: a geosztrofikus áramlás . . . 51
2.5. Kvázi-geosztrofikus mozgás: a topografikus Rossby-hullám . . . 53
2.5.1. Szemléletes kép . . . 53
2.5.2. Zárt felszínű Rossby-hullám . . . 54
2.5.3. Szabad felszínű Rossby-hullámok . . . 56
2.6. A kvázi-geosztrofikus egyenlet . . . 59
2.7. Tehetetlenségi gravitációhullám vagy Poincaré-hullám . . . 60
2.8. Kelvin-hullámok . . . 63
2.9. Nemlineáris felszíni hullámok, szolitonok . . . 65

3. A görbület hatása **67**
3.1. Földrajzi koordináták, a lokális rendszer . . . 68
3.2. Szabad mozgás forgó gömbön . . . 69
3.3. Sekély folyadék a Föld érintősíkjában . . . 72
3.4. f-sík-közelítés . . . 73
3.5. β-sík-közelítése . . . 75
3.6. A Sverdrup-összefüggés . . . 78
3.7. Planetáris Rossby-hullám . . . 79
3.8. Az általános légkörzés zonális áramlásai . . . 82
3.9. Rossby-hullám zonális áramlásban . . . 84
3.10. Hegységrendszer által gerjesztett Rossby-hullám . . . 84
3.10.1. Szemléletes kép . . . 84
3.10.2. Lineáris vizsgálat . . . 85
3.11. Kvázi-geosztrofikus egyenlet a β-síkon . . . 87

4. A viszkozitás hatása **89**
4.1. Az Ekman-számról részletesebben . . . 90
4.2. Az Ekman-réteg . . . 91
4.2.1. Szemléletes kép . . . 91
4.2.2. A gyorsan forgatott határeset . . . 92
4.2.3. Peremfeltételek . . . 94
4.3. Az alsó Ekman-réteg . . . 94
4.3.1. A sebességtér . . . 94
4.3.2. Ekman-pumpálás . . . 96
4.3.3. Felpörgetési idő . . . 97
4.4. A felső Ekman-réteg . . . 98
4.4.1. A sebességtér . . . 98
4.4.2. Ekman-transzport . . . 100
4.4.3. Ekman-pumpálás nyírás következtében . . . 102
4.5. Sekélyfolyadék-egyenletek szélnyírással . . . 104
4.6. A szélhajtotta óceán . . . 105
4.6.1. Általános megfontolások, Sverdrup-transzport . . . 105
4.6.2. Egyszerű óceánmodell . . . 106

5. Rétegzett közegek áramlása **111**
5.1. Folyadékok rétegzettsége . . . 112
5.2. A Brunt–Väisälä-frekvencia . . . 113
5.3. Hidrodinamikai egyenletek kis sűrűségeltérés esetén, a Boussinesq-közelítés . . . 114
5.4. Hidrodinamikai egyenletek függőleges rétegzettség és kis sűrűségeltérés esetén . 116
5.5. A dimenziótlan alak, a belső Froude-szám jelentése . . . 117
5.6. Analógia a forgatott homogén folyadékkal . . . 118
5.7. Belső hullám . . . 119
5.7.1. Síkhullámmegoldások . . . 119
5.7.2. Fázis és csoportsebesség . . . 120
5.8. Hegy mögötti hullám . . . 121
5.8.1. Szemléletes magyarázat . . . 121
5.8.2. Lineáris leírás . . . 123
5.9. Belső hullám sekély, folytonosan rétegzett folyadékban, normálmódusok . . . 124
5.9.1. Elemi megfontolások . . . 124
5.9.2. A szabad felszín hatása a normálmódusokra . . . 125

5.10. Kétrétegű közegek . . . 128
5.10.1. Kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika . . . 128
5.10.2. Belső hullám két közeg határán . . . 129
5.10.3. Megjegyzések . . . 131
5.11. A redukált sekélyfolyadék-modell . . . 132
5.12. Belső szolitonok . . . 133
5.13. Kelvin–Helmholtz-(KH)-instabilitás . . . 134
5.13.1. Instabilitásokról általában . . . 134
5.13.2. Szemléletes kép a KH-instabilitásról . . . 135
5.13.3. Stabilitásvizsgálat . . . 137
5.14. Termikus konvekció . . . 141
5.14.1. Szemléletes kép . . . 141
5.14.2. Stabilitásvizsgálat . . . 143
5.14.3. Konvekció jóval az első instabilitás után . . . 148

6. A forgatás és rétegzés együttes hatása sekély folyadékra 151
6.1. A forgatott kétrétegű sekély folyadék egyenletei . . . 152
6.2. A kis sűrűségeltérésű és a függőleges rétegzettségű forgatott sekély folyadék egyenletei . . . 153
6.3. Hullámok forgatott kétrétegű sekély folyadékban . . . 154
6.4. Hullámok függőleges rétegzettségű forgatott, sekély folyadékban . . . 157
6.5. Geosztrofikus áramlás kétrétegű sekély folyadékban . . . 158
6.6. Frontok forgatott rendszerben, a Margules-összefüggés . . . 160
6.7. A geosztrofikus egyensúly beállása . . . 163
6.8. Geosztrofikus egyensúly folytonos rétegzettségű sekély folyadékban . . . 164
6.8.1. A termikus áramlás . . . 165
6.9. Kvázi-geosztrofikus egyenlet kétrétegű közegben . . . 167
6.10. Belső Rossby-hullám kétrétegű közegben . . . 168
6.10.1. Szemléletes kép . . . 168
6.10.2. Rossby-hullám a kvázi-geosztrofikus egyenletből . . . 169
6.11. Baroklin instabilitás . . . 170
6.11.1. Szemléletes kép . . . 170
6.11.2. Stabilitásvizsgálat kétrétegű közegben . . . 173
6.11.3. A baroklin instabilitás kísérleti kimutatása . . . 175
6.12. Nem kvázi-geosztrofikus frontok és jetek . . . 179

7. Turbulencia 181
7.1. Az átlagolt hidrodinamikai egyenletek . . . 182
7.2. Turbulens transzportegyütthatók . . . 184
7.3. Logaritmikus sebességprofil . . . 186
7.4. Turbulencia rétegzett közegekben . . . 188
7.5. Teljesen kifejlett (homogén, izotróp) turbulencia . . . 190
7.5.1. Háromdimenziós turbulencia . . . 192
7.5.2. Kétdimenziós turbulencia . . . 195
7.5.3. Geosztrofikus turbulencia . . . 198
7.6. Szennyezések terjedése . . . 200

Utószó az első részhez 205

Összefoglaló táblázatok **207**
Áramló közegek fontosabb anyagi paraméterei . . . 207
Dimenziótlan arányszámok . . . 208
Jellegzetes távolságok . . . 209
Közelítések . . . 210

II. Kiegészítő fejezetek **211**

8. Forgatott homogén közegek áramlása (folytatás) **213**
8.1. Az örvényvektor egyenlete . . . 213
8.2. A cirkuláció változása . . . 214
8.3. Magnetohidrodinamikai áramlások forgó égitestek belsejében . . . 216
8.3.1. A Maxwell-egyenletek és a magnetohidrodinamikai közelítések . . . 217
8.3.2. Az indukciós egyenlet . . . 218
8.3.3. A hidrodinamikai mozgásegyenlet . . . 219
8.3.4. Geosztrofikus áramlás a magban . . . 220
8.3.5. Tehetetlenségi mágneses hullámok . . . 221

9. A sekélység hatása (folytatás) **225**
9.1. Kvázi-geosztrofikus dinamika a sekélyfolyadék-egyenletekből . . . 225
9.2. Szolitonok és a KdV-egyenlet . . . 226
9.3. A KdV-egyenlet elemi levezetése . . . 232
9.4. Cnoidális hullám . . . 235

10. A görbület hatása (folytatás) **239**
10.1. Nyomási koordináták az f- és β-síkon . . . 239
10.2. Domborzati elemek hatása zonális áramlásra . . . 241
10.2.1. Geosztrofikus közelítés . . . 241
10.2.2. Kvázi-geosztrofikus eset . . . 242
10.3. Nyugati peremáramlat ideális folyadékközelítésben . . . 244
10.4. Kétdimenziós áramlások stabilitása, a barotróp instabilitás . . . 247
10.4.1. A stabilitás feltétele . . . 248
10.4.2. Illesztési feltételek . . . 249
10.4.3. Véges rétegben nyírt áramlás . . . 250
10.4.4. Nyírási instabilitás a β-síkon . . . 252
10.5. Egyenlítői dinamika . . . 254
10.5.1. Az egyenlítői β-sík és Rossby-sugár . . . 254
10.5.2. Egyenlítői Kelvin-hullámok . . . 254
10.5.3. Egyenlítői Poincaré–Rossby-hullámok . . . 255
10.6. Gömbi hidrodinamika . . . 258
10.6.1. Gyorsulások gömbi koordinátákban . . . 258
10.6.2. Hidrodinamika forgó gömbön . . . 261

11. A viszkozitás hatása (folytatás) **263**
11.1. Ekman-transzport az alsó határrétegben . . . 263
11.2. Viharhullámok . . . 264
11.3. Nyugati peremáramlat súrlódó folyadékban, a Stommel-modell . . . 265
11.4. Az enyhén viszkózus folyadék kvázi-geosztrofikus egyenlete, a Rossby-hullám csillapodása . . . 268

12. Rétegzett közegek áramlása (folytatás) 271
12.1. Belső hullámok törése, elhajlása, inverzió . . . 271
12.2. Állóhullámok, tólengések . . . 274
12.3. Szuperkritikus áramlások . . . 276
12.3.1. Hidraulikus ugrás és torlóhullám (bore) . . . 276
12.3.2. Gravitációs áramlatok, frontok nem forgatott rendszerben . . . 279
12.4. Felületi feszültség hatása instabilitásokra . . . 281
12.5. Kettős diffúziós instabilitás . . . 284
12.5.1. Szemléletes kép . . . 284
12.5.2. Stabilitásvizsgálat . . . 285
12.5.3. Konvekció jóval az első instabilitás után . . . 288
12.6. Az összenyomhatóság jellemzése: potenciális sűrűség és potenciális hőmérséklet 290

13. A forgatás és rétegzés együttes hatása sekély folyadékra (folytatás) 295
13.1. Az örvényvektor egyenlete és a cirkuláció változása . . . 295
13.2. Óceáni áramlatok gyűrűinek geosztrofikus áramlása . . . 296
13.3. Part menti feláramlások . . . 298
13.4. A kvázi-geosztrofikus egyenlet folytonos rétegzettségű sekély folyadékban . . . 300
13.5. Rossby-hullám folytonos rétegzettség esetén . . . 304
13.5.1. Rossby-hullám zárt rétegben . . . 304
13.5.2. Hegységrendszer által gerjesztett Rossby-hullám . . . 305
13.6. Baroklin instabilitás folytonos rétegzettségű közegben . . . 308
13.7. Baroklin instabilitás a β-síkon . . . 314

14. Turbulencia (folytatás) 317
14.1. Lokális turbulencia: könnyű közegek turbulens áramlása . . . 317
14.1.1. Termikek . . . 317
14.1.2. Turbulens csóvák . . . 319
14.2. A logaritmikus sebességprofil rétegzett közegben . . . 321
14.3. Keveredési rétegek vastagságának változása . . . 322
14.3.1. Nyírt turbulens határréteg . . . 322
14.3.2. Fűtött turbulens határréteg . . . 323

Utószó a második részhez 325

Irodalom 327
Könyvek . . . 327
Szakcikkek egyes fejezetekhez . . . 329

A jelenségbemutató kísérletek listája 333

Név- és tárgymutató 335

Navigare necesse est
(*Hajózni márpedig szükséges*)

Pompeius

Szüleim és testvérem emlékének,
akikkel együtt hajóztunk az Al-Dunán

Bevezetés

Környezeti áramlás természetes közegeink, a levegő és a víz nagy anyagmennyiséget érintő mozgása. E jelenségek az emberi léptéknél jóval nagyobb távolságskálán zajlanak amely a több 1000 km-t is elérheti, azaz összemérhetővé válhat a Föld sugarával. Az áramlásokhoz tartozó időskála viszont emberi léptékű: óra, esetleg nap nagyságrendű. Nem kétséges, hogy a környezeti áramlások is a hidrodinamika témaköréhez tartoznak, csak más léptékűek mint a hagyományos (vagy mérnöki) hidrodinamika jelenségei, amelyek kiterjedése méter nagyságrendű.

Történetileg a légkör és az óceánok dinamikájának vizsgálata két külön tudomány, mai nevükön a dinamikus meteorológia és a fizikai oceanográfia keretében kezdődött meg a XX. század elején. A 30-as, 50-es években már alapvető jelentőségű felismerések születtek. Ezekhez feltűnően nagy számú skandináv tudós járult hozzá, részben a sarkkutató expedíciók eredményei által vezérelve. A korai eredmények azonban jelentőségük ellenére nem kerültek be a fizikusi/mérnöki köztudatba. A 60-as években kezdődött meg annak a felismerése, hogy a dinamikus meteorológia és a fizikai oceanográfia között igen erős az átfedés, mert számos fontos jelenség független az áramló közeg anyagi összetételétől. A légkör és a vizek áramlását, és ezek *közös* vonásait leíró tudomány a geofizikai folyadékdinamika (GFD) nevet kapta, amelyre egyre gyakrabban alkalmazzák a környezeti áramlások fizikája elnevezést is. A leírt jelenségek univerzálisak, azaz más környezetben is előfordulhatnak, így pl. más bolygók légkörében, vagy a Föld köpenyében és magjában.

A hagyományos hidrodinamikával szemben a környezeti hidrodinamika két legfontosabbak új vonása:

- *forgó* rendszerhez kötött, amelyben a mozgásegyenlet a newtoni formában nem érvényes: a leírásban az eltérítő hatású Coriolis-erő jelenléte alapvető,
- *rétegzett* rendszer, amelyben az egyes, közel vízszintes rétegek különböző sűrűségűek.

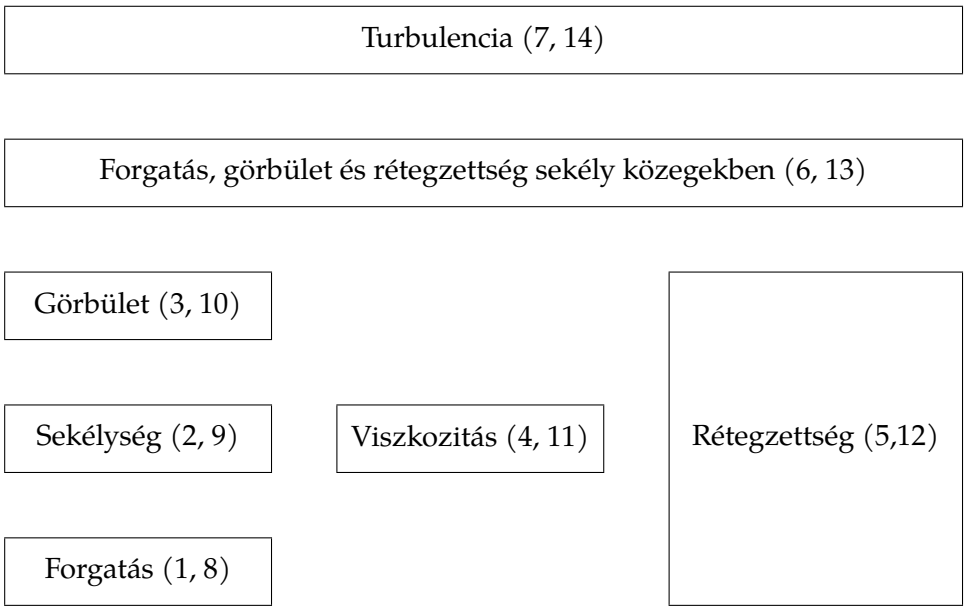
Ehhez járul az is, hogy *sekélyfolyadék* rendszer, amelynek mélysége sokkal kisebb vízszintes méreténél (hiszen a légkör legfontosabb alsó rétege, a troposzféra, és az óceánok átlagos vastagsága is csak néhány km), továbbá *gömbi* rendszer, amelyben a Föld görbülete nem hanyagolható el.

A környezeti áramlások számos olyan általános érvényű jelenségre vezetnek, amelyek a hagyományos hidrodinamika alapján elképzelhetetlenek. A nagyskálájú viselkedésről éppen úgy nem lehetnek hétköznapi tapasztalataink, mint a mikrovilágról. Így meglepő tényként érzékeljük például, hogy

- az áramlások nem a nyomáskülönbség irányába, hanem arra közel *merőlegesen* zajlanak,
- a felszín közelében a sebességvektor nemcsak nő, hanem el is *fordul* a magassággal,
- az óceáni áramlatok felett az átlagolt vízfelszín nem vízszintes, hanem enyhén *döntött*,
- a sűrűségkülönbség miatt kívülről láthatatlan rezgések és *belső hullámok* jöhetnek létre,
- az állandó sűrűségű felületek *nem mindig vízszintesek*, velük *felfelé erősödő* áramlás társul,
- erős óceáni áramlatok csakis a medencék *nyugati* pereme mentén alakulnak ki,
- a nemlinearitásból adódó instabilitások nagyskálán a *kétdimenziós* turbulencia felé vezetnek.

A könyv első része („Alapismeretek”) a környezeti áramlásokkal kapcsolatos legfontosabb, és a hagyományos hidrodinamika szempontjából legmeglepőbb jelenségek megértéséhez szükséges hátteret adja. Mindenütt bemutatunk számadatokkal alátámasztott becsléseket és konkrét környezeti példákat. Az összefoglaló táblázatokat (anyagi paraméterek, dimenziótlan számok, jellegzetes távolságok, alkalmazott közelítések) kezdettől fogva érdemes fellapozni az olvasás során. A második rész („Kiegészítő fejezetek”) a fő szöveg gondolatmenetét kiegészítő témákat dolgoz fel, a fejezetek címei és témakörei a két részben azonosak.

A könyv a különböző hatások egymásra épülését mutatja be (1. ábra). Az 1. fejezetben a forgatás okozta új vonásokat vizsgáljuk homogén folyadékban. A 2., majd 4. fejezet bemutatja, hogy a sekélység és a Föld görbülete hogyan befolyásolja a forgatott közeg mozgását. Az általában gyenge, de nem teljesen elhanyagolható viszkozitás (4. fejezet) mindezeket a hatásokat egységesen értelmezhető rendszerbe fogja. A rétegzettség következményeit először (5. fejezet) forgatás nélkül, de a sekélységet figyelembe véve tekintjük át, ezért ez a fejezet az előzőek ismerete nélkül is olvasható. A 6. fejezet egyaránt tekinthető a rétegzett rendszerek forgatása vagy a forgatott rendszerek rétegződése következtében létrejövő jelenségek bemutatásának. E két hatás a környezeti áramlásokban összemérhető. A 7. fejezet a különböző típusú turbulens áramlások kvalitatív áttekintését adja, és kitér a szennyeződésterjedés dinamikájára is.



1. ábra. Az egyes fejezetek anyagának egymásra épülése (alulról felfelé). A számok a témát tárgyaló fejezetek, illetve kiegészítő fejezetek sorszámát adják meg.

Ezen összetett jelenségkör leírása óhatatlanul közelítéseken alapul. Így van ez annak ellenére, hogy a hidrodinamikai egyenletek egzaktul ismertek, de nemlinearitásuk miatt általános megoldásuk reménytelen. A környezeti áramlások fizikája így jó példa egy komplex probléma természettudományos megközelítésére, amely megfigyelésen, a számadatok ismeretén, egyszerűsített elméleti leíráson, modellalkotáson, a modell érvényességi körének meghatározásán, majd a tapasztalathoz igazodó finomításán alapul.

Alapvető kérdés: lehetséges-e a nagyskálájú környezeti áramlások kísérleti modellezése laboratóriumban? A *dinamikai hasonlóság* törvénye szerint ennek szükséges feltétele az, hogy az egyes hatásokat jellemző dimenziótlan arányszámok azonosak legyenek a valóságos és a laboratóriumi áramlásban. A könyv minden fejezete egy-egy fontos jelenség, és az azzal kapcsolatos

dimenziótlan arányszám köré épül. Kimutatjuk, hogy e számok valóságos értékei forgókádak és sűrűségrétegzett közegek (legegyszerűbben sós víz) használatával laboratóriumban is megvalósíthatók: a környezeti áramlások hűen modellezhetők emberi méretekben!

Az áramlástannak ez az ága a XX. század legvégéig *nem szerepelt a magyar fizikusi és mérnöki oktatásban*. A környezettudatosság és interdiszciplinaritás szemléletét követve, az ELTE Fizikai Intézete Horváth Viktor, Jánosi Imre, Szabó K. Gábor, és a szerző javaslatára 1998 őszén létrehozta a Kármán Környezeti Áramlások Laboratóriumot hallgatói mérések és a témával kapcsolatos kísérleti kutatás beindítására.

A könyv első kiadásának tekinthető „Környezeti áramlások" című 2003-as online jegyzet azzal a céllal íródott, hogy a Kármán Laboratóriumba járó különböző szakos hallgatók mind megtalálhassák benne a számukra jól követhető felépítést. 2012-ben megszületett az akkor induló Környezettudományi Doktori Iskola támogatására a Jánosi Imre és a szerző által írt „Bevezetés a környezeti áramlások fizikájába" című tananyag. Ez alapszintű matematikatudású olvasók számára ad áttekintést, gazdag képanyaggal, műhold-felvételekkel illusztrálva, amelyek megtekintése e könyv olvasóinak is ajánlható. Ugyanakkor a legfontosabb fizikai alapegyenletek (kontinuitási, Navier–Stokes-, hődiffúziós egyenlet) egyszerű levezetése is megtalálható a kiadványban.

Mindez lehetőséget ad arra, hogy ebben az átdolgozott kiadásban az anyagot a fizika egy fejezeteként, a hidrodinamika tárgy folytatásaként mutassuk be, azok *elemi ismeretét* feltételezve. Az átdolgozott anyag elsősorban a fizikus, geofizikus és mérnök hallgatók és kutatók igényeihez igazodik, de hasznosnak találhatják az ilyen tárgyalás iránt érdeklődő meteorológus és földtudomány szakos olvasók is.

Az elméleti fizika kísérleti tapasztalatokra épít. Ennek szellemében mindenütt utalunk lehetséges mérésekre, és sok téma kapcsán *kísérleteket* bemutató rövid, szabadon hozzáférhető videók linkjeit is megadjuk, amelyek hűen tükrözik a Kármán Laboratóriumban is megfigyelhető jelenségek körét. A jelenségbemutató videók a szövegben megjelenő QR-kódokra kattintva, vagy azok beolvasásával érhetők el.

A fogalmi tisztasághoz elegendőnek érezzük, hogy e könyvben kizárólag fekete-fehér ábrák szerepeljenek. Az egész anyaggal nem titkolt célunk az is, hogy a fizika szépségét és sokrétűségét bemutassuk egy adott kérdéskörön belül.

Köszönetnyilvánítás

A 2003-as kiadás alapos elolvasásáért és építő, kritikai megjegyzéseikért köszönet illeti Jánosi Imre és Szabó K. Gábor kollégáimat. Az ábrák gondos, körültekintő és jó minőségű megrajzolása Barabás István munkája volt. Az e kiadáson alapuló oktatás kapcsán sok értékes hallgatói javaslat gyűlt össze az évek során, itt Ábel Dániel, Bajkó Ildikó, Czifrik Xénia, Dolowschiák Márk, Fenyvesi Nóra, Hunyadi Viktória, Király Andrea, Kovács István, Labancz Krisztina, Lohner Roland és Vörös Zoltán nevét említjük.

Az új változat előkészítéseként Fehér Szilveszter, Jánosi Dániel és Somogyfoki Réka hallgatókkal 2023 tavaszi szemeszterében alkalmunk volt arra, hogy átbeszéljük, a régi jegyzet első hat fejezetében milyen módosítások szükségesek. Az anyagot később rendkívüli alapossággal átolvasták Herein Mátyás és Weidinger Tamás kollégáim, részletes és értékes megjegyzéseket téve. A szolitonokkal kapcsolatos fejezeteket Bene Gyula és Palla László nézte át kritikusan. A magnetohidrodinamika elemi tárgyalásának és a barotróp instabilitás témájának szükségességét Herein Mátyás, illetve Vincze Miklós vetette fel, és Petrovay Kristóf egészített ki. A környezeti problémákról alkotott képemhez nagyban hozzájárultak a Józsa Jánossal, Károlyi Györggyel, Kiss Ádámmal és Antonello Provenzaléval folytatott beszélgetések, az új kiadás lehetőségét taná-

csokkal is támogatták Patkós András és Rácz Zoltán kollégáim. Köszönet minden segítő tartalmi hozzájárulásért, és külön köszönet Urbán Ferencnek a régi Latex és képi dokumentumok felfrissítéséért.

A demonstrációs kísérletek bemutatásának gondolata Fred Feudellel folytatott beszélgetésben merült fel, aki megosztotta velem a hasonló témájú egyetemi előadásához Potsdamban használt anyagot. Az itt bemutatott gyűjteményt Vincze Miklós nézte át alaposan, és tette teljessé. Vállalta a mérésekhez írott rövid szövegek lektorálását is, a kísérletező szemszögéből.

Nélkülözhetetlen segítséget jelentettek a lektor, Tegze György megjegyzései is, amelyek nagyban hozzájárultak az anyag pontosításához és arányossá tételéhez, értékes demonstrációs kísérletek bemutatását is javasolva.

Köszönet illeti a Typotex Kiadót a szerkesztési folyamat során kapott segítségért, az új ábrák megrajzolásáért, a régiek szépítéséért, és a gondos tördelésért, valamint a Magyar Tudományos Akadémiát a Könyvkiadási pályázat keretében nyújtott anyagi támogatásért.

Záró gondolat: őszinte hálával tartozom a Kármán Laboratóriumot megalapító kollégáimnak a labor kiépítésének örömteli folyamatáért, majd a diákokkal is végzett ottani közös munkákért, az együtt folytatott mérésekért. Különösen sokat tanulhattam a fizikáról és a kísérleti fizikusi hozzáállásról Jánosi Imrétől, akivel a 2000 évek elején sokat dolgozhattam együtt, és aki sajnos már nincs köztünk. Az ő szemléletét követi Vincze Miklós, aki továbbviszi a megkezdett laboratóriumi munkát és hagyományt.

Tél Tamás

I. rész

Alapismeretek

1. fejezet

Forgatott homogén közegek áramlása

Az áramlások vizsgálata során különösen hasznosnak bizonyulnak az ún. dimenziótlan arányszámok, amelyek egy jelenség erősségét mérik valamely másik jelenség erősségéhez viszonyítva. Nagy vagy kis értékük segít eldönteni, hogy a jelenség adott összefüggésben lényeges-e. Az ilyen számok természetesen jelennek meg a mozgásegyenletek dimenziótlanításakor. Ismeretük alapvetően fontos a laboratóriumi modellezhetőség szempontjából: csak olyan áramlás modellezhető hűen mérésekkel, amelynek laboratóriumi dimenziótlan száma jó közelítéssel megegyezik a természetivel.

Minden lényegesen új jelenséghez tartozik egy dimenziótlan szám. Ez a fizika különböző ágai közül talán legtisztábban az áramlástanban figyelhető meg. Az egyes fejezetek ennek megfelelően a tárgyalt jelenséghez tartozó dimenziótlan szám rövid bemutatásával kezdődnek.

A Földön (vagy más forgó égitesten) zajló környezeti áramlás esetén az inerciarendszerben történő leírás helyett természetes az együtt forgó rendszer vizsgálata, hiszen a megfigyelő ebben helyezkedik el. Az előzőben a forgó kontinensek, mint peremfeltételek kezelése sokkal bonyolultabb leírást igényelne, mint a tehetetlenségi erők figyelembevétele. Közülük a Coriolis-erő dominál, amely a vízszintes síkban zajló mozgásokat ebben a síkban eltéríti.

A Coriolis-erő fontosságát az

$$\boxed{Ro = \frac{U}{2|\Omega|L}} \tag{1.1}$$

Rossby-szám méri, amely megadja a hidrodinamikai mozgást okozó eredő erő és a Coriolis-erő viszonyát a függőleges tengely körül állandó Ω szögsebességgel forgatott folyadék U tipikus sebességgel L vízszintes tartományra kiterjedő áramlásában. A Rossby-szám fontosságát C.-G. Rossby (1898–1957) svéd meteorológus, a geofizikai folyadékdinamika egyik megalapozója, a forgatással kapcsolatos sok jelenség első leírója ismerte fel.

A Földre gondolva, az áramlást egyelőre az Északi-sark ($\Omega > 0$) vagy a Déli-sark ($\Omega < 0$) környékére képzeljük, derékszögű koordinátákat használva, viszonylag kis kiterjedésű tartományban (lásd majd 1.6. ábra), vagyis a Föld görbületét nem vesszük figyelembe. Ezzel a választással biztosítjuk, hogy a forgatási szögsebesség nem helyfüggő, éppúgy mint laboratóriumi kísérletekben. A Rossby-szám függetlensége az anyagi paraméterektől (7.1. táblázat) arra utal, hogy a forgatás szerepe egyaránt fontos minden közegben. A Coriolis-erő akkor jelentős, ha a szögsebesség relatíve nagy, vagyis ha a Rossby-szám kicsi.

1.1. A Rossby-számról részletesebben

Tekintsünk egy homogén (azaz nem rétegzett) folyadékot, amelyet időben állandó Ω szögsebességgel forgatunk a függőleges tengely körül. A szögsebesség előjele pozitív, ha a forgatás az óramutató járásával ellentétes irányú. A Föld forgása az északi-féltekéről nézve tehát pozitív szögsebességű. Legyen L az áramlás lineáris mérete a vízszintes síkban, és U az áramlás jellegzetes vízszintes sebességének nagysága az együtt forgó rendszerben. A Rossby-szám több mennyiség hányadosaként is értelmezhető.

1.1.1. Értelmezések

Időn alapuló értelmezés. A t_f forgatási idő arányos a forgatási szögsebesség reciprokával, választható mint[1]:

$$t_f = \frac{1}{2|\Omega|}. \tag{1.2}$$

Az áramlás t_h hidrodinamikai idejét úgy becsüljük, mint

$$t_h = \frac{L}{U}. \tag{1.3}$$

Ha ez a t_h sokkal kisebb a t_f forgatási időnél, akkor az áramlást nyilván nem befolyásolja lényegesen a forgás. Ha viszont hosszabb az áramlás ideje, mint a forgatási idő, akkor a forgatás szerepe lényeges az áramlásban. Az (1.1) Rossby-szám tehát a t_f/t_h arányt adja meg:

$$Ro = \frac{\text{forgatási idő}}{\text{hidrodinamikai idő}}. \tag{1.4}$$

Gyorsuláson alapuló értelmezés. A forgatott rendszerben mozgó testek külső erőhatás nélkül is görbült pályán mozognak, hiszen a rendszer „elfordul" alattuk. Az *együtt forgó* megfigyelő a szabad mozgás pályájának görbülését okozó Coriolis-erőt tapasztal. A dinamikára gondolva, a Rossby-szám az a_h hidrodinamikai gyorsulás és a $2U\Omega$ nagyságrendű Coriolis-gyorsulás (pontos alakját majd (1.9) adja) hányadosa. Mivel a_h az áramlási sebesség időbeli változása, becsülhető mint U/t_h, amely a hidrodinamikai idő (1.3) kifejezése alapján $a_h = U^2/L$, és ezzel

$$Ro = \frac{\text{hidrodinamikai gyorsulás}}{\text{Coriolis-gyorsulás}}. \tag{1.5}$$

Örvényességen alapuló értelmezés. Egy áramlást a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességtérrel jellemzünk, azaz megadjuk a sebességet minden $\mathbf{r}$ pontban és t pillanatban. Ehhez egy $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$ örvénytér is tartozik, a sebességtér rotációja ($\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$). Az örvényvektor dimenziója U/L, tehát ez a mennyiség éppúgy frekvencia egységekben mérendő, mint a forgás szögsebessége. Tipikus értéke becsülhető U/L-ként, és ezért írhatjuk, hogy

$$Ro = \frac{\text{átlagos örvényesség}}{2|\Omega|}. \tag{1.6}$$

A Rossby-szám tehát az átlagos örvényesség és a forgatási szögsebesség viszonyát is megadja. Örvénymentes áramlásban a Rossby-szám eltűnik, de a környezeti áramlások általában örvényesek (1.2. fejezet).

[1] A nevezőben fellépő 2-es faktort az indokolja, hogy a Coriolis-hatásban a forgatás szögsebessége mindig a 2Ω kombinációban jelenik meg (lásd pl. (1.9)).

1.1.2. Tipikus értékek

A Föld forgásának szögsebessége $\Omega_F = 2\pi/\text{nap}$, a bolygónkon zajló áramlásokra nézve az emberi időskálán univerzális állandó[2]:

$$\boxed{\Omega_F = 7{,}3\ 10^{-5}\ 1/\text{s}.} \tag{1.7}$$

Ez nagyon alacsony frekvenciának felel meg. Hagyományos, nem forgatott laboratóriumi kísérletekben, ahol a lineáris méret m, a sebesség m/s nagyságrendű, a Rossby-szám 10^4 körüli, azaz ilyenkor a Föld forgásának hatása jogosan hanyagolható el.[3]

Merőben más a helyzet nagyskálájú földi áramlásokban. Elsőként tekintsünk egy több országnyi kiterjedésű *ciklont*, amelynek mérete vehető $L = 1000$ km-nek. Benne az áramlás sebessége $U = 10$ m/s körüli (ez 36 km/óra sebességű szelet jelent). Ezekkel a paraméterekkel a Rossby-szám becsülhető mint $Ro = U/(2\Omega_F L) = 0{,}07$.

Egy óceáni példa a nagy áramlatokból, mint pl. aGolf-áramlatból leszakadó *örvények* vagy *gyűrűk* (eddy-k) mozgása, amelyek mintegy $L = 100$ km átmérőjűek, és bennük a kerületi sebesség $U = 1\,\text{m/s} = 3{,}6\,\text{km/h}$ körüli, ugyanannyi, mint az áramlatok tipikus sebessége (amely körülbelül a Duna áramlási sebességének felel meg). Ezzel $Ro = 0{,}07$. Az egész óceáni medencékre kiterjedő áramlások jóval lassabbak és egyben nagyobb kiterjedésűek. Jellegzetes adataik $U = 0{,}1 - 0{,}01$ m/s, L több ezer km, ezért a hozzájuk tartozó Rossby-szám kettő-négy nagyságrenddel kisebb. Számos más példa is azt mutatja, hogy a *nagy skálájú környezeti áramlásokban a Rossby-szám egynél határozottan kisebb*, azaz azokban a forgatás hatása jelentős.

Érdemes röviden megbecsülni a *bolygólégkörök* jellegzetes Rossby-számait a 7.2. táblázat adatai alapján. A Vénusz sugara összemérhető a Földével, forgása igen lassú (periódusideje 243 nap), és a felszíni szelek is gyengék. $U = 1$ m/s-mal számolva az $L = 1000$ km-es skálán $Ro \approx 1{,}7$. A Vénusz felszíni áramlásaiban tehát a forgás nem játszik lényeges szerepet. A Mars sugara a földinek mintegy fele, forgásideje alig hosszabb egy napnál. A tipikus szélsebesség $U = 30$ m/s, amellyel az $L = 500$ km-es skálán $Ro \approx 0{,}4$. A Mars esetében már nem hanyagolható el a forgás, de nem az a domináló hatás: az időjárás egyáltalán nem változékony, a marsi szelek időben közel periodikusan ismétlődnek. A Jupiter sugara több mint 10-szerese a Földének, tengelyforgási ideje viszont alig 10 óra. Az áramlások jellegzetes lineáris mérete ezért egy nagyságrenddel nagyobb mint a Földön, $L = 10000$ km körülinek vehető, de a sebességek is nagyobbak, $U = 100$ m/s. Így összességében a Rossby-száma a Föld légkörére jellemzőnél kisebb, $Ro \approx 0{,}03$, és ennek megfelelően ciklonok és anticiklonok létezhetnek a Jupiter légkörében.

1.1.3. A Rossby-szám kicsinységének fizikai jelentése

Kis Rossby-szám esetén gyorsan forgatott áramlásról van szó. A gyorsaságot azonban nem hétköznapi értelemben kell érteni, hanem az áramlás belső idejéhez képest. A $Ro \ll 1$ feltétel azt jelenti, hogy

$$|\Omega| \gg \frac{U}{L}. \tag{1.8}$$

Első hallásra ellentmondásnak tűnhet, hogy bár a Föld lassan forog, hidrodinamikája mégis egy gyorsan forgatott rendszeré. Laboratóriumban kis Rossby-számot biztosíthatunk, ha például egy $L = 1$ méteres edényt, amelyben az áramlás sebessége $U = 1$ cm/s, percenként 1

[2] A geofizikai időskálán a forgás lassul, a nap hossza 100 000 év alatt kb 2 s-mal nő.

[3] Ezért nem a Föld forgása az elsődleges meghatározója a háztartási vízlefolyókban megfigyelhető forgásirányának (csak akkor lenne az, ha minden más hatást, pl. a peremekét, egy erre a célra tervezett kísérletben gondosan kiküszöbölnénk). Népszerűsítő anyagként lásd: http://theorphys.elte.hu/fiztan/CoriolisH/.

fordulattal forgatunk. Ekkor $2|\Omega| = 0{,}2\,1/\mathrm{s}$, és ezért $Ro = 0{,}05$. A laboratóriumi szögsebesség több mint ezerszer gyorsabb a Föld szögsebességénél. A látszólagos ellentmondás abban rejlik, hogy nem a laboratóriumi és a földi szögsebességet kell összevetnünk, hiszen az áramlások egyéb adatai is mások. A dinamikai szempontból érvényes (1.8) összehasonlításban a szögsebességet az adott rendszerbeli áramlás karakterisztikus frekvenciájához, U/L-hez viszonyítjuk. Tehát hiába kicsi az Ω_F számértéke (sokkal kisebb a hang frekvenciájánál), mégis sokkal nagyobb a környezeti áramlások jellegzetes frekvenciájánál.

A Bevezetésben említett tulajdonság, miszerint a földi környezeti áramlások időskálái emberi léptékűek, a távolságskálák viszont a méternél jóval hosszabbak, következik a Rossby-szám kicsinységéből és az $U \approx 3{,}6$ km/h, 36 km/h óceáni, illetve légköri áramlási sebességből. (Mivel $1/(2\Omega_F)$ körülbelül 2 óra, $Ro = 0{,}1$ esetén azt kapjuk, hogy $L/U = 20$ óra, amelyhez $L = 100{,}1000$ km nagyságrendű távolság tartozik.)

A Rossby-szám kicsinysége egyszerre jelenti az áramlás lassúságát a forgatás időskáláján (1.4), a hidrodinamikai gyorsulás kicsinységét a Coriolis-gyorsuláshoz képest (1.5), és az örvényesség gyengeségét a forgatás szögsebességéhez viszonyítva (1.6).

1.2. Coriolis-eltérítés

Az $\mathbf{F}_C$ Coriolis-erő *merőleges* a forgatott rendszerbeli sebesség irányára, és merőleges a forgástengelyre is, a mozgás sebességének abszolútértékét *nem* változtatja. Vektoriális írásmódban a $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó test Coriolis-gyorsulása

$$\boxed{\mathbf{a}_C = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}.} \tag{1.9}$$

Az $\boldsymbol{\Omega}$ szögsebesség-vektor a forgástengely irányába esik. A gyorsulás a pillanatnyi sebességtől jobbra mutat pozitív forgatási szögsebesség esetén. Az erő helyett főleg a Coriolis-gyorsulást használjuk, a hidrodinamikai egyenletekben ugyanis az egységnyi tömegre ható erő jelenik meg.[4]

Érdemes elfogadni, hogy a fizikában használatos v_x, v_y, v_z jelölés helyett a geofizikai folyadékdinamikában kerülik az indexeket, és u-val, v-vel jelölik az x, illetve y irányú két vízszintes sebességkomponenst, míg a függőleges komponens jele w.

A forgástengelyt z irányúnak választva, amikor $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, a Coriolis-gyorsulás a vízszintes síkba esik:

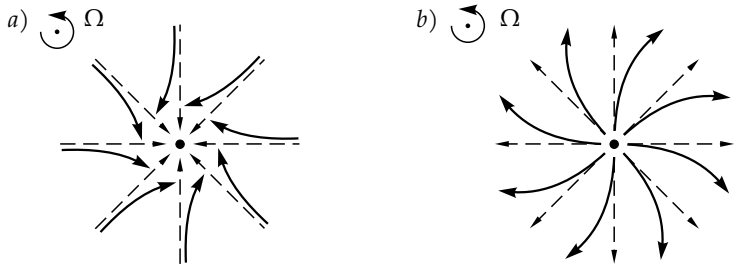
$$\boxed{\mathbf{a}_C = (2\Omega v, -2\Omega u, 0).} \tag{1.10}$$

Az x tengely irányú gyorsulás tehát a sebesség y komponensével, az y irányú pedig az x komponens ellentettjével arányos.

Az áramlások szempontjából a forgatott rendszerek egyik meghatározó hidrodinamikai tulajdonsága, hogy örvényesek, bármilyen függőleges áramlás örvényességet hoz létre. Ha például valamely leáramlás egy adott szinten összefolyást okoz, amely kezdetben a középpont felé irányul, akkor a Coriolis-gyorsulás miatt az eredetileg radiális áramlásban erre merőleges mozgás, forgás, cirkuláció is megjelenik. Jól látszik ez, ha forgatott folyadékba közel függőlegesen festéket fecskendezünk. A felső szinteken összeáramlás történik, amely nem forgatott rendszerben radiális összeáramlást okozna (szaggatott vonalak az 1.1. ábrán), de a forgatás miatt fellépő Coriolis-erő pozitív Ω esetén a folyadékelemeket eltéríti és összességében az óramutató járásával ellentétes, pozitív körüljárású körkörös áramlást ad hozzá a radiálishoz (folytonos vonalak

[4] A 2-es faktortól eltekintve az (1.9) összefüggés megfelel a $\mathbf{B}$ mágneses térben mozgó töltött részecskére ható Lorentz-erő által okozott gyorsulásnak.

az 1.1a ábrán). A festékrendszer becsavarodik. Az alsó felszínt elérve a szétterülő áramlás ellenkező körüljárású lesz (1.1b. ábra).



1.1. ábra. Forgatott rendszerben történő áramlások alaptulajdonsága. A le-, vagy feláramlás esetén az adott szinten történő össze- vagy szétáramlás nem maradhat sugárirányú a folyadékrészecskékre ható Coriolis-erő miatt. Ez a hatás kis Rossby-szám esetén különösen jelentős. Pozitív forgásirány mellett az összeáramlás pozitív cirkulációt vagy örvényességet hoz létre (a), szétáramlás pedig negatívat (b).

A hagyományos hidrodinamikának egyik fontos tulajdonsága az áramlások forgási erősségének, cirkulációjának megmaradása (elhanyagolható viszkozitás esetén). A környezeti áramlásokban azonban a cirkuláció megmaradása nem teljesül! Forgatott rendszerben tehát születhet vagy eltűnhet cirkuláció, annál gyorsabban, minél gyorsabb a forgatás (részletesebben lásd 8.1., 8.2. fejezet).

Érdemes néhány gondolattal előre tekinteni a Föld sarkaitól távolabb érvényes leírásra, amelyről részletesen a 4. fejezetben lesz szó. Az időjárásunkat befolyásoló ciklonok és anticiklonok elsősorban a közepes szélességeken fordulnak elő. Ciklonokban a levegő feláramlik, a felszín közelében összeáramlás történik, a magasban (a troposzféra felső részén) szétáramlás. Anticiklonban a magasban összeáramlás, míg a felszín közelében szétáramlás zajlik. Az 1.1. ábra a) és b) része tekinthető a ciklonok, illetve anticiklonok felszín közeli áramlását mutató ábrának is az északi féltekén. (A ciklonok felszín közeli felhőzete valóban a 1.1a. ábra nyilaihoz hasonló rajzolatot mutat.) Ciklonálisnak a ciklonok felszín közeli forgásirányát nevezzük, amely az északi féltekén az óramutatóéval ellentétes (pozitív) körüljárású, a délin fordítva.

Fontos előre tudatosítani azt is, hogy a centrifugális erő nemcsak a sarkok közelében hanyagolható el, hanem a Föld tetszőleges érintősíkjában is. Ez azért érvényes, mert az érintő az eredő nehézségi erőre merőleges, amiben benne van a csakis a földrajzi helytől függő centrifugális erőnek a gravitációhoz képest gyenge hatása. (A Föld enyhén geoid alakját éppen a centrifugális erő alakította ki, az érintő ennek a geoidnak az érintője.) Így az érintősíkban zajló mozgások nem érzékelik a centrifugális erőt (annak hatását a nehézségi gyorsulás magában foglalja). *A környezeti áramlásokban a centrifugális erő nem játszik szerepet*. A laboratóriumban ezt a tulajdonságot az edény olyan lassú forgatásával érhetjük el, amely még nem vezet a felszín jelentős behorpadására (néhány dm sugarú edényekben percenkénti néhány fordulattal ez elérhető).

1.3. A Coriolis-erő hatása síkbeli mozgásokra

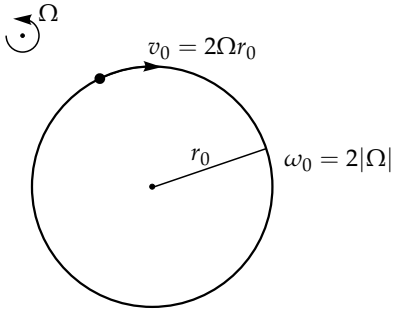
Mielőtt részletesebb hidrodinamikai megfontolásokba kezdenénk, érdemes néhány pontmechanikai problémát áttekinteni, amelyekből utalások nyerhetők a folyadékelemek mozgására is. Az Ω szögsebességgel forgatott síkon olyan mozgásokat vizsgálunk, amelyekben kizárólag a Coriolis-erő a tehetetlenségi erő.

1.3.1. Tehetetlenségi körmozgás

Tekintsük először a külső erőktől mentes szabad mozgást síkban. Mivel a Coriolis-erő merőleges a sebességre, a valamilyen v_0 sebességgel meglökött test körpályán mozog (hasonlóan a konstans mágneses térben mozgó töltött részecskéhez). Jelöljük a szögsebességét ω_0-lal. Az r_0 sugarú körpályán tartáshoz szükséges $r_0\omega_0^2$ centripetális gyorsulást egyedül a $2|\Omega|r_0\omega_0$ Coriolis-gyorsulás biztosíthatja (1.2. ábra). Ezért a mozgás ω_0 körfrekvenciája éppen a forgatási szögsebesség kétszerese:

$$\boxed{\omega_0 = 2|\Omega|,} \tag{1.11}$$

függetlenül a körpálya középpontjától és a kerületi sebességtől. Az ilyen tehetetlenségi körmozgás periódusideje tehát a forgatási periódusidő fele. A mozgás iránya ellentétes a forgatáséval: mindig anticiklonális körüljárású.



1.2. ábra. Tehetetlenségi körmozgás a forgatott rendszer bármely pontja körül kialakulhat, ha a mozgó testre csak a Coriolis-erő hat. A körbefordulás iránya pozitív Ω esetén negatív.

Ha egy súrlódásmentes síkon ellökünk magunktól egy testet, akkor az – kizárólag a Coriolis-erő jelenlétében – visszatér kiindulási pontjába, az eredeti sebességgel. A körpálya r_0 sugarát meghatározza a kezdeti sebesség. A centripetális és a Coriolis-gyorsulás nagyságát a v_0^2/r_0, illetve $2|\Omega|v_0$ alakba írva, a kettő egyenlőségéből:

$$\boxed{r_0 = \frac{v_0}{2|\Omega|}.} \tag{1.12}$$

A sugár annál kisebb, minél gyorsabb a forgatás. Az $r_0 = 10$ km sugarú körön tehetetlenségi mozgást végző test v_0 kerületi sebessége a Földön 1 m/s nagyságrendű. A körmozgás adataival számolt $v_0/(2|\Omega|r_0)$ Rossby-szám egységnyi.

Ennek a szabad mozgásnak az (u, v) sebességkomponensekre vonatkozó mozgásegyenlete (1.10) alapján

$$\dot{u} = 2\Omega v, \qquad \dot{v} = -2\Omega u \tag{1.13}$$

Bármelyik egyenletet még egyszer deriválva és a másikat behelyettesítve, a sebességkomponensekre a harmonikus rezgés differenciálegyenletét kapjuk a $|2\Omega|$ körfrekvenciával. Ezeket a trigonometrikus alakokat integrálva, az y irányban v_0 sebességgel meglökött test esetében $\Omega > 0$-ra például:

$$x = \frac{v_0}{2\Omega} - \frac{v_0}{2\Omega}\cos 2\Omega t, \qquad y = \frac{v_0}{2\Omega}\sin 2\Omega t \tag{1.14}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a közvetlenül az x változóra felírt egyenlet harmadrendű: $\dddot{x} = -(2\Omega)^2\dot{x}$. Ebben elő kell írni a kezdeti gyorsulást is: mivel a sebesség kezdetben y irányú, ez Coriolis-gyorsulás, $2\Omega v_0$.

1.3.2. Állandó külső erő hatása

Tegyük fel, hogy a Coriolis-erőn kívül állandó $\mathbf{F}_0$ erő is hat a testre. Mutasson ez az y irányba, és az általa okozott konstans gyorsulást jelöljük a_0-lal.

A mozgásegyenletek

$$\dot{u} = 2\Omega v, \qquad \dot{v} = a_0 - 2\Omega u. \tag{1.15}$$

Az egyenleteket még egyszer deriválva, visszahelyettesítés után

$$\ddot{u} = -(2\Omega)^2 u + 2\Omega a_0, \qquad \ddot{v} = -(2\Omega)^2 v. \tag{1.16}$$

Az u-ra vonatkozó egyenlet $a_0/(2\Omega)$-val eltolt középpontú, a v-re vonatkozó pedig origó középpontú harmonikus rezgés. Az eltűnő kezdősebességhez ($u_0 = 0, v_0 = 0$) tartozó megoldás $\Omega > 0$-ra

$$u(t) = \frac{a_0}{2\Omega}(1 - \cos 2\Omega t), \qquad v(t) = \frac{a_0}{2\Omega} \sin 2\Omega t. \tag{1.17}$$

Az mozgás meglepő vonása, hogy a sebességek időbeli átlagát véve

$$\overline{u} = \frac{a_0}{2\Omega}, \qquad \overline{v} = 0. \tag{1.18}$$

Annak ellenére, hogy az erő az y irányban hat, az átlagsebesség nem arra mutat, hanem *arra merőlegesen*.

Érdemes észrevenni, hogy a gyorsuláskomponensek $a_0 \sin 2\Omega t$ és $a_0 \cos 2\Omega t$, vagyis a gyorsulás iránya változik, de *nagysága nem*:

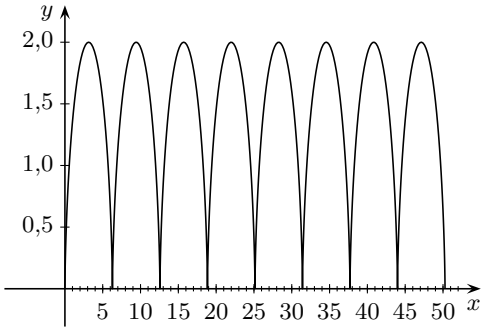
$$|a(t)| = a_0. \tag{1.19}$$

A Coriolis-erő az érintő irányba nem képes gyorsítani, teljesítménye azonosan nulla.

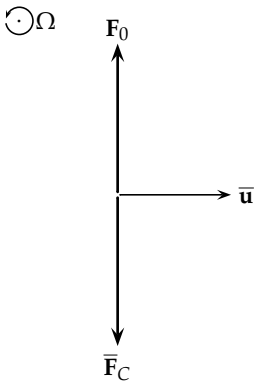
A pálya meghatározása érdekében még egyszer integráljuk az (1.17) egyenleteket. Figyelembe véve, hogy a kezdőpont az origó, az

$$x(t) = \frac{a_0}{2\Omega} t - \frac{a_0}{(2\Omega)^2} \sin 2\Omega t, \qquad y(t) = \frac{a_0}{(2\Omega)^2}[1 - \cos 2\Omega t] \tag{1.20}$$

megoldást kapjuk. Ez mutatja, hogy az erő irányába létrejön egy $a_0/(2\Omega)^2$ nagyságú átlagos elmozdulás (eltűnő átlagsebességgel). A pálya alakja az 1.3. ábrán látható



1.3. ábra. Mozgás az y irányba mutató, állandó a_0 gyorsulást okozó erő és a Coriolis-erő hatására, nyugalomból indítva, pozitív forgásirány esetén. A távolságot az $a_0/(2\Omega)^2$ dimenziótlan egységben mérjük. A pálya (csúcsos) ciklois. [A cikloisok paraméteres egyenlete $x = t - e \sin t$, $y = 1 - e \cos t$, $e = 1$-re csúcsos, $e > 1$-re hurkolt ciklois.]



1.4. ábra. Az $\mathbf{F}_0$ külső erő olyan mozgást alakít ki, amelyben az $\overline{\mathbf{F}}_C$ átlagos Coriolis-erő vele ellentétes lesz, és a hosszú idejű mozgás állandó $\overline{\mathbf{u}}$ átlagsebességű, a külső erőre merőleges irányban.

A külső erő tehát megakadályozza a pontos visszatérést a kiindulási helyre, de csak a rá merőleges irányban tudja a testet jelentősen elmozdítani. A hosszútávú mozgás olyan, hogy a külső erő és a Coriolis-erő átlaga kiejti egymást (1.4. ábra). $2\Omega\overline{u} = a_0$. Ez az egyensúly a hidrodinamikában az ún. geosztrofikus áramlásokban valósul meg (1.9. ábra).

A véges sebességgel meglökött test mozgásában mutasson, az egyszerűség kedvéért, a kezdősebesség az erő y irányába és legyen nagysága v_0. Mivel az (1.20) megoldásban nincsenek szabad paraméterek, az tekinthető az (1.16) inhomogén lineáris egyenlet partikuláris megoldásának. Az általános megoldást úgy kapjuk, hogy ehhez hozzáadjuk a homogén egyenlet (amely (1.15) alapján (1.13)) általános megoldását. A választott kezdőfeltétel akkor teljesül, ha ez az (1.14) tehetetlenségi körmozgás. Az általános megoldás esetünkben tehát

$$x = \frac{v_0}{2\Omega} - \frac{v_0}{2\Omega}\cos 2\Omega t + x_c(t), \qquad y = \frac{v_0}{2\Omega}\sin 2\Omega t + y_c(t), \tag{1.21}$$

ahol $x_c(t)$, $y_c(t)$ az (1.20) kifejezéseket jelenti. Az (1.21) eredmény mutatja, hogy az új mozgás is tehetetlenségi, csak a kör középpontja a gyorsító erő következtében kialakuló $y_c(x_c)$ pályán mozog:

$$\left(x - \frac{v_0}{2\Omega} - x_c(t)\right)^2 + (y - y_c(t))^2 = \left(\frac{v_0}{2\Omega}\right)^2. \tag{1.22}$$

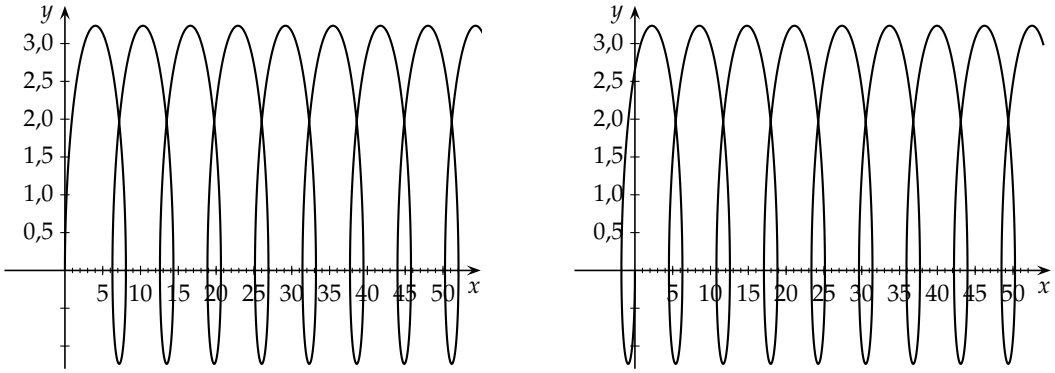
Mivel a tehetetlenségi mozgás csak rászuperponálódik az eltűnő kezdősebességűre, az erők átlagos egyensúlya, minden kezdőfeltétellel érvényes.

Másrészt $x_c(t)$, $y_c(t)$ konkrét alakját behelyettesítve és az addiciós tételt használva, azt kapjuk, hogy

$$x(t) = \frac{a_0}{(2\Omega)^2}\left[2\Omega t + \frac{v_0 2\Omega}{a_0} - \sqrt{1 + \left(\frac{v_0 2\Omega}{a_0}\right)^2}\sin(2\Omega t + \phi)\right],$$
$$y(t) = \frac{a_0}{(2\Omega)^2}\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{v_0 2\Omega}{a_0}\right)^2}\cos(2\Omega t + \phi)\right], \tag{1.23}$$

ahol megjelent a ϕ fázis, amelyre $\operatorname{tg}\phi = v_0 2\Omega/a_0$. A mozgás hasonló, mint kezdősebesség nélkül. Érdekes, hogy a kezdősebesség előjelétől függetlenül nagyobb lett az amplitúdó, a különböző előjelű kezdeti sebességgel indított mozgások csak a fázisban különböznek, ahogy az 1.5. ábra is mutatja.[5]

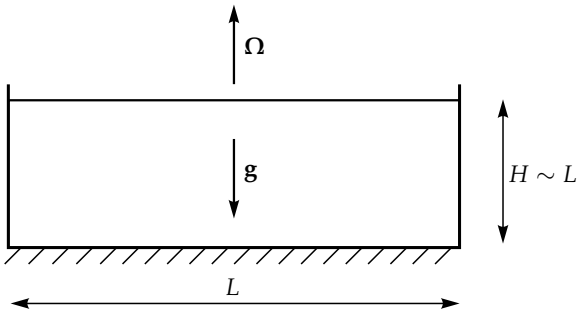
[5] A Lorentz- és Coriolis-erők hasonlóságából következik, hogy az egymásra merőleges konstans mágneses és



1.5. ábra. Mozgás az y irányban ható állandó erő és a Coriolis-erő hatására, y irányú kezdősebességgel. A dimenziótlan $v_0 2\Omega/a_0$ kezdősebesség a bal oldalon 2, a jobb oldalon -2. Jól látszik, hogy a görbék, hurkolt cikloisok, azonosak, csak eltoltak a fázisok eltérő előjelének megfelelően.

1.4. A hidrodinamikai mozgásegyenletek

Tekintsünk egy homogén, azaz nem rétegzett, és természetesen izotróp folyadékkal töltött vízszintes aljú edényt, amelyet Ω állandó szögsebességgel forgatunk egy függőleges tengely körül (1.6. ábra), mint tipikus laboratóriumi kísérletekben. A Földre gondolva, képzeljük edényünket egyelőre az Északi- ($\Omega > 0$), vagy a Déli-sarok ($\Omega < 0$) érintősíkjába. Az edényt csak annak szemléltetésére használjuk, hogy a vizsgált áramlások tipikus vízszintes mérete az edény L szélessége, de a függőleges falakon nem írunk elő peremfeltételeket. A vízszintes méretről feltesszük, hogy jóval kisebb a Föld R_F sugaránál.



1.6. ábra. Folyadék függőleges tengely körül forgatott edényben. A H átlagos mélység összemérhető a L szélességgel. Ez utóbbi tekinthető egyben az áramlás jellemző vízszintes méretének. Az elrendezés a Föld sarkvidékei környékén vagy a laboratóriumban megvalósuló esetnek felel meg, hiszen $\mathbf{g}$ a forgástengely irányába esik.

A hidrodinamikai alapegyenlet, a Navier–Stokes-egyenlet, nem más, mint a folyadékelemre felírt Newton-törvény, amely kifejezi, hogy a disszipáció arányos a deformációs sebességgel, és hogy a probléma leírása elforgatás-invariáns. A Föld felszínén, mint láttuk, a Coriolis-erő a releváns tehetetlenségi erő.[6] Tömegerőként a súlyt figyelembe véve a

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\varrho \mathbf{v} \times \mathbf{\Omega} - \operatorname{grad} p + \varrho \mathbf{g} + \lambda \Delta \mathbf{v} + \overline{\lambda} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{1.24}$$

elektromos térben mozgó töltött részecske mozgása az itt látotthoz hasonló jellegű a mágneses térre merőleges síkban.

[6] A Föld szöggyorsulása $\approx$ 2 ms/100 év, ezért az ezzel kapcsolatos tehetetlenségi gyorsulás, az Euler-gyorsulás jogosan hanyagolható el a Föld esetében.

alakra jutunk. Itt $p(\mathbf{r},t)$ a nyomás, $\varrho(\mathbf{r},t)$ a sűrűség, $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás (amely a sarkok környékén megegyezik a gravitációs gyorsulással), λ a dinamikai viszkozitás, $\overline{\lambda}$ pedig a második belső súrlódási együttható, $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ a Laplace-operátor.

Mivel a $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ sebességet az $\mathbf{r} = (x,y,z)$ hely és a t idő térmennyiségének tekintjük, a folyadékelem teljes gyorsulása a sebesség helyi parciális deriváltjának és a folyadékrészecske térbeli elmozdulásából adódó ún. advektív gyorsulásnak az összege:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.} \tag{1.25}$$

A háromdimenziós sebességre most is a $\mathbf{v} \equiv (u,v,w)$ jelölést használjuk. Amikor a vízszintes síkbeli komponensekről beszélünk csak, akkor az $\mathbf{u} \equiv (u,v)$ jelölést alkalmazzuk. A fenti (1.24, 1.25) összefüggések jelentik a környezeti áramlásokra érvényes Navier–Stokes-egyenletet.

A tömegmegmaradást a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{v}) = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.26}$$

kontinuitási egyenlet fejezi ki, amely kapcsolatot jelent a sűrűség és a sebességtér között.

Az (1.24), (1.26) egyenletek az anyagi minőségre jellemző $\varrho(p)$ termodinamikai állapotegyenlet teszi teljessé, hiszen így kapunk az öt ismeretlen mennyiségre, $(\mathbf{v},\varrho,p)$-re, öt egyenletet.

A légköri és a vízi jelenségek hasonlósága nyilvánvalóvá válik, ha elfogadjuk, hogy legtöbbjük leírható az *összenyomhatatlan* folyadék közelítésben. Ez mindaddig helyes, amíg az áramlás sebessége sokkal kisebb, mint a hangsebesség, amely levegőben 1200 km/óra és vízben mintegy négyszer akkora (7.1. táblázat). Mivel a legerősebb szélvihar is csak néhány száz km/óra sebességű, a feltétel rendszerint jó közelítéssel teljesül, és ezért a továbbiakban mindig összenyomhatatlan közegeket vizsgálunk. Az egyenletek ilyenkor egyszerűbbek a legáltalánosabb alaknál, és kiszűrnek gyors jelenségeket. Így például nem alkalmasak a hangterjedés vagy a csapadékképződés leírására.[7]

Összenyomhatatlan, homogén és izotóp közegben a sűrűség térben és időben konstans, $\varrho \equiv \varrho_0$. Ekkor (1.26)-ből látszik, hogy a sebességtérnek divergenciamentesnek kell lennie:

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.} \tag{1.27}$$

Érdekes, hogy az összenyomhatatlansági tulajdonság, amely arra utal, hogy a közeg az áramlás közben külső behatás nélkül, *magától* nem nyomódik össze (külön eszközzel persze össze lehet nyomni), a sebességtérre is jelent megszorítást. Összenyomhatatlan áramlásban ezért a második belső súrlódási együtthatóval kapcsolatos viszkozitási erő eltűnik. A $\varrho =$ állandó feltétel egyben a termodinamikai állapotegyenlet szerepét játssza.

Az 1.6. ábra szellemében koordináta-rendszerünk z tengelyét mindig függőlegesnek, a $\mathbf{g}$ nehézségi gyorsulással ellentétes irányúnak választjuk,[8] ami egyben a $\boldsymbol{\Omega}$ iránya. Az összenyomhatatlan közegre vonatkozó alapegyenletünk tehát az (1.24) Navier–Stokes-egyenlet sűrűséggel

[7] Használni fogjuk azonban azt az egyszerű megfigyelést, hogy a felszálló légáramlatok felhőképződésre vezetnek, hiszen ekkor nagy nedvességtartalmú levegő kerül alacsonyabb hőmérsékletű környezetbe, ahol kicsapódik. A felhők egyben a légköri áramlások nyomjelzőinek is tekinthetők, és hasonló szerepet játszhat a tengeri, illetve tavi mozgásokban a planktontartalom.

[8] Kísérleti elrendezésben a centrifugális erő akkor hanyagolható el, ha az edény peremén fellépő $L\Omega^2/2$ centrifugális gyorsulás jóval kisebb g-nél, azaz $\Omega \ll (g/L)^{1/2}$, amit a továbbiakban felteszünk. A (1.1) és (1.32) definíciókkal a feltétel annak felel meg, hogy $Ro \gg Fr$.

való osztása után

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\Omega\mathbf{v}\times\mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad} p - g\mathbf{n} + \nu\Delta\mathbf{v}.} \tag{1.28}$$

Itt $\mathbf{n}$ a függőleges z irányú egységvektor, és megjelent a $\nu = \lambda/\varrho_0$ *kinematikai* viszkozitás, amely jó közelítéssel állandó. A peremfeltételek figyelembevételével: álló határfelületen a sebességvektornak el kell tűnnie, mozgó fal esetén a fal sebességét kell felvennie,[9] és a nyomásra vonatkozó peremfeltétellel a forgó rendszerbeli $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ és $p(\mathbf{r},t)$ sebesség-, illetve nyomásmező egyértelműen megkapható. Az (1.27), (1.28) egyenlet közvetlenül a sebességre vonatkozik. A nyomás tehát nem dinamikai változó abban az értelemben, hogy időfüggését külön egyenlet szabályozná. A nyomásnak önkonzisztensen kell változnia úgy, hogy az (1.28) egyenlet minden pillanatban fennálljon. A nyomást tehát maga az áramlás határozza meg.

1.5. A dimenziótlan alak

Ahhoz, hogy meg tudjuk becsülni, amelyik tag, mikor jelentős, érdemes az (1.28) egyenletet dimenziótlan alakba átírni. Mérjük a távolságot az L jellemző lineáris kiterjedés egységében, a sebességet a U karakterisztikus vízszintes sebesség egységében, ekkor az időegység értelemszerűen $t_h = L/U$. A nyomás kialakulásában a Coriolis-erő nyilvánvalóan fontos, ezért mértékegységét $2\varrho_0|\Omega|LU$-nak választjuk. Ezzel azt fejezzük ki, hogy a nyomási erő és a Coriolis-erő összemérhetővé válhatnak.[10] A csillaggal jelölt dimenziótlan mennyiségek tehát így függnek össze az eredeti dimenziós mennyiségekkel:

$$\mathbf{r} = L\mathbf{r}^*, \quad \mathbf{v} = U\mathbf{v}^*, \quad t = \frac{L}{U}t^*, \quad p = 2\varrho_0|\Omega|LUp^*. \tag{1.29}$$

Az (1.28) egyenletbe helyettesítve

$$\frac{U}{L/U}\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = 2\Omega U\mathbf{v}^*\times\mathbf{n} - \frac{2\varrho_0|\Omega|LU}{\varrho_0 L}\operatorname{grad}^* p^* - g\mathbf{n} + \frac{\nu U}{L^2}\Delta^*\mathbf{v}^*. \tag{1.30}$$

Itt felhasználtuk, hogy a gradiens és a Laplace-operátor képzése egy, illetve kétszeres térbeli deriválással jár, ami dimenziósan L, illetve L^2-tel való osztás. A csillaggal jelölt operációk a dimenziótlan térbeli változókra vonatkoznak. Az egész egyenletet U^2/L-lel osztva

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \frac{2\Omega L}{U}\mathbf{v}^*\times\mathbf{n} - \frac{2|\Omega|L}{U}\operatorname{grad}^* p^* - \frac{gL}{U^2}\mathbf{n} + \frac{\nu}{UL}\Delta^*\mathbf{v}^*. \tag{1.31}$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal minden tagja előtt megjelent egy arányszám. Az első két tag előtt a (1.1) Rossby-szám reciproka áll. A harmadik és negyedik tag előtt pedig az

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \tag{1.32}$$

Froude-szám,[11] illetve az

$$Re = \frac{UL}{\nu} \tag{1.33}$$

[9] A viszkózus tag elhanyagolásával kapott Euler-egyenletben mindez a felületre merőleges komponensekre érvényes.

[10] A nem forgatott esetben $\varrho_0 U^2$ a természetes egység. Ha ezt tartanánk, az (1.31) egyenlet $\operatorname{grad}^* p^*$ tagja előtti együttható 1 lenne, vagyis a gyorsan forgatott ($2\Omega L/U \gg 1$) határesetben a nyomás hatása elhanyagolhatóvá válna a Coriolis-erőjéhez képest.

[11] Ha a szélesség jóval nagyobb, mint a mélység, a mélységgel képzett $U/\sqrt{gH}$ Froude-szám válik jelentőssé, lásd 2. fejezet.

Reynolds-szám jelenik meg. A csillagokat ezután elhagyjuk, mert a dimenziótlan számok egyértelműen mutatják, hogy a dimenziótlan egyenletről van szó. A dimenziótlan Navier–Stokes-egyenlet tehát

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{Ro}\left(\pm\mathbf{v}\times\mathbf{n} - \operatorname{grad} p\right) - \frac{1}{Fr^2}\mathbf{n} + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v}.} \tag{1.34}$$

Mivel a Rossby-szám csak a szögsebesség abszolútértékét tartalmazza, megjelent a vektorszorzatban egy $\pm$ tényező. A felső előjel tartozik a pozitív forgásirányú esethez.

Az (1.29) megfeleltetéstől az (1.34) egyenletig tartó műveletsort röviden úgy is fogalmazhatjuk, hogy az

$$\mathbf{r} \to L\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \to U\mathbf{v}, \quad t \to \frac{L}{U}t, \quad p \to 2\varrho_0|\Omega|LUp \tag{1.35}$$

áthelyettesítés a dimenziótlan (1.34) Navier–Stokes-egyenletre vezet. A dimenziótlanítások kapcsán a későbbiekben is ezt a jelölést használjuk.

A dimenziótlan számok az egyes tagok súlyát határozzák meg a mozgásegyenletben, mivel a dimenziótlan gyorsulások általában egységnyi nagyságrendűek. Két áramlást akkor tekinthetünk hasonlónak, ha geometriájuk hasonló (tehát pl. azonos formájú akadály van bennük) *és*, ha dimenziótlan számaik (Ro, Fr és Re) azonosak. Ilyenkor ugyanis a peremek egyszerű transzformációval egymásba vihetők, ezért a dimenziótlan peremfeltételek azonosak, és a dimenziótlan mozgásegyenletek is megegyeznek. A megoldások ekkor csak arányossági tényezőkben térhetnek el egymástól. Ez a feltétel szabja meg tehát azt is, hogy nagyskálájú környezeti áramlások mikor modellezhetőek hűen laboratóriumi kísérletekkel.

A Rossby-szám (1.5) alakjához hasonlóan, a Froude-szám négyzete az $a_h = U^2/L$ hidrodinamikai és a g nehézségi gyorsulás aránya:

$$Fr^2 = \frac{\text{hidrodinamikai gyorsulás}}{\text{nehézségi gyorsulás}}, \tag{1.36}$$

a Reynolds-szám pedig a hidrodinamikai gyorsulásnak a $\nu U/L^2$ viszkózus gyorsuláshoz való viszonyát adja,

$$Re = \frac{\text{hidrodinamikai gyorsulás}}{\text{viszkózus gyorsulás}}. \tag{1.37}$$

Az 1.1. táblázatban feltüntetjük e három paraméter értéket egy ciklon és a tengeráramlatok gyűrűinek tipikus példáján (a kinematikai viszkozitást a 7.1. táblázat alapján véve).

1.1. táblázat. Ciklon és tengeráramlatok gyűrűinek jellemző dimenziótlan számai, hossz-, és sebességadatai.

	Ro	Re	Fr	L (km)	U (m/s)
Ciklon	$7{,}1\cdot10^{-2}$	$6{,}7\cdot10^{11}$	$3{,}2\cdot10^{-3}$	1000	10
Óceáni örvények	$7{,}1\cdot10^{-2}$	$1{,}0\cdot10^{11}$	$1{,}0\cdot10^{-3}$	100	1

A legegyszerűbb hidrodinamikai esetet akkor kapnánk, ha mind a három szám értéke nagyon nagy lenne, hiszen ez a nem forgatott ($Ro=\infty$), ideális azaz súrlódásmentes ($Re=\infty$) és súlytalan ($Fr=\infty$) folyadék egyenletét jelentené. A dimenziótlan számok végessége tehát annak mértékét fejezi ki, hogy mennyire térünk el ettől az egyszerű áramlástól.

A táblázat azt mutatja, hogy a Reynolds-szám igen nagy, tehát a súrlódás szempontjából közel vagyunk az ideális esethez: a viszkozitás a peremektől távol jogosan hanyagolható el.

Ezért amíg a 4. fejezetben nem térünk rá a határrétegbeli áramlások vizsgálatára, a viszkózus tagot nem írjuk ki, az ún. Euler-egyenletet használjuk. Ugyanakkor a Froude-szám kicsi, tehát messze vagyunk a súlytalan folyadék esetétől. Vegyük észre azonban, hogy a súly csak a függőleges irányú mozgást befolyásolja, amelyre egyáltalán nincs hatással a Coriolis-erő. A vízszintes síkban történő áramlás szempontjából tehát a nyomáson kívül a Coriolis-hatás a legjelentősebb, és mindkettő $1/Ro$-val arányos.[12]

1.6. Dinamikai nyomás

Mivel a Froude-szám csak konstanssal szorzódik az (1.34) Navier–Stokes-egyenletben, a vele arányos tag kiküszöbölhető. A súly miatt akkor is magasságfüggő a nyomás, ha nincs áramlás. A $\mathbf{v} \equiv 0$ nyugalmi állapothoz az (1.28) egyenlet szerint egy $p_0(z)$ hidrosztatikai nyomás tartozik, amelyre

$$\frac{dp_0}{dz} = -\varrho_0 g. \tag{1.38}$$

Ennek megoldása $p_0(z) = p_0 - \varrho_0 g z$, ahol p_0 a helytől független tetszőleges konstans. Áramlás jelenlétében ezért célszerű a teljes p nyomást a hidrosztatikai eloszlás és egy új tag összegére bontani, és azt írni, hogy

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(z) + p'(\mathbf{r}, t). \tag{1.39}$$

Mivel az áramlást a p' nyomáseltérés hozza létre, ezt a mennyiséget *dinamikai nyomásnak* nevezzük. Ezzel a nyomási erő okozta gyorsulás

$$-\frac{1}{\varrho_0} \operatorname{grad} p = g\mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0} \operatorname{grad} p'. \tag{1.40}$$

A dinamikai nyomás gradiensének első két komponense tehát ugyanaz, mint a teljes nyomásé, a függőleges komponensben pedig éppen a nehézségi gyorsulás köztük a különbség. A dinamikai nyomással kifejezett hidrodinamikai mozgásegyenletben a $\mathbf{g}$ nehézségi gyorsulás tehát *nem* jelenik meg:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\Omega \mathbf{v} \times \mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0} \operatorname{grad} p'.} \tag{1.41}$$

A komponensekben történő felíráshoz használjuk a Coriolis-gyorsulás (1.10) alakját:

$$\frac{du}{dt} = +2\Omega v - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{1.42}$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{1.43}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}. \tag{1.44}$$

[12] A Froude- és a Reynolds-számok a 2. és 7. fejezetekben tárgyalt jelenségek kapcsán játszanak majd központi szerepet.

Az (1.34)-nek megfelelő dimenziótlan mozgásegyenlet ideális folyadékra a dinamikai nyomás használatával.[13]

$$Ro\frac{du}{dt} = \left(\pm v - \frac{\partial p'}{\partial x}\right), \tag{1.45}$$

$$Ro\frac{dv}{dt} = \left(\mp u - \frac{\partial p'}{\partial y}\right), \tag{1.46}$$

$$Ro\frac{dw}{dt} = \left(-\frac{\partial p'}{\partial z}\right). \tag{1.47}$$

Ezekből az egyenletekből is látszik, hogy elhanyagolható viszkozitás esetén a folyadék *belsejében* zajló mozgások szempontjából a Rossby-szám az *egyetlen* dimenziótlan szám.

1.7. A gyorsan forgatott folyadék

1.7.1. Oszlopos áramlás, a Taylor–Proudman-tétel

Gyors forgatás, vagyis $Ro \ll 1$ esetén az (1.45)–(1.47) egyenletekben a Rossby-számtól független tagok dominálnak. Célszerűnek bizonyul először az $Ro \to 0$ határesetet vizsgálni. Ekkor a zárójelben levő tagoknak el kell tűnniük:

$$\pm v - \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \tag{1.48}$$

$$\mp u - \frac{\partial p'}{\partial y} = 0, \tag{1.49}$$

$$-\frac{\partial p'}{\partial z} = 0. \tag{1.50}$$

Az utolsó egyenlet szerint a dinamikai nyomás nem függ a magasságtól, a teljes p nyomás magasságfüggése *hidrosztatikus*. Az (1.48), (1.49) egyenletek z szerinti deriváltjából azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.} \tag{1.51}$$

Ez az ún. Taylor–Proudman-tétel, amely azt mondja ki, hogy a vízszintes sebességkomponensek nem függnek a magasságtól, a rétegek vízszintes irányban azonosan mozognak, az áramlás *oszlopos* szerkezetű.

Az (1.48) egyenlet y szerinti, az (1.49) x szerinti deriváltját véve majd kivonva őket egymásból, azt kapjuk, hogy az áramlás div $\mathbf{u}$ síkbeli divergenciája eltűnik:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.52}$$

A vízszintes síkbeli áramlás összenyomhatatlan. A teljes összenyomhatatlansági feltétellel,

[13] Az (1.35)-ben használt $2\varrho_0|\Omega|UL$ valójában a dinamikai nyomás jellemző nagysága, nem a $p_0(z)$ hidrosztatikai nyomásé. Az utóbbi nagysága $\varrho_0 gH \approx \varrho_0 gL$. A dinamikai nyomás mérőszáma $2\varrho_0|\Omega|UL = \varrho_0 gLFr^2/Ro$, vagyis a dinamikai és a hidrosztatikai nyomás viszonya Fr^2/Ro, ami Fr kicsinysége miatt kicsi. A dinamikai nyomás tipikus értéke a földi légkörben néhány hektopascal (hPa), az óceánban néhány ezer hPa (1 hPa $= 100\ \mathrm{N/m^2} = 100\ \mathrm{kg/(m\ s^2)} = 1$ mbar). A felszíni légnyomás 1000 hPa körüli.

(1.27)-tel ez azt jelenti, hogy

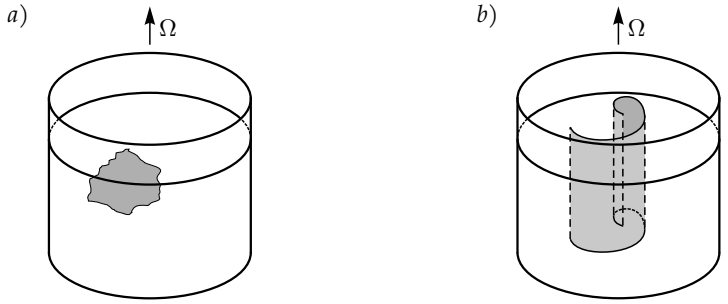
$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = 0,} \tag{1.53}$$

azaz a függőleges sebesség nem függhet a z koordinátától.

Ha $w = 0$, azaz a folyadék teljes mélységében nincs függőleges mozgás, az áramlás *kétdimenziós*. Ez a Taylor–Proudman-tétel erősebb változata. Az erős forgatás szinkronizáltan mozgó vízszintes rétegekbe kényszeríti a folyadékot, hiszen a vízszintes síkban ható Coriolis-erő dominál. Az egymás fölötti rétegek tehát áramlásdinamikai szempontból nem különböztethetők meg.

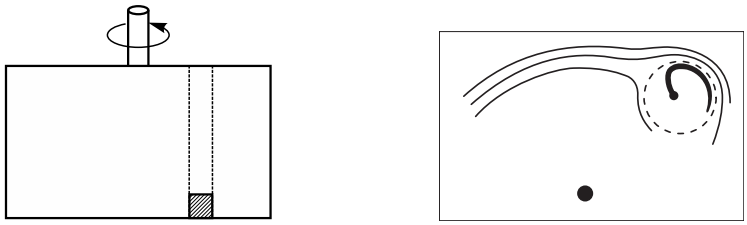
Már véges, de kicsi Rossby-számok esetén is világosan látszik az oszlopos áramlás kialakulásának tendenciája. Ha forgatott folyadékba injekciós tűvel felülről festéket fecskendezünk, a kezdetben szabálytalan festékfelhő a relatív sebesség miatt kialakuló áramlás következtében elmozdul, és rövid idő után már függőleges görbült felületek (Taylor-függönyök) mentén helyezkedik el (1.7. ábra).

A jelenség oldalnézetből és felülnézetből is egyidejűleg megfigyelhető ebben a kísérletben.



1.7. ábra. A Taylor–Proudman-tétel kísérleti megnyilvánulása. a) Gyorsan forgatott edénybeli folyadékba felülről festéket juttatunk. b) Függőleges festékfüggönyök alakulnak ki.

Az oszlopos szerkezet egy másik bizonyítéka Taylor kísérlete (G.I. Taylor (1886–1975) angol fizikus, a modern hidrodinamika egyik megalapozója). Ha egy forgatott edény aljára korongot helyezünk és lassú áramlást hozunk létre a korong körül, azt tapasztaljuk, hogy a korong feletti egész vízoszlop együtt áll a koronggal (1.8. ábra). Ez elképzelhetetlen dolog a hétköznapi életben: a korong mintegy magához csatolja az egész fölötte levő vízoszlopot.



1.8. ábra. a) A Taylor-kísérlet oldalnézeti képe: forgatott edény aljára kis korongot helyezünk. A pontozott vonal a korong felett elhelyezkedő folyadékoszlopot jelöli. b) Az együtt forgó rendszerben felülről megfigyelt áramlás sematikus rajza: a lassan mozgó festékcsíkok kívülről megkerülik a korong alapú hengert (szaggatott vonal). A henger belsejéből induló csepp a henger belsejében marad. A fekete pont a forgástengely.

A jelenség magyarázatát a kétdimenziós jelleg adja: ha ugyanis az áramlás nem függ a füg-



gőleges iránytól és az edény alján elkerüli a korongot, akkor minden más magasságban is el kell kerülnie azt a hengert, amelynek alapja a korong.

Taylor-oszlop körüli áramlás látható felülnézetben ebben a kísérletben. A forgatás kikapcsolásakor a struktúra megszűnik.

Az oszlopos szerkezet jelenlétét a környezeti jelenségekben az a megfigyelés is alátámasztja, amely szerint a parttól távoli lassú tengeráramlatok helyenként 1 km mélységig azonosan mozognak, és a tropszféra fölötti magaslégkör, a sztratoszféra áramlásai nagy skálán gyakorlatilag kétdimenziósak. Taylor-oszlopok jelenlétére egyértelmű utalást óceáni megfigyelések adnak. A Szibériát és Alaszkát összekötő Bering-szorostól északra elterülő sekély (Csukcs-) tengerben felszín alatti zátonyok találhatók, amelyek sugara kb. 50 km, felettük a vízmélység 40 m körüli, körülöttük több mint 50 m. A jégolvadás követése mutatja, hogy a zátonyok fölött több héttel később olvad csak el a jég, mint rajtuk kívül. Ennek magyarázata a zátonyokhoz kötött Taylor-oszlop, amely lassítja az olvadt víz és jég keveredését a környezettel. Hasonló magyarázata lehet annak, hogy meredek sziklaparttal rendelkező magas szigeteket (mint pl. a Feröer-szigetek Litla Dímun-ját) szinte állandó felhőtakaró fedi: a növényzetből felszálló nedves levegőt a Taylor-oszlop csapdába ejti.[14] A Föld belsejében is van olyan áramlás, amelyben a Taylor-oszlopok nagyon jelentősek, nevezetesen a Föld magjának forró és folyékony tartományában, a külső magban, ahogy arról a 8.3. fejezetben lesz szó. Megjegyezzük, hogy a földinél kisebb Rossby-számú Jupiter Nagy Vörös Foltja nulladik közelítésben szintén tekinthető Taylor-oszlopnak.

1.7.2. Geosztrofikus áramlás

A gyorsan forgatott határesetben lehetőség nyílik egy sajátos *időfüggetlen*, stacionárius áramlás kialakulására. Amennyiben a nyomáseloszlás időtől független, az (1.48)–(1.50) egyenletekből következik, hogy a

$$v = v_g \equiv \pm\frac{\partial p'}{\partial x}, \qquad u = u_g \equiv \mp\frac{\partial p'}{\partial y}, \qquad w = w_g \equiv 0 \tag{1.54}$$

sebességeloszlás is stacionárius. Az ilyen áramlást *geosztrofikus*nak, azaz a Föld forgása által meghatározottnak nevezzük. A tapasztalat szerint ez természetes közegeink nagyskálájú mozgásaira jellemző áramlási típus,[15] legalábbis első közelítésben.

A fenti egyenlet azt mutatja, hogy a vízszintes nyomásgradiens ellensúlyozza a Coriolis-erőt: $\pm\mathbf{u}_g \times \mathbf{n} = \operatorname{grad} p'$. Tehát a nagyon gyorsan forgatott áramlásokban létezik olyan egyensúly, amelyben a $-\operatorname{grad} p'$ nyomási erő kompenzálja a Coriolis-erőt, amint az 1.9. ábra szemlélteti. Ez óhatatlanul azt jelenti, hogy ebben az (erő)egyensúlyi állapotban a közeg áramlik, hiszen különben eltűnne a Coriolis-erő.

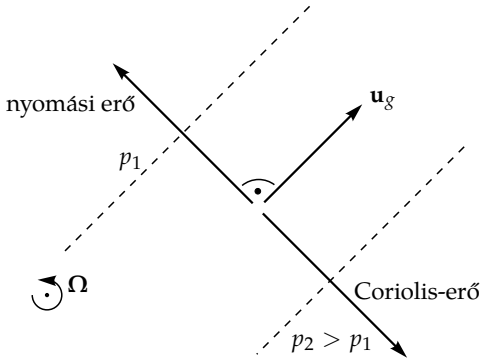
A geosztrofikus áramlás olyan vízszintes síkbeli áramlás, amelynek $\mathbf{u}_g$ sebessége *merőleges* a dinamikai nyomás gradiensére (amely a vízszintes síkba esik):

$$\boxed{\mathbf{u}_g \operatorname{grad} p' = 0.} \tag{1.55}$$

Az áramlás tehát nem arra folyik, amerre a nyomás hajtaná, hanem arra *merőlegesen*. Ez teljesen ellentétes hétköznapi tapasztalatunkkal, mert egy csőben például a nyomásgradiens irányába

[14] Köszönet Vincze Miklósnak ezért a felismerésért.

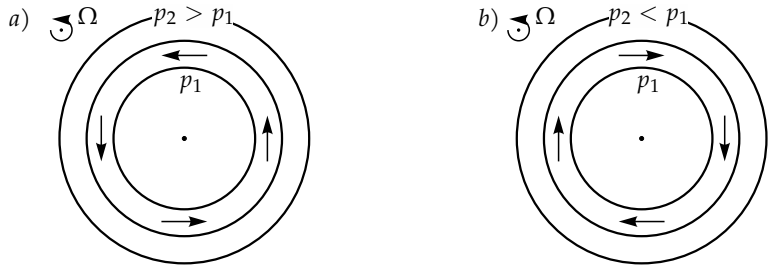
[15] A történeti eredetű elnevezés ellenére a Föld forgása számos más áramlásban is szerepet játszik, hiszen a Coriolis-erő még egységnyi Rossby-szám esetén is jelentős, mint pl. a közepes kiterjedésű hullámmozgásokban. Kisskálájú környezeti jelenségekben a Föld forgása nem lényeges, a Rossby-szám nagy. Egy 100 m átmérőjű tornádóban például $U = 40$ m/s-mal számolva, a Rossby-szám 3000-nél is nagyobbnak adódik.



1.9. ábra. Erőviszonyok a geosztrofikus áramlásban: a Coriolis-erő a nyomási erővel ellentétesen egyenlő. Rájuk merőleges a kialakuló kétdimenziós geosztrofikus áramlás $\mathbf{u}_g$ sebességvektora. A magasabb nyomás pozitív forgatás esetén a sebességvektor *jobb* oldalára esik.

folyik a víz. Ez a viselkedés azonban összhangban van az 1.3.2. fejezet pontmechanikai példájával, ahol az átlagsebesség merőleges a külső erőre (1.4. ábra). A geosztrofikus sebesség iránya a nyomási erőre mindig merőleges, pozitív (negatív) forgatási irány esetén $\mathbf{u}_g$ ezen erő vektorától jobbra (balra) mutat. Az áramlás jobb (bal) oldalán található tehát a magasabb nyomás.

Minden időfüggetlen nyomástérhez tartozik egy geosztrofikus áramlás. Nézzük meg, hogy ez milyen típusú kör alakú izobárok esetén, ha a középpontban alacsonyabb vagy magasabb a nyomás, mint kívül (1.10a, b ábrák). Mivel az 1.9. ábra a sebesség irányítottságától függetlenül helyileg mindenütt érvényes, az izobárok mentén körkörös áramlás alakul ki, amely körülfolyja az alacsony vagy magas nyomású helyet. Az alacsony nyomású esetben $\Omega > 0$ mellett ez pozitív körüljárású, az északi félteke ciklonjaihoz hasonló áramlás.

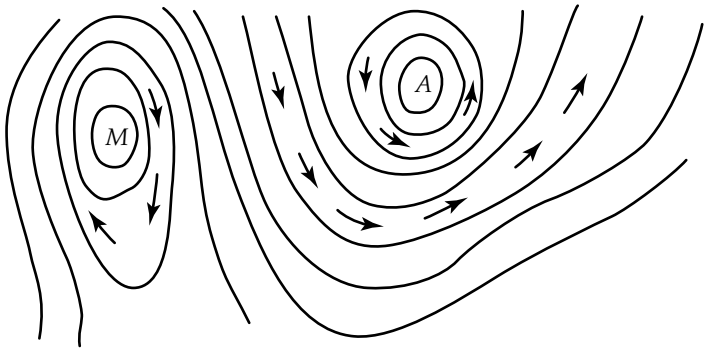


1.10. ábra. Forgásszimmetrikus nyomáseloszlás hatására kialakuló geosztrofikus áramlás alacsony (a) és magas (b) nyomású központ körül $\Omega > 0$ esetén. Nyomásminimum körül (a) ábra) az áramlás ciklonális, a maximum körül (b ábra) anticiklonális. Negatív forgásirányhoz negatív ciklonális örvénylés tartozik.

Az ilyen jellegű helyi viselkedésekből az 1.11. ábrán látható áramlási kép áll össze. Jó közelítéssel teljesül, hogy a sebesség az állandó nyomású görbékkel, az izobárokkal párhuzamos, vagyis az izobárok egyben áramvonalak. Pozitív forgásirány esetén az áramlás irányába nézve a magasabb nyomás mindig a jobb oldalon található.

A valóságos adatokkal való összevetés céljából érdemes áttérni a dimenziós alakra. Az egyensúly (1.41) alapján azt jelenti, hogy a $2\varrho_0 \mathbf{u}_g \times \mathbf{\Omega}$ Coriolis-erő a $-\operatorname{grad} p'$ nyomási erővel ellentétesen egyenlő:

$$2\Omega \mathbf{u}_g \times \mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} p'}{\varrho_0}, \tag{1.56}$$



1.11. ábra. Általános geosztrofikus áramlás sematikus képe pozitív forgásirány esetén. A folytonos vonalak izobárok, a kis nyilak az áramlás sebességvektorát adják meg néhány helyen. A szomszédos izobárok folyómederként terelik az áramlást, más szóval az izobárok áramvonalak. Az A és M betűk alacsony, illetve magas szélsőértékű nyomási központokat jelölnek.

amiből $\mathbf{u}_g = (\mathbf{n} \times \operatorname{grad} p')/(2\Omega\varrho_0)$, avagy

$$\boxed{u_g = -\frac{1}{2\Omega\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \qquad v_g = \frac{1}{2\Omega\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial x},} \tag{1.57}$$

tehát a nyomásgradiens és $2\Omega\varrho_0$ viszonya szabja meg az áramlás erősségét.

Ezek szerint ha két, $\delta r = 100$ km távolságban futó izobárt tekintünk, amelyek között a nyomáskülönbség $\delta p = 2$ hPa $= 200\ \mathrm{N/m^2}$, akkor a levegő $\varrho_0 = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$ sűrűségével és Ω_F-fel számolva azt kapjuk, hogy $|\mathbf{u}_g| = \delta p/(2\Omega_F\varrho_0\delta r) \approx 12$ m/s ≈ 43 km/h. Ez a valódi szélsebességek nagyságrendje. A geosztrofikus áramlás hasonló jellegű marad közepes földrajzi szélességeken, azaz az általunk ismert időjárási zónában (lásd 3.4. fejezet).

A dimenziós alak lehetőséget teremt arra is, hogy meggondoljuk, hogy az 1.10. ábra áramlásaiban miért nem szükséges a centripetális erő figyelembevétele a körmozgás feltételeként. A csak a radiális távolságtól függő $u_g(r) = 1/(2\Omega\varrho_0)dp(r)/dr$ geosztrofikus sebesség az $a_C = 2\varrho_0 u_g(r)\Omega$ Coriolis-gyorsulás és a nyomási erőből adódó gyorsulás egyenlőségéből adódott. A kettő különbségének szigorúan az $a_{cp} = \varrho_0 u_g(r)^2/r$ centripetális gyorsulást kellene adnia az r sugarú körpályán. Vegyük azonban észre, hogy $a_{cp}/a_C = u_g(r)/(2r\Omega)$, ami az áramlásnak megfelelő Rossby-szám. Mivel a geosztrofikus határesetben a Rossby-szám nagyon kicsi, a centripetális gyorsulás elhanyagolható a másik kettő mellett.[16]

A későbbiekben gyakran fogjuk használni, hogy bármilyen síkbeli összenyomhatatlan $\mathbf{u}(x, y, t)$ sebességű áramláshoz tartozik egy $\psi(x, y, t)$ áramlási függvény, amelyre

$$\boxed{u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x},} \tag{1.58}$$

hiszen ekkor $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Az áramvonalak a ψ áramlási függvény szintvonalainak felelnek meg.[17]

[16] Érdemes összevetni ezt a tehetetlenségi körmozgással (1.3.1. fejezet). A Coriolis-gyorsulás ott megegyezik a centripetális gyorsulással, a ciklonszerű körkörös áramlásokban viszont a nyomási gyorsulással. A két mozgás tehát dinamikailag teljesen más eredetű. Ennek egyik megnyilvánulása az is, hogy a tehetetlenségi körmozgás mindig anticiklonális, a másik esetben viszont mindkét körüljárási irány előfordulhat adott előjelű forgatási szögsebesség esetén is.

[17] A hagyományos hidrodinamikában hasonló szerepet a Φ sebességpotenciál játszik, de az csak örvénymentes áramlásokhoz tartozhat. A környezeti áramlások általában örvényesek, ezért a továbbiakban az áramlási függvényt használjuk.

A fentiekből következik, hogy a geosztrofikus áramlási függvény a dinamikai nyomással arányos:

$$\psi = \frac{1}{2\Omega\varrho_0} p'. \tag{1.59}$$

Innét is látszik, hogy az áramvonalak az állandó nyomású görbék, az izobárok.

Az örvényvektor a függőleges irányba mutat, megegyezik z irányú komponensével, amelyet ζ-val jelölünk. Ez a komponens tehát $\zeta \equiv \boldsymbol{\omega}_z \equiv (\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_g)_z = \partial v_g/\partial x - \partial u_g/\partial y$, és érvényes, hogy

$$\zeta = \Delta\psi = \frac{1}{2\Omega\varrho_0}\Delta p'. \tag{1.60}$$

A kialakuló örvényességet az áramlási függvény Laplace-operátora határozza meg.

1.8. A kvázi-geosztrofikus közelítés

A geosztrofikus egyensúly elméleti létezése megmagyarázza, hogy miért hosszú életűek a ciklonok és anticiklonok a Földön. Az erősen forgatott határesetben nem is változhatnának időben. A valódi ciklonok lassan mozognak és deformálódnak, mert időskálájukat a geosztrofikus áramlástól való, Rossby-szám rendű csekély eltérés határozza meg. Mivel a Rossby-szám kicsi, a mozgás lassú.

Általában a geosztrofikus áramlás szolgál kiindulásul minden lassú, nagyskálájú környezeti áramlási problémában. Először megértjük a geosztrofikus határesetet, és utána hozzávesszük az időben lassan változó korrekciókat. Ebben a közelítésben a körmozgás feltételében már nem hanyagolható el a centripetális gyorsulás, de kicsinek bizonyul a többihez képest.

A nyomásgradiens komponenseit formálisan azonosíthatjuk a geosztrofikus áramlás $\mathbf{u}_g$ sebességével (1.57), azaz a teljes (1.42)–(1.44) hidrodinamikai egyenlet írható, mint

$$\frac{du}{dt} = +2\Omega\left(v - v_g\right), \tag{1.61}$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega\left(u - u_g\right), \tag{1.62}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}, \tag{1.63}$$

ahol a háromdimenziós $\mathbf{v}$ sebességtér divergenciamentes: (1.27), de a vízszentes síkbeli $\mathbf{u}$ már nem feltétlenül az. Amennyiben feltehető, hogy a geosztrofikus eredménytől való $u - u_g$, $v - v_g$, és $\partial p'/\partial z$ eltérés kicsi, ezt az egyenletrendszert nevezzük a forgatott folyadék hidrodinamikája *kvázi-geosztrofikus* közelítésének. Megadja, hogy mik az első korrekciók a geosztrofikus határesethez képest, és egyben már megenged időfüggő dinamikát is. Ez a teljes deriváltak jelenléte miatt nemlineáris egyenlet, és ezért egzakt kijelentések csak speciális esetekben tehetők a kvázi-geosztrofikus viselkedésről. Az (1.35) dimenziótlanítással a jobb oldal mindenütt $1/Ro$-val szorzódik, míg a bal oldal egységnyi. Ezért a dimenziótlanított sebesség geosztrofikustól való eltérésének szintén Ro rendűnek kell lennie. A kvázi-geosztrofikus egyenlet vizsgálata lesz a későbbiekben egyik fő célunk.

1.9. Tehetetlenségi hullámok

1.9.1. Hullámokról általában

Hullámokban a hidrodinamikai mennyiségek térben és időben is változnak.[18] A kis amplitúdójú, *lineáris hullámok* legegyszerűbb változatai térben és időben is periodikusak. A nagy amplitúdójú hullámokat *nemlineáris hullámoknak* nevezzük. Ezek számos érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, példákról később lesz szó.

Minden lineáris hullámban azt vizsgáljuk, milyen áramlás alakul ki, ha a folyadékot *kissé* kimozdítjuk a $\mathbf{v} = 0$ nyugalmi állapotból. Mivel ekkor az áramlás gyenge, az advektív gyorsulások elhanyagolhatók, és a teljes deriváltak jó közelítéssel helyettesíthetők az időbeli parciális deriváltakkal. A mozgásegyenletek ebben a közelítésben *állandó együtthatós, homogén* lineáris differenciálegyenlet-rendszert adnak.

Az alapmegoldás adott frekvenciájú, ún. monokromatikus síkhullám, amelyben tetszőleges hidrodinamikai változó, nevezzük A-nak, az $\mathbf{r}$ helykoordinátától és a t időtől szinuszosan függ:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r},t) &= a\cos\left(\mathbf{kr}-\omega_0 t+\phi\right) = a\cos\left(kr-\omega_0 t+\phi\right) = \\ &= a\cos\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+\phi\right] = a\cos\left[k\left(r-\frac{\omega_0}{k}t\right)+\phi\right]. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Itt $\mathbf{k}$ a hullám haladási irányába mutató hullámszámvektor, k ennek hossza, r a haladási irányban mért távolság, ω_0 a hullám frekvenciája, ϕ a fázisa, a az amplitúdója.

Ezeket a megoldásokat szokás komplex exponenciális függvénnyel leírni, az A változóra a következő alakban:

$$A = ae^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega_0 t+\phi)}. \tag{1.65}$$

A fenti komplex alakot (melyben a $\mathbf{kr}$ szorzatot kifejeztük a hullámszámvektor (k_x,k_y,k_z) komponenseivel) azért érdemes használni, mert így egyszerűbb összefüggésekre jutunk. A változó fizikailag értelmezhető viselkedését a valós rész képzésével kapjuk a számolás végén.

A síkhullámalakot a linearizált mozgásegyenletekbe helyettesítve algebrai egyenletrendszert kapunk. Az (1.66) képlet, aminek a neve diszperziós reláció, adja meg, hogy hogyan függ a frekvencia. Ennek nemtriviális megoldása megadja, hogy a frekvencia hogyan függ a hullámszámtól, az

$$\boxed{\omega_0 = \omega_0(\mathbf{k})} \tag{1.66}$$

ún. *diszperziós relációt*.[19] Minden lineáris hullámnak a diszperziós reláció a legfontosabb jellemzője, egyfajta ujjlenyomata. A diszperziós relációból kétfajta sebességjellegű mennyiség is következik.

Az (1.64) egyenlet utolsó egyenlőségéből látszik, hogy a hullám terjedési sebessége (fázissebessége) a terjedés $\mathbf{k}$ irányában

$$c = \frac{\omega_0(\mathbf{k})}{k}. \tag{1.67}$$

Terjedési sebességek az egyes koordinátatengelyek mentén is megfigyelhetők, és ezek a megfe-

[18] Ezért geosztrofikus esethez nem tartozhatnak hullámok.

[19] Ha ω_0 képzetesnek adódik, hullámmegoldás nem létezik. Amennyiben a megoldás időben növekvő, akkor kis zavarok exponenciálisan felerősödnek, az eredeti áramlási állapot instabil (5.13.1. fejezet).

lelő hullámszámkomponenssel való osztással kaphatók:

$$c_x = \frac{\omega_0}{k_x}, \qquad c_y = \frac{\omega_0}{k_y}, \qquad c_z = \frac{\omega_0}{k_z}. \tag{1.68}$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy a c_x, c_y, c_z számhármas nem alkot vektort, amely látszik abból is, hogy négyzetösszegük nem azonos c^2-tel.

A c sebesség csak akkor állandó, ha a diszperziós reláció lineáris: $\omega_0 \sim \mathbf{k}$. Az ilyen hullámokat *nemdiszperzív* hullámoknak nevezzük, és legismertebb példáik a hang és a fény (vákuumban). Érdemes megjegyezni, hogy a jól ismert hullámegyenlet a hullámok egy kis csoportját, a nemdiszperzív hullámokat írja csak le.

A *diszperzív* hullámok, a környezeti hullámok döntő többsége ilyen, alapvetően különböznek nemdiszperzív társaiktól. Ez a hullámcsomag-megoldások összehasonlításából látszik jól. Minden lineáris egyenletre érvényes a *szuperpozíció elve*, vagyis alapmegoldásaik lineáris kombinációja is megoldás. Az egyszerűség kedvéért x irányban haladó megoldást vizsgálva a hullámcsomag alakja

$$A(x,t) = \sum_j a_j e^{i(k_j x - \omega_0(k_j)t)}, \tag{1.69}$$

ahol az összegzés a hullámcsomagot alkotó k_j hullámszámú hullámokra történik. (Megfelelően választott és elegendően nagy számú hullámszám jelenlétében ez az $A(x,t)$ hullámalak Fourier-sora.) A fázisokat itt nem írtuk ki, mert az a_j amplitúdókat komplexnek tekintjük, amelyekbe beolvasztottuk a fázisfaktorokat. A kezdeti hullámalak

$$A(x,0) = \sum_j a_j e^{ik_j x}, \tag{1.70}$$

vagyis az a_j együtthatók a kezdeti alakból következnek.

Egyszerűen kezelhető az az eset, amikor a hullámcsomag közel monokromatikus, a k_j értékek közel esnek valamely központi k értékhez. A hullámcsomag ekkor nagy kiterjedésű az x tengely mentén, és a diszperziós reláció jó közelítéssel írható mint

$$\omega_0(k_j) = \omega_0(k) + c^*(k)(k_j - k), \tag{1.71}$$

ahol c^* a diszperziós reláció k szerinti deriváltja:

$$c^*(k) = \frac{d\omega_0(k)}{dk}. \tag{1.72}$$

A sorfejtett alakot (1.69)-be helyettesítve

$$A(x,t) = e^{i(kx-\omega_0(k)t)} \sum_j a_j e^{i(k_j-k)[x-c^*(k)t]} = e^{ik(x-c(k)t)} \tilde{A}\left(x - c^*(k)t\right), \tag{1.73}$$

ahol a második tényező megjelenése mutatja, hogy a hullám modulálttá vált, amelyet az $\tilde{A}$ burkolófüggvény jellemez. Ez a burkoló alakját megtartva a c^* sebességgel halad az eredeti haladási irányba. A c^* mennyiséget ezért *csoportsebességnek* nevezzük. A burkolón belül minden monokromatikus hullám közel azonos sebességgel halad, ezek együttese vezet a burkoló c^*-gal történő egyenletes haladásához.[20]

A (1.71) sorfejtés nem egzakt, a magasabb rendű tagok is lényegesek lehetnek. Különösen, ha a kezdeti hullámcsomag koncentrált kiterjedésű. Ekkor a burkoló nem tartja meg alakját,



1.12. ábra. A diszperzióval kapcsolatos szétfolyás jelensége: a különböző hullámhosszú komponensek különböző sebességgel terjednek, és ezért minden lokalizált kezdeti alak szétfolyik. Az ábra három, egymást követő időpontban mutatja sematikusan a burkoló alakját.

szétfolyik, hiszen a lényegesen eltérő sebességű komponensek egymástól távolodnak, miközben a burkoló deformálódik is, ahogy a sematikus 1.12. ábra mutatja.[21]

A hullámcsomag *energiája is a c^* csoportsebességgel halad*, éppúgy, mint a modulált hullám, hiszen egyetlen szinuszhullám energiája térben állandó. Általában a $\mathbf{c}^*$ csoportsebesség-vektor a frekvencia hullámszám szerinti gradiense:

$$\boxed{\mathbf{c}^*(\mathbf{k}) = \left(\frac{\partial\omega_0(\mathbf{k})}{\partial k_x}, \frac{\partial\omega_0(\mathbf{k})}{\partial k_y}, \frac{\partial\omega_0(\mathbf{k})}{\partial k_z}\right) = \operatorname{grad}\omega_0(\mathbf{k}).} \tag{1.74}$$

A csoportsebesség vektora ezek szerint tetszőleges szöget is bezárhat a hullámszámvektorral.

1.9.2. A tehetetlenségi hullám

A forgatott folyadék kollektív viselkedésében a tehetetlenségi mozgás megfelelője egy speciális hullámfajta, a tehetetlenségi hullám. A (1.42)–(1.44) egyenletek nyugalmi állapot körüli linearizált alakjában, amelyben minden térmennyiség változása kicsi, a teljes időderiváltak a parciális deriváltakkal helyettesíthetők:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = +2\Omega v - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{1.75}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\Omega u - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{1.76}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}, \tag{1.77}$$

miközben az (1.27) divergenciamentességi (összenyomhatatlansági) feltétel is érvényes.

A komplex írásmódot használva, a megoldást a

$$\left(\mathbf{v}, p'/\varrho_0\right) = \left(u_0, v_0, w_0, P_0\right) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega_0 t)} \tag{1.78}$$

alakban keressük, ahol az amplitúdók mind konstansok.

A megoldást az egyszerűség kedvéért az y irányban eltolásinvariánsnak tételezzük fel ($k_y = 0$). Az (1.75)–(1.77) és (1.27) egyenletekből a keresett homogén lineáris egyenletrend-

[20] Az összefüggésből az is látszik, hogy nemdiszperzív hullámban, amikor $c^* = c$, a burkoló is c sebességgel halad, tehát tetszőleges hullámcsomag megtartja kezdeti alakját.

[21] A hullámdiszperzió a fizika más ágaiban is ismert. A fehér fény színekre bomlása alapjelenség. A fény közegbeli sebessége $c = c_0/n$, ahol c_0 a vákuumbeli fénysebesség, n a törésmutató. Ez függ a fény hullámhosszától, azaz hullámszámától is. Ezért a diszperziós reláció $\omega_0(k) = c_0 k/n(k)$. Ebből $c^* = c(1 - (k/n)dn/dk)$. Mivel a törésmutató (pl. üvegben, vízben) csökken a hullámhosszal, $dn/d\lambda < 0$, azaz $dn/dk > 0$, így $c^* < c$. A szétfolyás az m tömegű szabad kvantumrészecske megtalálási valószínűségében is jól ismert, ahol a diszperziós reláció $\omega_0(k) = \hbar k^2/(2m)$, amiből $c^* = 2c = \hbar k/m$.

szer, az ún. polarizációs egyenletek:

$$-i\omega_0 u_0 = 2\Omega v_0 - ik_x P_0, \tag{1.79}$$
$$-i\omega_0 v_0 = -2\Omega u_0, \tag{1.80}$$
$$-i\omega_0 w_0 = -ik_z P_0, \tag{1.81}$$
$$k_x u_0 + k_z w_0 = 0. \tag{1.82}$$

Mivel az amplitúdók értéke fontos információt ad a hullám szerkezetéről, nem törekszünk a determináns közvetlen meghatározására, hanem az együtthatók kiküszöbölését követjük. Az (1.81)–(1.82) egyenletekből: $P_0 = -\omega_0 u_0 k_x / k_z^2$. Ezt (1.79)-be helyettesítve

$$-iu_0 \frac{k^2}{k_z^2}\omega_0 = 2\Omega v_0, \tag{1.83}$$

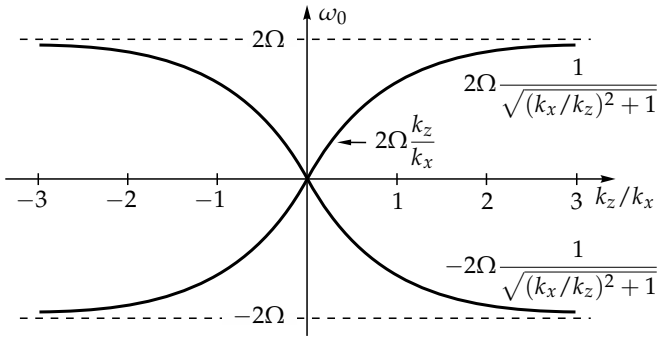
ahol $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ a hullámszámvektor hossza. Az (1.80) egyenletből viszont

$$iv_0\omega_0 = 2\Omega u_0. \tag{1.84}$$

E két utóbbi egyenletet összeszorozva látszik, hogy nemzérus együtthatók, azaz hullám csak akkor létezhet, ha

$$\boxed{\omega_0\left(k_x, k_z\right) = \pm 2\Omega \frac{k_z}{k} = \pm 2\Omega \sin\theta.} \tag{1.85}$$

Ez a tehetetlenségi hullámok diszperziós relációja, ahol θ a $\mathbf{k}$ hullámszámvektornak a vízszintes egyenessel bezárt szöge.[22] A diszperziós reláció a $\mathbf{k}$ vektornak csak az irányától függ, vagyis a k_z/k_x aránytól. A θ szög $k_z < 0$ esetén maga is negatív. A $\pm$ előjel azt fejezi ki, hogy minden hullámszámvektorhoz tartozik egy vele azonos és ellentétes irányban haladó hullám is. A $\sin\theta$ tényező mutatja, hogy a hullám frekvenciája felülről korlátos: nagysága nem lehet nagyobb a $|2\Omega|$ értéknél (1.13. ábra).



1.13. ábra. Az (x,z) síkban terjedő $(k_y = 0)$ tehetetlenségi hullámok $\omega_0(k_z/k_x)$ diszperziós relációja. $|2\Omega|$-nél nagyobb frekvenciájú hullámok nem létezhetnek. A nyílhoz tartozó alak csak az origó környékén érvényes.

[22] Az összefüggés érvényes y irányban is terjedő hullámokra is, ha θ a hullámszámvektornak a vízszintes síkkal bezárt szögét jelöli.

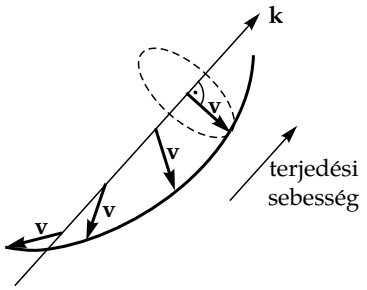
A polarizációs egyenletekből a sebességtér alakjára is következtethetünk. (1.82) szerint az áramlás a $\mathbf{k}$ hullámszámvektorra merőleges síkban történik: a hullám transzverzális. (1.84)-ből

$$u_0 = i\frac{\omega_0}{2\Omega}v_0, \tag{1.86}$$

a két vízszintes sebességkomponens komplex amplitudója tehát különböző fázisú, a fáziskülönbség $\pi/2$. A valós részeket képezve (1.78)-ban a sebességkomponensek hely- és időfüggése

$$u = -w\frac{k_z}{k_x} = -v_0\frac{\omega_0}{2\Omega}\sin(k_x x + k_z z - \omega_0 t), \qquad v = v_0\cos(k_x x + k_z z - \omega_0 t) \tag{1.87}$$

alakú. A fenti egyenletek azt fejezik ki, hogy a teljes sebességvektor abszolútértéke a v_0 állandó. Az (1.85) reláció alapján ugyanis $u^2 + w^2 = v_0^2\sin^2(k_x x + k_z z - \omega_0 t)$, vagyis $u^2 + v^2 + w^2 = v_0^2$. A terjedési irányra merőleges síkban a sebességvektor $2\pi/\omega_0$ periódussal forog: a hullám *cirkulárisan* polarizált (1.14. ábra). Mivel a folyadékelemek tehetetlenségi mozgást végeznek, a sebességvektor időbeli elfordulása adott helyen anticiklonális, ω_0 előjelétől függetlenül.



1.14. ábra. A sebességvektorok térbeli elrendeződése tehetetlenségi hullámban. Egy adott helyen a $\mathbf{v}$ sebességvektor végpontja körpályán (szaggatott vonal) mozog.

A diszperziós reláció szemléletes jelentése a következő. Mivel a sebesség a $\mathbf{k}$-ra merőleges síkba esik, a Coriolis-hatást az $\mathbf{\Omega}$ vektor $\mathbf{k}$-ra eső vetülete, azaz $\Omega\sin\theta$ határozza meg. A folyadékelemek ezért tehetetlenségi körmozgást végeznek az (1.85) frekvenciával. Ennek megfelelően a hullámmozgás (1.4) szerinti $Ro \equiv |\omega_0/(2\Omega)| = |\sin\theta|$ Rossby-száma egységnyi nagyságrendű, éppúgy, mint a tehetetlenségi körmozgásé. (Kivétel a vízszintes terjedés ($\theta = 0$) határesete, amikor a hullámzás megszűnik: $\omega_0 \to 0$. Ez összhangban van a Taylor–Proudman-tétellel, hiszen $k_z \to 0$-ra Ro nullává válik.)

Megjegyezzük, hogy az (1.28) egyenletbeli viszkózus tag megtartása az $\omega_0 \to \omega_0 - i\nu k^2$ helyettesítésnek felel meg az (1.79)–(1.82) egyenletrendszerben. A viszkozitást is figyelembe véve tehát a diszperziós reláció

$$\omega_0 = \pm 2\Omega\sin\theta - i\nu k^2. \tag{1.88}$$

Az imaginárius rész időben exponenciális csillapodást ír le az $\exp(-\nu k^2 t)$ szabály szerint. A csillapodás ilyen formájú megjelenése más hullámokra is jellemző: a csillapodás erőssége a kis számértékű kinematikai viszkozitással arányos. Ebből a példából levonhatjuk azt az általános következtetést, hogy a hosszú hullámok (kis k) csillapodása a leglassúbb. Bármilyen rendszerben kialakuló hullámról van is szó, keltése után elegendően hosszú idő (tipikusan a $t_{relax} = L^2/\nu$ relaxációs idő, ahol L a lineáris méret) eltelte után már csak a legnagyobb (L-lel összemérhető) hullámhosszú hullámok figyelhetők meg, mert a többiek kihaltak.

1.9.3. Fázis- és csoportsebesség

A tehetetlenségi hullámok x és z irányú terjedési sebessége (1.68) szerint

$$c_x = \frac{\omega_0}{k_x} = \pm 2\Omega \frac{k_z}{k_x k}, \qquad c_z = \frac{\omega_0}{k_z} = \pm 2\Omega \frac{1}{k}, \tag{1.89}$$

amely erősen függ a hullámszámkomponensektől.

Az (x, z) síkban terjedő tehetetlenségi hullámokban az (1.74) csoportsebesség

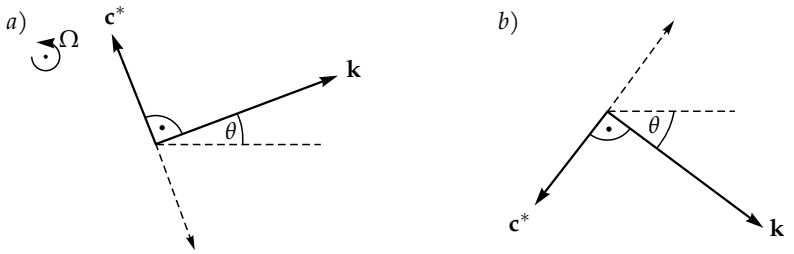
$$c_x^* = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_x} = \mp 2\Omega \frac{k_x k_z}{k^3}, \qquad c_z^* = \frac{\partial \omega_0}{\partial k_z} = \pm 2\Omega \frac{k_x^2}{k^3}. \tag{1.90}$$

A csoportsebesség nagysága tehát $2|\Omega \cos\theta|/k$. Mivel a függőleges terjedés, azaz $k_x = 0$, egzakt tehetetlenségi körmozgással jár, amely magától is fennmarad, az ilyen irányú hullámmal energia nem halad, a csoportsebesség eltűnik.

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy

$$\boxed{\mathbf{c}^* \cdot \mathbf{k} = 0,} \tag{1.91}$$

azaz a hullámcsomag és a benne felhalmozódott energia mindig $\mathbf{k}$-ra, tehát a terjedés irányára *merőlegesen* terjed. Ha a hullámok hangszerű társaiktól való eltérését a hullámszám és csoportsebesség által bezárt szög nagyságával jellemezzük, akkor a tehetetlenségi hullámok a *lehető legdiszperzívebb* hullámok közé tartoznak. Az, hogy a csoportsebesség-vektor $\mathbf{k}$-tól jobbra vagy balra mutat, a frekvencia előjelétől és a hullámszámvektor irányától (a fázissebesség irányától) függ. A pozitív frekvenciájú hullám csoportsebessége pl. pozitív forgatási szögsebesség esetén a $\mathbf{k}$ vektortól balra mutat, ha a hullámszámvektor az első szögnegyedbe esik (1.15. ábra).

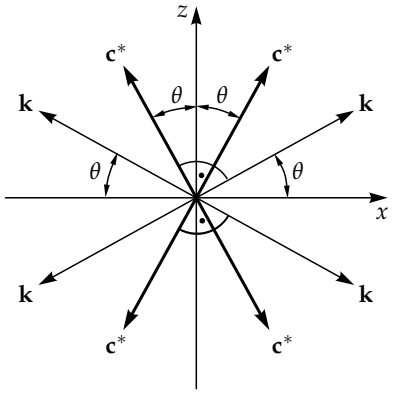


1.15. ábra. Tehetetlenségi hullámok $\mathbf{c}^*$ csoportsebességének és $\mathbf{k}$ hullámszámvektorának viszonya pozitív forgatási szögsebesség mellett. A szaggatott nyíl a negatív frekvenciához tartozó csoportsebesség.

Ha forgatott közegben kis méretű testet rezegtetünk ω ($|\omega| < 2|\Omega|$) frekvenciával, tehetetlenségi hullámokat gerjesztünk, amelyek ω frekvenciájúak lesznek. Rájuk $\omega_0 = \omega$, és (1.85)) értelmében $\theta = \pm \arcsin(\omega/2\Omega)$ szög alatt terjednek az x tengelyhez képest. A csoportsebesség-vektorok ugyanekkora szögeket zárnak be a függőlegessel (1.16. ábra).

A közeg izotróp jellege ellenére a tehetetlenségi hullám terjedése *anizotróp*. Ez a tulajdonság is mutatja, hogy a tehetetlenségi hullámok mennyire eltérnek a hangszerűektől, hiszen az utóbbiak ugyanilyen keltés mellett minden irányba haladhatnának.

Laboratóriumban az energiaterjedés iránya a törésmutató enyhe változása révén figyelhető meg, vagy a részecskekövető (Particle Image Velocimetry, PIV) módszer alkalmazásával. Befecskendezéssel keltett tehetetlenségi hullámok részecskekövetéssel láthatóvá tett terjedése látható ebben a kísérletben.



1.16. ábra. Pontszerű, $|\omega| < 2|\Omega|$ frekvenciájú forrásból induló tehetetlenségi hullámok és csoportsebességeik lehetséges irányai. Hullámterjedés a $\mathbf{k}$ vektorok irányába lehetséges, energiaterjedés viszont a rájuk merőleges $\mathbf{c}^*$ irányokban történik.

Egy másik kísérletben ugyancsak a részecskekövetéses módszert használva, a gerjesztési amplitúdót is változtatták. Kis amplitúdók esetén jól kirajzolódik a hullámterjedés X alakzata, nagyokra azonban szabálytalan (turbulens) terjedés tapasztalható (elhagyjuk a lineáris közelítés alkalmazhatóságának feltételét).

2. fejezet

A sekélység hatása

Űrhajóból nézve a légkör keskeny hártyának tűnik a Föld felszínén. Az óceán átlagos $H = 4$ km-es mélysége vagy a légkör legaktívabb alsó részének, a troposzférának $H = 10$ km-es átlagos vastagsága sokkal kisebb, mint a bennük kialakuló áramlások vízszintes síkbeli L szélessége, amely több ezer km is lehet. A H/L méretarány kicsinysége azt eredményezi, hogy függőleges irányban csak nagyon lassú mozgások jöhetnek létre. Az áramlás közel kétdimenziós és oszlopos szerkezetű, már forgatás nélkül is. Ennek következtében a nyomás magasságtól való függése a hidrosztatika törvényei szerint alakul tetszőleges forgatási sebesség mellett. Ezért a nyomás helyettesíthető a folyadékfelszín alakjával, és a domborzat alakja is egyszerűen vehető figyelembe.

A szabad felszíni mozgásokkal járó forgatott súrlódásmentes folyadékban a Rossby-számon kívül megjelenik a H folyadékmélységgel képzett

$$\boxed{Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}} \tag{2.1}$$

Froude-szám is mint fontos dimenziótlan paraméter, ahol g a nehézségi gyorsulás. W. Froude (1810–1879) angol mérnök, aki a léptékhelyes hajómodellezés kapcsán mutatta ki, hogy a hullámzás hatását az Fr szám veszi helyesen figyelembe. A környezeti áramlások témakörében a Froude-szám minden, szabad felszíni mozgással járó áramlás kapcsán lényeges szerepet játszik. Értéke nagyskálájú környezeti áramlásokban 10^{-2} körüli, és ez az érték laboratóriumban is könnyen megvalósítható.

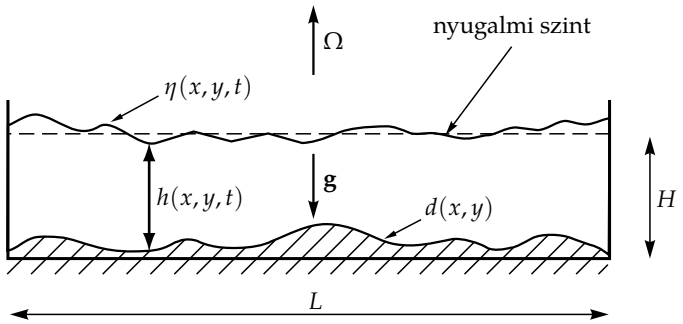
2.1. A forgatott sekély folyadék egyenletei

Vizsgáljuk meg, milyen következményekkel jár, ha az áramlás L jellegzetes vízszintes kiterjedése sokkal nagyobb, mint a folyadék H átlagos mélysége, azaz ha az

$$\varepsilon \equiv H/L \tag{2.2}$$

méretarány 1-nél lényegesen kisebb.

A felszín alakját a t pillanatban az $\eta(x, y, t)$ függvény írja le a nyugalmi folyadékszinthez képest. A H átlagos mélységi szinttől mérjük a domborzat $d(x, y)$ alakját, amelyről feltesszük, hogy időben nem változik (2.1. ábra).



2.1. ábra. A forgatott, sekély homogén folyadék (a sarkok környékén vagy a laboratóriumban) és a fejezetben használt jelölések: a felület nyugalmi szinthez viszonyított alakját az $\eta(x,y,t)$ függvény, az aljzatét a $d(x,y)$ írja le. A folyadék átlagos H mélysége sokkal kisebb az L vízszintes kiterjedésnél.

A folyadék adott helyhez tartozó pillanatnyi

$$\boxed{h(x,y,t) \equiv H + \eta(x,y,t) - d(x,y)} \tag{2.3}$$

mélysége új dinamikai változó. Feltételezzük, hogy a folyadék ellepi a domborzatot: $h > 0$. A tipikus Reynolds-számok nagy értéke miatt a viszkozitást elhanyagoljuk, ideálisfolyadék-közelítésben dolgozunk. A viszkozitással kapcsolatos jelenségekre majd a 4. fejezetben térünk vissza.

Az első fontos lépés a W jellegzetes függőleges áramlási sebesség becslése az összenyomhatatlanságból következő $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ kontinuitási egyenlet alapján. A vízszintes sebességkomponenseknek a vízszintes koordináták szerinti deriváltjai U/L rendűek. A függőleges sebességnek a z koordináta szerinti deriváltjával, amely W/H rendű, együttesen 0-t kell adniuk. Ebből azt kapjuk, hogy

$$W \sim U\frac{H}{L} \equiv U\varepsilon \ll U, \tag{2.4}$$

tehát függőleges irányban csak nagyon lassú áramlás történhet. A sekély folyadék mozgása mindig *közel* kétdimenziós, függetlenül attól, hogy forgatott-e vagy sem.

Az (1.28) hidrodinamikai egyenlet függőleges sebességre vonatkozó komponensében a w időderiváltja ezért közelítőleg $W/(L/U) = U^2H/L^2$, ami ε-szor kisebb, mint a vízszintes gyorsulás U^2/L becslése. A függőleges irányú mozgásból adódó hidrodinamikai gyorsulás is elhanyagolható. Ideális sekély folyadékban ezért az (1.28) egyenlet függőleges komponensében a jobb oldalon levő nyomási erőnek és a súlynak kompenzálnia kell egymást, tehát

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho_0 g. \tag{2.5}$$

A sekély folyadék a nyomás magasságfüggése szempontjából hidrosztatikai egyensúlyban van mozgása közben is.

Ebből

$$\boxed{p(x,y,z,t) = \varrho_0 g\,(\eta(x,y,t) + H - z) + p_0.} \tag{2.6}$$

A külső felszínen feltesszük, hogy a p_0 nyomás állandó (a p_0 ingadozásából adódó hatások a tapasztalat szerint környezeti áramlásokban nem jelentősek[1]). Szabad felszín esetén a hidro-

[1] A vizek felszínén a légköri nyomásingadozás hPa nagyságrendű, de nagy sűrűségük miatt számottevő áramlások beindításához 1000 hPa nagyságú nyomásváltozásra lenne szükség.

sztatikai nyomástól való eltérést, a

$$p' = \varrho_0 g \eta \tag{2.7}$$

járulékot tekintjük dinamikai nyomásnak. Nyomáskülönbség tehát a felszíni egyenetlenség miatt alakulhat ki, és a folyadékmozgás felszíni alakváltozással jár.

Az u és v vízszintes sebességkomponensekre vonatkozó hidrodinamikai egyenletben a nyomási tagok z-től függetlenek (hiszen η nem függ z-től). Ez azt jelenti, hogy ha kezdetben nem volt z-függés a sebességekben, akkor később sem lesz. A továbbiakban feltesszük, hogy a kezdeti u és v sebességek nem függnek a magasságtól,[2] ekkor

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,} \tag{2.8}$$

azaz az áramlás oszlopos szerkezetű minden pillanatban.

A sekélyfolyadék-feltétel tehát két olyan tulajdonságot is biztosít tetszőleges forgatási sebességre, amelyet mély folyadékban csak az erősen forgatott határesetben tapasztalhattunk: a függőleges iránybeli hidrosztatikát és az oszlopos szerkezetet. Az áramlás egzakt síkbelisége ($w = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$) azonban a folyadék sekélységéből nem következik.

A két vízszintes sebességkomponens időfejlődését ekkor (1.28) alapján a

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 2\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega} - g \operatorname{grad} \eta} \tag{2.9}$$

egyenlet írja le, ahol a d/dt teljes időderivált most a $\partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ időderiváltat jelenti, és u, v független a magasságtól. A mély folyadék esetéhez képest másik fontos eltérés, hogy a nyomásderiváltak helyett most a felszín alakját leíró függvény gradiense jelenik meg. Mivel azonban a felszín formája ismeretlen, szükségünk van még egy, η-ra vonatkozó egyenletre. Ez az anyagmegmaradásból következik.

A teljes háromdimenziós áramlás összenyomhatatlan, de mivel fel- és leáramlások indulhatnak meg, a vízszintes síkbeli $\mathbf{u}$ sebesség divergenciája általában nem nulla. Az (1.27) divergenciamentességi feltétel következtében

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\operatorname{div} \mathbf{u}. \tag{2.10}$$

Természetesen ha egy henger alakú tartomány vízszintes irányban radiálisan kifelé áramlik, akkor a henger szélesebb lesz, és ezért függőleges irányban összehúzódik. Fordítva, ha beáramlás történik, akkor a henger megnyúlik (2.2. ábra). Mivel a divergencia z-től független, a w sebesség legfeljebb csak lineárisan függhet a magasságtól.

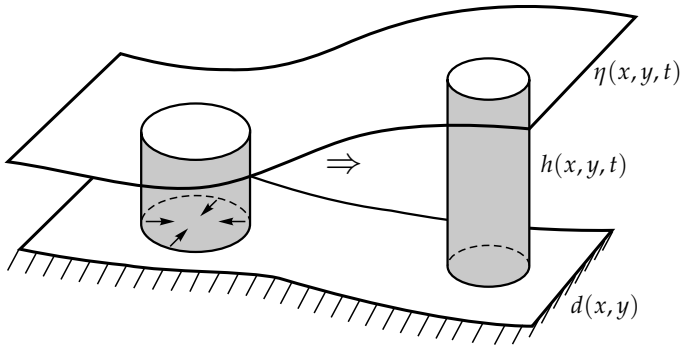
A síkbeli áramlás szempontjából tehát forrásként vagy nyelőként jelentkezik az, hogy a teljes folyadékoszlop h magassága, illetve A alapterülete változik. A divergencia definíciója alapján az (x, y) síkbeli áramlás forráserőssége a vízszintes $\mathbf{u}$ sebességvektor divergenciája. Minél nagyobb a síkbeli divergencia, annál gyorsabban változik időben a folyadékoszlop A területe:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}. \tag{2.11}$$

A divergencia az alapterület relatív növekedési arányát jelenti.[3]

[2] Mert például a mozgás nyugalmi állapotból indul.

[3] Az összefüggés (amely a Gauss-tétel következménye) egyszerű igazolásaként tekintsünk az x, y pont körül egy dx, dy méretű, $A = dxdy$ területű folyadékelemet az $u(x, y)$, $v(x, y)$ sebességtérben. A bal oldali él dt idő alatt $u(x, y)dtdy$ területet súrol, a jobb oldali $u(x + dx, y)dtdy$-t. A területnövekedés az x irányú mozgásból $\partial u/\partial x\ A\ dt$. Hasonló az y irányú növekmény is, a teljes dA területváltozás div $\mathbf{u}A\ dt$.



2.2. ábra. A sekély folyadék áramlása oszlopokban történik: mélyebb folyadékban az anyagmegmaradás miatt az oszlopok keskenyebbek lesznek.

Állandó sűrűség esetén az anyagmegmaradás a folyadékhenger térfogatának állandóságával egyenértékű, vagyis a $d(hA)/dt = 0$. Ebből $Adh/dt = -hdA/dt$. A (2.11) kapcsolatot felhasználva

$$\frac{dh}{dt} = -h \operatorname{div} \mathbf{u}. \tag{2.12}$$

Az áramlás síkbeli divergenciája tehát egyben a magasság relatív megnyúlási arányának ellentettje. A folyadékmélység pozitív síkbeli divergencia, szétfolyás esetén csökken.

A teljes időderiváltat kiírva és a $\operatorname{div}(h\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\operatorname{grad})h + h \operatorname{div} \mathbf{u}$ azonosságot felhasználva, (2.12)-ből a

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0} \tag{2.13}$$

ekvivalens alakhoz jutunk. Ez nem más, mint az (1.26) kontinuitási egyenlet összenyomhatatlan sekély folyadékban, hiszen $h(x,y)$ arányos a teljes folyadékréteg (x,y) pontja körüli egységnyi felülethez tartozó tömeggel, azaz a kétdimenziós sűrűséggel.

A sekélyfolyadék-hidrodinamika teljes egyenletrendszere (angolul shallow water equations) tehát:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = +2\Omega v - g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -2\Omega u - g\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0. \tag{2.16}$$

Fontos megjegyezni, hogy η és h nem függetlenek, mert közöttük egy adott függvény, a domborzat d alakja teremt (2.3) szerint kapcsolatot. Ez az egyenletrendszer egyenértékű az (1.27)–(1.28) rendszerrel az $\varepsilon \ll 1$ határesetben, ideális folyadékra. Mivel nagyskálájú áramlásokban ε tipikusan 10^{-2} vagy kisebb, az ε méretarányban elsőrendű korrekciókkal általában már nem érdemes foglalkoznunk (kivételképpen lásd 9.2. fejezet).

A későbbiekben többször használjuk majd az ún. *merevlap*-közelítést, amely azt jelenti, hogy a felszíni alakváltozás elhanyagolható a teljes folyadékmélységhez képest: $\eta \equiv 0$, azaz $h = H - d$. Ez a zárt felszínű eset a laboratóriumban a folyadék vízszintes lappal való letakarásával biztosítható. Az eltűnő felszíningadozás azonban nem jelenti azt, hogy dinamikai nyomásgradiens nincs jelen, hiszen a lap jelentős erővel hathat a folyadékra. Ekkor a p' dinamikai nyo-

más önálló változó, a (2.7) egyenlet nem érvényes és $-\operatorname{grad}\eta$ helyett (2.9)-ben $-\operatorname{grad}p'/(g\varrho_0)$ írandó.

2.2. A dimenziótlan egyenlet

Az egyenletek dimenziótlanításához (1.35)-öt használjuk, a nyomás helyett az

$$\eta \to H\eta \tag{2.17}$$

megfeleltetéssel,[4] és hasonlóan járunk el a h és d mennyiségekkel is. Így

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \pm\frac{1}{Ro}\mathbf{u}\times\mathbf{n} - \frac{1}{Fr^2}\operatorname{grad}\eta,} \tag{2.18}$$

$$h = 1 + \eta - d, \tag{2.19}$$

és (2.16) alakja változatlan. Itt megjelent a H mélységgel képzett (2.1) Froude-szám (az L-et tartalmazó (1.32) alakot többé nem használjuk). A (2.1) Froude-szám az áramlás jellegzetes vízszintes sebességének és a sekély folyadékbeli gravitációs hullámok $c_0 = \sqrt{gH}$ terjedési sebességének (2.7. fejezet) aránya:

$$Fr = \frac{\text{áramlási sebesség}}{\text{gravitációs hullámok sebessége}} = \frac{U}{c_0}. \tag{2.20}$$

A környezeti áramlások Froude-számát kicsinek várjuk. Az 1.1. táblázatában a vízmélységgel számolt Froude-számra ciklon esetén ($H = 10$ km) 10-szer, az óceáni gyűrűk estén ($H = 4$ km) 5-ször nagyobb, de még így is 10^{-2} körüli értékeket kapunk. Laboratóriumban, 10 cm mélységű folyadékban 1–10 cm/s erősségű áramlásokhoz 0,01–0,1 nagyságú Froude-szám tartozik.

2.3. A potenciális örvényesség megmaradása

A sekélyfolyadék-egyenletrendszernek érdekes tulajdonsága, hogy egy új *megmaradási* tételt hordoz, amely az örvényességgel kapcsolatos. Képezzük a (2.14) egyenlet y szerinti, majd a (2.15) egyenlet x szerinti deriváltját, és vonjuk ki ezeket egymásból. Így az $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ örvényvektor

$$\boxed{\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}} \tag{2.21}$$

függőleges komponensére kapunk egyenletet. Átrendezés után ζ teljes időderiváltjára:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(\zeta + 2\Omega)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = (\zeta + 2\Omega)\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2.22}$$

Az összefüggés sekély folyadékra fogalmazza meg azt, amit korábban kvalitatíven tárgyaltunk (1.1. ábra): bármely fel- vagy leáramlás, vagyis nullától eltérő $\operatorname{div}\mathbf{u}$ forgatott rendszerben mindig örvényességet hoz létre.

[4] Mivel $p' = \varrho_0 g\eta$, ez a $\varrho_0 gH$ nyomásegység választásnak felel meg.

Ω állandósága miatt a (2.22) egyenlet a $\zeta_T \equiv \zeta + 2\Omega$ teljes örvényességre vonatkozó egyenletnek is tekinthető. Felhasználva a folyadékmélységre vonatkozó (2.12) egyenletet és (2.10)-et, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\zeta_T}{dt} = \frac{\zeta_T}{h}\frac{dh}{dt}, \tag{2.23}$$

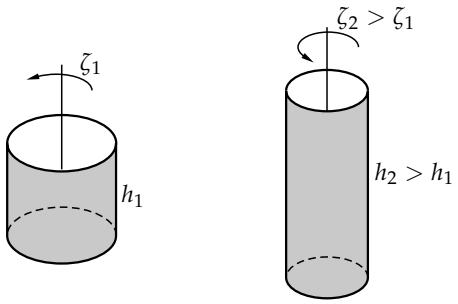
amely szerint a teljes örvényesség változását a mélység változása határozza meg.[5] A fenti összefüggés írható úgy is, hogy a

$$\boxed{q \equiv \frac{\zeta_T}{h}H \equiv \frac{\zeta + 2\Omega}{h}H} \tag{2.24}$$

mennyiség, az ún. *potenciális örvényesség*[6] megmaradó mennyiség:

$$\boxed{\frac{dq}{dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} = 0.} \tag{2.25}$$

A teljes örvényesség és az aktuális mélység hányadosának tehát állandónak kell maradnia a folyadékkal együtt mozogva. Ez erős megszorítás, mert azt jelenti, hogy pl. mélyebb folyadékrétegbe kerülve megnő a teljes örvényesség (2.3. ábra).



2.3. ábra. A potenciális örvényesség megmaradásának jelentése: mélyebb folyadékban az oszlopok forgása felgyorsul, összhangban az impulzusnyomaték megmaradásával.

A potenciális örvényesség megmaradásának mechanikai magyarázata az impulzusnyomaték megmaradása a tömegmegmaradással kiegészítve. Tekintsünk egy r sugarú, h magasságú hengert. A tömegmegmaradás állandó sűrűség mellett azt jelenti, hogy a henger térfogata, tehát r^2h állandó. Az ω szögsebességgel forgó henger impulzusnyomatéka $r^2\omega$-val arányos. Az impulzusnyomaték megmaradása tehát egy hengeres alakzatra az $\omega/h =$ állandó feltételt írja elő.

A potenciális örvényesség elnevezés arra utal, hogy a folyadékmélység vastagodása mintegy felszabadítja a ζ relatív örvényesség egy részét, annyit, amennyit a potenciális örvényesség állandósága megenged. A potenciális örvényesség központi jelentőségű fogalom a környezeti áramlások megértésében.

Érdemes megadni a potenciális örvényesség dimenziótlan alakját. Mivel ζ egysége U/L, a potenciális örvényességet is U/L egységekben mérjük, és így

$$q = \frac{\zeta \pm 1/Ro}{h}, \tag{2.26}$$

ahol ζ és h dimenziótlan, és ezért egységnyi nagyságrendűnek tekinthető. Kis Rossby-számú

[5] Az egyenlet akkor is érvényben marad, ha Ω helyfüggő.

[6] A potenciális örvényességet gyakran a konstans H tényező nélkül definiálják.

áramlásokban tehát a számlálóban fellépő relatív örvényesség legföljebb kis korrekciókat jelenthet a forgatási szögsebességből adódó vezető taghoz.

2.4. Gyorsan forgatott sekély folyadék: a geosztrofikus áramlás

Vizsgáljuk meg a gyors forgatás hatását sekély folyadékban, azaz tekintsük a $Ro \to 0$ határesetet. Ekkor már nem feltevés az, hogy az áramlás sebessége nem függ a függőleges iránytól, mert az a Taylor–Proudman-tétel (1.51) alakjának következménye.

A geosztrofikus áramlás feltétele nyilvánvalóan most is az, hogy a Coriolis-erő és a nyomási erő kompenzálják egymást. A kompenzáció lehetősége közvetlenül látszik, ha a gyorsan forgatott esetben (2.17) helyett az $\eta \to |2\Omega|UL/g\,\eta$ helyettesítést használjuk, amellyel

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{Ro}\left(\pm\mathbf{u}\times\mathbf{n} - \operatorname{grad}\eta\right). \tag{2.27}$$

Az $\mathbf{u}_g$ geosztrofikus áramlást *időtől független*, szabad felszíni alak határozza meg. A dimenziós (2.14) és (2.15) egyenletekből

$$\boxed{u_g = -\frac{g}{2\Omega}\frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad v_g = \frac{g}{2\Omega}\frac{\partial\eta}{\partial x}} \tag{2.28}$$

következik. A sekély folyadékban kialakuló geosztrofikus áramlásra tehát ugyanazok az összefüggések érvényesek, mint mély közegben (lásd pl. (1.57)), csak most a dinamikai nyomást a szabad felszíni alak határozza meg (2.7) szerint. A geosztrofikus áramlás ezért merőleges a szabad felszín gradiensére:

$$\boxed{\mathbf{u}_g \operatorname{grad}\eta = 0,} \tag{2.29}$$

a felület *szintvonalait* követi. Pozitív Ω esetén, az áramlási iránytól *jobbra* található a magasabb felszín.

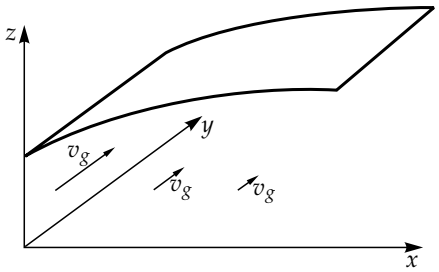
A (2.28) geosztrofikus áramlás divergenciája eltűnik, az áramlás kétdimenziós. Ebből tudjuk, hogy létezik egy (1.58)-nak eleget tevő áramlási függvény. (2.28) annak felel meg, hogy

$$\boxed{\psi = \frac{g}{2\Omega}\eta.} \tag{2.30}$$

Az áramlási függvény tehát arányos magával a felszíni alakkal.

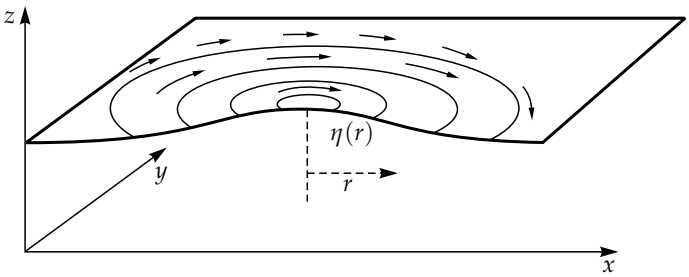
A geosztrofikus sebességeloszlás és felszíni alak tetszőleges lehet, de köztük a (2.28) kapcsolatnak kell fennállnia. Érdemes néhány példában megvizsgálni, hogy konkrét felszíni alakokhoz milyen geosztrofikus áramlások tartoznak.

Tegyük fel, hogy a felszíni alak csak x-től függ, és adott $\eta(x)$ függvény szerint változik (2.4. ábra). A (2.28) összefüggés szerint a geosztrofikus áramlás y irányú lesz, és akkor mutat a pozitív y irányba, ha a felszín emelkedik x növekvő értékeire. A Föld szögsebességével számolva $v_g = 1$ m/s-os áramlás kialakulásához $d\eta/dx = 10^{-5}$ nagyságrendű gradiensre van szükség, tehát 100 km-enként 1 méternyi emelkedésre. Az erős tengeráramlatok esetében ilyen felszínemelkedés valóban megfigyelhető. Az áramlatok tipikus szélessége $50 - 100$ km, és ezen a távolságon az átlagos tengerszint a műholdas mérések szerint ténylegesen emelkedik kb. egy méternyit. A tengeráramlatok tehát első közelítésben geosztrofikus egyensúlyban levőnek tekinthetők. (Az áramlás egész óceáni medencére kiterjedő leírása a 4.6.2., 11.3. fejezetekben található.)



2.4. ábra. Az x irányban növekvő $\eta(x)$ felszíni alak következtében kialakuló $v_g = (g/2\Omega)d\eta(x)/dx$ nagyságú, pozitív y irányú geosztrofikus áramlás $\Omega > 0$ esetén

Második példaként tekintsünk egy lokális felszíni kidudorodást, amelyet az $\eta(r)$ forgásszimmetrikus függvény ír le (2.5. ábra). A sebesség nagysága csak a radiális koordinátától, r-től függ: körkörös áramlás jön létre. Pozitív Ω esetén negatív előjelű köráram alakul ki, amely anticiklonális áramlásnak felel meg. Ez a geometria jellemzi az erős tengeráramlatokról leváló óceáni gyűrűket.



2.5. ábra. A forgásszimmetrikus $\eta(r)$, r-rel csökkenő felszíni alak $g/(2\Omega)|d\eta(r)/dr|$ nagyságú, negatív körüljárású, anticiklonális geosztrofikus áramlást tart fenn $\Omega > 0$ esetén. A behorpadó felülethez ugyanekkor ciklonális áramlás tartozik.

A geosztrofikus határesetben a ζ relatív örvényesség a potenciális örvényesség (2.24), (2.26) kifejezésében elhanyagolható a forgatási szögsebesség mellett, azaz a geosztrofikus potenciális örvényesség

$$q = \frac{2\Omega}{h}H. \tag{2.31}$$

Ezért (2.25) szerint az időfüggetlenség miatt fenn kell állnia az

$$u_g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\Omega}{h}\right) + v_g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\Omega}{h}\right) = 0 \tag{2.32}$$

feltételnek. Mivel Ω állandó, ez azt jelenti, hogy az áramlás merőleges a $2\Omega/h$ mennyiség gradiensére, de akkor a h mélység gradiensére is. A geosztrofikus folyadékoszlopok tehát *csak azonos vízmélységű helyek között* mozoghatnak.

A potenciális örvényességnek összhangban kell lennie a (2.28) egyenletekkel és azok (2.29) következményével. Ez azt jelenti, hogy az áramlás a felszíni η alak szintvonalait követi, (2.32) szerint viszont a h mélységi szintvonalakat. Ha a domborzat vízszintes sík, $d =$ állandó, ez a két feltétel a mélység (2.17) definíciója miatt ekvivalens.

Külön kell kezelni azt az esetet, amikor a domborzat nem vízszintes. Ekkor η és h szintvonalai csak akkor lehetnek azonosak, ha a felszíni alak *arányos* a mélységi domborzattal: $\eta(x,y) \sim d(x,y)$. A 2.5. ábra geosztrofikus áramlása tehát abból is adódhat, hogy az aljzaton

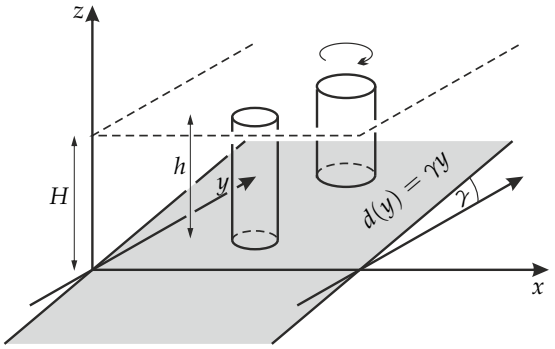
hengerszimmetrikus kidudorodás van jelen. Az $\eta(x,y)$ és $d(x,y)$ közötti arányossági tényező tetszőleges lehet, ami azt is mutatja, hogy adott áramlás több domborzathoz is tartozhat, de nem tudjuk megmondani, melyik az „igazi”.[7] Az arányosság alapján azt is mondhatjuk, hogy geosztrofikus áramlás csakis a nyugalmi $H - d(x,y)$ vízmélység szintvonalai mentén történhet, tehát az áramlás irányához nem szükséges ismernünk a felszíni alakot (sebessége viszont kizárólag a felszíni alakból kapható). Ezzel a megfogalmazással a Taylor-kísérlet (1.8. ábra) újabb magyarázatát kapjuk a sekélyfolyadék-elmélet keretében: a korong peremén a vízmélység ugrásszerűen változik, és azon az áramlás nem hatolhat át.

2.5. Kvázi-geosztrofikus mozgás: a topografikus Rossby-hullám

2.5.1. Szemléletes kép

Megvizsgáljuk, mi történik, hogyha kissé eltávolodunk a geosztrofikus határesettől. Megengedjük, hogy a Rossby-szám kicsi legyen, de véges, amihez azt várjuk, lassú áramlások tartoznak. A (2.24) potenciális örvényesség az áramlás során állandó, de a ζ relatív örvényesség most nem hanyagolható el Ω mellett, ámbár $|\zeta| \ll |\Omega|$. A 9.1. fejezetben megmutatjuk, hogy kvázi-geosztrofikus közelítésben a megmaradási törvény *egyenértékű* az egész sekélyfolyadék-egyenletrendszerrel.

Az egyszerűség kedvéért egyelőre tegyük fel, hogy a felszín vízszintes, $\eta = 0$ (alkalmazzuk a merevlap-közelítést). A teljes mélység ekkor $h = H - d$. Megengedjük, hogy a domborzat kissé lejtsen, méghozzá úgy, hogy az y irányban emelkedik (2.6. ábra).

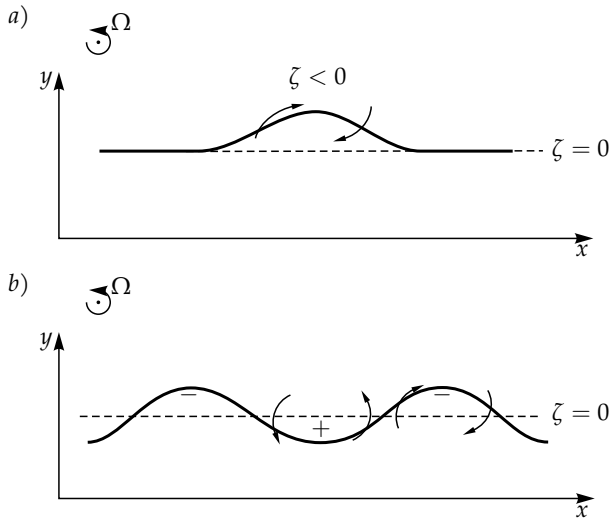


2.6. ábra. Topografikus Rossby-hullám kialakulásához szükséges döntött aljzat. A pozitív y irányba mozduló folyadékoszlop örvényessége csökken $\Omega > 0$ esetén.

Képzeljük el, hogy a folyadékban egy, az x tengellyel párhuzamos, függőleges folyadékfüggöny (felülnézetben egyenes vonaldarab) olyan részecskékből áll, amelyek ζ relatív örvényessége éppen 0. A vonalat egy helyen a vízszintes síkban enyhén meghajlítjuk a növekvő y értékek irányába. Itt kisebb lesz a görbe alatti folyadékmélység, mint ahonnan kimozdítottuk.[8] Ha csökken a teljes mélység, akkor a q potenciális örvényesség csak úgy maradhat meg pozitív Ω mellett, ha a ζ relatív örvényesség is csökken: a folyadék forogni kezd, ζ negatívvá válik (2.7a. ábra). A negatív örvényesség negatív körüljárású áramlást indít, amely a görbületet odébb tolja, méghozzá balra. Ez a zavar végighalad a vonal mentén: hullámszerű mozgás alakul ki.

[7] Ezt a tulajdonságot angolul geostrophic degeneracy-nak hívják, amely a kvázi-geosztrofikus közelítésben majd megszűnik.

[8] Geosztrofikus egyensúlyban ez nem lenne megengedett.



2.7. ábra. A Rossby-hullámok kialakulási mechanizmusa az (x, y) síkban pozitív forgatási irány esetén, y irányban emelkedő aljzat felett. a) Az eredetileg x irányú, zérus örvényességű folyadékvonalon kialakított kis y irányú kitüremkedés a potenciális örvényesség megmaradása következtében negatív köráramlást hoz létre, amely a púpot balra tolja. b) Egy hullámalak felváltva hoz létre negatív és pozitív örvényességet a hullám maximális, illetve minimális kitérésének megfelelően, és mindkét hatás a negatív x irányba történő elmozduláshoz vezet.

Ugyanezt a gondolatmenetet egy szinuszfüggvény alakú kezdeti deformációra alkalmazva az y tengely mentén lefelé történő kitüremkedés körül pozitív irányú körkörös áramlás jön létre, de az alakzatot az is a negatív x irányba mozgatja (2.7b. ábra). Miközben az egész hullám ebbe az irányba halad, az egyes (x, y) pontokhoz tartozó folyadékoszlopok az y irányban oszcillálnak, és ezzel magasságuk és alapterületük is változik.

Az ilyen hullámokat első leírójukról *Rossby-hullámoknak* nevezzük. Mivel domborzati lejtés nélkül nem jelenhetnek meg, a *topografikus* jelzővel látjuk el őket. A geosztrofikus egyensúlytól való kis eltérésnek felelnek meg, ezért a Rossby-hullámok a forgatott közegek leglassúbb hullámai. A bemutatott gondolatmenet azt is illusztrálja, hogy amplitúdójuk nem feltétlenül kicsi, azaz ezek a hullámok nemlineárisak is lehetnek.

Érdemes elgondolkodnunk azon, hogy miért kitüntetett a negatív x irányba haladás. Ennek oka az, hogy a forgatott rendszerben zajló jelenségek nem invariánsak az időtükrözésre. A pozitív forgás adott lejtés mellett kitüntet egy (x, y) síkbeli irányt: a hullámok úgy terjednek, hogy a sekélyebb közeg a haladási iránytól jobbra essék. Természetesen megváltoztatott forgatás mellett a hullámok az ellenkező irányba haladnának. Az idő és a forgatás előjelét egyszerre kell megváltoztatnunk ahhoz, hogy invarianciát találjunk.[9]

2.5.2. Zárt felszínű Rossby-hullám

A Rossby-hullám kvalitatív tulajdonságai leírásához tegyük fel, hogy a domborzat egyenletesen lejtős,

$$d(y) = \gamma y \tag{2.33}$$

az $y = 0$ vonal valamely $y_{max} = L$ szélességű környezetében. A γ meredekségről feltesszük, hogy kicsi, azaz a mélységváltozás elhanyagolható a teljes mélységhez képest az egész vizsgált

[9] Hasonlóan a mágneses térben mozgó töltött részecske esetéhez.

tartományban: $d(y) \ll H$, amelyből $\gamma y_{max} = \gamma L \ll H$. Ennek feltétele az, hogy a

$$\boxed{Be = \gamma \frac{L}{H}} \tag{2.34}$$

dimenziótlan topográfiai paraméter[10] egynél jóval kisebb. Ez azt követeli meg, hogy a γ gradiens még az $\varepsilon = H/L$ mélységi aránynál is kisebb legyen. Mivel $\gamma y/H \ll 1$ minden y-ra, a zárt felszín ($\eta = 0$) mellett érvényes $q = (\zeta + 2\Omega)/(1 - d/H)$ potenciális örvényesség jó közelítéssel írható mint:

$$q = \frac{\zeta + 2\Omega}{1 - \gamma y/H} \approx \left(2\Omega + \zeta + \frac{2\Omega\gamma}{H} y\right). \tag{2.35}$$

Itt feltettük, hogy $\gamma y/H \leq Be$ legfeljebb ugyanolyan nagyságrendű, mint $\zeta/(2\Omega)$ (ez utóbbi átlaga a Rossby-szám), és ezért szorzatukat elhanyagoltuk. A potenciális örvényesség első tagja, 2Ω definíció szerint konstans, a megmaradási tétel ezért a két utolsó tagra jelent megszorítást:

$$\frac{d\left(\zeta + 2\Omega\gamma y/H\right)}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + v\frac{2\Omega\gamma}{H} = 0. \tag{2.36}$$

Kis amplitúdójú hullámot vizsgálva ζ advektív deriváltja elhanyagolható, és így a

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + v\frac{2\Omega\gamma}{H} = 0 \tag{2.37}$$

lineáris egyenletet kapjuk.

A kialakuló, jó közelítéssel kétdimenziós áramlást az

$$\mathbf{u} = (u_0, v_0)\, e^{i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)} \tag{2.38}$$

exponenciális alakban keressük, ahol ω_0 a hullám frekvenciája, és k_x, k_y a hullámszámkomponensek. Feltesszük, hogy $\mathbf{u}$ vezető rendben divergenciamentes. Ez azért jogos, mert a potenciális örvényesség megmaradását a (2.37) egyenlet Ro rendig helyesen veszi figyelembe, az egyenlet pontosabb a geosztrofikus közelítésnél, és ezért az áramlást magát már közel összenyomhatatlannak tekinthetjük a vízszintes síkban (mint a geosztrofikus áramlást). Ezért $u_0 = -v_0 k_y/k_x$, és az örvényesség

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = i\left(k_x v_0 - k_y u_0\right) e^{i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)} = i v_0 \frac{k^2}{k_x} e^{i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)}, \tag{2.39}$$

ahol $k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$. Ezt a (2.37) egyenletbe helyettesítve algebrai egyenletet kapunk, amelyből

$$\boxed{\omega_0\left(k_x, k_y\right) = -\frac{2\Omega\gamma}{H}\frac{k_x}{k^2}.} \tag{2.40}$$

Ez a topografikus Rossby-hullám diszperziós relációja[11] (szaggatott vonal a 2.9. ábrán). A (2.40) diszperziós reláció érdekes tulajdonsága, hogy adott $\mathbf{k}$-hoz *egyetlen* frekvencia tartozik, tehát nem létezhet egyszerre egy $\mathbf{k}$ irányába és egy vele ellentétesen haladó hullám. A Rossby-hullámok nem képezhetnek állóhullámokat.

[10] Szoros hasonlóságuk miatt a *Be* jelölés azonos a Föld görbülete miatt a következő fejezetben bevezetésre kerülő β paraméter (3.2) dimenziótlan megfelelőjével.

[11] A tetszőleges irányban lejtő aljzat esetén a számlálóban a különböző irányú lejtések hullámszámkomponensekkel súlyozott kifejezése jelenik meg.

Az $1/L$ egységekben mért hullámszámmal a dimenziótlan diszperziós reláció:

$$\frac{\omega_0}{2\Omega} = -Be\frac{k_x}{k^2}, \tag{2.41}$$

ahol Be a (2.34) topográfiai paraméter. Eszerint a Rossby-hullám lényegesen hosszabb időskálán változik, mint a forgatás periódusa, a $Ro \equiv |\omega_0/(2\Omega)|$ Rossby-szám sokkal kisebb, mint 1.

A Rossby-hullám x, illetve y irányú terjedési sebessége

$$c_x = \frac{\omega_0}{k_x} = -\frac{2\Omega\gamma}{Hk^2}, \qquad c_y = \frac{\omega_0}{k_y} = -\frac{2\Omega\gamma k_x}{Hk_yk^2}. \tag{2.42}$$

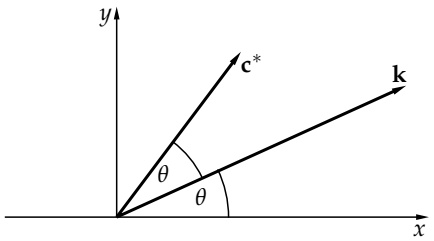
Az x irányú sebesség $\Omega\gamma > 0$-ra mindig negatív, a hullám a negatív x irányba halad.

Példaként tekintsünk egy déli irányban enyhén mélyülő tengerpartot, amely 100 km-en 100 m-t süllyed, tehát $\gamma = 10^{-3}$, és az átlagos mélység $H = 50$ m. A 100 km hullámhosszú, parttal párhuzamos hullám ($k_x = 2\pi \cdot 10^{-5}$ 1/m, $k_y = 0$) frekvenciája $\omega_0 \approx -4{,}6 \cdot 10^{-5}$ 1/s, tehát periódusideje 1,6 nap, terjedési sebessége $c_x \approx -0{,}7$ m/s $= -2{,}5$ km/h. A hullám lassúságára jellemző, hogy terjedési sebessége jóval kisebb az ugyanebben a közegben terjedő vízhullámok $c_0 = \sqrt{gH} = 22$ m/s sebességénél.

Mivel a fázissebesség jelentősen függ a hullámszámtól, a Rossby-hullám is erősen diszperzív. A csoportsebesség:

$$c_x^* = \frac{\partial\omega_o}{\partial k_x} = \frac{2\Omega\gamma}{H}\frac{k_x^2 - k_y^2}{k^4}, \qquad c_y^* = \frac{\partial\omega_o}{\partial k_y} = \frac{2\Omega\gamma}{H}\frac{2k_xk_y}{k^4}. \tag{2.43}$$

Ez azt jelenti, hogy a csoportsebesség kétszer akkora szöget zár be a vízszintes tengellyel, mint a $\mathbf{k}$ vektor (2.8. ábra).



2.8. ábra. A zárt felszínű Rossby-hullámok $\mathbf{c}^*$ csoportsebességének iránya a $\mathbf{k}$ hullámszámvektorhoz képest

2.5.3. Szabad felszínű Rossby-hullámok

Most megengedjük, hogy η változhasson térben és időben, és vizsgáljuk, hogy ez mennyiben módosítja a zárt felszínű topografikus Rossby-hullám tulajdonságait. A teljes mélység

$$h = H\left(1 + \eta/H - \gamma y/H\right). \tag{2.44}$$

Feltéve ismét, hogy az 1 után álló dimenziótlan tagok mind kicsik a zárójelben, a (2.24) potenciális örvényesség írható mint

$$q = \frac{\zeta + 2\Omega}{(1 + \eta/H - \gamma y/H)} \approx \left(2\Omega + \zeta - \frac{2\Omega\eta}{H} + \frac{2\Omega\gamma}{H}y\right). \tag{2.45}$$

Kis amplitúdójú hullám esetén az advektív derivált elhanyagolható, és a (2.25) megmaradási törvény szerint

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta - \frac{2\Omega}{H}\eta\right) + v\frac{2\Omega\gamma}{H} = 0. \tag{2.46}$$

Mivel mindkét tag kicsi, v és ζ kifejezéséhez használhatjuk a geosztrofikus határesetből ismert összefüggést, a felszíni alak (2.30) szerint arányos az áramlási függvénnyel: $\psi = \eta g/(2\Omega)$ Ezzel $v = \partial\psi/\partial x$ és $\zeta = \Delta\psi$ (lásd (1.58), (1.60)). Így azt kapjuk, hogy az áramlási függvénynek ki kell elégítenie a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\psi - \frac{(2\Omega)^2}{gH}\psi\right) + \frac{2\Omega\gamma}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{2.47}$$

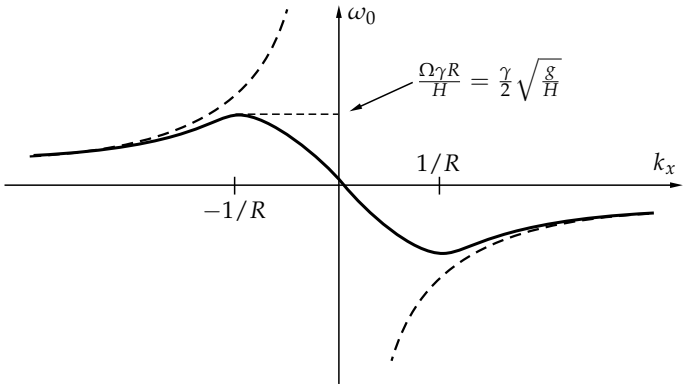
egyenletet.[12] A $\psi = \psi_0 \exp\left(i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)\right)$ alakú síkhullámmegoldásból leolvasható, hogy[13]

$$\boxed{\omega_0\left(k_x, k_y\right) = -\frac{2\Omega\gamma}{H}\frac{k_x}{k^2 + R^{-2}}.} \tag{2.48}$$

Itt

$$\boxed{R \equiv \frac{(gH)^{1/2}}{2|\Omega|}} \tag{2.49}$$

az ún. Rossby-sugár, a szabad felszínnel kapcsolatos új hosszúságjellegű mennyiség. A sugár elnevezés arra utal, hogy – amint látni fogjuk – R jó közelítéssel megegyezik nagy áramlási örvények méretével. A Rossby-sugár reciprokát Rossby-hullámszámnak nevezik.



2.9. ábra. Az x irányban haladó ($k_y = 0$) szabad felszínű Rossby-hullám diszperziós relációja a k_x hullámszámkomponens függvényében. A szaggatott görbe a zárt felszínű Rossby-hullám diszperziós relációja. A diszperziós reláció tetszőleges k_y mellett is hasonló, csak a szélsőértékek k_y-tól is függenek.

A (2.48) diszperziós reláció (2.9. ábra) az R-nél jóval rövidebb hullámhosszakra ($1/R$-nél nagyobb hullámszámokra) úgy viselkedik, mint a zárt felszínű esetben. Eltérés a nagy hullámhosszaknál (kis hullámszám, $Rk < 1$) mutatkozik, ahol a felszíni változásból adódó járulék dominál. A szabad felszín hatása tehát csak az olyan hosszú hullámokban figyelhető meg, amelyek

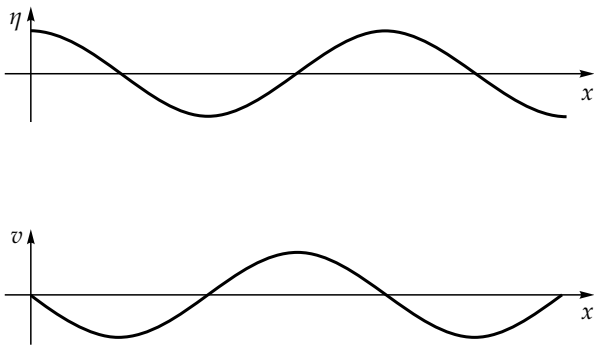
[12] Ez a 2.6. fejezetben tárgyalt kvázi-geosztrofikus egyenlet speciális esete.

[13] Tetszőleges irányban lejtő aljzat esetén a számlálóban a különböző lejtési gradiensek hullámszámkomponensekkel súlyozott kifejezése jelenik meg.

hullámszáma R^{-1}-nél kisebb. Más szavakkal, a rövid hullámokban nagyon csekély a felszíni ingadozás, rájuk jogos a merevlap-közelítés alkalmazása.[14] Ez a helyzet a 2.5.2. fejezet példájában is, ahol a $H = 50$ m átlagos mélységgel a Rossby-sugár $R = 160$ km-nek adódik, és $R^{-1} \ll k_x$.

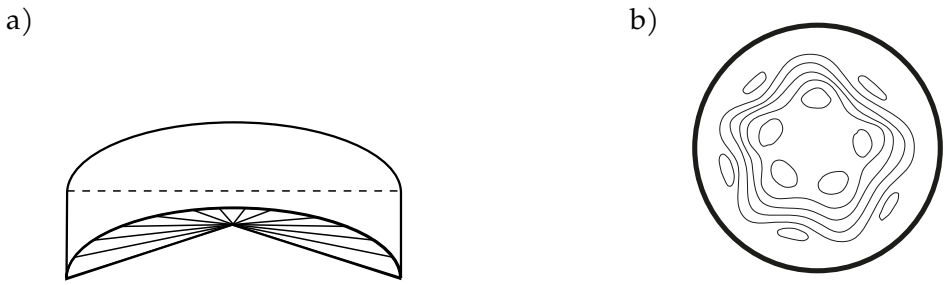
A mozgó szabad felszín a Rossby-hullámokat lassítja: $|\omega_0|$ bármilyen k_x, k_y értékre kisebb, mint $|\Omega\gamma|R/H$. A Rossby-sugár megjelenése végessé teszi a hullám ω_0 frekvenciáját, még x irányú terjedéskor is. Ezért a legnagyobb elérhető fázissebesség is véges, $-2\Omega\gamma R^2/H$. Ezt a nagyon hosszú hullámok ($k_x \to 0$) valósítják meg, amelyek $k_y = 0$ esetén már nem is diszperzívek (2.9. ábra). A csoportsebesség a diszperziós reláció szélsőértékei között, azaz $|k_x| < R^{-1}$-re negatív. Egyébként pozitív, vagyis ellentétes irányba mutat, mint a fázissebesség.

Mivel a hidrodinamikát vezető rendben az áramlási függvénnyel jellemezzük, a ψ függvény arányos a felszíni alakkal, deriváltjai pedig a sebességkomponensekkel. Ezért a felszíni alak és a sebesség negyedfázisnyi ($\pi/2$ nagyságú) eltérésben vannak (2.10. ábra). A hullámban a folyadékelemek mozgása vezető rendben a terjedési irányra *merőleges* rezgés a vízszintes síkban.



2.10. ábra. A felszíni alak és a v komponens egy x irányban terjedő szabad felszínű Rossby-hullámban. A zárt felszínű esetben η szerepét a p' dinamikai nyomás veszi át.

A Rossby-hullámok kísérletileg jól tanulmányozhatók egy olyan hengeres edényben, amelynek az alja kúpos (2.11a. ábra). Egy cikkelyt kiválasztva a geometria közelítőleg ugyanaz, mint amit az elméleti leírásban feltételeztünk. Ha az aljzat a tengely felé emelkedik, és a forgatás pozitív irányú, akkor az együtt forgó megfigyelő (pl. videókamera) balra vonuló Rossby-hullámokat lát, és a fent leírt tulajdonságok kísérletileg is ellenőrizhetők (2.11b. ábra).



2.11. ábra. a) A Rossby-hullámok laboratóriumi vizsgálatához kúpos aljzatú hengert használnak. b) A kísérleti Rossby-hullám áramvonalainak sematikus képe. A hullám a pozitív irányban együttforgó megfigyelő szempontjából az óramutató járásának megfelelő (negatív) irányba halad.

[14] Ez a közelítés formálisan az $R \to \infty$ határesetnek felel meg.

A kísérletben a hullámokat gerjeszteni kell (pl. egy akadály mozgatásával vagy folyadék befecskendezésével, kiszívásával), mert a viszkozitás miatt gyorsan elhalnának. Kúpos aljzatú edényben keltett Rossby-hullámokat mutat ez a kísérlet, amelyben domborzati egyenetlenség gerjeszti a hullámot a forgatási szögsebesség változtatása után induló áramlásban.

A jelenség lényege megfigyelhető derékszögű, de döntött aljú forgatott edényben is (második videó 6:15-től). Az $\Omega > 0$ szögsebességgel együtt forgó kamerából nézve, a jobb felső sarokban a (sekélyebb) vízrétegbe engedett kék jégkocka az edény közepe felé mozdul, de utána jó közelítéssel a koordináta-rendszer negatív x irányába mozog, jelezve, hogy a kezdeti perturbáció Rossby-hullámot hozott létre.

A következő fejezetben látni fogjuk, hogy ezzel a berendezéssel a Föld görbületéből adódóan keletkező planetáris Rossby-hullámok is jól modellezhetők, amelyek a nagy léptékű és lassú légköri és tengeri mozgások meghatározó elemei.

Mivel a Rossby-sugár a későbbiekben is alapvető szerepet játszik, érdemes röviden összefoglalni tulajdonságait. Ez az a lineáris méret, ahol a Coriolis-hatás összemérhető a nehézségi gyorsulásból adódóval, és ezért minden jelentős felszínváltozással kapcsolatos jelenségben megjelenik. Az R távolsággal számolt (1.1) Rossby-szám megegyezik a (2.1) Froude-számmal, vagyis a dimenziótlan (L egységekben mért) Rossby-sugár a Rossby- és a Froude-szám hányadosa:

$$\frac{R}{L} = \frac{Ro}{Fr}. \tag{2.50}$$

Ez az arány a gravitációs és a forgatásból adódó hatások viszonyát adja meg. Egység körüli értéke a kétféle hatás összemérhetőségét jelenti.

2.6. A kvázi-geosztrofikus egyenlet

Tekintsünk most egy tetszőleges $d(x, y)$ domborzatot, amelynek maximuma az átlagos H mélységhez képest feltevés szerint kicsi. A felszíni η egyenetlenségek kicsinységét is feltételezve, a potenciális örvényesség

$$q = \frac{\zeta + 2\Omega}{(1 + \eta/H - d/H)} \approx \left(2\Omega + \zeta - \frac{2\Omega\eta}{H} + \frac{2\Omega d}{H}\right). \tag{2.51}$$

A közelítő kifejezése akkor érvényes, ha $\eta/H, d/H$ nem sokkal nagyobb, mint $\zeta/(2\Omega)$. A felszíni alak vezető rendben arányos az áramlási függvénnyel ($\psi = \eta g/(2\Omega)$), a megmaradási törvény a fenti q-ra a

$$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\Delta\psi - R^{-2}\psi + 2\Omega\frac{d}{H}\right) = 0,} \tag{2.52}$$

alakot ölti, ahol d csak a helytől függ. A szögletes zárójel két utolsó tagja az advektív deriváltat írja le, hiszen $u = -\partial\psi/\partial y$, és $v = \partial\psi/\partial x$. Ez az áramlási függvényre vonatkozó *nemlineáris* parciális egyenlet, a súrlódásmentes sekély folyadék *kvázi-geosztrofikus* egyenlete. Ez a lehető legegyszerűbb típusú hidrodinamikai egyenlet, hiszen egyetlen skalárfüggvényre vonatkozik. Az az érdekes helyzet állt elő, hogy a gyorsan forgatott sekély folyadék lassú viselkedését enyhe domborzati egyenetlenségek mellett egy olyan egyenlet írja le, amely egyszerűbb a teljes sekélyfolyadék-dinamikánál (csatolt parciális differenciálegyenletek). Sima aljzat, $d = 0$ esetén egyetlen paraméterként a Rossby-sugarat tartalmazza. A zárt felszínű eset (merevlap-közelítés) az $R \to \infty$ határesetnek felel meg.

A topografikus Rossby-hullám a fenti kvázi-geosztrofikus egyenlet megoldása egyenletesen döntött domborzat, $d = \gamma y$ esetén. Annak ellenére, hogy az előző fejezetben lineáris közelítésben vezettük le a $\psi = \psi_0 \exp\left(i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)\right)$ alakú megoldás létezését (a (2.48) diszperziós relációval), behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez az exponenciális hullámalak a *teljes* (2.52) nemlineáris egyenletnek is megoldása. Ez mutatja, hogy Rossby-hullámok a legkülönbözőbb körülmények között is előfordulhatnak. Nagy amplitúdójú, nemlineáris hullámokra természetesen nem érvényes a szuperpozíció elve, a fenti alakban megadott Rossby-hullámok összege ezért már nem megoldás.

A nagyságrendi viszonyok és a közelítés érvényességi körének felderítésére megadjuk a dimenziótlanított alakot is. Használva, hogy az áramlási függvény mértékegysége UL, valamint a (2.50) összefüggést, azt kapjuk, hogy a domborzatot H egységekben mérve

$$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\Delta\psi - \left(\frac{Fr}{Ro}\right)^2 \psi + \frac{d}{Ro}\right) = 0.} \tag{2.53}$$

A potenciális örvényesség (2.51) alakjának bevezetésekor használt feltételek azt jelentik, hogy a gömbölyű zárójel második, harmadik tagja nem lehet sokkal nagyobb, mint 1, azaz Fr/Ro és d/Ro legfeljebb egységnyi rendű. Az utóbbi megszorítás szerint a domborzati alaknak legfeljebb Rossby-szám nagyságrendűnek szabad csak lennie a kvázi-geosztrofikus közelítésben. A szabad felszín vagy a domborzat hatása akkor jelentős, ha Fr/Ro, illetve d/Ro egységnyi. Az $Fr/Ro \ll 1$ vagy $d \ll Ro$ eset csekély felszíningadozásnak, illetve domborzati hatásnak felel meg.

Az y irányban egyenletesen lejtő domborzat, $d = \gamma y$ esetén a dimenziótlan kvázi-geosztrofikus egyenlet

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\Delta\psi - \left(\frac{Fr}{Ro}\right)^2 \psi\right) + \frac{Be}{Ro}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \tag{2.54}$$

A kvázi-geosztrofikus egyenlet egyszerűsége ellenére rendelkezik turbulens megoldásokkal is. A benne megjelenő Rossby-sugár mint új karakterisztikus hosszúság szabja meg a kialakuló turbulens örvények tipikus méretét. Az egyenlet ezért alkalmas a forgatott közegekben létrejövő geosztrofikus turbulencia (7.5.3. fejezet) leírására is, amely a légkör és az óceánok legbonyolultabb mozgástípusa. Első levezetőjéről (2.52)-t Charney-egyenletnek is nevezik (J. G. Charney (1917–1981) amerikai meteorológus; 1950-ben egyenlete számítógépes megoldásával kezdődhetett meg a numerikus meteorológiai előrejelzés, amelyhez Neumann János is nagyban hozzájárult).

2.7. Tehetetlenségi gravitációhullám vagy Poincaré-hullám

A (2.14)–(2.16) sekélyfolyadék-egyenlet vízszintes aljzat, $d = 0$ esetén gyors lineáris hullámokat is leír. Ezek a tehetetlenségi gravitáció hullámok,[15] amelyeket Poincaré-hullámoknak is neveznek.

A nyugalmi állapot körül kis u, v és η térmennyiségekkel a linearizált egyenletekben az

[15] A téridő hullámzását jelentő gravitációs hullámoktól való megkülönböztetésként azokra a hullámokra, amelyekben a nehézségi erő jelentős szerepet játszik, a gravitációhullámok kifejezést használjuk.

advektív gyorsulási tag nem jelenik meg, és (2.16)-ban a $h = H + \eta$ tényező H-val helyettesítő:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = +2\Omega v - g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\Omega u - g\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{2.57}$$

Az $(\mathbf{u}, \eta) = (u_0, v_0, \eta_0)\exp\left(i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)\right)$ feltevéssel k_x, k_y hullámszámkomponensű síkhullámmegoldást keresve a

$$-i\omega_0 u_0 = 2\Omega v_0 - ik_x g\eta_0, \tag{2.58}$$

$$-i\omega_0 v_0 = -2\Omega u_0 - ik_y g\eta_0, \tag{2.59}$$

$$i\omega_0 \eta_0 = H\left(ik_x u_0 + ik_y v_0\right) \tag{2.60}$$

polarizációs egyenletre jutunk. Az első két egyenletből a sebességeket kifejezve:

$$u_0 = \frac{g\eta_0}{\omega_0^2 - (2\Omega)^2}\left(\omega_0 k_x + i2\Omega k_y\right), \tag{2.61}$$

$$v_0 = \frac{g\eta_0}{\omega_0^2 - (2\Omega)^2}\left(\omega_0 k_y - i2\Omega k_x\right). \tag{2.62}$$

Ezeket (2.60)-ba helyettesítve

$$\omega_0 = \frac{gHk^2}{\omega_0^2 - (2\Omega)^2}\omega_0 \tag{2.63}$$

ahol $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ a hullámszámvektor hossza. Ebből a nemtriviális megoldás feltétele.[16]

$$\omega_0^2 = (2\Omega)^2 + gHk^2. \tag{2.64}$$

A tehetetlenségi gravitáció-hullámok diszperziós relációja tehát

$$\boxed{\omega_0\left(k_x, k_y\right) = \pm\left((2\Omega)^2 + gHk^2\right)^{1/2} = \pm 2\Omega\left(1 + (Rk)^2\right)^{1/2},} \tag{2.65}$$

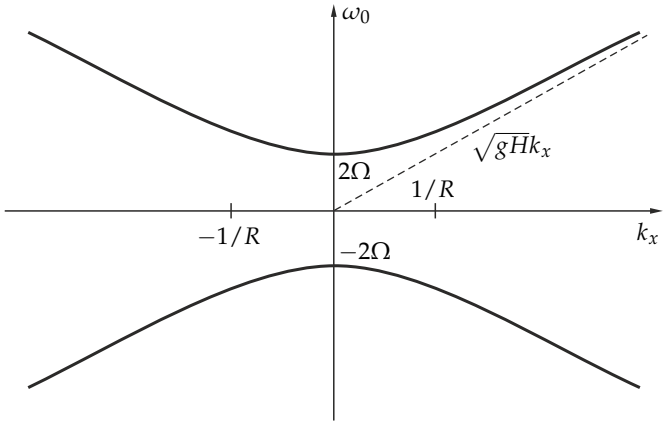
ahol R a (2.49) Rossby-sugár. $\Omega = 0$-ra a sekély vízi hullámokat kapjuk, amelyekhez konstans

$$c_0 = \sqrt{gH} \tag{2.66}$$

sebesség tartozik. A $gH \to 0$ esetben a (2.65) diszperziós reláció a tehetetlenségi hullámokénak felel meg (lásd (1.85) $k_x = 0$ -ra), amelyben a részecskék a tehetetlenségi körmozgást követik. Véges gH mellett a tehetetlenségi mozgás hozzáadódik a hullámzáshoz, és ezzel egy

[16] Ez az összefüggés következik a (2.55)–(2.57)-ből a felületi alakra levezethető zárt egyenletből is, amelyet úgy kapunk, hogy az összefüggéseket rendre x, y és t szerint deriváljuk és a vegyes második deriváltakat kiküszöböljük: $\partial^2\eta/\partial^2 t - gH\Delta\eta + H2\Omega\zeta = 0$. A (2.24) potenciális örvényesség megmaradása miatt $(\zeta + 2\Omega)H/(H + \eta) = 2\Omega$, hiszen a nyugalmi állapothoz nem tartozik sem sebesség, sem felületi elmozdulás. Ezzel $\zeta = \eta 2\Omega/H$, és a felületi alak egyenlete $\partial^2\eta/\partial^2 t - gH\Delta\eta + (2\Omega)^2\eta = 0$. Ez ekvivalens a kvantummechanikából ismert $\partial^2\psi/\partial^2 t - c^2\Delta\psi + (mc^2/\hbar)^2\psi = 0$ Klein–Gordon-egyenlettel, amely a zérus spinű, m nyugalmi tömegű szabad részecskék relativisztikus egyenlete. Ezért nem meglepő, hogy a (2.64) összefüggés egyenértékű az $E^2 = (mc^2)^2 + c^2(k\hbar)^2$ relativisztikus energiakifejezéssel (c a fénysebesség). A megfeleltetés a két probléma között: $E/\hbar \leftrightarrow \omega_0$, $c^2 \leftrightarrow gH$, $2\Omega \leftrightarrow mc^2/\hbar$.

minimális frekvencia jelenik meg: a rezgések csak gyorsabbak lehetnek $|2\Omega|$-nál (2.12. ábra). Az $Ro \equiv |\omega_0/(2\Omega)|$ Rossby-szám csak nagyobb lehet 1-nél. A sekélyvízi gravitációhullámoktól való eltérés a Rossby-sugárnál nagyobb hullámhosszakra válik jelentőssé, amikor $Rk < 1$. Más szóval a rövid hullámhosszú mozgások ($Rk > 1$) olyan gyorsak, hogy nem érzékelik a forgatás jelenlétét. Ez ismét mutatja, hogy R az a távolság, ahol a forgatás és a gravitáció hatása összemérhető. A hullám csoportsebessége általában nem egyezik meg a fázissebességével, de mivel ω_0 a hullámszám abszolútértékét tartalmazza, $\mathbf{c}^*$ párhuzamos $\mathbf{k}$-val.



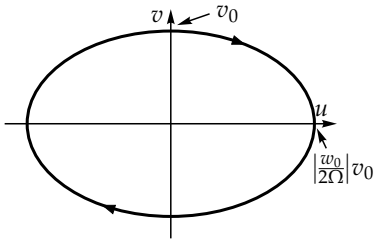
2.12. ábra. A tehetetlenségi gravitációhullám (Poincaré-hullám) diszperziós relációja (folytonos vonal) a hullámszám k_x komponensének függvényében ($k_y = 0$). A szaggatott vonal a következő fejezetben tárgyalt Kelvin-hullám diszperziós relációja, ha az az x tengely mentén húzódó peremmel párhuzamosan halad, amely tőle jobbra esik az északi féltekén.

A (2.58)–(2.60) egyenletekből a hullám összetevőinek viselkedése is leolvasható. Az egyszerűség kedvéért x irányban haladó síkhullámot vizsgálva ($k_y = 0$), (2.59)-ből $u_0 = i\omega_0/(2\Omega)v_0$. A két sebességkomponens tehát negyed fázisnyi eltérésben van. Az exponenciálisból a valósba történő áttérés ezért azt jelenti, hogy ha $v = v_0 \cos(k_x x - \omega_0 t)$ szerint változik, v_0 valós, akkor $u = u_0 \sin(k_x x - \omega_0 t)$, ahol $u_0 = -\omega_0/(2\Omega)\, v_0$ szintén valós. Ebből

$$\frac{u^2}{\left(\omega_0/(2\Omega)\right)^2} + v^2 = v_0^2. \tag{2.67}$$

A sebességvektor végpontja ellipszis mentén mozog a vízszintes síkban, pozitív Ω mellett negatív irányban (2.13. ábra). Az x irányba eső nagytengely $|\omega_0/(2\Omega)|$-szorosa a kistengelynek, vagyis az arány éppen a Rossby-szám. Általában az ellipszis nagytengelye a hullám haladási irányába mutat.

A tehetetlenségi gravitációhullámok gyors mozgásaira a potenciális örvényesség megmaradása már nem egyenértékű a teljes sekélyfolyadék-egyenlettel. Most ugyanis a síkbeli divergencia egységnyi rendű is lehet, ezért az áramlási függvény használata nem jogos: három független dinamikai változónk van (u, v, η), amelyeket egyetlen skalár egyenlet, (2.25) nem helyettesíthet. Az áramlás nem geosztrofikus. Fordítva, a kvázi-geosztrofikus közelítésben nem jelenhetnek meg a tehetetlenségi gravitációhullámok. Frekvenciájuk olyan nagy, hogy a Rossby-hullámok időskáláján már nem követhetők. A kvázi-geosztrofikus közelítés tehát *kiszűri* a gyors mozgásokat, és csak a lassú időfejlődést írja le.



2.13. ábra. A sebességvektor mozgása tehetetlenségi gravitációhullámban ellipszispálya mentén történik, amely a hullám haladási irányában (jelen esetben az x tengely) nyújtott. A körüljárás anticiklonális.

2.8. Kelvin-hullámok

A Kelvin-hullámok forgatott folyadékok *határán* haladó zavarok, közel függőleges perem menti mozgások, amelyekben a peremre merőlegesen nem történik áramlás.[17] Ha a falat az $x = 0$ síknak tekintjük, és az állandó mélységű folyadék a pozitív félsíkot tölti ki, ahogy a 2.14. ábra szemlélteti, akkor az $u = 0$ feltétel fejezi ki, hogy a peremre merőlegesen nincs áramlás. A (2.55)–(2.57) linearizált sekélyfolyadék-egyenletekben $(v, \eta) = (v_0, \eta_0) \exp\left(i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)\right), x > 0$ alakú megoldást keresve, (2.58)–(2.60)-ból $u_0 = 0$-ra a

$$0 = 2\Omega v_0 - ik_x g\eta_0, \tag{2.68}$$

$$-i\omega_0 v_0 = -ik_y g\eta_0, \tag{2.69}$$

$$i\omega_0 \eta_0 = ik_y H v_0 \tag{2.70}$$

feltételt kapjuk. Az két utolsó egyenletből

$$\boxed{\omega_0\left(k_y\right) = \pm\sqrt{gH}k_y,} \tag{2.71}$$

tehát a hullám y irányban a $c_0 = \sqrt{gH}$ fázissebességgel halad, diszperziómentesen.

Az első egyenletből látszik, hogy k_x-nek képzetesnek kell lennie. A másodikból $v_0/\eta_0 = gk_y/\omega_0$, és ezt az elsőbe helyettesítve

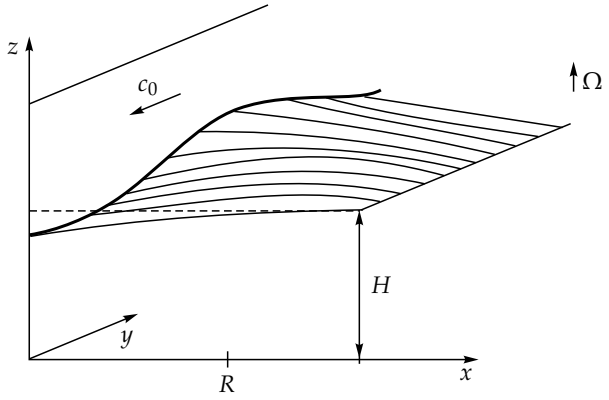
$$k_x = \frac{1}{i}\frac{2\Omega}{\omega_0}k_y. \tag{2.72}$$

Az $\exp(ik_x x)$ alakú helyfüggés exponenciális változásnak felel meg, tehát az amplitúdó az x koordinátával nő vagy csökken. Mivel az örökké növekvő eset nem valósulhat meg, pozitív Ω mellett a $-$ előjelű, negatív mellett a $+$ előjelű ω_0-megoldást kell választanunk. A (2.71) diszperziós relációban tehát *csak az egyik* előjel valósulhat meg, a hullám csak adott előjelű sebességgel haladhat. A fizikailag megvalósuló esetben

$$k_x = -\frac{1}{i}\frac{2|\Omega|}{\sqrt{gH}} = -\frac{1}{i}\frac{1}{R}, \tag{2.73}$$

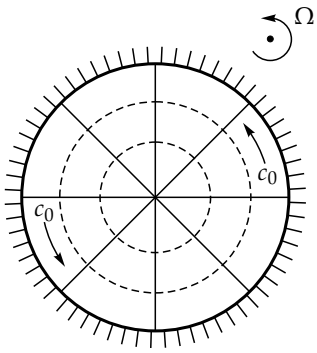
ahol R a (2.49) Rossby-sugár. A hullám tehát az x irányban *csillapodik*, amplitúdója az $\exp\left(-x/R\right)$ szabály szerint Rossby-sugárnyi távolságon csökken e-ad részére (2.14. ábra).

[17] Ezt a peremfeltételt az ellipszis alakú részecskepályák miatt Poincaré-hullámokkal nem lehet kielégíteni.



2.14. ábra. Kelvin-hullám egy y tengellyel párhuzamos partvonal mentén pozitív forgatás esetén. A hullám c_0 sebességgel halad, és amplitúdója a falra merőlegesen a Rossby-sugárnyi távolságon csökken e-ad részére.

Általánosan az mondható, hogy a hullám úgy halad, hogy pozitív (negatív) forgatási irány esetén a fal a hullám jobb (bal) oldalán helyezkedik el. A part menti nagyobb amplitúdó szemléletesen úgy érthető, hogy a Coriolis-erő jobbra (balra) térít, és az ennek megfelelő oldalon halmozza fel a folyadékot. Az ilyen hullámot első leírójától Kelvin-hullámnak nevezzük. (W. Thomson, Lord Kelvin (1824–1907) termodinamikai kutatásai mellett hozzájárult alapvető hidrodinamikai jelenségek megértéséhez, felismerte a Coriolis-erő fontosságát, és az árapály-hullám első leírását adta.) A 2.12. ábra szaggatott vonala az x irányba haladó, k_x hullámszámú Kelvin-hullám diszperziós relációját mutatja, ha az az x tengely mentén húzódó peremmel párhuzamosan halad, amely tőle jobbra esik az északi féltekén. Ilyen hullámban ω_0 és k_x csak pozitív lehet.



2.15. ábra. Kelvin-hullám haladása egy kör alakú medencében pozitív forgatás esetén (felülnézet). A folytonos vonalak az azonos fázisú helyeket kötik össze, a szaggatottak pedig az azonos amplitúdómaximumokat. Az amplitúdó a medence közepén a legkisebb, és a perem felé növekszik.

A fenti orientációs szabályból következik, hogy zárt medence peremei mentén a Kelvin-hullámok körbe haladhatnak. Pozitív forgatás esetén haladásuk az óramutató járásával ellentétes, azaz *ciklonális* jellegű (2.15. ábra). Az r sugarú medencét $2\pi r/\sqrt{gH}$ idő alatt járja körül a Kelvin-hullám. Ha a sugár éppen a (2.49) Rossby-sugárral egyezik meg, $r = R$, akkor az idő $\pi/|\Omega|$, vagyis a forgatási idő fele. Ennek tulajdonítható, hogy a Kelvin-hullámok szorosan kapcsolódnak az árapályhullámokhoz is (3.4. fejezet).

Ha sekély folyadékréteget tartalmazó lapos aljú, Ω szögsebességgel forgatott edényben kis-

méretű test ω frekvenciájú rezgetésével hullámokat gerjesztünk, akkor azt tapasztaljuk, hogy ha $|\omega| < 2|\Omega|$, csakis Kelvin-hullám jöhet létre, amely a fal mentén halad, és amplitúdója az edény belseje felé csökken. Ha viszont $|\omega| > 2|\Omega|$, akkor, ahogy a 2.12. ábra is mutatja, Poincaré-hullám is kialakulhat, amely áthalad az edényen nagyobb amplitúdócsökkenés nélkül.

Ebben a kísérletben a gerjesztést a forgatás lassú lüktetésével hozták létre, így csak Kelvin-hullám alakulhatott ki. A henger hátsó falára ragasztott papírlapnak köszönhetően jól látszik a kis amplitúdójú Kelvin-hullám haladása a távoli perem mentén is. A pozitív irányban forgatott edényben a „part" a hullám jobb oldalára esik.

2.9. Nemlineáris felszíni hullámok, szolitonok

Erős gerjesztés hatására olyan felszíni hullámok alakulnak ki, amelyek amplitúdója nem hanyagolható el a teljes folyadékmélységhez képest. Az advektív gyorsulás nemlineáris tagja ekkor lényeges szerepet játszik, és a jelenség már nem írható le lineáris egyenletekkel. Ennek következtében az ilyen nemlineáris hullámokra nem érvényes a szuperpozíció elve: két hullám összege nem megoldás. A nemlineáris hullámok jellegzetes példái a *szolitonok*. Ezek a lineáris eset hullámcsomagjaihoz hasonló lokalizált megoldások, felszíni kidudorodások.

A szolitonjelenséget J. S. Russel (1808–1882) skót mérnök, hajóépítő fedezte fel 1834-ben, amikor egy csatornán vontatott csónak megállítása után észrevette, hogy egy magányos vízkidudorodás továbbhalad, ami alakját alig változtatta, és a kidudorodást hosszú ideig tudta követni lovon.

Az eredeti megfigyelés mai megfelelője látható ebben a „szabadtéri" kísérletben. Russel később méréseket is végzett, amelyekből a (2.74) összefüggés jobb oldali alakjára jutott.

A szolitonok magyarázatához túl kell lépni a sekélyfolyadék-dinamikán, és figyelembe kell venni az ahhoz adódó első korrekciókat. Ebben a képben a lineáris hullámok már gyengén diszperzívek, ezért a kis amplitudójú mozgásokból képzett hullámcsomagok szétfolynak. Véges amplitúdók esetén azonban az Euler-egyenlet nemlinearitását is figyelembe kell venni, és ez éppen a szétfolyás megakadályozását eredményezi. A részletes leírás helyett itt csak a szolitonok legfontosabb paramétereit foglaljuk össze (elméleti megközelítést a 9.2., 9.3. fejezetek adnak).

Nem forgatott sekély folyadékban az x tengely mentén terjedő szoliton egy felszíni *kidudorodás* (2.16. ábra), amely alakját megtartva halad, η_0 amplitúdója véges, de kicsi a teljes vízmélységhez képest: $\eta_0 \ll H$. Terjedési sebessége

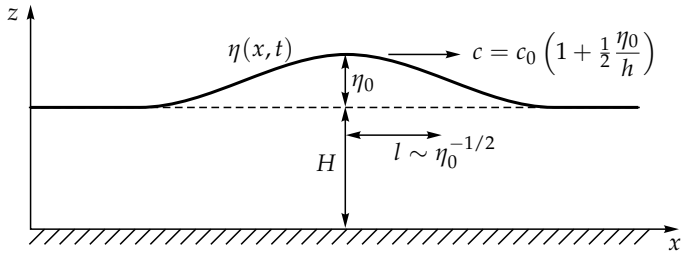
$$\boxed{c = c_0\left(1 + \frac{\eta_0}{2H}\right) \approx \sqrt{g(H+\eta_0)},} \tag{2.74}$$

ahol c_0 a sekélyvízi lineáris hullámok $\sqrt{gH}$ sebessége. A (2.74) összefüggés közelítő egyenlősége szerint a terjedési sebesség formálisan úgy is tekinthető, mint a maximális felszíni kidudorodás alatti teljes $h = H + \eta_0$ vízmélységhez tartozó lineáris hullámok sebessége. A szolitonok tehát *gyorsabbak* az átlagos H folyadékmélységű közegben terjedő lineáris hullámoknál, sebességnövekményük arányos amplitúdójukkal.

A szoliton félszélessége (hullámhossza)

$$l = \sqrt{\frac{4H^3}{3\eta_0}}. \tag{2.75}$$

Az l/H dimenziótlan félszélesség az η_0/H dimenziótlan amplitúdó $-1/2$-edik hatványa. A szoliton jóval *szélesebb* a folyadék mélységénél. A nagyobb amplitúdójú szoliton keskenyebb, de gyorsabban halad, mint kisebb társa.



2.16. ábra. Szolitonok jellemző alakja és paraméterei. A szoliton nem szinuszhullám, a felületváltozás mindenütt kiemelkedés, η sehol nem vált előjelet.

Ezek a tulajdonságok (melyek a 9.4. fejezetben tárgyalt cnoidális hullámokra is érvényesek) alapvetően különböznek a lineáris hullámokétól, amelyekben sem a sebesség, sem a hullámhossz nem függ az amplitúdótól. (A szolitontulajdonságot a hang hullámhosszára és frekvenciájára alkalmazva azt jelentené, hogy a hang magassága függne erősségétől!)

Ha több szoliton szemben halad egymással, akkor azok kölcsönhatásba lépnek, alakjuk megváltozik, de miután elváltak és elegendően eltávolodtak, ismét *visszanyerik eredeti formájukat és sebességüket*. E tulajdonságuk az elemi részecskék szórási folyamatokban való részvételére emlékeztet, és a szolitonok nevében ezért jelenik meg a részecskékre jellemző „on" végződés. Szolitonok mozgása és ütközése látható ebben a kísérletben.

A természetben előforduló szolitonok közül a földrengés vagy vulkánkitörés keltette cunamik a legnagyobb energiájúak. Általában legfeljebb néhány m magas hullámok alakulnak ki, amelyek a nyílt tengeren néhány 100 km hullámhosszúak. Ezek tekinthetők kis amplitúdójú $c_0 = \sqrt{gH}$ sebességű hullámoknak. A mély vízben terjedési sebességük kb. 200 m/s, több mint 700 km/h, azaz egy nap alatt egész óceáni medencéket átszelnek. A sekély tengerparti vizekbe érve azonban lelassulnak, amplitúdójuk megnő, ezzel a hullám nemlineárissá válik, de a szétfolyását a szolitontulajdonság egy ideig még megakadályozza. Végül az egész sekély vizekben, ahol magasságuk már több tíz métert is elérhet, a hullám megtörik, és energiája felszabadul.

Végül megemlítjük, hogy számos más nemlineáris hullám is létezik. Közülük az egyik leggyakoribb a *torlóhullám* (bore), amely akkor alakul ki, ha egy folyadékrétegen nagy tömegű folyadék terül szét, ugrásszerű szintváltozással.[18] A tenger napi árhulláma vezet felszíni bore kialakulására széles, lapos folyótorkolatokban. Valamivel kisebb skálán, minden, átbukással megtört hullám mozgó vízlépcsőt, bore-t hoz létre. A torlóhullám álló formája a *hidraulikus ugrás*. Ezekkel itt nem foglalkozunk, mert rétegzett közegbeli (belső) megjelenéseiket a 12.3. fejezet tárgyalja, és annak eredményeiből a felszíni változatok speciális esetként adódnak.

[18] A partvonalakat néha elérik a szolitonjellegű cunamiknál nagyobb pusztítást okozó torlóhullámok is. Ezek okai lehetnek közeli földcsuszamlások vagy meteorbecsapódások, mint pl. a dinoszauruszok kihalását okozó becsapódás miatt kialakuló több 10 méter magasságú hullámok. Ezeket megacunamiknak is nevezik.

3. fejezet

A görbület hatása

A nagyskálájú környezeti áramlások sekély jellege és az annak következtében mindig gyenge felvagy leáramlások azzal a következménnyel járnak, hogy a Coriolis-erő helyi függőleges irányba mutató hatása elhanyagolhatóan kicsi. Ezért a Föld bármely pontja körül a hidrodinamikai mozgásegyenlet szempontjából csakis a helyi függőleges szögsebesség komponens számít. Ha edényünket tetszőleges földrajzi koordinátájú pontokhoz illesztjük (3.5. ábra), akkor a benne érvényes dinamikát a függőleges tengely körül forgatott sekély folyadékra érvényes egyenletek írják le, csak 2Ω helyett mindenütt a Föld Ω_F szögsebességéből képzett $f = 2\Omega_F \sin\varphi$ mennyiséget, az ún. Coriolis-paramétert kell használnunk, ahol φ az edény középpontjának szélességi koordinátája. Az f paraméter az Északi-sarkon a legnagyobb $(2\Omega_F)$, az Egyenlítő felé csökken, ott előjelet vált, és a Déli-sarkon a legkisebb $(-2\Omega_F)$.

Ha a vizsgált tartomány L vízszintes kiterjedése kicsi a Föld R_F sugarához képest, akkor a Coriolis-paraméter helyfüggése elhanyagolható, és elegendő az edény középpontjában kiértékelni. Korábbi eredményeink mind érvényben maradnak a $2\Omega \to f_0 = 2\Omega_F \sin\varphi_0$ helyettesítéssel, ahol f_0 a planetáris örvényesség az edény φ_0 koordinátájú origójának megfelelő szélességen. Ennek értelmében a Rossby-szám

$$\boxed{Ro = \frac{U}{|f_0|L}.} \tag{3.1}$$

Az f_0 paraméter szélességfüggésének megfelelően az ugyanakkora sebességhez és síkbeli kiterjedéshez tartozó Rossby-szám egynél lényegesen nagyobbá válik az Egyenlítő közelében. Ott tehát a Coriolis-erő hatása elhanyagolható a környezeti áramlásokban. Ennek fontos következménye, hogy ciklonok és anticiklonok az egyenlítői övben nem létezhetnek, a pusztító erejű trópusi ciklonok vagy hurrikánok is csak a ± 10 fokos szélességi körökön kívül keletkeznek.

Amennyiben a vizsgált tartomány méretét több száz km-esre kívánjuk kiterjeszteni, amely sok jelenség szempontjából elengedhetetlen, akkor a planetáris örvényesség helyfüggésének legalábbis legfontosabb, lineáris részét meg kell tartanunk. Ilyenkor a $2\Omega \to f_0 + \beta y$ helyettesítést alkalmazzuk, ahol a β paraméter a planetáris örvényesség változási gyorsasága a sarok felé történő elmozdulás következtében.

A β paraméter fontosságát a

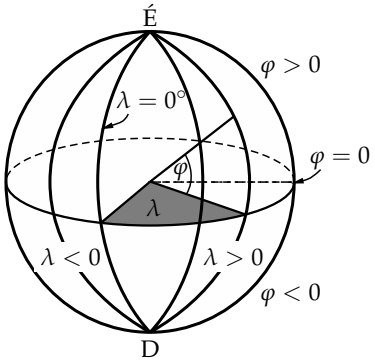
$$\boxed{Be = \frac{\beta L}{|f_0|}} \tag{3.2}$$

dimenziótlan β paraméter méri. Nagysága a közepes szélességeken az 1000 km-es skálán 0,1 körüli, azaz összemérhető a Rossby-számmal. Két áramlás akkor lehet hasonló, ha jellegzetes

számaik között a *Be* dimenziótlan β paraméter is azonos. Laboratóriumi kísérletben a β paraméter megfelelője az aljzat döntöttsége, és a hasonlóság feltétele a (2.34) és (3.2) paraméterek azonossága.

3.1. Földrajzi koordináták, a lokális rendszer

A Föld felszínén a hagyományos földrajzi koordinátákat használjuk (3.1. ábra). A szélességet, azaz az Egyenlítő síkjával bezárt szöget φ-vel jelöljük. A $\varphi = \pi/2$, illetve $\varphi = -\pi/2$ értékek az Északi-, illetve Déli-sarknak felelnek meg. A földrajzi hosszúság, azaz a Föld tengelye körüli elforgatás szöge λ. Ez megegyezés szerint Greenwhichnél veszi fel 0 értékét ($\lambda = \pm\pi$ a dátumválasztó vonal). A leírás megfelel a fizikában is használt gömbi koordinátáknak, a szögek értelmezése és jelölése azonban eltér attól.



3.1. ábra. A földrajzi koordináták. φ a földrajzi szélességet, λ a földrajzi hosszúságot jelöli.

A Föld gömbnek tekintett felszínén definiálhatunk távolságot jelentő koordinátákat. Hagyományosan

$$x = (R_F \cos\varphi)\,\lambda \tag{3.3}$$

jelöli a kelet–nyugati

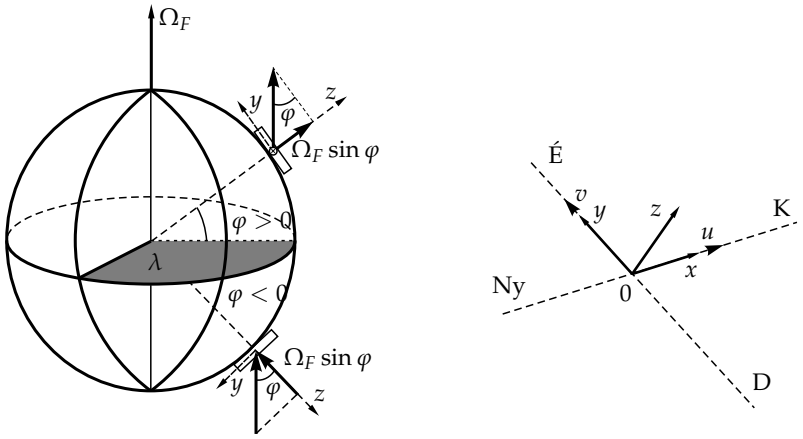
$$y = R_F|\varphi| \tag{3.4}$$

pedig az észak–déli irányban mért helykoordinátákat, ahol R_F a Föld sugara. Az abszolútérték megjelenése azt fejezi ki, hogy az y koordináta mindkét féltekén a sarok felé nő.

Tekintsünk a Föld sugarához képest kicsiny, $L \ll R_F$ vízszintes méretű folyadékréteget. Bármely (φ_0, λ_0) földrajzi hely körül felvehetünk egy jobbsodrású derékszögű koordinátarendszert, amelynek (x, y) síkja az érintősíkban fekszik, y tengelye a közelebbi pólus irányába mutat, és a z koordináta a helyi függőleges irányban nő. Az (x, y, z) koordináták az $x_0 \equiv (R_F \cos\varphi_0)\lambda_0, y_0 \equiv R_F|\varphi_0|, z_0$ helyzetű origótól mérik a távolságot, vagyis

$$x = R_F \cos\varphi_0(\lambda - \lambda_0), \qquad y = \pm R_F\,(\varphi - \varphi_0)\,, \tag{3.5}$$

ahol az y-beli negatív előjel a déli félgömbre vonatkozik. Ebben a *lokális rendszerben* írjuk le az $L \ll R_F$ vízszintes kiterjedésű és $H \ll L$ mélységű sekély folyadék áramlásait. Ezzel összhangban, az $\mathbf{u} = (u, v, w)$ sebesség u komponense a szélességi körökkel párhuzamos (az északi féltekén keletre, a délin nyugatra nő), v pedig az észak–déli irányú áramlás sebessége, amely akkor pozitív, ha a közelebbi sarok felé mutat. A függőleges irányú sebesség w (3.2. ábra).



3.2. ábra. A forgási szögsebességvektor komponensei a két féltekén (bal oldali rajz), a Földet gömbként közelítve. A lokális rendszer (jobb oldali rajz), amelyben a z irány a helyi függőleges.

A Föld forgási szögsebességvektorának a lokális rendszerben nemcsak z, hanem y irányú komponense is van (amint a 3.2. ábra bal oldali rajza mutatja):

$$\mathbf{\Omega}_F = \left(\Omega_x = 0, \Omega_y = \pm\Omega_F \cos\varphi, \Omega_z = \Omega_F \sin\varphi\right). \tag{3.6}$$

Itt Ω_F a Föld forgási szögsebességének (1.7)-tel megadott nagysága. Az Ω_y-ban fellépő negatív előjel a déli féltekére vonatkozik, ahol a forgási szögsebesség vízszintes komponense az Egyenlítő felé, azaz negatív y irányba mutat. A $2\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}_F$ Coriolis-gyorsulás komponensei ezért

$$\left(-2\Omega_y w + 2\Omega_z v, -2\Omega_z u, 2\Omega_y u\right). \tag{3.7}$$

Mély folyadékrétegben az Ω_y-nal arányos új tagok jelentősek lennének, és ezért ott olyan típusú mozgás is kialakulhat, amely nem lehetséges egy függőleges tengely körül forgatott edényben. Érdekes módon azonban a $H \ll L$ sekélyfolyadék-közelítésben nem ez a helyzet. Ekkor ugyanis a tipikus W függőleges sebesség legfeljebb $UH/L \ll U$, és ezért az x irányú Coriolis-gyorsulásban az Ω_y-nal arányos tag sokkal kisebb az Ω_z-vel arányosnál.

A Coriolis-gyorsulás függőleges (z) komponense $2\Omega_y u$. A keletről nyugatra mozgó testekre az északi féltekén emelő erő hat. Ez az *Eötvös-hatás*, amelynek gyorsulása $2\Omega_F U$ nagyságrendű. A nehézségi gyorsuláshoz képest ez mindig elenyésző, $U = 10$ m/s esetén kb. 10^{-3} m/s^2. Dimenziótlan mérőszáma $2\Omega_y u/g$, ami nemcsak kicsi, hanem nem is nő az L mérettel. Többek között ez az oka annak, hogy az Eötvös-hatás környezeti szerepe elenyésző a Coriolis-eltérüléshez képest. Az Eötvös-hatás és az Ω_y-nal arányos tagok mindenütt elhanyagolhatók a környezeti áramlások leírásában. A Coriolis-gyorsulás lényeges komponensei tehát

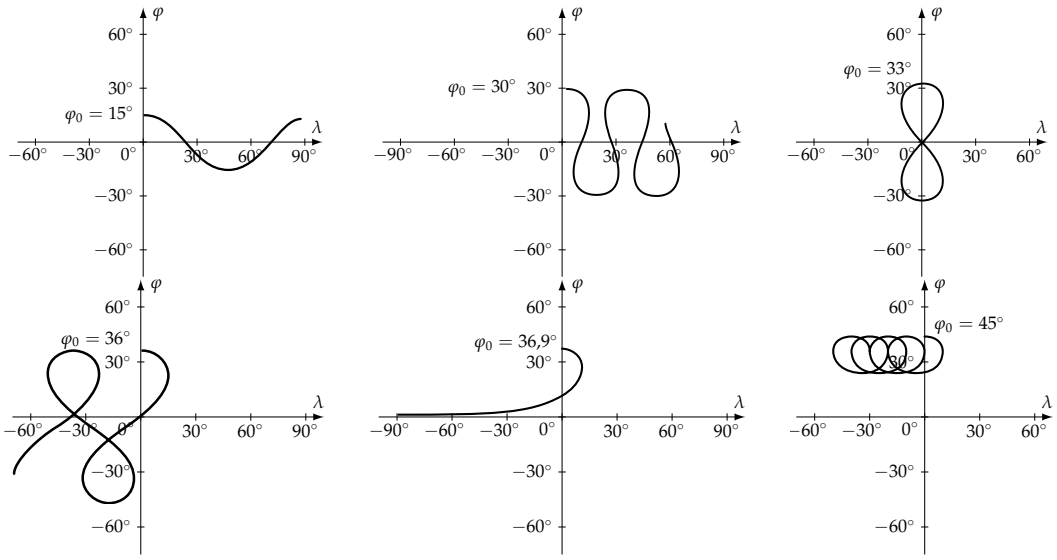
$$\boxed{\mathbf{a}_C = (2\Omega_z v, -2\Omega_z u, 0)}, \tag{3.8}$$

a forgási szögsebességvektornak *csak az* Ω_z *függőleges komponense* játszik szerepet, és az eltérítő hatás a helyi vízszintes síkban érvényesül! A Coriolis-gyorsulás ugyanolyan típusú vektor, mint a laboratóriumi kísérletekben érvényes (1.10), de új vonás, hogy Ω_z függhet az y helykoordinátától.

3.2. Szabad mozgás forgó gömbön

A hidrodinamikai leírás előtt célszerű most is egy pontmechanikai probléma vizsgálatával kezdenünk. Tekintsünk egy meglökött testet, amely egy $\Omega > 0$ szögsebességgel forgatott gömbön

mozog súrlódás nélkül („jégkorong a befagyott Földön"). A probléma egyszerűsége miatt nem ragaszkodunk a lokális rendszerhez, a mozgás az egész gömbre kiterjedhet, miközben rá csak a Coriolis-erő hat. Figyelemre méltó a lehetséges mozgások sokfélesége, amit a 3.3. ábrán figyelhetünk meg.



3.3. ábra. Az $u_0 = 0{,}1$ és $v_0 = 0$ dimenziótlan sebességgel megadott φ_0 szélességi szögű helyzetekből keleti irányban meglökött testek pályái pozitív forgásirány esetén, a λ, φ síkon ábrázolva. A φ_c kritikus helyzetnek az ötödik ábra felel meg. Az utolsó ábra mutatja, hogy a síkon tehetetlenségi körmozgásnak megfelelő mozgás nagy gömbi méretben nyugatra sodródó spirálozássá változik.

Az R sugarú gömb felszínén zajló mozgásokra a kelet–nyugati és a sarkok irányába mutató a_λ, illetve a_ϕ gyorsulások az u, v sebességkomponensekkel kifejezve:

$$a_\lambda = \dot{u} - \frac{uv}{R}\operatorname{tg}\varphi, \qquad a_\varphi = \dot{v} + \frac{u^2}{R}\operatorname{tg}\varphi, \tag{3.9}$$

ahol a második tagok a görbült felület következményei (részletes levezetésük a 10.6. fejezetben található). A sebességek gömbi szögekkel való kapcsolata (3.3) és (3.4) alapján

$$R\dot{\lambda} = \frac{u}{\cos\varphi}, \qquad R\dot{\varphi} = v. \tag{3.10}$$

A φ szélességhez tartozó érintősíkban a Coriolis-gyorsulás komponensei (3.8) szerint

$$a_\lambda = 2\Omega\sin\varphi v, \qquad a_\varphi = -2\Omega\sin\varphi u. \tag{3.11}$$

A teljes mozgásegyenlet-rendszer (3.9) alapján tehát

$$\dot{u} = 2\Omega\sin\varphi v + \frac{uv}{R}\operatorname{tg}\varphi, \qquad \dot{v} = -2\Omega\sin\varphi u - \frac{u^2}{R}\operatorname{tg}\varphi, \tag{3.12}$$

melyet (3.10) tesz teljessé.

A távolságot R, az időt $1/(2\Omega)$ egységben, és ennek megfelelően a sebességet $2\Omega R$ egységben mérve, a dinamikai egyenlet

$$\dot{u} = \sin\varphi v + uv \operatorname{tg}\varphi, \qquad \dot{v} = -\sin\varphi u - u^2 \operatorname{tg}\varphi, \tag{3.13}$$

a kinematikai egyenlet pedig

$$\dot{\lambda} = \frac{u}{\cos\varphi}, \qquad \dot{\varphi} = v \tag{3.14}$$

alakú, vagyis nincs bennük szabad paraméter. A 3.3. ábra ezen egyenletek megoldását mutatja a keletre mutató $u_0 = 0{,}1$, $v_0 = 0$ kezdősebességgel különböző $\varphi_0 > 0$ szélességi koordinátákkal indítva. Az Egyenlítőhöz közel keletre haladás történik, hiszen itt gyenge a Coriolis-erő, amely csak a pálya enyhe hullámzását okozza, mindkét féltekére kiterjedően. Magasabb szélességekről indítva, az u sebesség legalább ideiglenesen negatív irányba mutat. Egy speciális szögnél az átlagsebesség nulla, majd a pályák hurkolttá válnak, nyugatra sodródnak. Egy φ_c kritikus kezdőszögnél a pálya belesimul az Egyenlítő egyenesébe. Ennél nagyobb φ_0 szögekre nem történhet áthaladás az Egyenlítőn, a mozgás egy féltekére koncentrálódik. Egyben az is látszik, hogy a körkörös mozgás mindig *nyugat felé* sodródik, vagyis a tehetetlenségi körmozgást a görbület módosítja!

A részletesebb vizsgálat azon alapul, hogy a mozgáshoz két megmaradó mennyiség is tartozik, az

$$E = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) \tag{3.15}$$

energia, amely dimenziótlan változókban is ilyen alakú, valamint a külső megfigyelő által tapasztalt $N = R\cos\varphi\,(R\cos\varphi\Omega + u)$ függőleges tengely körüli impulzusnyomaték, amely dimenziótlan alakban

$$N = \cos\varphi\,(\cos\varphi + 2u)\,. \tag{3.16}$$

Ebből

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{\cos\varphi} - \cos\varphi\right), \tag{3.17}$$

vagyis az u sebesség a mozgás során egyértelműen meghatározza a ϕ szélességi szöget. Az energiamegmaradás egyenletébe ezt és $v = \dot{\varphi}$-ot beírva, azt látjuk, hogy

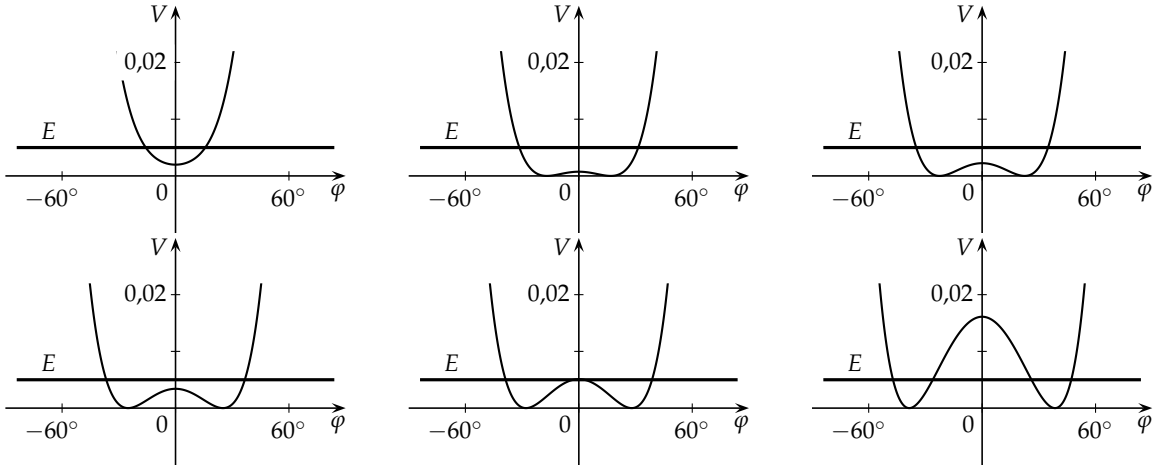
$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = E, \tag{3.18}$$

ahol

$$V(\varphi) = \frac{1}{8}\left(\frac{N}{\cos\varphi} - \cos\varphi\right)^2 = \frac{1}{2}u^2 \tag{3.19}$$

egyfajta effektív potenciál. A φ szög szempontjából a mozgás egydimenziós, és a $V(\varphi)$ potenciálban történik. Rögzített u_0, v_0 értékek mellett az E energia minden esetben ugyanaz, de φ_0 növelése $\cos\varphi_0$ és N csökkenésével jár.

$N > 1$-re $V(\varphi)$-nek minimuma van az origóban, ahol értéke $(N-1)^2/8$. $N < 1$-re ($u_0 = 0{,}1$ esetén $\varphi > 25{,}2$ fokra) két minimum jelenik meg $\cos\varphi = \sqrt{N}$-nél, ahol a függvény értéke 0, és az origó lokális maximum lesz. Ebben a tartományban a potenciál kétvölgyűvé válik, ahogy a 3.4. ábra mutatja. (3.17) szerint most az $u(t)$ függvény lehet negatív, vagyis legalábbis ideiglenes nyugatra sodródás történik. Az Egyenlítőhöz simuló görbe átmenetet jelez különböző típusú mozgások között. A görbe kezdőszöge φ_c, akkor valósul meg, ha a potenciál origóhoz tartozó $(N-1)^2/8$ lokális maximuma eléri az $E = u_0^2/2$ értéket, vagyis ha $N_c = 1 - 2u_0$ ($\varphi_c = 36{,}9$ fok). Ennél kisebb N-ekre, nagyobb φ-kre mozgás csak az egyik vagy másik völgyben, vagyis az



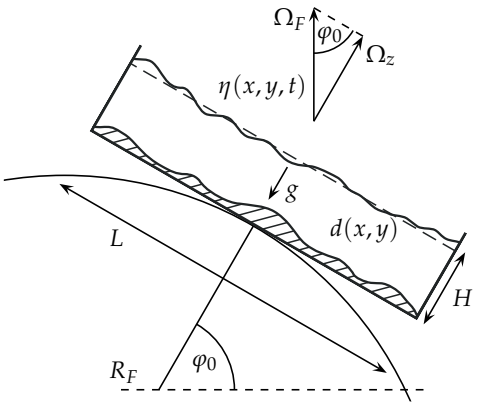
3.4. ábra. A $V(\varphi)$ potenciál alakjának változása csökkenő N értékekre, $N > 1$-től kezdve. A választott értékek az előző ábra φ_0-jaihoz tartozó $N(\varphi_0)$ impulzusnyomatékok, ugyanabban a sorrendben. A kritikus eset annak felel meg, hogy az origóhoz tartozó maximum eléri a $E = u_0^2/2$ értéket.

egyik vagy másik féltekére korlátozottan történhet csak. N_c alatt két különböző mozgásforma valósul meg a kezdőszögtől függően, a rendszer N_c-nél *bifurkáción* megy keresztül.

A pontmechanikai probléma közepes szélességekre vonatkozó hidrodinamikai analogonja a φ_c-nél magasabb szélességeknek felel meg. Ott a nyugatra sodródó spirálozó mozgás megfeleltethető a Rossby-hullámok alló közegben nyugatra mutató terjedési irányának (3.7. fejezet).

3.3. Sekély folyadék a Föld érintősíkjában

A 3.1. fejezetben bevezetett lokális rendszert használva az eddig a sarkokra helyezett „edényünket" tetszőleges φ_0 szélességi körhöz tartozó érintősíkba helyezzük. Ahogy láttuk, sekély közegben a vízszintes síkbeli Coriolis-eltérítés lényeges csak, amiért az Ω_z függőleges komponens felelős. Ennek iránya megegyezik a **g** nehézségi gyorsulás irányával, ahogy a 3.5. ábra mutatja. Ezért eddigi eredményeink könnyen átvihetők a lokális rendszerbe.



3.5. ábra. A földi áramlások derékszögű leírásához használt rendszer, valamely ϕ_0 szélességi (és tetszőleges hosszúsági) koordinátájú pont érintősíkjában. A sekély folyadékban lényeges Coriolis-hatásért felelős szögsebesség a Föld szögsebességének helyi Ω_z függőleges komponense.

A lokális rendszerbeli sekélyfolyadék-egyenletek tehát *ekvivalensek* a függőleges tengely körül forgatott edénybeli sekélyfolyadék-egyenletekkel, ha 2Ω helyett mindenütt az

$$\boxed{f \equiv 2\Omega_z = 2\Omega_F \sin\varphi} \tag{3.20}$$

mennyiséget, az ún. *Coriolis-paramétert* írjuk, amelyet planetáris örvényességnek is neveznek. Dinamikai szerepe abból látszik, hogy a $\mathbf{v} \times 2\mathbf{\Omega}_F$ gyorsulásnak a 3.5. ábra érintősíkjába eső sebességekből adódó járulékai f-fel arányosak.

A sekélyfolyadék-egyenletek a lokális rendszerben

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f\mathbf{u} \times \mathbf{n} - g\,\mathrm{grad}\,\eta,} \tag{3.21}$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0} \tag{3.22}$$

alakúak, ahol a helykoordinátákat (3.5) adja. A (3.20) Coriolis-paraméter y-függése a (3.4) kapcsolat miatt

$$f = 2\Omega_F \sin\left(\varphi_0 \pm y/R_F\right), \tag{3.23}$$

ahol az alsó előjel a déli féltekén érvényes.

Az edényt két közelítésben is használjuk: amíg az L vízszintes méret sokkal kisebb, mint a Föld R_F sugara, az ún. f-sík-közelítésről beszélünk, amikor pedig ehhez első korrekciót is figyelembe veszünk, a β-sík-közelítésről.

3.4. f-sík-közelítés

Ha az L vízszintes méret nagyon kicsi R_F-hez képest, a Coriolis-paramétert azon a φ_0 referenciaszélességen értékelhetjük ki, amely a koordináta-rendszer origójának felel meg. Ez az

$$\boxed{f \equiv f_0 = 2\Omega_F \sin\varphi_0 = \text{állandó}} \tag{3.24}$$

választást jelenti. A planetáris örvényesség ebben a közelítésben az egész vizsgált „edényben" állandó.

Adott f-síkon korábbi eredményeink a

$$2\Omega \to f_0 = 2\Omega_F \sin\varphi_0 \tag{3.25}$$

helyettesítéssel érvényesek. A Rossby-szám definíciójaként mostantól (3.1)-et fogadjuk el, azaz a földrajzi szélességnek megfelelő Coriolis-paraméterrel számoljuk. Ez mindenütt nagyobb a sarkinál. A 45 fokos szélességen pl. (Magyarország a 46 és 48 fokos szélességi körök között fekszik) $f_0 = \sqrt{2}\Omega_F = 1{,}03 \cdot 10^{-4}\,1/\mathrm{s}$. Ennek megfelelően az 1.1. táblázat Rossby-szám értékei a (3.1) definíció szerint mintegy 1,4-szer nagyobbak. Az Egyenlítő felé közeledve Ro értéke minden határon túl nő, ezért a $Ro \ll 1$ feltétel ott sohasem teljesülhet, a geosztrofikus és kvázigeosztrofikus közelítés ott *nem* alkalmazható.

Geosztrofikus, tehát időfüggetlen áramlásra

$$u_g = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{f_0\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \qquad v_g = \frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{f_0\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}, \qquad \psi = \frac{g}{f_0}\eta = \frac{1}{f_0\varrho_0}p', \tag{3.26}$$

ahol ψ a geosztrofikus áramlási függvény. (Más szempontból jut el a geosztrofikus áramláshoz a 10.1. fejezet tárgyalása.) Látszik, hogy ugyanakkora felszíni vagy nyomásbeli különbség erősebb geosztrofikus áramlásokat hoz létre alacsonyabb szélességeken, mint magasabbakon. Ez

a tendencia azonban csak addig figyelhető meg, amíg a (3.1) Rossby-szám egynél jóval kisebb marad.

A tehetetlenségi körmozgás sugara az f-síkon

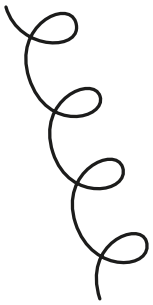
$$r_0 = \frac{v_0}{f_0}, \tag{3.27}$$

növekszik az Egyenlítő felé közeledve. Periódusideje

$$T = \frac{2\pi}{|f_0|} = \frac{\pi}{\Omega_F \sin|\varphi_0|} = \frac{1/2 \text{ nap}}{\sin|\varphi_0|} \tag{3.28}$$

(amely a Foucault-inga körülfordulási idejének a fele az adott szélességen).

Térben és időben közel állandó hidrodinamikai nyomásgradiens esetén az óceáni víztömegek viselkedésében megfigyelhető a tehetetlenségi mozgás, amelynek körfrekvenciája a földrajzi helyre jellemző f_0. A körmozgáshoz természetesen hozzáadódhat egy áramlat egyenletes sebessége, amely spirális előrehaladásra vezet. Erre mutat példát a 3.6. ábra.



3.6. ábra. Tengeri folyadéktömeg mozgása sematikus ábrázolásban a néhányszor 10 km-es skálán közel állandó nyomás esetén, amikor a mozgás egy lassú északnyugatra irányuló áramlás és a tehetetlenségi körmozgás eredője. Közepes szélességeken (3.28)-nak megfelelően egy teljes hurok bejárási ideje kb. 0,7 nap.

A Rossby-sugár az f-sík-közelítésben

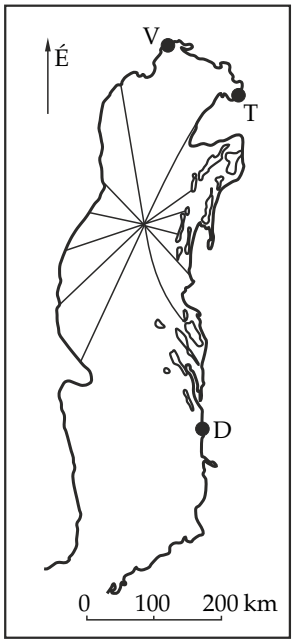
$$\boxed{R = \frac{\sqrt{gH}}{|f_0|}.} \tag{3.29}$$

Értéke az Egyenlítő felé közeledve nő, azaz a szabad felszín hatása egyre kevésbé érvényesül. A közepes szélességeken számolt légköri Rossby-sugár kb. 3000 km, az óceáni kb. 2000 km.

A partok mentén haladó Kelvin-hullámok lecsengési rátáját a (3.29) Rossby-sugár határozza meg. Ott az átlagos vízmélység tipikusan néhányszor 10 m, a Rossby-sugár 100 km körüli, és a hullám haladási sebessége néhányszor 10 m/s.

A Kelvin-hullámok szorosan kapcsolódnak az árapályhullámokhoz. A Hold tömegvonzása által okozott legfontosabb árapályhullám naponta kétszer halad át a Földön, hiszen dagály a Hold felé eső és az azzal ellentétes oldalon is keletkezik. Kontinensek hiányában ez a hullám a szélességi körök mentén vonulna végig az óceánokon. Mivel a kontinensek a haladási irányra lényegében merőlegesen fekszenek, a tényleges árapályhullám, a tengerjárás inkább körkörös jellegű. Ennek megértéséhez célszerű a félnapos periódussal ismétlődő dagályérkezést gerjesztésnek tekinteni az adott medencében. Rossby-sugár nagyságrendű lineáris méretű medencékben a Kelvin-hullám körbefutási ideje éppen fél nap körüli, ahogy a 2.8. fejezetben láttuk. Nem

meglepő, hogy a valódi árapályhullámok mozgását mutató képek (3.7. ábra) hasonlóak a 2.15. ábra sematikus rajzához. A hullámok központi helyek, ún. amfidromikus pont körül haladnak, ahol nem tapasztalható árapály okozta tengerszint-ingadozás. A partok mentén fél napnyi periódusú az árapályhullámzás.



3.7. ábra. Az árapályhullám haladása az Adriai-tenger északi medencéjében. A vonalak a dagály óránkénti helyzetét jelzik, a körüljárás ciklonális (pozitív). A medence érintett tartománya közelítőleg egy 150 km széles, 400 km hosszú téglalap. A 100 m átlagos mélységgel számolt Rossby-sugár kb. 300 km, összemérhető a lineáris mérettel. A V, T és D pontok Velencét, Triesztet és Dubrovnikot jelölik.

A tehetetlenségi gravitációhullámok diszperziós relációja az f-síkon

$$\omega_0^2 = f_0^2 + gHk^2 = f_0^2 \left(1 + (Rk)^2\right). \tag{3.30}$$

A topografikus Rossby-hullámoké pedig

$$\omega_0 = -\frac{f_0\gamma}{H}\frac{k_x}{k^2 + R^{-2}}. \tag{3.31}$$

Ezek a hullámok az Egyenlítő felé közeledve egyre lassabbak, mert f_0 csökken.

3.5. β-sík-közelítés

A β-sík-közelítés az f-sík-közelítés kiterjesztése, amely figyelembe veszi a Coriolis-paraméternek a Föld görbületéből adódó legfontosabb helyfüggő járulékát, és számos új jelenség leírását teszi lehetővé. Míg az f-sík-közelítés csak enyhén módosítja a függőleges tengely körül forgatott folyadékok esetében látott tulajdonságokat, Rossby nevéhez fűződik annak felismerése, hogy a Coriolis-paraméterben fontos figyelembe venni a vezető rendű, lineáris helyfüggést, azaz f-et

úgy írni, mint

$$\boxed{f = f(y) \equiv f_0 + \beta y.} \tag{3.32}$$

Itt $f_0 \equiv f(y_0)$ a Coriolis-paraméter a lokális rendszer origójában, és mivel $y = R_F|\varphi|$,

$$\beta = \frac{df}{dy} = \pm\frac{1}{R_F}\frac{df}{d\varphi}_{|\varphi=\varphi_0} = \pm\frac{2\Omega_F}{R_F}\cos\varphi_0 = \text{állandó}, \tag{3.33}$$

a Coriolis-paraméter y szerinti deriváltja ugyanott. Az északi féltekén a β paraméter pozitív, a délin viszont negatív, az Egyenlítőn áthaladva hirtelen előjelet vált. Ez a közelítés azt jelenti, hogy figyelembe vesszük a Föld görbületét, de nem a koordináta-rendszer meggörbítésével. A 10.6. fejezetben megmutatjuk, hogy kvázi-geosztrofikus folyamatokra ez jogos közelítés.

A lineáris tagnál akkor szabad megállnunk, ha $y/R_F \ll 1$. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált tartomány L lineáris mérete kicsi a Föld sugarához képest, tehát konzisztens a lokális rendszer használatával. Az Egyenlítő közvetlen környezetét kivéve ez azt is jelenti, hogy $\beta L \ll f_0$. Konkrét példaként tekintsük a 45-ös szélességet, ahol $f_0 \approx 10^{-4}$ 1/s, és $\beta = 1{,}6 \cdot 10^{-11}$ 1/(ms). A kiterjedésnek $L = y_{max} = 300$ km-t véve, βL már 5 százaléka f_0-nak.[1] Fontos hangsúlyozni, hogy a sarkok közelében a lineáris közelítés nem jogos, hiszen $\pi/2$-nél a szinuszfüggvény négyzetesen változik. Ugyanakkor azonban az Egyenlítő körül alkalmazható a β-sík-közelítés, amint a 10.5. fejezet tárgyalja.

A β paraméter fontosságának egy lehetséges dimenziótlan mérőszáma a (3.2) mennyiség, amely a szélességi koordinátától a

$$Be = \frac{L}{R_F}\,\mathrm{ctg}\,|\varphi_0| \tag{3.34}$$

módon függ. Megadja, hogy az L lineáris méretben hányszorosa a Coriolis-paraméter változása a lokális rendszer origójában érvényes Coriolis-paraméternek:

$$Be = \frac{\text{a Coriolis-paraméter változása}}{\text{Coriolis-paraméter}}. \tag{3.35}$$

A Be dimenziótlan β paraméter (3.34) alakjából leolvasható, hogy értéke a Föld sugarához képest kis kiterjedésű tartományokban, az Egyenlítőtől távol kicsi: $Be \ll 1$.

A lokális sekélyfolyadék-rendszer a β-sík-közelítésben leírható korábbi egyenleteinkkel, azokban a

$$2\Omega \to f = f(y) \equiv f_0 + \beta y \tag{3.36}$$

helyettesítést elvégezve. Figyelnünk kell azonban arra, hogy az olyan eredmények, amelyekben használtuk Ω állandóságát, nem maradnak érvényben.

A (3.21) sekélyfolyadék-egyenletek dimenziótlan változata a felszíni alakot H egységében mérve:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \pm\frac{1}{Ro}(1 + Bey)\mathbf{u} \times \mathbf{n} - \frac{1}{Fr^2}\,\mathrm{grad}\,\eta, \tag{3.37}$$

ahol a Rossby-számot (3.1), a Froude-számot pedig (2.1) adja, és megjelent a dimenziótlan β-paraméter. Ha a geosztrofikus egyensúly lehetőségét kívánjuk kifejezni, érdemes η-t $|f_0|UL/g$ egységben mérni, amivel $1/Ro$ jelenik meg grad η előtt is.

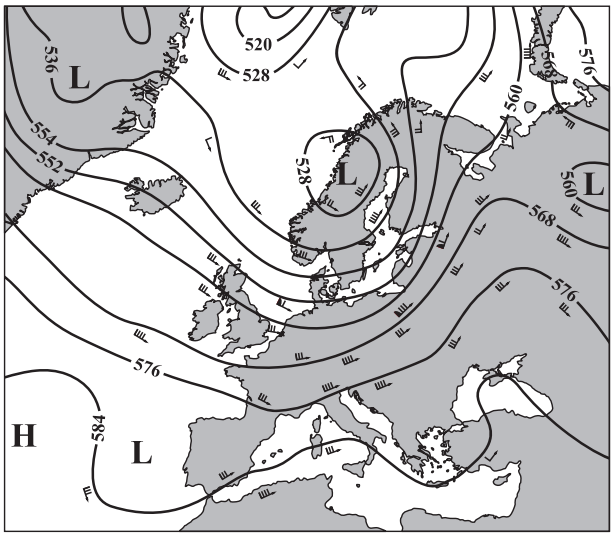
[1] A nagyságrendi feltételt lazán kezelve, a β-sík-közelítés használatát a közepes szélességeken néha kiterjesztik az 1000 km átmérőjű tartományokig.

A felszíni alakkal, illetve a dinamikai nyomással kifejezve a geosztrofikus áramlási sebesség (3.26) általánosításaként:

$$u_g = -\frac{g}{f(y)}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{f(y)\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \qquad v_g = \frac{g}{f(y)}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{f(y)\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}. \tag{3.38}$$

A geosztrofikus sebességvektor merőleges a felszíni alak, illetve a nyomás gradiensére, (2.29) továbbra is érvényben van, vagyis az áramlás a felszíni alak szintvonalai, illetve az izobárok mentén történik. Forgásszimmetrikus kidudorodás vagy behorpadás esetén a sebesség nagysága azonban nem állandó, hanem az Egyenlítő felé eső részeken gyorsabb.

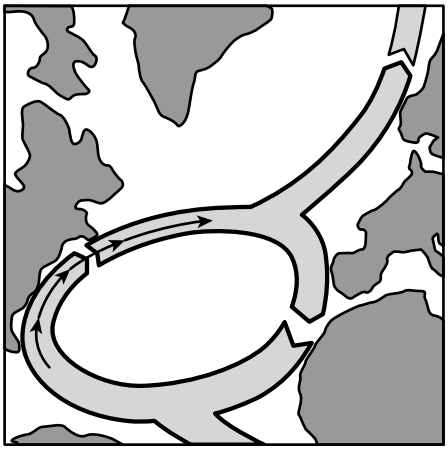
A nagyskálájú légköri és óceáni mozgások a közepes szélességeken jó közelítéssel geosztrofikusak. Jól mutatják ezt a meteorológiai térképek a néhány kilométernél magasabb tartományokban, ahol a viszkozitás hatása elhanyagolható. A meteorológiai térképek szélsebességvektorai valóban az izobárokkal közel párhuzamosan futnak, amint a 3.8. ábra mutatja.



3.8. ábra. Tipikus meteorológiai térkép közepes magasságokban. A folytonos vonalak jó közelítéssel izobárok. A zászlókat alkotó minden egyes hosszabb vonalka 10 csomós (18,5 km/órás) szélsebességet jelent, a rövidebbek fele ekkora sebességet (a kis háromszög 50 csomó). A H és L betűk magas, illetve alacsony nyomású központokra, anticiklonokra, illetve ciklonokra utalnak. A folytonos vonalak pontos jelentése: azokat a helyeket kötik össze, amelyekben az 500 hPa nyomás azonos magasságra esik (átlagos értékük 5,5 km körüli). A rájuk írt számok a $z(p = 500\,\mathrm{hP})$ magasságot jelölik deciméterben kifejezve, azaz a térképet nyomási koordinátában (10.1. fejezet) adják meg. Mivel a nyomásváltozás a vízszintes síkban gyenge, ezek a szintvonalak hasonlóan futnak, mint az azonos magassághoz tartozó izobárok.

A meteorológiában mintegy 150 éve ismert a bárikus széltörvény (melyet C. Buys-Ballot (1817–1890) holland meteorológus írt le először): az északi féltekén a szél irányának vektorától a magasabb nyomás mindig jobbra esik, a déli féltekén pedig fordítva. Ez összhangban van a geosztrofikus szabállyal, de annál többet is jelent: a geosztrofikus áramlástól való eltérés a valódi szelek esetében még a felszínhez közel sem annyira erős, hogy az orientációs viszonyok felborulhatnának.

Az óceáni medencékben mindkét féltekén léteznek hatalmas geosztrofikus körkörös áramlások (angolul gyre), amire a 3.9. ábra ad példát. Az ilyen óceáni körök kialakulásában az uralkodó szeleknek van nagy szerepe, amint a 4.6.2., 11.3. fejezetben tárgyaljuk. Mindegyik medence belsejében egy-két méterrel magasabb az átlagos vízszint, mint a szélén.



3.9. ábra. Az Észak-atlanti kör sematikus ábrája. Ez, mint az össze többi nagy kör is, óceáni anticiklon. A vékony nyilazott vonal a kör Golf-áramlatnak nevezett szakaszára utal.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a potenciális örvényesség megmaradása a (3.21)–(3.22) sekélyfolyadék-egyenletben is érvényes a (3.32) helyfüggő forgatási szögsebesség mellett: a

$$\boxed{q = \frac{\zeta + f(y)}{h} H} \tag{3.39}$$

mennyiség állandó a folyadék súrlódásmentes mozgása során: a (2.25) összefüggés érvényes ezzel a q-val. Új tulajdonság, hogy most már a ζ örvényességnek és az északra történő elmozdulásnak együtt kell változnia a vízmélységgel. Ennek fontos következménye, hogy vízszintes domborzat esetén is kialakulhatnak Rossby-hullámok (3.7. fejezet).

A potenciális örvényesség megmaradása alapján a geosztrofikus áramlás feltétele

$$u_g \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(y)}{h}\right) + v_g \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(y)}{h}\right) = 0, \tag{3.40}$$

a (2.32) feltétel általánosítása a β-síkra. A geosztrofikus áramlás az $(f_0 + \beta y)/h$ mennyiség szintvonalai mentén halad, miközben $\beta|y| \ll |f_0|$. A (3.40) kifejezése azonban csak az áramvonalak jellegét határozza meg, a sebesség a (3.38) alakból következik.[2]

3.6. A Sverdrup-összefüggés

A geosztrofikus áramlás a β-síkon is oszlopos szerkezetű, hiszen a (3.38) sebességkomponensek függetlenek a z koordinátától. Ugyanakkor azonban *nem kétdimenziós* az erős forgatás és sekélység ellenére sem: létrejön egy függőleges w_g sebességű áramlás is. A (3.38) egyenlet szerint

[2] A (3.38) feltétel az η szintvonalai menti áramlást jelez. Az η és az $h/f = (H + \eta - d)/f$ mennyiségek gradienseinek párhuzamossági feltételéből azt kapjuk, hogy $\operatorname{grad}\eta$ arányos a $\operatorname{grad} d + (H/f_0)\operatorname{grad} f$ mennyiséggel (természetesen $\operatorname{grad} f = (0, \beta)$ és β kicsi). A domborzat tehát most is meghatározza a felszíni alak jellegét, ha $\operatorname{grad} d \neq -(H/f_0)\operatorname{grad} f$. Az ellenkező esetben, amikor az aljzat y irányban döntött, és meredeksége $\gamma = -H\beta/f_0$, a felszíni alak tetszőleges lehet.

fennáll ugyanis, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(y)u_g\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f(y)v_g\right)=0, \tag{3.41}$$

melyből a háromdimenziós divergenciamentesség, azaz div $\mathbf{u}_g=-\partial w_g/\partial z$ miatt

$$u_g\frac{\partial f(y)}{\partial x}+v_g\frac{\partial f(y)}{\partial y}=-f(y)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_g=f(y)\frac{\partial w_g}{\partial z}. \tag{3.42}$$

Mivel f nem függ x-től, y szerinti deriváltja viszont β-t adja,

$$\beta v_g=f(y)\frac{\partial w_g}{\partial z}, \tag{3.43}$$

vagy

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}_g=-\frac{\beta v_g}{f(y)}. \tag{3.44}$$

Ez az ún. Sverdrup-összefüggés (H.U. Sverdrup, 1888–1957, norvég oceanográfus, a lassú óceáni mozgások első leírója), amely azt mondja ki, hogy a β-síkon a geosztrofikus egyensúlyban gyenge fel- vagy leáramlások alakulnak ki. A folyadékoszlopok függőleges megnyúlási rátája, $\partial w_g/\partial z$ az észak–déli sebességgel arányos, de független a kelet–nyugatitól. A sekélyfolyadék-tulajdonság szerint nem függ a z koordinátától sem. Leáramlás $w_g<0$ esetén a konstans $\partial w_g/\partial z$ csak negatív lehet, s ezért a síkbeli geosztrofikus sebesség mindig az Egyenlítő felé irányul ($v_g<0$), hiszen $f(y)/\beta$ mindkét féltekén pozitív.

A Sverdrup-összefüggésben szereplő fel-le áramlások gyengék, így (3.43) jó közelítéssel írható mint

$$\boxed{\beta v_g=f_0\frac{\partial w_g}{\partial z}.} \tag{3.45}$$

A $\partial w_g/\partial z$ megnyúlási ráta nagyságrendje U/L (ugyanakkora mint div $\mathbf{u}_g$-é), így (3.45) dimenziótlan kifejezése

$$\frac{\partial w_g}{\partial z}=Bev_g, \tag{3.46}$$

ahol Be a (3.2) dimenziótlan β paraméter. Mivel a β-sík-közelítés érvényességi feltétele $Be\ll 1$, a dimenziótlan megnyúlási ráta sokkal kisebb a geosztrofikus sebességnél.

3.7. Planetáris Rossby-hullám

Konstans H folyadékmélység és elhanyagolható felszíni hullámzás esetén a (3.39) potenciális örvényesség

$$q=f_0+\zeta+\beta y, \tag{3.47}$$

azaz ugyanolyan alakú kifejezés, mint az y irányban enyhén döntött aljú forgatott edénybeli (2.35) sorfejtett alakja. Ez azt mutatja, hogy Rossby-hullámok konstans mélység mellett is kialakulhatnak *kizárólag* a β paraméter következtében. Mivel a légköri Rossby-hullámok hullámhossza sokszor összemérhető a Föld sugarával, azaz néhány hullámhosszal körbefogják a Földet, *planetáris* hullámoknak is nevezik őket. Az egyszerű szóhasználat kedvéért a nagyskálájú

óceáni Rossby-hullámot is planetárisnak nevezzük. A (3.47) és (2.35) kifejezések összehasonlításából látszik, hogy tulajdonságaik leképezhetők a döntött aljzatú forgatott edénybeliekre a

$$\frac{2\Omega\gamma}{H} \leftrightarrow \beta \tag{3.48}$$

megfeleltetéssel. A 2.11. ábrának megfelelő döntött aljzatú kísérletben a sekélyebb vízréteg felé való elmozdulás a potenciális örvényesség növekedésével jár, éppúgy mint a Földön az Északi-sark felé történő elmozdulás állandó folyadékmélység mellett. A (3.48) reláció kifejezi a topografikus és a planetáris Rossby-hullámok hasonlóságát: a 2.7. ábra továbbra is érvényes: a planetáris hullámzás is a vízszintes síkban történik.

Ha a β paraméterrel lejtős aljzat párosul, amely a sarok felé γ meredekséggel emelkedik, akkor a potenciális örvényesség

$$\frac{\zeta + f_0 + \beta y}{H - \gamma y} H \approx (f_0 + \zeta + \beta y)\left(1 + \frac{\gamma}{H} y\right) \approx f_0 + \zeta + \left(\beta + f_0 \frac{\gamma}{H}\right) y. \tag{3.49}$$

Ilyen esetben a dimenziótlan β paraméter általános alakja:

$$\boxed{Be = \beta \frac{L}{f_0} + \gamma \frac{L}{H}.} \tag{3.50}$$

Az áramlás jellege tehát független attól, hogy kizárólag lejtős aljzat vagy β paraméter, vagy mindkettő jelenlétében alakul ki. Mivel a Földön nem található hosszú, egyenletesen emelkedő felszíni domborzat, a valóságos nagyskálájú légköri vagy óceáni áramlásokban γ elhanyagolható.[3] (A 2.5.2. fejezet óceáni példájában a domborzati döntöttség mindössze 100 km-es kiterjedésre vonatkozott.)

A planetáris hullámok ($d \approx$ állandó) a leghosszabb és egyben leglassúbb környezeti hullámok. Diszperziós relációjuk

$$\boxed{\omega_0(k_x, k_y) = -\beta \frac{k_x}{k^2 + R^{-2}} = \mp \frac{2\Omega_F}{R_F} \cos\phi_0 \frac{k_x}{k^2 + R^{-2}},} \tag{3.51}$$

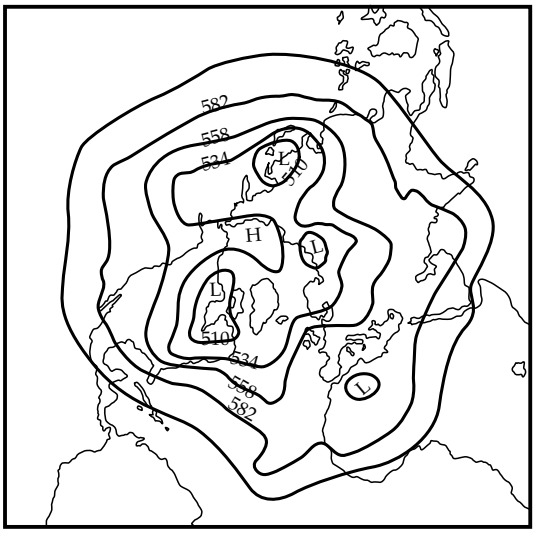
ahol R a (3.29) Rossby-sugár. Az első egyenlőségből látszik, hogy az $1/L$ egységekben mért hullámszámmal az $|\omega_0/f_0|$ Rossby-szám a (3.2) paraméterrel arányos, a hullámzás tehát lassú, kvázi-geosztrofikus mozgás. A hullámok x irányú sebessége

$$c_x = -\beta \frac{1}{k^2 + R^{-2}}. \tag{3.52}$$

Mivel $c_x/\beta < 0$, a planetáris hullámok *álló* közegben *mindkét féltekén nyugatra* haladnak (a déli félgömbön a nyugatra haladás növekvő x értékeknek felel meg, de ott β is negatív). Ezt a nyugatra sodródást tükrözi az anyagi pont 3.2. fejezetben látott spirálozó szabad mozgása a közepes szélességeken.

Planetáris hullámok szinte minden meteorológiai térképen megfigyelhetők, mint a ciklonok és anticiklonok között kanyargó áramlások (3.10. ábra), alapvetően ezek határozzák meg az időjárás alakulását. Ezek természetesen általában nem szinuszfüggvénnyel megadható hullámok, hanem nemlineáris változatok, amelyek nagy kiterjedésük miatt esetleg már a β-sík-közelítés érvényességi körén is kívül esnek.

[3] Laboratóriumi kísérletekben viszont csak a $\gamma L/H$ topográfiai paraméter lehet jelen, és azt tekintjük a dimenziótlan β paraméter megfelelőjének.



3.10. ábra. Planetáris hullám tipikus rajzolata szintvonalakban közepes magasságokban. A hullám jelenléte a sarkot körülölelő szintvonalak jelenlétében és azok meanderező jellegében mutatkozik meg.

A $k_x = 1/(1000\,\mathrm{km})$ hullámszámú planetáris hullám sebessége a 45 fokos szélességi körön, ahol $\beta \approx 1{,}6 \cdot 10^{-11}\ 1/(\mathrm{s\,m})$, $|c_x| = 16\ \mathrm{m/s} \approx 58\ \mathrm{km/h}$. Periódusideje kb. 5 nap. Mivel a hullámszám négyzete kb. tízszer nagyobb a légköri R^{-2}-nél, a becslésben a Rossby-sugarat el lehet hanyagolni. A szélességi kör kerülete mintegy 28 000 km, a kört a hullám kb. 20 nap alatt kerüli meg súrlódásmentes esetben.

Szélességi kör mentén mozgó ($k_y = 0$) planetáris hullámok érdekes tulajdonsága, hogy az Egyenlítő felé közeledve c_x sebességük nő, de éppen olyan mértékben, mint a középvonalukhoz tartozó szélességi kör kerülete. Az adott k_x hullámszámú planetáris hullámok a Földet *azonos* idő alatt kerülik meg. Ez az idő a (3.33) összefüggés felhasználásával

$$T = \frac{2\pi R_F \cos\varphi_0}{|c_x|} = \frac{\pi}{\Omega_F}\left[(R_F k_x)^2 + (R_F/R)^2\right], \tag{3.53}$$

gyakorlatilag független a φ_0 szélességtől (csak R-en keresztül jelenik meg benne φ_0, de közepes szélességeken ez gyenge függés). A szinkronban maradási tulajdonság a planetáris hullámok jelenségének erőteljességét mutatja, és az ilyen hullámok gyakori előfordulását biztosítja.

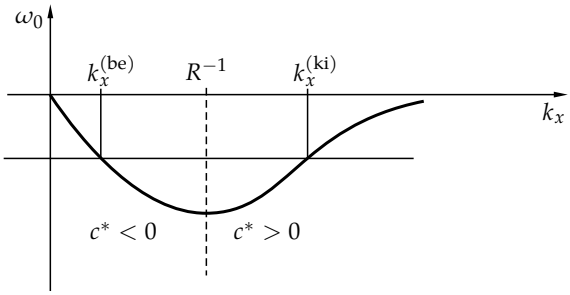
Az ilyen planetáris hullám csoportsebessége is szélességi körrel párhuzamos, nagysága

$$c^* = \frac{\partial\omega_0}{\partial k_x} = \beta\frac{k_x^2 - R^{-2}}{\left(k_x^2 + R^{-2}\right)^2}. \tag{3.54}$$

Innét látszik, hogy a Rossby-sugár reciprokánál nagyobb hullámszámú planetáris hullámok energiája keletre halad, míg a kisebb hullámszámúaké nyugatra.

Ennek fontos következménye, hogy egy peremen visszaverődő hullám hosszának meg kell változnia, amely főleg óceáni összefüggésben lényeges. Másként ugyanis nem változhatna meg csoportsebességének előjele (hiszen frekvenciája nem változhat). Az észak–déli partvonalra beeső és visszavert hullám $k_x^{(be)}$, illetve $k_x^{(ki)}$ hullámszámai tehát kielégítik az $\omega_0\left(k_x^{(be)}\right) = \omega_0\left(k_x^{(ki)}\right)$ feltételt. Ellenkező előjelű csoportsebesség csak akkor tartozhat hozzájuk, ha R^{-1}-től való eltérésük is ellenkező előjelű (3.11. ábra). Egy nyugati óceáni peremre energiát hozó

planetáris hullám hosszú hullám, amelyre $k_x^{(be)} < R^{-1}$, a visszaverődés után rövid hullámhosszúvá válik: $k_x^{(ki)} > R^{-1}$. Az élesen eltérő frekvenciák miatt Rossby-hullám nem alakulhat át Poincaré-hullámba, az azonban megtörténhet, hogy a nyugati peremvidékre érkező Rossby-hullám nem Rossby-hullámként verődik vissza, hanem kis frekvenciájú (nagy hullámhosszú) Kelvin-hullámot kelt az eredeti irányra merőlegesen, az y irányú partvonal mentén.



3.11. ábra. Planetáris hullámok diszperziós relációjából leolvasható, hogy észak–déli partvonulattal ütközve a beeső és visszavert hullám csoportsebessége csak úgy lehet ellenkező előjelű, ha a bejövő és kimenő hullámszámok az R^{-1} Rossby-hullámszámot közrefogják.

3.8. Az általános légkörzés zonális áramlásai

A Föld gömbalakjának következménye a kialakuló általános légkörzés is, amelyben szélességi körök menti, ún. *zonális áramlások* figyelhetők meg a Föld felszínéhez közel.

A légkör mozgását *a Napból érkező energia hajtja*. A hősugárzás következtében az Egyenlítő környékén a felmelegített levegő felemelkedik, a magasban (jóval a 10 km-es szint felett) a sarkok felé fordul, helyére pedig a felszínen hűvösebb levegő érkezik. Ha a Föld a valóságosnál sokkal lassabban forogna tengelye körül, akkor a magas légköri áramlás csak a sarkoknál kényszerülne leszállásra. Ilyen egycellás légkörzés figyelhető meg a Vénusz légkörében. A Föld sokkal gyorsabb forgása a helyzetet bonyolultabbá teszi.

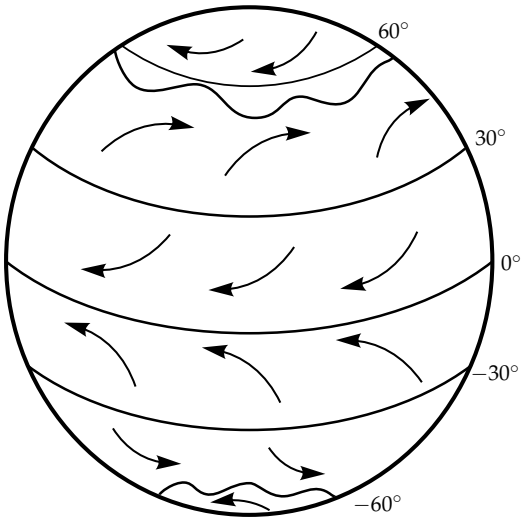
Az egyenlítői levegő, többek között a mérsékelt égövi Rossby-hullámok és ciklonok, anticiklonok miatt, a magasban csak kb. a 30-as szélességekig jut, ahol leszáll. Ez okozza a Bak- és Ráktérítő körüli száraz éghajlatot és az óceáni szélcsendes öveket. A leszálló levegő egy része innét a felszínen az Egyenlítő felé fordul, amit a Coriolis-erő az északi féltekén jobbra, a délin balra térít el. Mindkét hatás arra vezet, hogy a passzát övezetben *keleti*, azaz keletről fújó, zonális szelek uralkodnak.

A 30-as szélességeken leszálló levegő másik része a felszínen a sarkok felé áramlik. Rá ellenkező előjelű a Coriolis-hatás, és így a mérsékelt éghajlati övben a *nyugati* zonális szelek a jellemzők (3.12. ábra), természetesen hosszú idejű, pl. éves átlagokban.

A mérsékelt égövi levegő a 40–60-as szélességek fölött találkozik a sarkok felől a felszínen az Egyenlítő felé áramló hideg levegővel. A két tartományt elválasztó felület az ún. *poláris front*. Alakja, bármelyik magassági szinten nézzük is, időben változó, hullámzó, meanderező, s ez jelenik meg a felszíni frontvonal alakjában is (3.12. ábra).

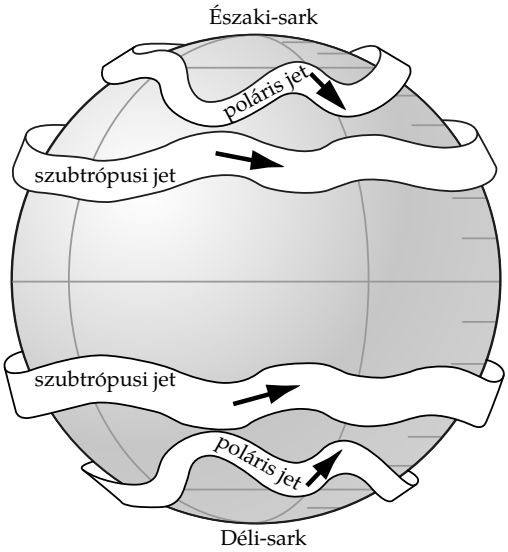
A sarki övezetben leszálló áramlások uralkodnak. Az Egyenlítő felé haladó mozgás a Coriolis-eltérülés miatt a felszínen ismét *keleti* szelek megjelenésére vezet. Az általános légkörzés tehát a Földet három különböző övezetre bontja (3.12. ábra), amelyekben eltérő irányúak a felszínközeli zonális áramlások.

A három övezet jól megkülönböztethető a magaslégkörben is. Röviden említjük, hogy az Egyenlítő menti és a mérséklet égövi zóna felső határán ún. *jetstreamek* vagy *jetek* jelennek meg



3.12. ábra. A Föld felszínén uralkodó zonális szelek sematikus rajza

(3.13. ábra). Közülük a ±60-as szélességi kör mentén kb. 10–12 km magasságban kialakuló orkáncsatorna a *poláris jet*, a ±30-as szélességi kör mentén pedig a *szubtrópusi jet*. Keresztmetszetük átlagos szélessége néhány száz km, függőleges kiterjedésük kisebb. Bennük mindkét féltekén nyugati szelek fújnak, és a szélsebesség elérheti a 200 km/h-t is. A keletre utazó repülőgépek a poláris jetben „hátszelezve" csökkentik az utazási időt akár több órával is. A jetek igen nagy amplitúdójú meanderező mozgást végeznek, így északi változatuk gyakran lenyúlik Magyarország területe fölé is. A térbeli szerkezet részletesebb leírását a 6.12. fejezet adja.



3.13. ábra. A földi magaslégkörben futó jetek sematikus képe

3.9. Rossby-hullám zonális áramlásban

Tekintsünk kis amplitúdójú planetáris hullámokat az $u_0 = U$, $v_0 = 0$ homogén zonális háttéráramlásban. Az északi félgömbön $U > 0$, a délin $U < 0$ felel meg egy nyugatról keletre irányuló folyamnak (nyugati szélnek). Az egyszerűség kedvéért hanyagoljuk el a szabad felszín hatását, amikor R nem jelenik meg a (3.51) diszperziós relációban, és tételezzünk fel vízszintes domborzatot. Mivel a háttéráramlás sebessége egyszerűen hozzáadódik az ismert fázissebességhez, az x irányú terjedési sebesség

$$c_x = U - \frac{\beta}{k^2}. \tag{3.55}$$

A Rossby-hullám a háttéráramláshoz képest mindig nyugatra mozog. (3.55) következménye, hogy a Földön álló megfigyelő számára c_x előjelet vált, ha a két sebesség kiejti egymást, és ezért $c_x = 0$. Ekkor a Rossby-hullámra jellemző vízszintes síkbeli áramlás nem függ az időtől. Nyugatról keletre történő zonális áramlásban, ahol $U/\beta > 0$ mindkét féltekén, a stacionaritás feltétele az, hogy a hullámszám a

$$k_c = \sqrt{\beta/U} \tag{3.56}$$

kritikus értéket vegye fel. A megfelelő kritikus hullámhossz, amelyet *meanderezési hossznak* is neveznek

$$\boxed{\lambda_c = 2\pi\sqrt{\frac{U}{\beta}}.} \tag{3.57}$$

A légkörben értékét $U = 10$ m/s-mal és $\beta = 10^{-11}1/(\text{m s})$-mal becsülve, $k_c = 1/(1000\text{ km})$, $\lambda_c = 6280$ km. Az óceánra jellemző kritikus hullámhossz 3–10-szer rövidebb.

Az $U > \beta/k_x^2$ sebességű nyugati szélben a $\lambda = 2\pi/k_x$ hullámhosszú planetáris hullámok keletre mozognak, és a meteorológiai megfigyelés szerint a mérsékelt égövben ez a planetáris hullámok gyakori megjelenési formája.

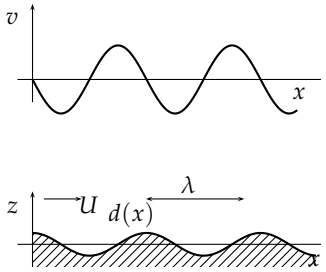
Keletről jövő áramlásokban $U/\beta < 0$, és ezért azokban vízszintes felszín felett stacionárius hullám *nem* létezhet. Ez is jelzi, hogy a β-síkon jelentős aszimmetria áll fenn: a nyugat–keleti zonális áramlások hajlamosak a meanderezésre, és tipikus hullámhosszuk (3.57), a nyugat–keleti áramlások viszont nem. Zonális áramlás és általános domborzati elemek kölcsönhatásáról a 10.2. fejezetben lesz szó.

3.10. Hegységrendszer által gerjesztett Rossby-hullám

3.10.1. Szemléletes kép

Vizsgáljuk meg, milyen stacionárius Rossby-hullámokat kelt zonális áramlásban egy kelet–nyugati irányban kiterjedt hegységrendszer, amelynek átlagos hullámhossza λ (3.14. ábra).

A hegységrendszer rákényszeríti a hullámra saját periodicitását, tehát a gerjesztett hullám $k_x = 2\pi/\lambda$ hullámszámú lesz. A domborzathoz képest nem mozgó hullám akkor alakul ki, ha $c_x = 0$, ha a hegységrendszer hullámhossza éppen a (3.57) kritikus hullámhossz, $\lambda = \lambda_c$. Nyugatról érkező zonális áramlásból az ilyen hullám igen nagy energiát nyerhet: rezonancia-szerű jelenség alakul ki. A rezonancia annak következménye, hogy a λ_c hullámhosszú stacionárius meanderezés a domborzat jelenléte nélkül is kialakul stacionárius Rossby-hullámban (3.9. fejezet). Ez a mozgásforma tetszőlegesen nagy energiát képes felvenni az ugyanolyan hullámhosszú gerjesztésből.



3.14. ábra. Zonális áramlás és periodikus domborzat kapcsolata kvázi-geosztrofikus közelítésben. Az áramlás a hegységrendszer (alsó kép) felett stacionárius Rossby-hullámot kelt a vízszintes síkban. A felső kép a v sebesség helyfüggését mutatja a $k > k_c$ ($\lambda < \lambda_c$) esetben.

A keletről jövő áramlások is létrehoznak stacionárius Rossby-hullámokat hegységrendszer fölött. Ezek azonban sohasem lehetnek rezonanciához közel, hiszen $U/\beta < 0$, kritikus hullámhossz nem létezik.

3.10.2. Lineáris vizsgálat

Egyszerű választásként tekintsük a

$$d(x) = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \tag{3.58}$$

domborzatot, amely egy $\lambda = 2\pi/k_x$ kelet–nyugati hullámhosszú, $A \ll H$ amplitúdójú szinuszfüggvénnyel leírt hegységrendszert jelöl.

A potenciális örvényesség, ha a szabad felszín mozgása elhanyagolható ($\eta = 0$, merevlap-közelítés),

$$q = \frac{f_0 + \zeta + \beta y}{1 - d(x)/H} \approx f_0 + \zeta + \beta y + f_0 \frac{d(x)}{H}, \tag{3.59}$$

ahol az átalakításban felhasználtuk, hogy a kvázi-geosztrofikus tartományban vagyunk, hiszen a $(\zeta + \beta y)d/H$ másodrendűen kis tagot elhanyagoltuk.

Lineáris hullámokat keresünk az $u_0 = U, v_0 = 0$ zonális háttéráramlásban. Jelölje a háttéráramlástól való eltérést az $\mathbf{u}'$ vektor ($|u'|, |v'| \ll |U|$), amelyhez a ψ' áramlási függvény tartozik. A teljes áramlási függvény ekkor $\psi = -Uy + \psi'$. A (3.39) potenciális örvényesség (2.25) megmaradásának felírásakor használjuk, hogy $u = U + u'$, $v = v'$. Figyelembe véve, hogy $v\partial(\beta y)/\partial y = \beta v$, és hogy $u'\partial\zeta/\partial x$ és $v'\partial\zeta/\partial y$ két kis mennyiség szorzata, és ezért elhanyagolható:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -\frac{Uf_0}{H}\frac{d}{dx}d(x). \tag{3.60}$$

Az örvényesség kifejezhető az áramlási függvénnyel: $\zeta = \Delta\psi$, de mivel a homogén háttéráramlás örvénymentes, fennáll, hogy $\Delta\psi = \Delta\psi'$. Így a megmaradási törvény egyenletet jelent

az eltérést leíró ψ' áramlási függvényre:[4]

$$\frac{\partial \Delta\psi'}{\partial t} + U\frac{\partial \Delta\psi'}{\partial x} + \beta\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -\frac{Uf_0}{H}\frac{d}{dx}d(x). \tag{3.61}$$

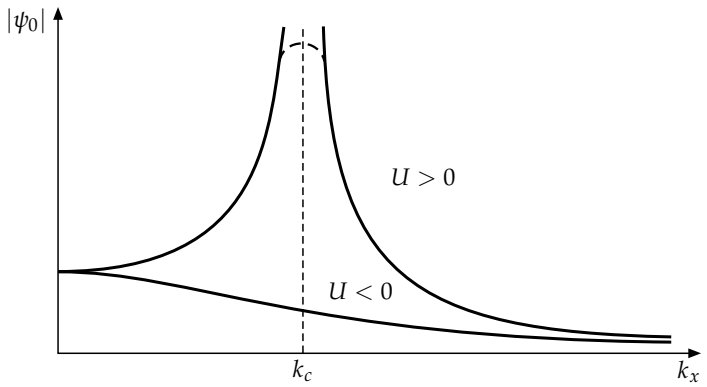
A stacionárius áramlás feltétele a (3.58) domborzati függvény behelyettesítése után[5]

$$U\frac{d^3\psi'}{dx^3} + \beta\frac{d\psi'}{dx} = \frac{A}{H}Uf_0k_x\sin(k_xx). \tag{3.62}$$

A megoldást a $\psi'(x) = \psi_0\cos k_xx$ alakban keresve, ahol k a hegyvonulat hullámszáma, azt kapjuk, hogy

$$\psi_0 = \frac{f_0A\,U/H}{Uk_x^2 - \beta} = \frac{f_0A/H}{k_x^2 - k_c^2}. \tag{3.63}$$

A jobb oldali egyenlőség nyugati szél ($U/\beta > 0$) esetén érvényes, amikor létezik a (3.56) kritikus hullámszán. A hullám amplitúdója nyugati szélben annál nagyobb, minél közelebb van a hegységrendszer hullámszáma a kritikus értékhez, 3.15. ábra. A $k_x \to k_c$ esetben *rezonancia* lép fel, a hullámamplitúdó formálisan végtelenné válik.[6] A szaggatott vonallal jelölt legömbölyödés a viszkozitás következménye, amelyet a 11.4. fejezetben tárgyalunk.



3.15. ábra. Hegységrendszer felett kialakuló stacionárius Rossby-hullám ψ_0 amplitúdója U sebességű háttéráramlásban a domborzat k_x hullámszámának függvényében az északi féltekén

A vízszintes síkbeli észak–déli sebesség a $v = d\psi/dx$ kapcsolat alapján $v(x) = -\psi_0k_x\sin k_xx$, (amihez $u(x) = U$ tartozik), ahol (3.63) szerint ψ_0 pozitív, ha $k_x > k_c$. A sebesség a hegycsúcsok és völgyek ($k_xx = n\pi$) helyén nulla, maximális Egyenlítő felé mutató értékét $k_x > k_c$-re negyed hullámhosszal a csúcsoktól jobbra veszi fel (3.14. ábra). Hosszú hullámok ($k_x < k_c$) esetében fordított a helyzet, a sebességtér és a domborzat kapcsolata ellentétes előjelű. Ilyen hosszú, több mint 6000 km periodicitású, szinuszos ismétlődésű hegységrendszerek a Földön nem léteznek, de hegységrendszerek egymásutánja közelíthető ilyen nagy hullámhosszú vonulatként.

A légmozgás a rezonanciától távol is jelentős. Rövid hullámhossz esetén, amikor $k_x \gg k_c$, $v(x) = -(A/H)(f_0/k_x)\sin k_xx$. A $k_x = 1/(100\text{ km})$ ($\lambda = 628$ km) periodicitású, a völgyek fölötti 2000 méteres csúcsokkal rendelkező hegységrendszerben, amelyhez a $H = 10$ km vastagságú troposzférában $A/H = 0{,}1$ tartozik, a sebesség maximális értéke $v_{max} = (A/H)f_0/k_x = 1$ m/s.

[4] Ez a (3.65) kvázi-geosztrofikus egyenlet speciális esete.

[5] Ez az egyenlet a $d\psi'/dx \to x$, $x \to t$, $\beta/U \to \omega^2$ megfeleltetéssel (ahol x az ω sajátfrekvenciájú oszcillátor kitérése és t a mozgás ideje), ekvivalenssé válik az $(A/H)f_0k_x\sin(k_xt)$ gyorsulással gerjesztett súrlódásmentes harmonikus oszcillátor egyenletével.

[6] Természetesen ekkor már a lineáris közelítés nem jogos.

A mérsékelt övi időjárás szempontjából legfontosabb légköri Rossby-hullámot gerjesztő hegységrendszerek a Sziklás-hegység, a Himalája, illetve az Andok és a Kelet-Afrikai-hegység. Tipikus kelet–nyugati hullámhosszaik 500–1000 km ($k_x \approx 1/(80\,\mathrm{km}) - 1/(160\,\mathrm{km})$). Ezek nem esnek a 6000 km nagyságrendű λ_c rezonancia-hullámhossz közelébe (igazi rezonanciáról tehát nincs szó), de a hosszabbaknál érvényesül az amplitúdók erősödése.

3.11. Kvázi-geosztrofikus egyenlet a β-síkon

A felszíni és domborzati η, illetve d alakok kicsinységét feltételezve, a potenciális örvényesség

$$q = \frac{f+\zeta}{H(1+\eta/H-d/H)}H \approx \left(f_0+\zeta+\beta y-\frac{f_0\eta}{H}+\frac{f_0 d}{H}\right). \tag{3.64}$$

Mivel a felszíni alak vezető rendben arányos az áramlási függvénnyel, (3.26) szerint $\psi = \eta g/f_0$, a megmaradási törvény a fenti q-ra, amelyben a konstans f_0-tól eltekintve minden tag kicsi, a

$$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\Delta\psi - R^{-2}\psi + f_0\frac{d}{H}\right)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0} \tag{3.65}$$

alakot ölti. Ez a β-síkon érvényes kvázi-geosztrofikus egyenlet, a (2.52) alak általánosítása. A (3.51) diszperziós relációjú planetáris Rossby-hullám a fenti kvázi-geosztrofikus egyenlet vízszintes aljzathoz ($d=0$) tartozó változatának harmonikus síkhullám alakú (de nem feltétlenül kis amplitúdójú) megoldása.

A kvázi-geosztrofikus közelítés érvényességi köre a dimenziótlanított alak felírásából olvasható le. A potenciális örvényesség U/L egységekben

$$q = \left(\frac{1}{Ro}\left(1-\frac{\eta}{H}+\frac{d}{H}\right)+\zeta+\frac{\beta L^2}{U}y\right) \tag{3.66}$$

alakú. A két utolsó tag akkor összemérhető, ha a $\beta L^2/U = Be/Ro$ dimenziótlan szám is egységnyi, ahol Be a (3.2) dimenziótlan β paraméter. A (3.34) összefüggés alapján ez azt jelenti, hogy

$$\frac{L}{R_F} \sim Ro, \tag{3.67}$$

azaz a vizsgált tartomány lineáris méretének a Föld-sugár Rossby-számszorosa nagyságrendjébe kell esnie. $Ro \approx 0{,}1$ mellett így is több száz km-es tartományok vizsgálhatók. Ahhoz, hogy a többi változó is azonos rendű legyen, (3.66)-ban teljesülnie kell annak is, hogy $d \sim Ro \cdot H$, amint azt már a 2.6. fejezetben láttuk.[7]

A dimenziótlan kvázi-geosztrofikus egyenlet így

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\Delta\psi-\left(\frac{Fr}{Ro}\right)^2\psi+\frac{d}{Ro}\right)+\frac{Be}{Ro}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{3.68}$$

Ha a domborzat döntöttsége lineáris, $d=\gamma y$ (dimenziótlan alakban $d=\gamma L/Hy$), a d-vel arányos tag beleolvad az utolsó tagba, és abban Be az egyesített (3.50) dimenziótlan β paramétert jelenti.

[7] (3.66)-ból az is következik, hogy η/d nagyságrendje Ro, de η geosztrofikus egysége $|f_0|UL/g$, s az így dimenziótlanított felszíni alak $\eta Fr^2/Ro$, és ez megegyezik az UL egységben mért ψ-vel. Ennek az η-nak $(Ro/Fr)^2$ rendűnek lell lennie.

4. fejezet

A viszkozitás hatása

Súrlódó sekély folyadékban a viszkózus erőnek a Coriolis-erőhöz való viszonyát az

$$\boxed{Ek = \frac{\nu}{|2\Omega|H^2} = \frac{\nu}{|f_0|H^2}} \tag{4.1}$$

Ekman-szám méri, ahol ν a kinematikai viszkozitás, és a jobb oldali alak az f-síkon érvényes. V. W. Ekman (1874–1954) svéd oceanográfus, a forgatott folyadékbeli viszkozitás hatásának első leírója. Az Ekman-szám független a sebességtől, és két áramlás akkor lehet dinamikailag hasonló, ha Ekman-számuk is megegyezik. A ν kinematikai viszkozitás helyett környezeti áramlásokban a jóval nagyobb ν_{turb} turbulens viszkozitás használandó, de az Ekman-szám még ezzel is kicsinek, $10^{-3} - 10^{-5}$ körülinek adódik. A viszkozitás a folyadék nagy részében elhanyagolható. A peremek körül azonban mindig létezik egy keskeny határréteg, ahol a súrlódás lényeges szerepet játszik. A csak forgatott rendszerben kialakuló Ekman-réteg állandó vastagságú, szemben a hagyományos hidrodinamikában előfordulóval, amely az áramlás irányában általában egyre vastagabbá válik.

Erősen viszkózus közegben (mint pl. a földköpenyben) a határréteg formálisan kiterjed a közeg teljes vastagságára. Ilyen esetekben az Ekman-szám az *egyedüli* paraméter, amely a forgatás fontosságát jelzi, és kis értéke utal a jelentős Coriolis-hatásra.

Természetes közegeinkben a felső határfelület mentén is kialakul egy-egy keskeny határréteg. A felső határréteg felszínén rendszerint nem fal helyezkedik el, hanem ott egy külső közeg által keltett **ø** nyírási feszültség hat. A *szélnyírás* tipikus erőssége a vizek felszínén néhány tized $\mathrm{N/m^2}$. A szél megmozgatja a felszín közeli víztömegeket, de a Coriolis-hatás miatt nem feltétlenül a szél irányában. A szélnyírásnak alapvető hatása van az óceáni áramlatok kialakításában.

A nyírás erősségének dimenziótlan mérőszáma a nyírásmentes esetben U jellegzetes vízszintes sebességű áramlásban az

$$\boxed{Sh \equiv \frac{\tau_0}{|f_0|\varrho_0 UH}} \tag{4.2}$$

nyírási paraméter, ahol τ_0 a nyírás dimenziós átlagerőssége, ϱ_0 pedig a közeg sűrűsége. Az Sh paraméter (melynek jelölésére az angol shear szó első két betűjét választottuk) tipikus értéke 10^{-2} körüli.

4.1. Az Ekman-számról részletesebben

A viszkózus gyorsulás tetszőleges összenyomhatatlan folyadékban az (1.28) Navier–Stokes-egyenlet szerint

$$\nu\Delta\mathbf{v} \equiv \nu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}, \tag{4.3}$$

ahol ν a kinematikai viszkozitás. Az x és y szerinti deriváltak az L lineáris méret reciprokával arányosak, a z szerinti pedig a H mélység reciprokával. Ezért az első két tag $\varepsilon^2 \equiv (H/L)^2$-szerese a harmadiknak, és sekély közegben elhanyagolható. Így sekély folyadékban

$$\nu\Delta\mathbf{v} \approx \nu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}. \tag{4.4}$$

A forgó Föld felszínén a 3.5. ábra szerint elhelyezkedő sekély forgatott folyadékban az $\mathbf{u}$ vízszintes síkbeli sebesség Navier–Stokes-egyenlete[1] ezért

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f\mathbf{u}\times\mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad} p' + \nu\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2}, \tag{4.5}$$

ahol $\mathbf{n}$ a függőleges z irányú egységvektor.[2] A viszkozitás miatt $\mathbf{u}$ függhet a magasságtól, ezért d/dt a háromdimenziós a teljes derivált. A w függőleges sebességkomponens a

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4.6}$$

divergenciamentességi feltételből kapható.

Érdemes felírni a dimenziótlan alakot is. Az áttekinthetőség kedvéért f helyfüggését elhanyagolva, a $z \to Hz$ és (1.35) helyettesítéssel a

$$Ro\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \pm\mathbf{u}\times\mathbf{n} - \operatorname{grad} p' + Ek\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2} \tag{4.7}$$

dimenziótlan egyenlethez jutunk, amelyben megjelenik a (4.1) Ekman-szám.

Ez a dimenziótlan szám a viszkozitás és a forgatás egymáshoz viszonyított erősségét méri: mivel a viszkózus $\nu\Delta\mathbf{v}$ gyorsulás nagyságrendje $\nu U/H^2$, és az ennek megfelelő relaxációs idő $t_\nu = H^2/\nu$, (1.2)-t használva azt is írhatjuk, hogy

$$Ek = \frac{\text{viszkózus gyorsulás}}{\text{Coriolis-gyorsulás}} = \frac{\text{forgási idő}}{\text{viszkózus relaxációs idő}}. \tag{4.8}$$

Gyorsan forgatott rendszerben az Ekman-szám sokkal kisebb, mint 1.

Tipikus vízzel végzett laboratóriumi kísérletben ($\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$) percenkénti 5 körülfordulással $2\Omega \approx 1\ 1/s$ és 10–30 cm-es vízmélységgel számolva $Ek = \nu/(2\Omega H^2) = 10^{-4} - 10^{-5}$.

A természetes közegek határrétegeiben a környezeti áramlások rendszerint *turbulensek*, és kis távolságokon nagymértékű térbeli és időbeli rendezetlenséget mutatnak. A turbulens mozgás jelentősen megnöveli a nagyobb távolságokon érzékelhető effektív viszkozitás mértékét, amely egy ν_{turb} turbulens viszkozitási (eddy viscosity) együttható megjelenéséhez vezet. Ezért

[1] Az f Coriolis-paraméter tartalmazza a β-sík-közelítésben megengedett lineáris y-függést. A laboratóriumi kísérletekre vonatkozó eredmények az $f \to 2\Omega =$ konstans helyettesítéssel kaphatók.

[2] Mivel függőleges irányban a sekélység miatt hidrosztatikai viszonyok érvényesülnek, a p' dinamikai nyomás kapcsolatban áll a szabad felszín η alakjával: $p' = \varrho_0 g\eta$.

az Ekman-számban és minden más kifejezésben, ahol a kinematikai viszkozitás szerepel, el kell végezni a

$$\nu \to \nu_{turb} \tag{4.9}$$

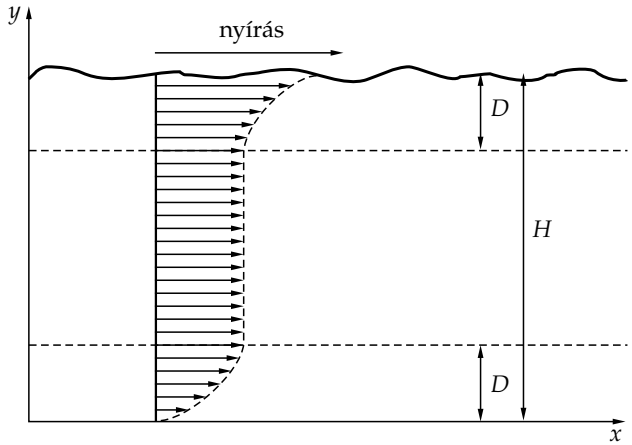
helyettesítést. Annak ellenére, hogy a turbulens viszkozitási együttható számértéke rendszerint függ az áramlás jellegétől és a peremtől mért távolságtól is, jó tájékozódásul szolgál átlagos értéke. Ez levegőben $\nu_{turb} = 5\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ és vízben $\nu_{turb} = 10^{-2}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, azaz mintegy százezerszer, illetve tízezerszer nagyobbak molekuláris értékeiknél. Általában is igaz, hogy a turbulencia felerősíti a transzportfolyamatokat, és a turbulens transzportegyütthatók jóval nagyobbak a molekuláris együtthatóknál (7.2. fejezet).

A ν_{turb} mennyiséggel számolt $Ek = \nu_{turb}/\left(|f_0|H^2\right)$ Ekman-szám közepes szélességeken ($f_0 = 10^{-4}\ 1/\mathrm{s}$) a 10 km vastagságú légrétegre $Ek = 5 \cdot 10^{-4}$, a 4 km átlagos mélységű óceánra pedig $Ek = 6 \cdot 10^{-6}$. Ez éppen az a nagyságrend, ami laboratóriumban is elérhető a molekuláris viszkozitással. Az egyezés biztosítja, hogy a nagyskálájú jelenségek a viszkozitás szempontjából is jól modellezhetők kísérletekkel.

4.2. Az Ekman-réteg

4.2.1. Szemléletes kép

Az Ekman-szám kicsinysége azt jelenti, hogy a viszkózus erő a folyadéktartomány igen nagy részében elhanyagolható a Coriolis-erőhöz képest, ahogy ezt eddig ki is használtuk. Ez az elhanyagolás azonban mindenütt nem lehet jogos, hiszen akkor a peremfeltételek nem elégíthetők ki. Ezért léteznie kell egy *határrétegnek* (4.1. ábra), amelyben a viszkózus erő ugyanolyan lényeges szerepet játszik, mint a Coriolis-erő. A forgatott folyadékban a határréteg annál keskenyebb, minél kisebb az Ekman-szám. Az Ekman-réteg tehát olyan határréteg, amelyben a Coriolis-erő jelentős szerepet játszik.



4.1. ábra. A forgatott folyadékbeli alsó és felső Ekman-réteg és a bennük kialakuló sebességeloszlás sematikus képe. A felszínen nyíróerő hat, és a folyadék belsejében áramlás van jelen. D az Ekman-réteg vastagsága.

Az $|f_0|U$ rendű Coriolis-gyorsulás a határrétegben összemérhető a viszkózus gyorsulással, amelynek nagyságrendje a D vastagságú határrétegben[3] $\nu U/D^2$. Ebből a megfontolásból a kö-

[3] A természetes közegekre vonatkozóan a ν jelölés a továbbiakban a ν_{turb} turbulens viszkozitást jelenti.

vetkező összefüggés adódik:

$$\boxed{D = C\sqrt{\frac{\nu}{|f_0|}},} \tag{4.10}$$

ahol C dimenziótlan állandó.[4] Az f_0 planetáris örvényesség helyfüggését figyelembe véve a határréteg az Egyenlítő felé vastagodik. Annak közvetlen közelében azonban Ekman-réteg nem alakulhat ki, hiszen ott a forgatás hatása elenyésző, hagyományos határréteg van jelen.

Az Ekman-réteg dimenziótlan, H egységekben mért vastagsága

$$\frac{D}{H} = C\sqrt{Ek}, \tag{4.11}$$

az Ekman-szám gyökével arányos.

A gyorsan forgatott esetben a C szám elméleti értéke $\pi\sqrt{2} = 4{,}4$ (4.3. fejezet). Így levegőben, ahol $\sqrt{Ek} \approx 2 \cdot 10^{-2}$, az Ekman-réteg kb. 1 km vastagságú[5] ($D/H \approx 1/10$). Óceánban $\sqrt{Ek} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$, az Ekman-réteg mintegy 40 m vastagságú[6] ($D/H \approx 1/100$). Az említett laboratóriumi kísérletben $H = 10$ cm-rel $\sqrt{Ek} \approx 10^{-2}$, és az Ekman-réteg vastagsága mintegy 4 mm ($D/H \approx 4/100$).

4.2.2. A gyorsan forgatott határeset

A forgatott sekély folyadék határrétegében érvényes (4.7) egyenletben a gyors forgatás a $Ro \to 0$ határesetnek felel meg, vagyis nagyon lassú áramlásnak, miközben a sebességfüggetlen Ek Ekman-szám is kicsi, de nem tart nullához. Feltételezve, hogy a dimenziótlan gyorsulások egységnyi rendűek, a bal oldal eltűnik. A (4.5) dimenziós alakban ez azt jelenti, hogy

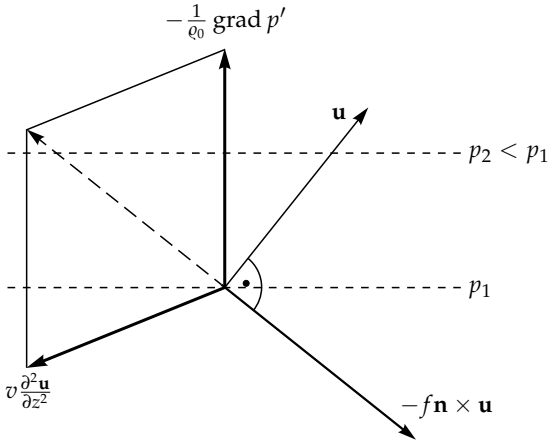
$$f\mathbf{u} \times \mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad} p' + \nu\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0. \tag{4.12}$$

A gyorsan forgatott folyadék határrétegében *stacionárius áramlás* alakulhat ki, amelyben három erő: a viszkózus, a nyomási és a Coriolis-erő egyensúlyozza egymást, amint azt a 4.2. ábrán szemléltetjük. A helyzet hasonlít ahhoz, amit a geosztrofikus egyensúlyban láttunk, csak most a viszkózus erő is megjelenik, és ezért a sebesség alapvetően különbözik a geosztrofikustól.

Ebből a feltételből már most leolvasható az Ekman-rétegbeli sebességtér egy meglepő tulajdonsága. Ha távolodunk a peremtől, akkor az áramlási sebesség abszolútértéke nő, miközben a viszkózus erő csökken, mint minden határrétegben. Most azonban ezzel együtt a Coriolis-erő is nő. Az erők eredője csak úgy maradhat zérus, ha közben a Coriolis-erő iránya is változik. Az Ekman-rétegben függőleges irányban haladva a sebességvektor *elfordul*.

Az Ekman-rétegen kívül a viszkozitás elhanyagolható, és a folyadék belsejében geosztrofikus áramlás alakul ki valamilyen $\mathbf{u}_g$ sebességgel. Az ezt fenntartó dinamikai nyomás, amely a geosztrofikusan áramló folyadék belsejében amúgy is független a magasságtól, a keskeny határrétegbe *változatlanul* hatol be. Feltehetjük tehát, hogy az (4.12)-ben szereplő p' ugyanaz, mint a

[4] Az $f_0 \to 0$ határesetben D végtelenhez tart, azaz az átlagos vastagság nem forgatott esetben értelmét veszti.
[5] A turbulens helyett a kinematikai viszkozitással számolva néhány métert kapnánk.
[6] A kinematikai viszkozitással 40 cm.



4.2. ábra. A nyomási, a viszkózus és a Coriolis-erő egyensúlya Ekman-rétegben a gyors forgatás határesetében. Az **u** sebesség eltér a geosztrofikustól, és az alacsonyabb nyomás felé mutató komponense is van.

folyadék belsejében, és ezért kifejezhető az ottani sebességgel:

$$\frac{1}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}\,p' = f\mathbf{u}_g \times \mathbf{n}. \tag{4.13}$$

Az f-síkon a geosztrofikus áramláshoz tehát a

$$-f_0(\mathbf{u}-\mathbf{u}_g)\times\mathbf{n} = \nu\frac{\partial^2(\mathbf{u}-\mathbf{u}_g)}{\partial z^2} \tag{4.14}$$

egyenlet adja meg a határrétegben létrejövő sebességteret. Komponensekben

$$-f_0(v-v_g) = \nu\frac{\partial^2(u-u_g)}{\partial z^2}, \qquad f_0(u-u_g) = \nu\frac{\partial^2(v-v_g)}{\partial z^2}. \tag{4.15}$$

A bal oldali egyenletet még kétszer z szerint deriválva, majd a jobb oldalit behelyettesítve:

$$\frac{\partial^4(u-u_g)}{\partial z^4} = -\frac{f_0^2}{\nu^2}(u-u_g). \tag{4.16}$$

Ez állandó együtthatós, homogén lineáris egyenlet, amely meghatározza a geosztrofikustól való *sebességeltérés* z-függését. Ezt $e^{\lambda z}$ alakban keresve, azt kapjuk, hogy $\lambda^4 = -f_0^2/\nu^2$, amelyből $\lambda = (-1)^{1/4}\sqrt{|f_0|/\nu} = \pm\sqrt{|f_0|/2\nu}(1\pm i) \equiv \pm(1\pm i)/\delta$. Itt

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{|f_0|}}, \tag{4.17}$$

egy hosszúságjellegű paraméter, amely arányos a (4.10) becslésből kapott D-vel. Az általános z-függés ezért $e^{\pm z/\delta}(\alpha e^{iz/\delta} + \beta e^{-iz/\delta})$ típusú. A valós részt véve

$$u - u_g = e^{\pm z/\delta}\left(A\,\sin\frac{z}{\delta} + B\cos\frac{z}{\delta}\right). \tag{4.18}$$

Ehhez

$$v - v_g = \mp\frac{|f_0|}{f_0}e^{\pm z/\delta}\left(A\,\cos\frac{z}{\delta} - B\sin\frac{z}{\delta}\right) \tag{4.19}$$

tartozik, amint arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk. Az A, B együtthatókat a peremfeltételek határozzák meg.

4.2.3. Peremfeltételek

Falak mellett a súrlódó folyadék felveszi a fal sebességét. Ezt szokás tapadási peremfeltételnek nevezni. A leggyakrabban előforduló álló fal esetén a sebesség zérus, tehát

$$\mathbf{v} = 0. \tag{4.20}$$

A (4.4) közelítéssel elveszíthetjük a lehetőséget arra, hogy a tapadási peremfeltételt függőleges síkbeli határokon előírjuk. Azt egy D-nél is keskenyebb oldalsó határréteg figyelembevételével tehetjük meg, ahol a teljes (4.3) érvényes. A (4.4) közelítés tehát az oldalsó peremeken az ideális folyadék határfeltétellel ($\mathbf{u}$ peremre merőleges komponense eltűnik) konzisztens.

Más típusú a peremfeltétel, ha a folyadékfelszínre adott *nyíróerő* hat. Ez nem a sebességet, hanem annak deriváltjait szabja ott meg. Tegyük fel, hogy ismert a vízszintes síkban elhelyezkedő egységnyi felületekre ható nyíróerő, a $\boldsymbol{\tau}$ szélnyírási vektor, amelynek x és y irányú komponensei (τ_x, τ_y), azaz $\boldsymbol{\tau} \equiv (\tau_x, \tau_y, 0)$.

Homogén izotróp összenyomhatatlan folyadékban a j normálisú egységnyi felületre ható nyíróerő l irányú komponense

$$\sigma_{j,l} = -p\delta_{j,l} + \nu\varrho_0 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_j} \right). \tag{4.21}$$

Ennek rögzített l mellett vett (j szerinti) divergenciájából adódik a $(-\operatorname{grad} p + \nu\varrho_0\Delta\mathbf{v})$ erő az összenyomhatatlan folyadék (1.28) egyenletében.[7] A függőleges normálisú ($j = 3$) lapon vízszintes síkban megjelenő nyírás szokásos sebességjelölésünkkel tehát

$$\sigma_{3,l} = \nu\varrho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial z} \right), \tag{4.22}$$

ahol $l = 1$ az x, $l = 2$ az y komponensnek felel meg. A felületen ennek kell megegyeznie a külső τ_l nyírási komponenssel.

Sekély folyadékban a helyzet tovább egyszerűsödik, ugyanis a zárójel első tagja jóval kisebb a másodiknál.[8] Ilyenkor tehát a függőleges irányú változások a legfontosabbak, és a *peremen* a

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \nu\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}} \tag{4.23}$$

összefüggésnek kell fennállnia.

4.3. Az alsó Ekman-réteg

4.3.1. A sebességtér

Tekintsünk egy vízszintes, nem mozgó aljzat fölött elhelyezkedő határréteget. A $z = 0$ szinten elhelyezkedő aljzattól mért magasság függvényében keressük a sebességet. A vízszintes komponensekre a $z = 0$ szinten a (4.20) tapadási peremfeltétel értelmében $\mathbf{u} = 0$. Ugyanakkor a folyadék belsejében a geosztrofikus áramlást kell visszakapnunk, tehát $z \to \infty$ mellett $\mathbf{u} \to \mathbf{u}_g$.

[7] A divergenciamentességi feltétel miatt a $\partial v_j/\partial x_l$-lel arányos tag eltűnik. Összenyomható közegben ez a tag járulékot ad a viszkózus erő (1.24)-ben szereplő $\overline{\lambda}$ grad div $\mathbf{v}$ alakjához. Ugyanilyen típusú járulék adódik abból is, hogy ekkor a $\sigma_{j,j}$ diagonális nyíróerőkben (4.21) mellett fellép egy div $\mathbf{v}$-vel arányos tag.

[8] Arányuk ε^2 rendű.

A geosztrofikus áramlástól való eltérést megadó (4.18), (4.19) megoldásban a z-ben exponenciálisan növekvő viselkedést (a kitevőbeli felső előjelet) az $\mathbf{u} \to \mathbf{u}_g$ peremfeltétel miatt ki kell zárnunk. A tapadási peremfeltételt $z = 0$-ra kielégítő $u = 0$ megoldáshoz (4.18) alapján $B = -u_g$ tartozik. Ugyanakkor $v = 0$ miatt (4.19)-ből $A = \pm v_g f_0/|f_0|$. Ezzel

$$u = u_g - e^{-z/\delta}\left(u_g \cos\frac{z}{\delta} \pm v_g \sin\frac{z}{\delta}\right), \qquad v = v_g + e^{-z/\delta}\left(\pm u_g \sin\frac{z}{\delta} - v_g \cos\frac{z}{\delta}\right), \tag{4.24}$$

ahol a megmaradt $\pm$ előjel f_0 előjele, tehát az alsó érték a déli féltekén érvényes megoldáshoz tartozik. Vektoriálisan

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g\left(1 - e^{-z/\delta}\cos\frac{z}{\delta}\right) \pm \mathbf{n} \times \mathbf{u}_g e^{-z/\delta}\sin\frac{z}{\delta}. \tag{4.25}$$

Mindkét alak világosan mutatja, hogy a geosztrofikustól való eltérés jelentős, és iránybeli változásban is kifejeződik. Bármelyik féltekéről van is szó, a határrétegbeli áramlási sebesség nem párhuzamos az izobárokkal, hanem van az *alacsonyabb nyomás felé mutató* komponense, hiszen $\pm\mathbf{n} \times \mathbf{u}_g = f_0/|f_0|\mathbf{n} \times \mathbf{u}_g$ a (4.13) összefüggés szerint párhuzamos grad p'-vel. A felszín közelében ezért áramlást várunk az alacsony nyomású helyek irányába.

Szélességi kör menti geosztrofikus áramlás esetén $u_g = u_0$, $v_g = 0$, és a sebességeloszlás

$$u = u_0\left(1 - e^{-z/\delta}\cos\frac{z}{\delta}\right), \qquad v = \pm u_0 e^{-z/\delta}\sin\frac{z}{\delta}. \tag{4.26}$$

A határrétegben tehát a felette levő geosztrofikus áramlásra merőleges, v irányú áramlás is jelen van.

A határréteg alján, $z \ll \delta$-ra a (4.25) összefüggés szerint a sebesség lineárisan tűnik el a magassággal:

$$\boxed{\mathbf{u} = \left(\mathbf{u}_g \pm \mathbf{n} \times \mathbf{u}_g\right)\frac{z}{\delta} = \left(u_g \mp v_g, v_g \pm u_g\right)\frac{z}{\delta}.} \tag{4.27}$$

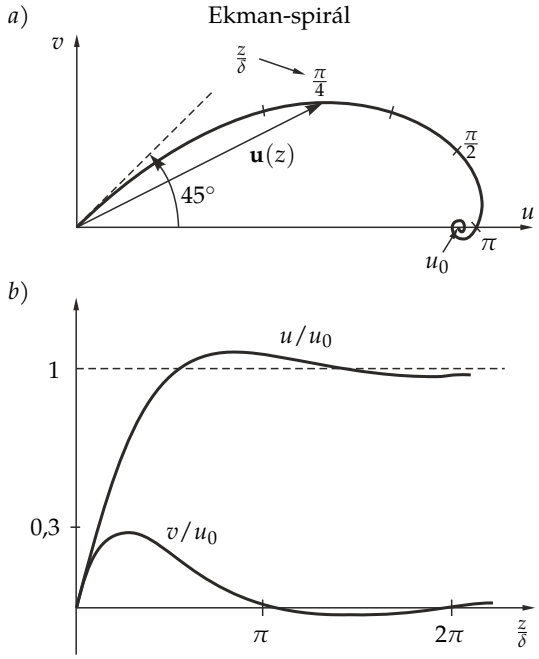
Ebből az is látszik, hogy a sebesség a geosztrofikushoz képest 45 *fokos szöget* bezárva jelenik meg. Az északi féltekén (felső előjel) a geosztrofikustól balra mutat, a délin fordítva. Feljebb haladva a sebesség nagysága nő, és a geosztrofikusra merőleges komponens is erősödik. Egy maximum elérése után ez a komponens csökkenni kezd, és végül nullához tart (4.3. ábra). A sebességvektor iránya az emelkedéssel a geosztrofikus felé fordul, kicsit túllendül $\mathbf{u}_g$ irányán, majd visszafordulva éri azt el. A sebességvektornak ezt a magassággal való viselkedését nevezzük *Ekman-spirálnak*.

A 4.3. ábráról leolvasható, hogy a $z = \pi\delta$ magasságban a geosztrofikus áramlás gyakorlatilag helyreállt (hiszen $\exp(-\pi) = 0{,}04 \ll 1$), és ezért $\pi\delta$ azonosítható a határréteg vastagságával:

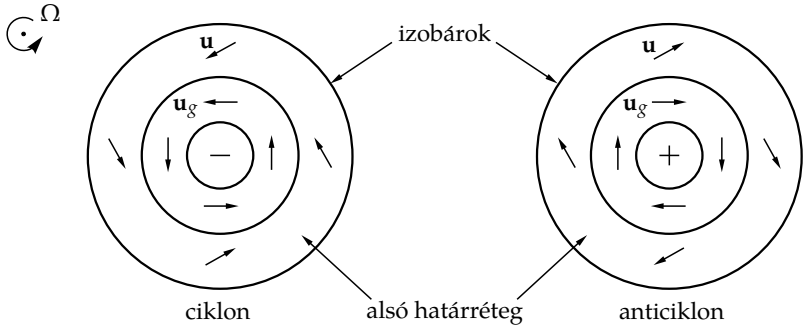
$$D = \pi\sqrt{\frac{2\nu}{|f_0|}} = \pi\delta. \tag{4.28}$$

Ezzel a (4.10) kifejezésben fellépő $C = \pi\sqrt{2}$ együtthatót is meghatároztuk.

A felszín közeli szeleknek a magassággal való jobbra (balra) történő fordulása jól ismert meteorológiai tény az északi (déli) féltekén. Az Ekman-spirál másik következménye, hogy a ciklonok (anticiklonok) alsó légrétegeiben a viszkozitás miatt összeáramlás (szétáramlás) történik *mindkét* féltekén. Az északi féltekére vonatkozó szélsebességeket mutatja a 4.4. ábra.



4.3. ábra. Áramlás az alsó Ekman-rétegben az északi féltekén a folyadék belsejében uralkodó $u_g = u_0$, $v_g = 0$ geosztrofikus áramlás mellett, a (4.26) összefüggés alapján. a) A különböző magasságokban kialakuló **u** sebességvektorok. A spirál mellé írt számok a δ egységekben mért z magasságot mutatják. A $z/\delta = \pi$ magasságban tűnik el felfelé haladva először a v komponens. b) Az u és v sebességkomponensek magasságfüggése. A határrétegbeli sebesség a $z = D = \pi\delta$ szinten (a határréteg peremén) jó közelítéssel megegyezik a folyadék belsejében jelenlevő geosztrofikus sebességgel.



4.4. ábra. A szélsebesség átlagos iránya ciklonok és anticiklonok alsó légrétegeiben az északi féltekén. A belső körgyűrű nyilai a magasban uralkodó geosztrofikus áramlást jelzik.

4.3.2. Ekman-pumpálás

A felszín közeli szétterülés vagy összeáramlás világosan mutatja, hogy a határrétegben a kétdimenziós divergencia nem zérus, fel- vagy leáramlásoknak kell létezniük. A (4.25) megoldás alapján

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \pm \operatorname{div}(\mathbf{n}\times\mathbf{u}_g)e^{-z/\delta}\sin\frac{z}{\delta}, \tag{4.29}$$

hiszen $\mathbf{u}_g$ divergenciamentes. Mivel az $\mathbf{n}\times\mathbf{u}_g$ vektor komponensei $-v_g$ és u_g, divergenciája nem más, mint a geosztrofikus áramlás $\zeta_g = \partial v_g/\partial x - \partial u_g/\partial y$ függőleges örvényességkomponensének ellentettje. A függőleges irányú sebességre a háromdimenziós összenyomha-

tatlanságból a

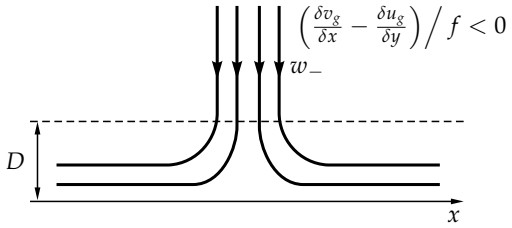
$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\operatorname{div}\mathbf{u} = \pm\zeta_g e^{-z/\delta}\sin\frac{z}{\delta} \tag{4.30}$$

egyenletet kapjuk. Az alsó határréteg felső peremén, a $z = D$ szinten tehát véges, w_- nagyságú függőleges irányú sebesség van jelen (az index az alsó határrétegre utal). Ez behatol a geosztrofikus tartományba, tehát ott is lesz fel- vagy leáramlás. Az exponenciális magasságfüggés miatt w_- jó közelítéssel megegyezik a $z \to \infty$-re kapott sebességgel. A legalsó szinten w-nek el kell tűnnie, ezért az egyenletet $z = 0$-tól végtelenig integrálva a keresett sebességre

$$\boxed{w_- = \pm\frac{1}{2}\zeta_g\delta = \pm\frac{1}{2\pi}\zeta_g D} \tag{4.31}$$

adódik.[9] A folyadék belsejében kialakult geosztrofikus örvényesség tehát fel- vagy leáramlást indít el a határrétegben (4.5. ábra). Ezt a folyamatot *Ekman-pumpálásnak* nevezik, amelynek intenzitása a határréteg vastagságával is arányos. A geosztrofikus örvényességet (1.6) alapján $Ro|f_0|$-ként becsülve, $|w_-| \approx Ro|f_0|D/(2\pi)$. Az Ekman-pumpálásból adódó függőleges sebesség a légköri határrétegben ($Ro \approx 0{,}1$) mm/s nagyságrendű, az óceáni medencék alsó határrétegében ($Ro \approx 10^{-4}$) pedig legföljebb cm/nap nagyságú.

Vegyük észre azt is, hogy a ciklonális örvényesség feláramlással párosul: $w_- > 0$ mindkét féltekén, az anticiklonális örvényesség pedig leáramlással. Mindez összhangban van meteorológiai tapasztalatunkkal, hiszen a feláramlás, ciklon rendszerint csapadékképződéssel, a leáramlás, anticiklon pedig száraz időjárással jár.



4.5. ábra. Az Ekman-pumpálás a határrétegből a folyadék belsejébe irányuló függőleges áramlás, amelynek erőssége a folyadék belsejében jelenlevő geosztrofikus áramlás örvényességével arányos. A leáramláshoz ($w_- < 0$) anticiklonális geosztrofikus mozgás tartozik, a feláramláshoz ciklonális.

Laboratóriumban mindez jól demonstrálható, ha lapos aljú forgatott edény aljára festéket juttatunk, és annak szétterjedését a felszínen úszó részecskéhez viszonyítva figyeljük, amelyek a geosztrofikus áramlás örvényességének előjelét jelzik. Mind ciklonális, mind anticiklonális esetre (alsó össze-, ill. szétáramlásra) látunk példát ebben a kísérletben.

4.3.3. Felpörgetési idő

Az Ekman-pumpálás a határréteg feletti geosztrofikus tartomány örvényességével arányos, és ez fontos következménnyel jár az örvényesség időbeli fejlődésére nézve is. A sekély ideális fo-

[9] Hiszen $\int_0^\infty \exp(-x)\sin x dx = 1/2$.

lyadékra vonatkozó (2.22) egyenlet szerint az f-síkon

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\zeta + f_0)\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{4.32}$$

A közel geosztrofikus esetben ζ elhanyagolható a planetáris örvényesség mellett. A folyadék belsejében a w sebességnek az alsó határréteg fölötti w_- értékről zérusra kell csökkennie a $z = H$ felszín elérésekor, amennyiben szélnyírás nem hat. Ezért a $\partial w_g/\partial z$ derivált, amelynek z-függetlennek kell lennie geosztrofikus áramlásban (1.53), $-w_-/H$-ként írható (hiszen $H - D \approx H$). Ezzel

$$\frac{d\zeta_g}{dt} = -f_0\frac{w_-}{H} = \mp\frac{f_0\delta}{2H}\zeta_g = -\frac{|f_0|\delta}{2H}\zeta_g = -\frac{\sqrt{|f_0|\nu}}{\sqrt{2}H}\zeta_g. \tag{4.33}$$

Az utolsó egyenlőségben használtuk a δ paraméter (4.17) alakját. A geosztrofikus örvényesség időbeli változását a folyadék belsejében tehát a határréteg vastagsága, és ezen keresztül a viszkozitás szabályozza. Az időderivált magával az örvényességgel arányos, együtthatója *mindig* negatív, és ezért exponenciális lecsengést tapasztalunk. A geosztrofikus örvényesség a viszkozitás következtében csökken, és ennek a folyamatnak relaxációs ideje

$$\boxed{t_0 = \frac{2H}{|f_0|\delta} = \frac{\sqrt{2}H}{\sqrt{|f_0|\nu}} = \frac{\sqrt{2}}{|f_0|}\frac{1}{\sqrt{Ek}} = \frac{2\pi}{|f_0|}\frac{H}{D}.} \tag{4.34}$$

Mivel $Ek \ll 1$, a relaxációs idő jóval hosszabb a forgási időnél. A természetes közegekben a turbulens viszkozitással számolva a légkörben több nap, az óceánban néhány hónap adódik. A viszkózus relaxáció $t_\nu \equiv H^2/\nu_{turb} = 1/(|f_0|Ek) = t_0/\sqrt{2Ek}$ ideje azonban még ennél is sokkal hosszabb, a levegőben több mint 100 nap, az óceánban több tíz év. Laboratóriumi példánkban $t_0 \approx 2$ perc, t_ν pedig kb. 2,5 óra. Az Ekman-pumpálás tehát jóval hatékonyabb csillapítási mechanizmushoz vezet, mint a hagyományos viszkozitásból adódó.

Ha egy edényt hirtelen adott szögsebességgel pozitív irányba kezdünk forgatni, akkor a folyadék nagy része kezdetben nyugalomban marad, tehát az edényhez képest negatív, anticiklonális örvényességgel rendelkezik. Az alsó határrétegben kiáramlás, a folyadék belsejében leáramlás alakul ki. Ezt a felszínen összefolyásnak kell kísérnie. A radiálisan a tengely felé áramló folyadékelemeket a Coriolis-erő jobbra téríti, és így pozitív cirkulációjúvá teszi, tehát csökkenti a folyadék teljes örvényességét. Az örvényesség zérushoz tartása annak felel meg, hogy lassan az egész folyadék átveszi az edény szögsebességét. A t_0 relaxációs időt szokás ezért felpörgetési időnek is nevezni. A felpörgetési folyamat Ekman-pumpálás nélkül sokkal lassabb lenne.

4.4. A felső Ekman-réteg

4.4.1. A sebességtér

Tekintsünk egy közel vízszintes folyadékfelszínt, amelyre a felette fújó szél miatt $\boldsymbol{\tau}$ nyírófeszültség hat. Az egyszerűség kedvéért koordináta-rendszerünk origóját erre a szintre helyezzük. A felszín alatti D vastagságú határrétegben keressük a sebességeloszlást, amelynek most egy fontos ismeretlene maga a felszíni áramlási erősség is. A sebességre a $z = 0$ szinten a (4.23) nyírási peremfeltétel érvényes. Ugyanakkor a folyadék belsejében a geosztrofikus áramlást kell visszakapnunk, tehát $z \to -\infty$ mellett $\mathbf{u} \to \mathbf{u}_g$.

A geosztrofikus áramlástól való eltérést megadó (4.18), (4.19) megoldásban a mélységgel exponenciálisan növekvő viselkedést (alsó előjel) az $\mathbf{u} \to \mathbf{u}_g$ peremfeltétel miatt ki kell zárnunk. A (4.23) peremfeltételből $A + B = \tau_x\delta/(\nu\varrho_0)$, $A - B = \mp\tau_y\delta/(\nu\varrho_0)$. Ezt (4.18), (4.19)-be helyettesítve a sebességtér

$$u = u_g + \frac{e^{z/\delta}}{\varrho_0\sqrt{\nu|f_0|}}\left(\tau_x\cos\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right) \mp \tau_y\sin\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right)\right), \tag{4.35}$$

$$v = v_g + \frac{e^{z/\delta}}{\varrho_0\sqrt{\nu|f_0|}}\left(\pm\tau_x\sin\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right) + \tau_y\cos\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{4.36}$$

Vektoriálisan

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \frac{e^{z/\delta}}{\varrho_0\sqrt{\nu|f_0|}}\left(\boldsymbol{\tau}\cos\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right) \pm (\mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau})\sin\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{4.37}$$

Mindkét alak világosan mutatja, hogy a geosztrofikustól való eltérés csakis a nyírásnak köszönhető, nem függ az alsó $\mathbf{u}_g$ folyadékáramlástól. Az áramlásnak létezik a $\boldsymbol{\tau}$ szélnyírásra *merőleges* komponense is, amelyet (4.37) második tagja ír le.

Keleti irányba mutató τ_x nyírás esetén:

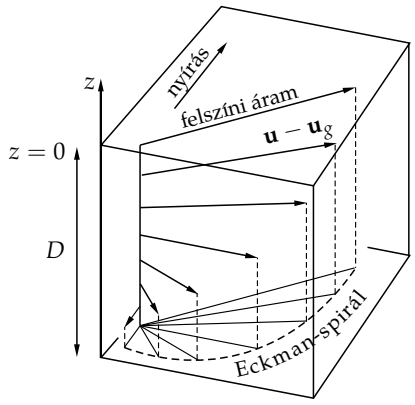
$$u = u_g + \tau_x\frac{e^{z/\delta}}{\varrho_0\sqrt{\nu|f_0|}}\cos\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right), \qquad v = v_g \pm \tau_x\frac{e^{z/\delta}}{\varrho_0\sqrt{\nu|f_0|}}\sin\left(\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right), \tag{4.38}$$

a sebességeltérés mindkét irányban τ_x-szel arányos.

A folyadék felszínén ($z = 0$-ra)

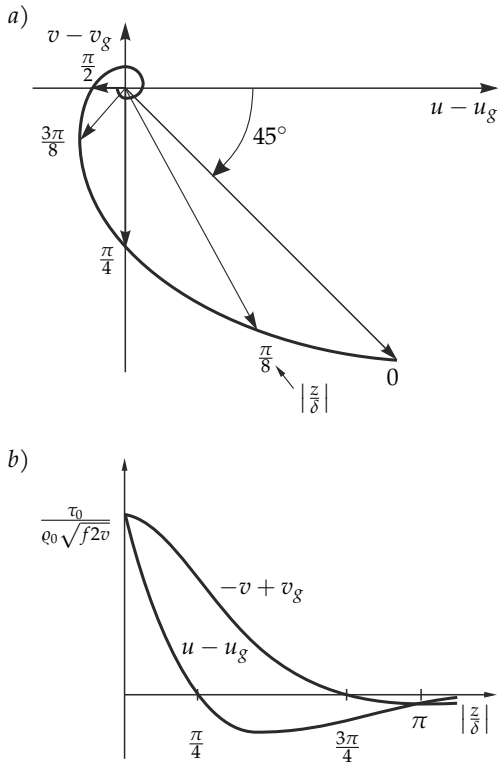
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \frac{1}{\varrho_0\sqrt{2\nu|f_0|}}(\boldsymbol{\tau} \mp \mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau}), \tag{4.39}$$

vagyis a sebességnövekmény 45 *fokos szöget* zár be a nyírási feszültséggel, az északi féltekén a szélnyírástól *jobbra* mutat, a délin *balra*, és nagysága $|\boldsymbol{\tau}|/(\varrho_0\sqrt{\nu|f_0|})$. Tipikus, 0,1 N/m^2 szélnyírási feszültség közepes szélességeken vízben 0,1 m/s-os sebességnövekményekre vezet! Ez akár nagyobb is lehet, mint a mélységi geosztrofikus sebesség értéke. Viharos szelek nyírási erőssége elérheti a néhány N/m^2-t is.



4.6. ábra. A felső Ekman-réteg az északi féltekén: a határrétegbeli sebességeltérés vektorának sematikus magasságfüggése

Az északi féltekén (felső előjel) az Ekman-rétegben lefelé haladva a sebesség geosztrofikusra merőleges komponense csökken, előjelet vált, és végül nullához tart. A sebességvektor iránya egyre tovább fordul a nyírási iránytól, miközben a sebesség nagysága gyorsan közeledik a geosztrofikushoz. A sebességvektornak ezt a magassággal való viselkedését is *Ekman-spirálnak* nevezzük (4.6. ábra). A $z = -\pi\delta$ mélységben a geosztrofikus áramlás gyakorlatilag helyreáll (4.7. ábra), és ezért $\pi\delta$ ismét azonosítható a határréteg (4.28) vastagságával. Fontos hangsúlyozni, hogy a határréteg vastagsága tehát *független* a nyírási erősségtől, noha a benne kialakuló többletsebesség arányos a nyírással, és hogy D vastagsága megegyezik az alsó határréteg vastagságával.



4.7. ábra. Áramlás a felső Ekman-rétegben az északi féltekén keleti irányba mutató nyírási vektor $\tau_x > 0$, $\tau_y = 0$ esetén, (4.38) alapján: a) A különböző magasságokban kialakuló sebességeltérés vektorai. A spirál mellé írt számok a δ egységekben mért mélységet mutatják. b) A sebességeltérés kelet–nyugati és észak–déli komponenseinek magasságfüggése. A határrétegbeli sebesség a $D = \pi\delta$ mélységben (a határréteg peremén) jó közelítéssel megegyezik a folyadék belsejében jelenlevő $\mathbf{u}_g$ geosztrofikus sebességgel.

4.4.2. Ekman-transzport

Érdemes megvizsgálni, hogy a nyírás milyen nagyságú geosztrofikustól eltérő anyagmozgást hoz létre a *teljes* felső határrétegben. Definiáljuk ezért az

$$\mathbf{S} = \int_{-\infty}^{0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) dz \tag{4.40}$$

Ekman-transzport nevű mennyiséget, amely megadja, hogy a viszkozitás következtében időegység alatt mekkora felületű anyag folyik át egy függőleges egyenes mentén, vagy mekkora tér-

fogatú anyag a folyadék teljes mélységét átfogó, egységnyi szélességű felületen. Az Ekman-transzport és D hányadosa a határrétegbeli átlagos sebességnövekmény. Az integrál alsó határát azért vesszük végtelennek, mert a sebességeltérés nagyságának a magassággal történő exponenciális lecsengése miatt az integrál a $z = -D$ szint alatt már gyakorlatilag nem ad járulékot. Az alsó határrétegben zajló gyenge Ekman-transzportot a 11.1. fejezetben vizsgáljuk.

A (4.14) egyenletet integrálva a bal oldalon megjelenik a (4.40) Ekman-transzport, a jobb oldalon pedig a nyírás,

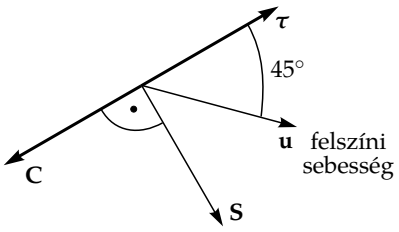
$$f_0 \mathbf{n} \times \mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\varrho_0}, \tag{4.41}$$

ugyanis az $\mathbf{u}$ sebesség z szerinti deriváltja az alsó határon zérus (hiszen ott a mozgás geosztrofikus), a felsőn pedig a nyírással arányos. Ebből

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{\varrho_0 f_0} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\varrho_0 f_0} \left(\tau_y, -\tau_x\right).} \tag{4.42}$$

Az Ekman-transzport tehát éppen *merőleges* a szélnyírási vektorra, és az északi féltekén $\boldsymbol{\tau}$-tól jobbra (4.8. ábra), a délin balra mutat. Vegyük észre, hogy az Ekman-transzport UH egységekben mért dimenziótlan nagysága és a nyírás dimenziótlan erőssége közötti arányossági tényező éppen a (4.2) nyírási paraméter:

$$S = Sh\tau. \tag{4.43}$$



4.8. ábra. Az $\mathbf{S}$ Ekman-transzport, a $\boldsymbol{\tau}$ nyírási vektor és az $\mathbf{u}$ felszíni áramlási sebesség egymáshoz viszonyított iránya az északi féltekén a felső határrétegben, egységnyi térfogatra vonatkoztatva. A $\mathbf{C}$ vektor az Ekman-transzport által okozott sebességnövekményre ható Coriolis-erőt jelöli a teljes határrétegben, amely merőleges magára az Ekman-transzportra.

Azt az eredményt kapjuk, hogy az Ekman-rétegben a nyírásból adódó átlagsebesség, amely $\mathbf{S}$-sel arányos, merőleges a szabad felszínen ható nyírási erőre. A sarkkutató F. Nansen (1861–1930) megfigyelése, miszerint az északi féltekén a jéghegyek a szelektől *jobbra* sodródnak, vezette Ekmant (1905-ben) az azóta róla elnevezett sebességtér és transzport elméleti leírására. A transzport iránya olyan tulajdonság, amely csak gyorsan forgatott folyadékban érvényes, a nem forgatott folyadék arra áramlik, amerre a szél hajtja. A kapott orientációs szabály annak következménye, hogy a teljes határrétegben a sebességnövekménnyel kapcsolatos Coriolis-erőnek pontosan kompenzálnia kell az egyetlen külső erőt, a felszíni szélnyírást.

Az uralkodó szelek által keltett nyírás Ekman-transzportot alakít ki az óceánok felső határrétegében. Sokszor egy lokális szélnyírás következtében létrejött transzport indítja el a folyadéktömegek tehetetlenségi mozgását (3.6. ábra).

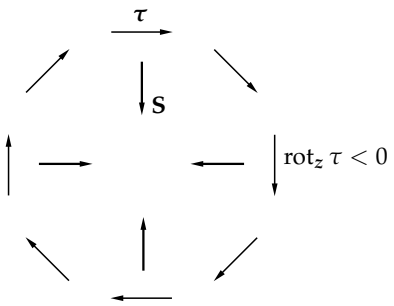
A szélirányra merőleges átlagos felszíni áramlás a kontinuitás következtében függőleges irányú áramlást is magával hoz, hiszen az elmozdult folyadékrétegnek pótlódnia kell. Így például az Egyenlítő környéki passzátszelek miatt az Ekman-transzport a sarkok felé irányul, és ez az Egyenlítő övezetét jelentős feláramlási területté teszi (4.9a. ábra).



4.9. ábra. A szelek és az Ekman-transzport, vagyis a határrétegbeli átlagos sebesség irányának viszonya. a) Egyenlítői övezet, b) Észak–déli futású partvonalak az északi féltekén

Ahol a szeleknek van jelentős, parttal párhuzamos összetevője, és a part ettől a vektortól az északi féltekén balra (a délin jobbra) esik, ott az Ekman-transzport a nyílt tenger felé mutat, és ezért feláramlás alakul ki (4.9b. ábra). Tipikusan ez a helyzet az óceánok *keleti* peremén, mint például Peru, Kalifornia vagy Nyugat-Afrika partjai mentén. Feláramlásoknak (részletesebben 13.3. fejezet) fontos gazdasági szerepe van partvonalak közelében, ugyanis a felszálló víz tápanyagban gazdag, és ezért jó halászati lehetőséget teremt. A Föld teljes halászatának mintegy fele erre a néhány fontos feláramlási területre koncentrálódik.

Cirkuláris nyíráseloszlás is fel-, illetve leáramlásokat okoz. Ha például a nyírási vektortér negatív körüljárású, anticiklonális, az az északi féltekén a centrum felé irányuló Ekman-transzportot eredményez (4.10. ábra), és ennek következtében leáramlást.



4.10. ábra. Antciklonális nyíráseloszlás és az Ekman-transzport az északi féltekén

4.4.3. Ekman-pumpálás nyírás következtében

A fenti példák is mutatják, hogy a kétdimenziós sebességdivergencia a felső Ekman-rétegben sem zérus. Tekintsük a háromdimenziós összenyomhatatlanságot kifejező $\mathrm{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) = 0$ egyenletet, amely írható a

$$-\frac{\partial(w - w_g)}{\partial z} = \frac{\partial(u - u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v - v_g)}{\partial y} \tag{4.44}$$

alakba is. A teljes mélységre integrálva a jobb oldalon az Ekman-transzport divergenciája jelenik meg, a bal oldalon pedig a felszíni $w_g(z = 0)$ geosztrofikus feláramlási sebesség (az egzakt

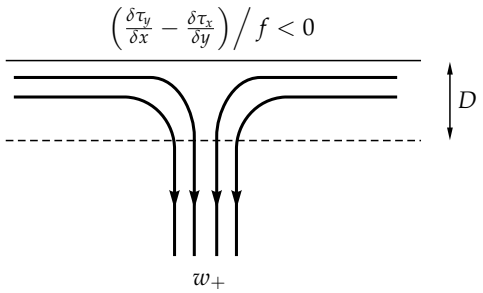
sebességnek a felszínen el kell tűnnie: $w(z=0)=0$). A határréteg keskenysége miatt viszont a függőleges geosztrofikus sebesség jó közelítéssel megegyezik a felső határréteg alján megfigyelhető feláramlási sebességgel, melyet w_+-szal jelölünk: $w_g(z=0)=w_+$. Így

$$w_+ = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = \frac{1}{\varrho_0 f_0}\left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{\varrho_0 f_0}\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}, \tag{4.45}$$

ahol

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}. \tag{4.46}$$

A nyíráseloszlás örvényessége határozza tehát meg a fel- vagy leáramlás erősségét. Negatív nyírási örvényesség az északi féltekén leáramlást okoz (4.11. ábra), összhangban az 4.10. ábra felszíni képével. Ezt a folyamatot is *Ekman-pumpálásnak* nevezik, és az óceáni felső határrétegben jelentős. A szélnyírás okozta w_+ függőleges áramlás tipikus erőssége a nyírási örvényességet τ_0/L-ként becsülve ($\tau_0 = 0{,}1\ \mathrm{N/m^2}$, $L = 1000$ km), 1 dm/nap $\approx$ 35 m/év.



4.11. ábra. A felső határrétegben történő Ekman-pumpálás a határrétegből a folyadék belsejébe irányuló függőleges áramlás, amelynek erőssége a szélnyírás rotációjával arányos. w_+ ennek az áramlásnak a sebessége a felső határréteg alsó peremén. Leáramláshoz anticiklonális szélnyírás (az északi féltekén $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} < 0$) tartozik, feláramláshoz ciklonális szélnyírás (az északi féltekén $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} > 0$).

Nyírás következtében kialakuló Ekman-pumpálás tanulmányozható forgatott edénnyel végzett kísérletekben, amelyben például a folyadék felszínére lapos korongot helyeznek, és az edényétől eltérő szögsebességgel forgatják. A korong edényhez képest ciklonális értelmű forgatása esetén a folyadékba juttatott festék a korong alatt hengeres alakban gyűlik össze, amely feláramlást jelez, ahogy ebben a kísérletben látható.

Az UH/L egységekben mért függőleges áramlási sebességre az L egységben mért vízszintes deriváltakkal dimenziótlan alakban azt kapjuk, hogy

$$w_+ = Sh\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}, \tag{4.47}$$

ahol Sh a (4.2) nyírási paraméter.

A szél által létrehozott nyírás tipikus mért értéke 0,1 $\mathrm{N/m^2}$ nagyságrendű, ezzel az Sh paraméter közepes szélességeken, óceáni $U = 0{,}01$ m/s geosztrofikus sebességgel, $H = 4$ km mellett 10^{-2} körüli. Ugyanilyen nagyságú nyírási paraméter érhető el laboratóriumban pl. úgy, hogy $2\Omega = 1/\mathrm{s}$, $H = 40$ cm, és a nyírás erőssége és a sebesség ugyanaz, mint az óceánban.

A nyírási paraméter a szélnyírás következtében kialakuló feláramlás vagy az Ekman-transzport dimenziótlan mértéke, de más jelentéssel is rendelkezik. A (4.39) összefüggésből leolvasható, hogy $\tau_0/\left(\varrho_0 U\sqrt{\nu|f_0|}\right)$ megadja, hogy a szélnyírás okozta sebességnövekmény hány-

szorosa a geosztrofikusnak. Ezért írhatjuk, hogy

$$Sh = \sqrt{Ek}\frac{\text{szélnyírás okozta sebesség}}{\text{geosztrofikus sebesség}}. \tag{4.48}$$

Mivel az Ekman-szám kicsi, az Sh nyírási paraméter kis értéke összhangban lehet a sebességarány egységnyi vagy nagyobb értékével.

4.5. Sekélyfolyadék-egyenletek szélnyírással

Használva, hogy a felső határrétegbeli áramlástöbblet csak a szélnyírástól függ, felírhatjuk a sekélyfolyadék-egyenletek kiterjesztését a külső felszínen ható nyíróerő jelenlétében. Az alapgondolat az, hogy a határréteg alatti viszonylag vastag ideális folyadéktartomány továbbra is sekély közegként mozog, $p' = \eta\varrho_0 g$, és ezért benne az $\mathbf{u}$ sebesség független a magasságtól. Keskeny határréteg jelenlétében a (4.5) hidrodinamikai egyenletnek a folyadékmélységre vonatkozó átlagát véve, a viszkózus tag kivételével minden tag gyakorlatilag megegyezik az ideális folyadéktartományban érvényes kifejezésével. A viszkózus tag maga z szerinti derivált, ezért integrálja csak a felszínről ad járulékot, a $\nu\partial\mathbf{u}/\partial z$ kifejezést. Ez azonban (4.23) szerint a $\boldsymbol{\tau}$ szélnyírás és a sűrűség hányadosa. Kismértékű η felszíningadozást és vízszintes aljzatot feltételezve, a folyadék mélysége $h = H + \eta$. Mivel η jóval kisebb az átlagos mélységnél, a viszkózus erő átlagában η nem szerepel. Ezzel a mélységre átlagolt sekélyfolyadék-egyenlet

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f\mathbf{u}\times\mathbf{n} - g\,\mathrm{grad}\,\eta + \frac{\boldsymbol{\tau}}{\varrho_0 H}, \tag{4.49}$$

s érvényes a kontinuitási egyenlet is. A felső határréteg tehát első közelítésben csak annyiban módosítja a sekélyfolyadék-egyenleteket, hogy azokban külső gerjesztő erőként megjelenik a szélnyírás. Az egyenlet levezetésében csak azt használtuk, hogy a felső határréteg keskeny. Ezért az egyenlet nemcsak a kvázi-geosztrofikus mozgásokat írja le, hanem a nem forgatott, szélnyírta folyadékokat is (tehát kisebb tavak, pl. a Balaton áramlásainak vizsgálatára is alkalmas). Az egyenlet környezeti alkalmazásaként a 11.2. fejezet a viharhullámok példáját mutatja be.

A nyírt sekély folyadék (4.49) egyenletének dimenziótlan alakja a 2.2. fejezetben alkalmazott eljárást a $\boldsymbol{\tau}\to\tau_0\boldsymbol{\tau}$ dimenziótlanítási transzformációval kiegészítve

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \pm\frac{1}{Ro}\mathbf{u}\times\mathbf{n} - \frac{1}{Fr^2}\,\mathrm{grad}\,\eta + \frac{Sh}{Ro}\boldsymbol{\tau}. \tag{4.50}$$

A (4.49) egyenlet alapján a $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ örvényességkomponens változására az adódik, hogy

$$\frac{d\zeta}{dt} + (\zeta + f)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \frac{\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}}{\varrho_0 H}. \tag{4.51}$$

Az egyenletet H/h-val szorozva és a (2.12) $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = -dh/(hdt)$ kontinuitási összefüggést használva a $q \equiv (\zeta + f)H/h$ potenciális örvényesség teljes deriváltjára kapjuk, hogy:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}}{\varrho_0 h}. \tag{4.52}$$

A potenciális örvényesség tehát a szélnyírás jelenlétében nem megmaradó mennyiség: a nyírási rotáció a potenciális örvényesség nyelője vagy forrása.

4.6. A szélhajtotta óceán

4.6.1. Általános megfontolások, Sverdrup-transzport

Az óceánok nagy felszíni áramlásait elsősorban az uralkodó szelek és az azok által kifejtett nyírási erők alakítják ki. Felszíni áramláson a felső határrétegben és az alatta levő ideális folyadéktartományban létrejövő mozgást értjük, amely első közelítésben geosztrofikusnak tekinthető.

A fizikai kép a következő: a felső határrétegben az Ekman-pumpálás függőleges áramlást hoz létre. Ez behatol a folyadék belsejébe, és a (3.45) Sverdrup-reláció következtében észak–déli irányú geosztrofikus áramlást okoz.

Mivel a $\partial w/\partial z$ deriváltnak z-től függetlennek kell lennie, az állandó H mélységűnek feltételezett óceán belsejében $\partial w/\partial z \approx w_+/H$, ahol w_+ a feláramlási sebesség a felső határréteg alján. Az alsó határrétegből felső peremén érvényes w_- sebességet elhanyagoljuk, hiszen az általában sokkal kisebb w_+-nál. (w_--t a 11.3. fejezet óceáni modellje veszi figyelembe.) A (3.45) Sverdrup-reláció szerint a létrejövő geosztrofikus áramlás észak–déli v_g sebességkomponensét az f-síkon a

$$v_g \beta = f_0 \frac{w_+}{H} \tag{4.53}$$

összefüggés határozza meg. A (4.45) sebességet a szélnyírás rotációja adja, és ezzel

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{rot}_z\, \boldsymbol{\tau}}{\beta \varrho_0 H}.} \tag{4.54}$$

Az észak–déli áramlás erősségét a szélnyírás tehát egyértelműen meghatározza. A teljes H mélységben kialakuló áram, azaz a folyadék aljáig leérő egységnyi szélességű felületen átáramló folyadéktérfogat az ún. *Sverdrup-transzport*

$$\boxed{V = \frac{\mathrm{rot}_z\, \boldsymbol{\tau}}{\beta \varrho_0}.} \tag{4.55}$$

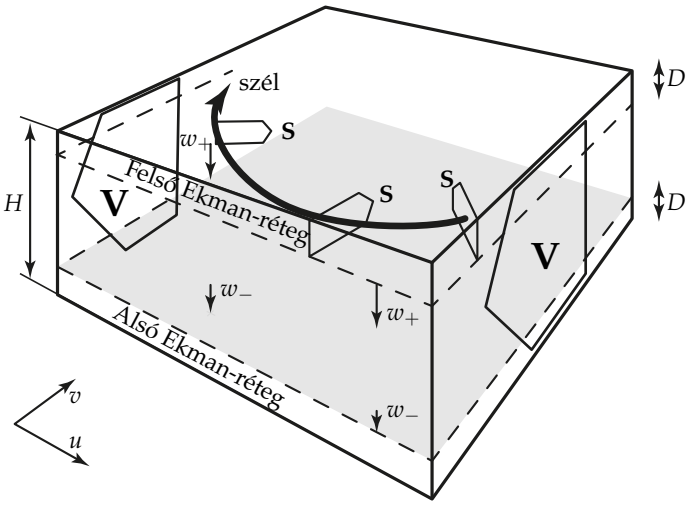
A $\varrho_0 V$ tömegáram nagysága tehát egyszerűen a szélnyírás rotációja és a β paraméter hányadosa. A 4.12. ábra áttekinti a különböző transzportfolyamatokat óceáni medencékben.

Dimenziótlan alakban:

$$V = \frac{Sh}{Be} \mathrm{rot}_z\, \boldsymbol{\tau}. \tag{4.56}$$

A (4.43) Ekman-transzport és a Sverdrup-transzport nagyságrendi viszonyát tehát a dimenziótlan β paraméter adja. Mivel ez egynél kisebb, a teljes Sverdrup-transzport mindig *jelentősebb* a határrétegbeli Ekman-transzportnál. Ha pl. 0,1 $\mathrm{N/m^2}$ nyírófeszültség-különbség 250 km-en lép fel, akkor a Sverdrup-sebesség $v_g = 0{,}01$ m/s és $V = v_g H = 40\ \mathrm{m^2/s}$. Ugyanekkora nyírás hatására az S Ekman-transzport nagysága $1\ \mathrm{m^2/s}$ (az ehhez tartozó kb. 0,025 m/s átlagos sebességnövekmény azonban nagyobb v_g-nél, hiszen a határréteg csak kb. 40 m mély, összhangban a (4.48) alatti megjegyzéssel).

A (4.54) reláció nagy jelentőségű, ugyanis a szélnyírás vagy a feláramlás egész óceáni medencére terjedő ismeretében meghatározza az észak–déli sebességet, de ezzel az egész áramlási teret is, hiszen a geosztrofikus áramlás vezető rendben divergenciamentes (az Ekman-pumpálásból adódó dm/nap nagyságú w_+ függőleges sebesség sok nagyságrenddel kisebb a vízszintes sebességeknél). Az óceáni áramláshoz rendelhető ezért egy ψ geosztrofikus áramlási



4.12. ábra. Transzportfolyamatok szélnyírásnak kitett folyadéktömbben az északi féltekén. **S** jelöli az Ekman-transzportot a felső határrétegben, **V** a Sverdrup-transzportot a teljes mélységben. Az ábra csak a két szélső lapon mutatja, de a Sverdrup-transzport minden pontban jelen van, és ennél a nyírási elrendezésnél az Egyenlítő felé mutat, de nem feltétlenül azonos a két lapon. A w_+ leáramlási sebesség a magassággal lineárisan csökken a $w_- \ll w_+$ értékre.

függvény, (1.58), amellyel $v_g = \partial\psi/\partial x$, és az egyenlet a

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}}{\beta\varrho_0 H} \tag{4.57}$$

alakot ölti. Ez a megfelelő (x, y) síkbeli peremfeltételekkel meghatározza a $\boldsymbol{\tau}$ szélnyírási feszültség következtében kialakuló geosztrofikus áramlási teret.

Mielőtt egy konkrét modellt vizsgálnánk, vezessük be a

$$\Psi \equiv \psi H \tag{4.58}$$

mélységi vagy transzport áramlási függvényt, amely a teljes óceáni mélységben kialakuló anyagáramlást jellemzi.[10] A (4.55) Sverdrup-transzport tehát a Ψ függvény x szerinti deriváltja. Ha két közeli áramvonalon a mélységi áramlási függvény értéke Ψ, illetve $\Psi + \Delta\Psi$, akkor a köztük lévő tartományban egységnyi idő alatt $\Delta\Psi$ térfogatú anyag áramlik át a teljes mélységben. Ez könnyen látszik, ha az áramvonalak x irányúak és távolságuk Δy, ugyanis akkor az áramlás $u \approx \Delta\Psi/(\Delta y H)$ erősségű, és a $\Delta y H$ felületű téglalapon $u\Delta y H = \Delta\Psi$ térfogatú folyadék halad át időegységenként. A mélységi áramlási függvény mértékegysége tehát m^3/s. Az óceáni tipikus térfogati áramerősségek legalább 1 millió m^3/s nagyságúak, amelyek jellemzésére bevezették a Sverdrup-egységet, $1\ \mathrm{Sv} = 10^6\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. A mélységi Ψ függvényre vonatkozó egyenlet tehát

$$\boxed{\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x} = \frac{\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}(x,y)}{\beta\varrho_0}.} \tag{4.59}$$

4.6.2. Egyszerű óceánmodell

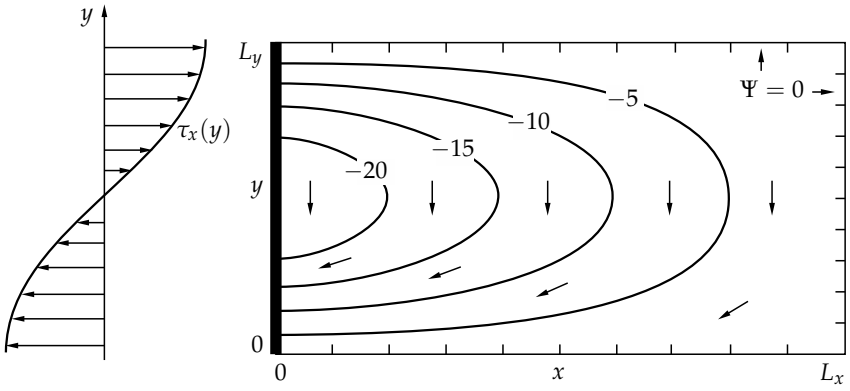
Egy óceáni medence egyszerű modelljeként tekintsünk egy téglalap alakú tartományt, amelynek oldalhosszai L_x, illetve L_y. A medence alsó éle legyen a szubtrópusi vidéken, ahol a passzát

[10] Általános magasságfüggő áramlás esetén Ψ a ψ áramlási függvény z szerinti integrálja.

szelek dominálnak, felső éle pedig a mérsékelt éghajlati övben, ahol a nyugati szelek uralkodnak (4.13. ábra). Éves átlagban a szelek okozta nyírás maximuma, illetve minimuma essen a medence északi és déli határaira. A nyírás erősségének leírására válasszuk a

$$\tau_x(y) = -\tau_0 \cos\frac{\pi y}{L_y}, \qquad \tau_y = 0 \tag{4.60}$$

függvényt, de hangsúlyozzuk, hogy megoldásunk tetszőleges $\tau_x(y)$ mellett érvényben marad. Az $L_x = 6000$ km, $L_y = 4000$ km választás megfelel az Atlanti-óceán méreteinek, amely közelítőleg a 75 és 10 fokos nyugati hosszúsági és a 15 és 50 fokos északi szélességi körök között terül el. A nyírási erősség maximuma $\tau_0 = 0{,}1$ N/m^2, és β átlagos értéke ebben a térségben $\beta = 2 \cdot 10^{-11}$ 1/(ms).[11]



4.13. ábra. Óceáni medence és az uralkodó szelek által kifejtett nyírásból adódó egyszerű modell az északi féltekén. A (4.62) megoldással leírt áramvonalak mellé írt számok a Ψ mélységi áramlási függvény értékét adják Sverdrupban kifejezve (1 Sv $= 10^6$ m^3/s). A vastag vonal erős nyugati part menti peremáramlatot jelöl, amely a növekvő y irányban (északra) áramlik.

A mélységi áramlási függvény (4.59) egyenlete ebben az esetben

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{\beta \varrho_0}\frac{d\tau_x}{dy}. \tag{4.61}$$

A jobb oldal a modell feltevése szerint független x-től, ezért a Ψ függvénynek x-ben lineárisnak kell lennie. Ezzel nyilván csak az egyik észak–déli peremfeltétel elégíthető ki. Válasszuk az $x = L_x$ keleti partvidéket, hiszen ott az áramlás biztosan elegendően sima, és írjuk elő ott az $u = 0$ peremfeltételt. A megoldás tehát

$$\Psi(x,y) = \frac{d\tau_x}{dy}\frac{1}{\beta\varrho_0}(L_x - x) = \frac{\tau_0 \pi}{\beta \varrho_0 L_y}(L_x - x)\sin\frac{\pi y}{L_y}. \tag{4.62}$$

A fenti adatokkal Ψ tipikus értéke néhányszor tíz Sv (4.13. ábra), amely a megfigyelt óceáni áramerősségek nagyságrendjébe esik. A modell összhangban van azzal a képpel, hogy az anticiklonális nyírási örvényességű szélrendszer leáramlást, és a Sverdrup-reláció miatt délre történő geosztrofikus áramlást hoz létre az *egész* medencében (az északi és déli peremek kivételével, ahol $v_g = 0$, mert ott $d\tau_x/dy = 0$).

A nyugati partvidéken az $u = 0$ peremfeltétel nem elégíthető ki: az áramvonalak belefutnak az y tengelyen húzódó partvonalba. A kontinuitás miatt azonban nyilván kialakul egy délről

[11] Ilyen nagy kiterjedésű tartomány leírásakor a β-sík-közelítés érvényességi határán vagyunk.

északra futó áramlás, de ez olyan keskeny, hogy az adott közelítésben nem bontható fel. A nyugati partvonal mentén behúzott vastag vonal egy igen keskeny sávban futó peremáramlatot reprezentál.

Az óceáni medencék nyugati peremein valóban erős *peremáramlatok* (western intensification) figyelhetők meg. Ilyenek a Golf-áramlat, a Japán partjai előtt futó Kurosio-áramlat, a Brazíliai áramlat, a Madagaszkár és Afrika közötti Agulhas-áramlat és a Kelet-Ausztráliai áramlat. Ezek vastagsága több tíz km. A nagy óceáni körök tehát *nem középpontosak* (4.13. és 4.14. ábra), áramlási sebességük a nyugati peremen jóval nagyobb, mint a keletin, ahol a sebesség a nyugati ezredrészére is lecsökkenhet. A nyugati peremáramlatok jelenléte a forgó Föld görbületének egyik *legmeglepőbb* következménye. Fontos vonásaik megjelennek már ideális folyadékközelítésben is, ahogy a 10.3. fejezet mutatja.

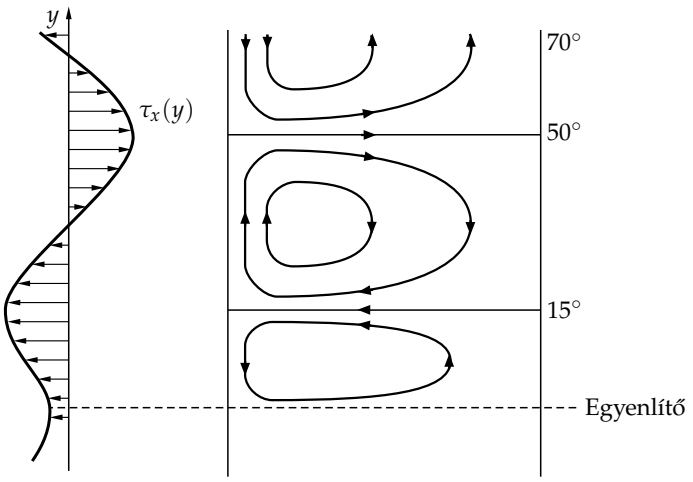
A modell anyagáramának ugyanakkorának kell lennie a nyugati peremen észak felé, mint a medence más részeiben dél felé. Az áramlási függvény maximumát az $x = 0$, $y = L_y/2$ helyen veszi fel, ahol értéke $\Psi_{max} = \tau_0 \pi L_x/(\beta \varrho_0 L_y) \approx 24$ Sv. Mivel a keleti peremen az áramlási függvény eltűnik, a teljes transzport délre 24 Sv, és ezért ugyanennyinek kell lennie az északra irányuló keskeny peremáramlatban. Ez az egyszerű modell meglepően jó összhangban van azzal a ténnyel, hogy a Golf-áramlat erőssége mintegy 30 Sv.

Az egyes sebességkomponensek (4.62)-ból:

$$u = -\frac{\tau_0 \pi^2}{\beta \varrho_0 L_y^2 H}(L_x - x)\cos\frac{\pi y}{L_y}, \qquad v = -\frac{\tau_0 \pi}{\beta \varrho_0 L_y H}\sin\frac{\pi y}{L_y}. \tag{4.63}$$

A medence belsejében a délre mutató sebesség 1 mm/s nagyságrendű, a kelet–nyugati áramlás a medence szélességi körökkel párhuzamos nyugati peremén közel cm/s erősségű.

Laboratóriumban mindez döntött aljú edény forgatásával demonstrálható, amelynek felszínén anticiklonális nyírást hozunk létre, például ventillátorok segítségével, mint ebben a kísérletben. A festékmozgás mutatja, hogy az edény pozitív irányú forgatása esetén a „nyugati" partnak megfelelő perem mentén keskeny sávban gyors az áramlás „észak" felé, míg az edény nagy részén lassú „déli" áramlás figyelhető meg.



4.14. ábra. Az óceáni körök sematikus rendszere és a nyírás átlagos függése a szélességtől

A nagy óceáni medencék áramlását elsősorban az uralkodó szelek és a kontinensek partvonalai alakítják ki. Ezek a 3.9. ábra kapcsán említett anticiklonális óceáni körök. Érdemes hangsúlyozni, hogy kizárólag x irányú nyírás esetén az északi és déli peremnek nem kell partvonalnak

lennie, ugyanis azokon a helyeken, ahol a nyírásnak szélsőértéke van, az áramvonalak automatikusan kelet–nyugati irányúak. Ezek a nagy anticiklonális óceáni körök két ciklonálishoz csatlakoznak, amelyek mérete azonban sokkal kisebb: az egyenlítői és a sarki körökhöz (4.14. ábra).

Az itt bemutatott modell állandó mélységű világóceánt feltételezve, de a valóságos partvonalakkal és a mért átlagos szelek nyírási erősségével megoldva jól közelíti felszíni áramlások megfigyelt térképét. A modell finomítása véges vastagságúnak adja a nyugati peremáramlatokat, ahogy a 11.3. fejezetben látni fogjuk.

5. fejezet

Rétegzett közegek áramlása

Természetes közegeink, a víz és a levegő nem homogének, függőleges rétegzettségűek, sztratifikáltak. Hosszú idők átlagában felfelé csökkenő sűrűségű, vízszintes rétegekből álló rendszereknek tekinthetők. A rétegzettséget okozó $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbségek a tapasztalat szerint legfeljebb néhány százalékosak, ezért a függőleges mozgások gyorsaságát a $g' = g\Delta\varrho/\varrho_0$ redukált nehézségi gyorsulás szabja meg, ahol $\Delta\varrho$ a jellegzetes sűrűségkülönbség nagysága és ϱ_0 az átlagsűrűség. Ez a légkörben 10–20-szoros, az óceánokban ezerszeres redukciót jelent. A statikus rétegzettség tehát viszonylag gyenge.

Ha a felszíni mozgás elhanyagolható, a nem forgatott rendszerek áramlását egyetlen dimenziótlan arányszám jellemzi, az ún. *belső Froude-szám*, amely a H vastagságú közeg U vízszintes átlagsebességű áramlásában

$$\boxed{Fr' = \frac{U}{\sqrt{g'H}}.} \tag{5.1}$$

A belső Froude-szám tehát ugyanúgy fejezhető ki a sűrűségkülönbség következtében kialakuló redukált nehézségi gyorsulással, mint a külső (2.1) Froude-szám a teljes g-vel. A rétegzettség az áramlás szempontjából akkor lényeges, ha a belső Froude-szám egynél kisebb. Értéke a légkörben 10^{-1}, az óceánban 10^{-2} körüli. Természetes közegeinkben a rétegződés tehát dinamikai szempontból lényeges, annak ellenére, hogy statikai értelemben gyenge. Ezek a feltételek könnyen biztosíthatók laboratóriumi kísérletekben is. A Froude-szám (5.1) alakja természetes választás kétrétegű közegekben, amikor $\Delta\varrho$ a két eltérő sűrűségű réteg közötti sűrűségkülönbséget jelenti.

Ha a rétegzettség folytonos, adott sűrűségű test (léggömb, bója) megtalálja lebegési szintjét. Felfelé csökkenő rétegzettségű közegben a folyadékrészek nyugalmi állapota stabil (míg homogén közegben csak marginálisan stabil). A stabilitást az mutatja, hogy a függőlegesen kimozdított részecske rezgőmozgást végez nyugalmi helyzete körül. Ennek frekvenciáját, az N ún. *Brunt–Väisälä-frekvenciát* a függőleges irányú sűrűséggradiens határozza meg. Ez a frekvencia a rétegzett folyadék alapvető jellemzője, és értéke annál nagyobb, minél erősebb a rétegzettség. Folytonos rétegzettségű közegekben a belső Froude-szám

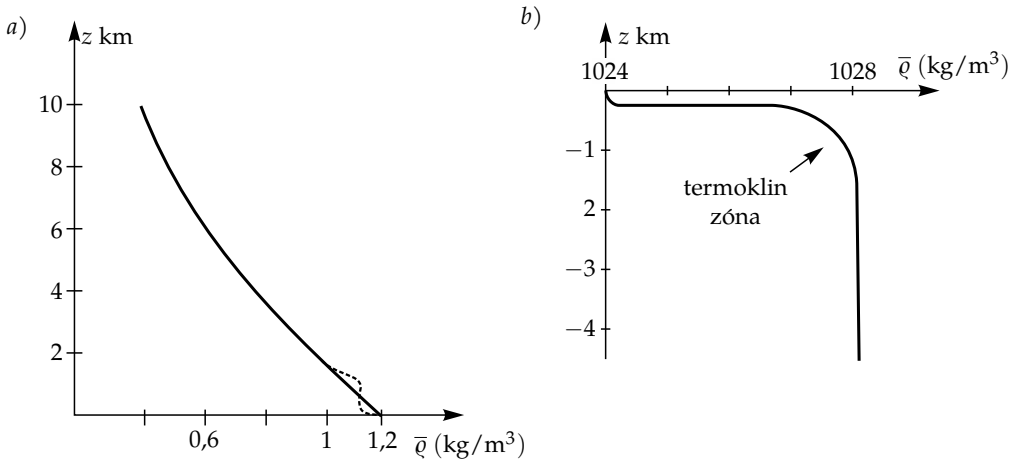
$$\boxed{Fr' = \frac{U}{HN}} \tag{5.2}$$

alakja használatos, amely tartalmilag egyenértékű (5.1)-gyel. A gyenge statikus rétegzettség miatt a Brunt–Väisälä-frekvencia a hétköznapi életben tapasztaltakhoz képest alacsony frekvencia,

a légkörben és az óceánban is 10^{-2} 1/s nagyságrendű. Ebből az is következik, hogy a rétegzettséggel kapcsolatos hidrodinamikai mozgások mindig lassúak, jellegzetes idejük 10 perc körüli.

5.1. Folyadékok rétegzettsége

A rétegződés a gravitáció hatására alakul ki, a folyadék a legkisebb potenciális energia elérésére törekszik. A stabil rétegződésben ezért a nagyobb sűrűségű anyag kerül alacsonyabb szintre. A természetes közegek rétegzettségét olyan hétköznapi megfigyelések bizonyítják, mint a köd vagy a felhőréteg élesen kirajzolódó határa.



5.1. ábra. Az alsó légkör, a troposzféra (a) és az óceánok (b) tipikus átlagos sűrűségeloszlása. A légkör alsó határrétege időnként jól kevertté válik. Ebben a planetáris határrétegben a sűrűség közel állandó (pontozott vonal). Jól kevert közeg az óceánok felső határrétegének ún. keveredési rétege is. Alatta gyors sűrűségnövekedés következik be az ún. termoklin zónában, majd a sűrűség közel állandóvá válik.

A folytonos rétegzettség egy $\overline{\varrho}(z)$ átlagos sűrűségprofillal jellemezhető, amely csak a függőleges, z koordinátától függ. A légkör sűrűsége monoton csökken a magassággal (5.1a. ábra), kilométerenként kb. 6 dkg/m^3-rel, tehát a felszíni 1,2 kg/m^3 sűrűség kb. öt százalékával. A Föld felszíne fölötti réteg gyakran turbulenssé válik, és ez a *planetáris határréteg*, ami a benne turbulensen kevert nagy por- és szennyezéstartalom miatt megfigyelhető pl. repülőgép leszállása közben. Ez a jól kevert, közel állandó sűrűségű réteg minden szélességen létezik. Az egyenlítőtől távol, ahol a Coriolis-hatás jelentős, kiterjedését tekintve gyakran egybeesik a légköri alsó Ekman-réteggel. A planetáris határréteg vastagsága a földrajzi hely, évszak és napszak függvénye, de átlagosan 1 km körülinek tekinthető. Az óceáni sűrűségprofilban (5.1b. ábra) a felső, néhányszor 10 m-es *keveredési réteg* erősen turbulens. Ebben alig változik a sűrűség, utána következik a legjelentősebb sűrűség- és hőmérséklet-gradienssel jellemzett ún. *termoklin zóna* a több száz méteres, esetleg 1 km-es mélységig, amelyet egy igen lassú sűrűségnövekedés követ. A sűrűségkülönbség még a termoklin zóna felső és alsó határa között is csak néhány kg/m^3, azaz a felszíni 1024 kg/m^3 sűrűségnek csak néhány ezreléke. A tavakban kialakuló sűrűségeloszlás a tengeri eloszlásnak kicsinyített változata, ahol a termoklin zóna a néhány méteres mélységben is kezdődhet.

Laboratóriumban folytonos rétegzettség csökkenő koncentrációjú só- vagy cukoroldat lassú beáramoltatásával állítható elő, de 10 százaléknál sokkal nagyobb sűrűségkülönbség a véges telítettségek miatt nem állítható elő. Ez a különbség néhányszor 10 cm-en is eloszolhat, tehát a

gradiens lehet nagyobb, mint a természetben. Dinamikai szempontból azonban nem a gradiens erőssége, hanem annak az áramlási paraméterekkel kapcsolatba hozott dimenziótlan kifejezése, az (5.1), (5.2) belső Froude-szám a fontos.

Ha néhány, viszonylag vastag és közel állandó, de egymástól eltérő sűrűségű réteg helyezkedik el egymás fölött, két, három stb. rétegű rétegzettségről beszélünk. Ilyenkor a $\overline{\varrho}(z)$ eloszlás szakaszonként konstans. Első közelítésben az óceáni és tavi vizek kétrétegűnek tekinthetők: a keveredési tartomány és az alatta elhelyezkedő homogénnek gondolt sűrűbb folyadék együttesének. A légkörben gyakran jelentős sűrűségugrások alakulnak ki, de a planetáris határréteg és a fölötte elhelyezkedő légréteg is modellezhető kétrétegű közegként. Akár a folytonos, akár a diszkrét esetről van is szó, a jellegzetes $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbség sokkal kisebb a ϱ_0 átlagos sűrűségnél:

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} \ll 1. \tag{5.3}$$

A rétegzett nem forgatott dinamika érdekes párhuzamba állítható a forgatott homogén folyadékéval. Ezért egyelőre a folyadék sekélységét nem tételezzük fel, és a Föld forgását és görbületét sem vesszük figyelembe. A mély folyadékkal kezdünk, majd rátérünk a sekély rétegzett közeg tárgyalására, de a közelítések eddig kialakított rendszeréhez a 6. fejezetben térünk csak vissza, ahol a forgatott sekély rétegzett folyadék nagy kiterjedésű földfelszíni mozgásait tanulmányozzuk majd.

5.2. A Brunt–Väisälä-frekvencia

Tekintsünk egy folytonos $\overline{\varrho}(z)$ sűrűségprofilú, nyugalomban levő folyadékot. Ha a z szintről egy egységnyi térfogatú folyadékelemet kissé kimozdítunk és a $z + \Delta z$ szintre juttatunk, akkor az ott nem marad nyugalomban, hiszen más sűrűségű környezetbe került, és a rá ható felhajtóerő megváltozott. A folyadék összenyomhatatlansága azt jelenti, hogy a térfogat a mozgás során is egységnyi marad, a folyadékelem sűrűsége az új szinten is $\overline{\varrho}(z)$, a környezeté viszont $\overline{\varrho}(z + \Delta z)$. A súly a kiszorított folyadék $g\overline{\varrho}(z + \Delta z)$ súlyával csökken, tehát az eredő erős a $z + \Delta z$ szinten, a felfelé növekvő z irányt tekintve pozitívnak:

$$g(\overline{\varrho}(z + \Delta z) - \overline{\varrho}(z)) \approx g\frac{d\overline{\varrho}(z)}{dz}\Delta z. \tag{5.4}$$

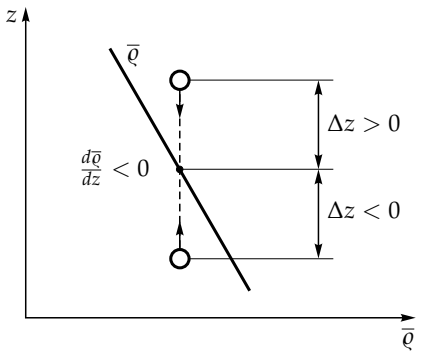
A $\overline{\varrho}(z)$ sűrűségű egységnyi térfogatú folyadékelem mozgásegyenlete

$$\ddot{\Delta z} = \frac{g}{\overline{\varrho}(z)}\frac{d\overline{\varrho}(z)}{dz}\Delta z. \tag{5.5}$$

Ha a sűrűség felfelé csökken (5.2. ábra), akkor akármilyen irányú is a Δz kitérés, a gyorsulás mindig vele ellentétes. Így kis kitérésekre harmonikus rezgés alakul ki az $N(z)$ (általános esetben magasságfüggő) frekvenciával, ahol

$$\boxed{N^2(z) = -\frac{g}{\overline{\varrho}(z)}\frac{d\overline{\varrho}(z)}{dz}.} \tag{5.6}$$

E frekvencia a rétegzettségi vagy Brunt–Väisälä-frekvencia (D. Brunt (1886–1965) angol matematikus, meteorológus, V. Väisälä (1889–1969) finn matematikus, meteorológus, akik szinte egyszerre és egymástól függetlenül mutatták ki e frekvencia fontosságát rétegzett folyadékokban). Homogén folyadékban, ahol a derivált eltűnik, a Brunt–Väisälä-frekvencia zérus, és ott



5.2. ábra. Felfelé csökkenő sűrűségű rétegzettség esetén a nyugalmi állapotából felfelé kimozdított összenyomhatatlan folyadékelem a saját sűrűségénél ritkább közegbe kerül, az erők eredője lefelé hat. Lefelé mozdítva sűrűbb közegbe kerül, a rá ható erők eredője felhajtó hatású. A nyugalmi állapot stabil, a körülötte kialakuló rezgések frekvenciája az N Brunt–Väisälä-frekvencia.

rezgés nem is alakulhat ki. Ugyanakkor (5.6)-ból látszik, hogy felfelé növekvő sűrűség imaginárius frekvenciára vezet, a kitérített részecske egyre messzebb kerül eredeti szintjétől, azaz a fölfelé növekvő sűrűségű rétegződés instabil. A közeg összenyomhatósága a Brunt–Väisälä-frekvenciát valamelyest módosítja, amit a 12.6. fejezet mutat be.

A H vastagságú, az alsó és felső tartományai közötti $\Delta\varrho > 0$ sűrűségkülönbségű közegben a Brunt–Väisälä frekvencia négyzete (5.6) alapján az

$$N^2 \approx g\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0}\frac{1}{H} = \frac{g'}{H} \tag{5.7}$$

kifejezéssel becsülhető,[1] ahol megjelent a

$$\boxed{g' = g\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0}} \tag{5.8}$$

redukált nehézségi gyorsulás. Az elnevezés arra utal, hogy a felhajtóerő következtében a súly kisebb a vákuumbelinél. A sűrűségkülönbség kicsinységét kifejező (5.3) feltétel szerint

$$\boxed{g' \ll g,} \tag{5.9}$$

azaz természetes közegeinkben a redukció *jelentős*. A rétegzett folyadék függőleges irányú mozgásait a redukált g' szabályozza, és ezért azok jóval *lassabbak* a szabad felszíni mozgásoknál.

A troposzférában a Brunt–Väisälä-frekvencia $H = 1$ km-en $\Delta\varrho/\varrho_0 = 5$ százalékos redukciót véve, (5.7) alapján becsülhető mint $N = 2{,}2 \cdot 10^{-2}1/\mathrm{s}(T \approx 5$ perc$)$. Az óceáni legnagyobb érték a termoklin zónában alakul ki. Itt 2,5 ezrelék relatív sűrűségváltozással és 600 m-es rétegvastagsággal számolva $N \approx 6 \cdot 10^{-3}$ 1/s frekvenciát kapunk ($T \approx 17$ perc). Laboratóriumban ($\Delta\varrho/\varrho_0 = 0{,}1$ és $H = 1$ m) N közelítőleg 1 1/s, amely 6 másodperces T periódusidőt jelent.

5.3. Hidrodinamikai egyenletek kis sűrűségeltérés esetén, a Boussinesq-közelítés

A természetes közegek rétegzettsége, mint láttuk, csak néhány százaléknyi sűrűségingadozást enged meg. Ezért nincs szükség az összenyomható folyadékok mozgását megadó teljes hid-

[1] A (5.7) összefüggés biztosítja (5.1) és (5.2) egyenértékűségét.

rodinamikai egyenletre, amely pl. hang- vagy lökéshullámokat is leír, hanem elegendő a sűrűségváltozásokat vezető rendben figyelembe venni. Ez az ún. Boussinesq-közelítés keretében tehető meg.

A közelítés alapfeltevése, hogy a teljes sűrűség mindig írható mint

$$\varrho(\mathbf{r},t) = \varrho_0 + \varrho''(\mathbf{r},t), \qquad |\varrho''(\mathbf{r},t)| << \varrho_0, \tag{5.10}$$

ahol ϱ_0 konstans, helytől és időtől független referenciasűrűség, pl. a troposzféra vagy az óceánok átlagos sűrűsége. Ehhez képest a $\varrho''(\mathbf{r},t)$-vel jelölt sűrűségeltérés[2] minden helyen és pillanatban kicsi, összhangban az átlagos sűrűségkülönbségre vonatkozó (5.3) megfigyeléssel. Mivel forgatott rendszerekben nemcsak függőleges rétegezettség alakulhat ki, hanem ferde is (ami persze nem feltétlenül stabil), és szeretnénk, hogy az alapegyenletek majd forgatás mellett is érvényben maradjanak, az esetleges $\overline{\varrho}(z)$ egyensúlyi rétegezettséget az (5.10) felbontás nem veszi figyelembe, arra a következő fejezetben kerül sor.

Az (1.26) kontinuitási egyenlet (5.10) értelmében:

$$\frac{d\varrho''}{dt} + \varrho'' \operatorname{div}\mathbf{v} + \varrho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{5.11}$$

A $\varrho''(\mathbf{r},t)$ sűrűségeltérés kicsinysége miatt az utolsó tag jóval nagyobb, mint az első kettő, amit úgy is tekinthetünk, hogy a sebességtér divergenciája (ϱ''-vel arányos hibával) eltűnik. A Boussinesq-közelítés ezt úgy fogalmazza meg, hogy az (5.11) egyenletet két részre bontja: a divergencia eltűnik,

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,} \tag{5.12}$$

miközben

$$\boxed{\frac{d\varrho''}{dt} = 0 = \frac{\partial\varrho''}{\partial t} + (\mathbf{v}\operatorname{grad})\varrho''} \tag{5.13}$$

is érvényes.

Az (5.12) összefüggés a mozgó folyadékelem térfogat-megmaradását írja le. Az áramlás tehát a sűrűségváltozások ellenére is divergenciamentes marad. Ennek egyik fontos következménye, hogy a viszkózus tagot egyedül a sebesség Laplace-operátora adja az (1.24) Navier–Stokes-egyenletben.

Az (5.13) egyenlet azt fejezi ki, hogy a folyadékelem mozgása során *megtartja* sűrűségeltérését, hiszen d/dt a teljes deriváltat jelenti. Az így leírt áramlást is összenyomhatatlannak nevezzük, de ebben a sűrűség csak pályavonalak mentén állandó, az egész térben nem az.

Megjegyzés: Az (5.13) egyenlettől való eltérésre hővezetési és diffúziós folyamatok vezethetnek. A diffúzióban résztvevő két, kezdetben közeli részecske (pl. szennyezőanyag) átlagos δr távolsága t idő után nyugvó közegben $\delta r = \sqrt{2Dt}$, ahol D a diffúziós állandó. A só diffúziós állandója vízben $1{,}4 \cdot 10^{-9}$ m^2/s, amellyel δr 1 nap után 1,6 cm, de még egy év alatt is csak kb. 30 cm! A hődiffúziós állandó vízben mintegy százszor nagyobb, a vízgőz diffúziós állandója levegőben pedig ismét százszor (lásd 7.1. táblázat). Az utóbbival tehát napi 1,6 m-es elmozdulás jár. Még a turbulencia révén felerősödött mintegy 5 m^2/s-os levegőbeli diffúziós együttható is csak körülbelül 1 km-es távolságra vezet. A diffúziós és hővezetési folyamatok tehát a planetáris határrétegben és az óceáni keveredési rétegben lényegesek,[3] de annál nagyobb méretekben

[2] A sűrűség- és nyomáseltérésekre azért használunk itt kétvesszős jelölést, hogy megkülönböztessük a korábban is már használt egyvesszős dinamikai nyomástól (1.39), és a hozzá tartozó ϱ' sűrűségeltéréstől, amelyet az 5.4. fejezetben vezetünk be.

[3] Amint az 5.14. fejezetben látjuk.

a többnapos időskálán *elhanyagolhatók*. Az (5.12), (5.13) egyenletek tehát nagyléptékű folyamatokban érvényesek.

A Boussinesq-közelítés másik fontos eleme, hogy a Navier–Stokes-egyenlet minden olyan kifejezésében, amely a teljes ϱ sűrűséget tartalmazza, vezető rendben ϱ_0-t írhatunk. Az egyedüli kivétel a függőleges sebesség, ugyanis annak egyenletében a felhajtóerő alapvető szerepet játszik. Válasszuk le ezért a ϱ_0 sűrűséghez tartozó hidrosztatikus $p_0(z) = p_0 - \varrho_0 g z$ nyomáseloszlást a teljes nyomásról:

$$p(\mathbf{r},t) \equiv p_0(z) + p''(\mathbf{r},t). \tag{5.14}$$

Az (1.24) Navier–Stokes-egyenletben a nyomási erő és a súly $-\operatorname{grad} p - g\varrho\mathbf{n}$ eredője úgy is írható, mint $-\operatorname{grad} p'' + g\varrho_0\mathbf{n} - g\varrho\mathbf{n} = -\operatorname{grad} p'' - g\varrho''\mathbf{n}$, azaz kifejezhető a sűrűség- és nyomáseltéréssel. A Navier–Stokes-egyenlet így a

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad} p'' - g\frac{\varrho''}{\varrho_0}\mathbf{n} + \nu\Delta\mathbf{v}} \tag{5.15}$$

alakot ölti. Itt a ν kinematikai viszkozitást a ϱ_0 referenciasűrűséggel képezzük. A jobb oldalon a g helyett a $g\varrho''/\varrho_0$ redukált gyorsulás jelenik meg ((5.8) lokális megfelelője). A fenti (5.12)–(5.15) egyenletek írják le a tetszőlegesen (de gyengén) rétegezett folyadék mozgását Boussinesq-közelítésben.

A rétegzett folyadék *baroklin*, vagyis mozgása során az állandó sűrűségű és állandó nyomású felületek *nem* esnek egybe. Az olyan folyadékok, amelyekben az említett felületek egybeesnek (pl. összenyomhatatlan homogén folyadék), *barotrópok*. A baroklinitás fontos következménye az, hogy a sűrűséginhomogenitások okozta térfogati erők a közegre forgatónyomatékot fejtenek ki. Ezért a cirkuláció még az ideális, *nem forgatott* rétegzett folyadékban sem állandó (13.1. fejezet).

5.4. Hidrodinamikai egyenletek függőleges rétegzettség és kis sűrűségeltérés esetén

Függőleges rétegzettségű esetben célszerűbb az adott $\overline{\varrho}(z)$ sűrűségprofiltól való eltérést jelentő $\varrho'(\mathbf{r},t)$ mennyiséget használni, azaz azt írni, hogy

$$\varrho = \overline{\varrho} + \varrho' = \varrho_0 + \varrho''. \tag{5.16}$$

Mivel a $\overline{\varrho}(z)$ stacionárius profilhoz áramlás nem tartozik, a $\varrho'(\mathbf{r},t)$ eltérést dinamikai sűrűségnek nevezik. A $\overline{\varrho}(z)$ profilhoz tartozó $\overline{p}(z)$ nyomáseloszlásnak ki kell elégítenie az (1.24) Navier–Stokes-egyenletet a mozgásmentes esetben, ezért fennáll a

$$0 = -\operatorname{grad}\overline{p} - g\overline{\varrho}\mathbf{n} \tag{5.17}$$

hidrosztatikai összefüggés. Mozgást nyilván a $\overline{p}$, $\overline{\varrho}$ eloszlásoktól való eltérés hozhat csak létre. Vezessük be ezért a

$$p(\mathbf{r},t) = \overline{p}(z) + p'(\mathbf{r},t) = p_0(z) + p''(\mathbf{r},t) \tag{5.18}$$

felbontással a p' dinamikai nyomást, amely az (1.39) egyenlettel definiált dinamikai nyomás általánosítása (homogén közegben $p' = p''$). Ezek alapján $-\operatorname{grad} p'' - g\varrho''\mathbf{n} = -\operatorname{grad} p' - g\varrho'\mathbf{n}$, vagyis a nyomási erő és a súly eredője ugyanúgy fejezhető ki a dinamikai nyomással és sűrűséggel, mint a p'' és ϱ'' eltérésekkel.

A függőleges rétegzettségű folyadék egyenletei tehát

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}\,p' - g\frac{\varrho'}{\varrho_0}\mathbf{n} + \nu\Delta\mathbf{v},} \tag{5.19}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad})\varrho' = -w\frac{d\overline{\varrho}}{dz} = w\frac{\varrho_0}{g}N^2(z),} \tag{5.20}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0.} \tag{5.21}$$

A ϱ''-re vonatkozó (5.13) sűrűségegyenlet $\varrho' = \varrho'' + \varrho_0 - \overline{\varrho}$-ra történő átírásában felhasználtuk, hogy $\overline{\varrho}$ csak a függőleges koordinátától függ, és behelyettesítettük a Brunt–Väisälä-frekvencia (5.6) definícióját. Ez az egyenletrendszer a függőleges rétegzettséggel kapcsolatos mozgásokat írja le Boussinesq-közelítésben.

5.5. A dimenziótlan alak, a belső Froude-szám jelentése

Érdemes a folytonos sztratifikációjú eset egyenletét dimenziótlan alakba írni. Mérjük a vízszintes síkbeli távolságot valamilyen L jellemző kiterjedés egységében, a függőlegest a folyadék H mélysége, a vízszintes sebességet pedig az U karakterisztikus sebesség egységében. Az időegység L/U. A dinamikai nyomás mértékegységét (forgatás hiányban) $\varrho_0 U^2$-nek választjuk. A ϱ' dinamikai sűrűség nagyságrendjét az adja meg, hogy a $g\varrho'/\varrho_0$ redukált gravitációs gyorsulás összemérhető a dinamikai nyomásból származó $(1/\varrho_0)\partial p'/\partial z$ függőleges irányú gyorsulással. A ϱ' dinamikai sűrűség tipikus értéke ezért $\varrho_0 U^2/(gH)$. A továbbiakban, ha csak külön nem említjük, feltesszük, hogy az N Brunt–Väisälä-frekvencia állandó. A függőleges sebesség W karakterisztikus nagysága az (5.20) egyenlet alapján a dinamikai sűrűség időderiváltja osztva $\varrho_0 N^2/g$-vel, tehát

$$W = \frac{U^3}{LHN^2}. \tag{5.22}$$

Az

$$\begin{gathered} x, y \to Lx, Ly, \qquad z \to Hz, \qquad \mathbf{u} \to U\mathbf{u}, \qquad w \to Ww, \\ t \to \frac{L}{U}t, \qquad p' \to \varrho_0 U^2 p', \qquad \varrho' \to \frac{\varrho_0 U^2}{gH}\varrho' \end{gathered} \tag{5.23}$$

áthelyettesítéssel a

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\,\mathrm{grad}\,p' + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{u}, \tag{5.24}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{Fr'^2}\frac{L^2}{H^2}\left(\frac{\partial p'}{\partial z} + \varrho'\right) + \frac{1}{Re}\Delta w, \tag{5.25}$$

$$\frac{d\varrho'}{dt} = w \tag{5.26}$$

dimenziótlan egyenleteket kapjuk,[4] miközben a divergenciamentesség (5.12) alakja változatlan. Az (5.25) egyenletben megjelenik a belső Froude-szám az (5.2) alakban.

[4] A teljes derivált dimenziótlan alakja, (5.27)-et is figyelembe véve, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\,\mathrm{grad} + Fr'^2 w\partial/\partial z$, és $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + (L/H)^2\partial^2/\partial z^2$.

A belső Froude-szám értéke légköri és óceáni példákban is 10^{-2} körüli. A légköri becslés $U = 10\,\mathrm{m/s}$-mal ($N = 2 \cdot 10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$, $H = 10\,\mathrm{km}$) $Fr' = 5 \cdot 10^{-2}$. A termoklin zónabeli $N = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ értékkel, $H = 600$ m mélységgel és $U = 0{,}1$ m/s-os sebességgel számolva $Fr' = 3 \cdot 10^{-2}$. Ugyanezek az értékek laboratóriumban ($N = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, $H = 1$ m) $U = 3 - 5$ cm/s-os sebességgel kaphatók meg.

Érdemes említeni, hogy a függőleges sebesség (5.22) becslése a belső Froude-számmal írható úgy is, mint

$$\frac{W/H}{U/L} = Fr'^2. \tag{5.27}$$

Fr' tehát meghatározza, hogy milyen erős lehet a feláramlás, pontosabban a $\partial w/\partial z$ derivált értéke a vízszintes síkbeli divergencia U/L nagyságrendjéhez viszonyítva. Annak ellenére, hogy a vízszintes és függőleges méreteket megkülönböztettük, a folyadék sekélységét nem tételeztük föl. A belső Froude-szám kicsinysége, az erős rétegezettség azonban éppolyan típusú megszorítást ír elő a W/U viszonyra, mint a sekélység. Erősen rétegzett folyadékban a feláramlások gyengék.

5.6. Analógia a forgatott homogén folyadékkal

A belső Froude-szám (5.2) definíciója hasonló a Rossby-szám (1.1) kifejezéséhez. Mindkettőben a vízszintes sebességet hasonlítjuk össze egy távolság és frekvencia szorzatával. A Rossby-számban azonban a vízszintes, a Froude-számban pedig a függőleges méret jelenik meg. Ebben fejeződik ki az eltérítő Coriolis-erő és a nehézségi erő irányának különbözősége.

5.1. táblázat. A rétegzett, nem forgatott és forgatott, homogén folyadékok jellemzői közötti megfeleltetés. A belső hullámokról a következő fejezetben lesz szó.

	RÉTEGZETT FOLYADÉK	FORGATOTT FOLYADÉK
Frekvencia	N	$\lvert 2\Omega \rvert$
Lényeges irány	függőleges	vízszintes
Tipikus méret	H	L
Dimenziótlan szám	$Fr' = \frac{U}{HN}$	$Ro = \frac{U}{\lvert 2\Omega \rvert L}$
Jelenség	blokkolás	Taylor-oszlop
Ennek feltétele	$Fr' \ll 1$	$Ro \ll 1$
Hullám	belső	tehetetlenségi
Diszperziós reláció	$\omega_0 = \pm N \cos\theta$	$\omega_0 = \pm 2\Omega \sin\theta$

A dinamikai szempontból erős rétegezettség, éppúgy, mint a gyors forgatás, az áramlást kétdimenzióssá teszi. Látszik ez az (5.27) összefüggésből is, hiszen $Fr' \to 0$ mellett $W \to 0$. Ha egy rétegezett folyadékot tartalmazó edényben akadályt, pl. vízszintes tengelyű hengert mozgatunk lassan a vízszintes síkban, akkor az a vastagságának megfelelő folyadékréteget maga előtt tolja, illetve maga mögött húzza, anélkül, hogy a közeg az akadályt körülfolyná. Az adott réteg tehát együtt mozog az akadállyal, mert fel- leáramlás nem lehetséges. Ez az ún. *blokkolási jelenség* (blocking) homogén folyadékban nem fordul elő, és a Taylor-oszlopok analogonja rétegzett közegekben.

Bár mind a gyors forgatás, mind az erős rétegzettség kétdimenziós viselkedésre vezet, az előbbiben a vízszintes, az utóbbiban a függőleges méret a lényeges. Ezért az analógia teljessé tételéhez ezen irányok felcserélése is szükséges, amint az 5.1. táblázat mutatja.

Az előző fejezet példái mutatják, hogy a természeti áramlások nem extrém erősen rétegezettek, hiszen belső Froude-számuk nem rendkívül kicsi. Sőt ezen számok nagyságrendje megegyezik a tipikus Rossby-számokéval (0,1 körüli), amiből az következik, hogy a környezeti áramlások szempontjából a rétegzettség és a forgatás összemérhető fontosságú (6.4. fejezet).

5.7. Belső hullám

A rétegzett folyadék kollektív mozgásában a Brunt–Väisälä-frekvenciájú rezgés megfelelője egy speciális hullámfajta, a belső hullám.

5.7.1. Síkhullámmegoldások

A peremektől távol, az (5.19)–(5.21) hidrodinamikai egyenleteket kis amplitúdójú mozgásra alkalmazva a másodrendűen kicsiny advektív gyorsulások elhanyagolhatók, és egy lineáris változathoz jutunk. A megoldást az egyszerűség kedvéért y irányban eltolásinvariánsnak tételezve kereshetjük síkhullám alakban. Tételezzük fel, hogy

$$\left(u, w, \frac{p'}{\varrho_0}, -\frac{\varrho' g}{\varrho_0 N}\right) = (u_0, w_0, P_0, r_0)\, e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)}, \tag{5.28}$$

ahol $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ a hullámszám-vektor, ω_0 a hullám frekvenciája. Ezzel elhanyagolható viszkozitás esetén, állandó Brunt–Väisälä-frekvenciát feltételezve (5.19)–(5.21)-ből az

$$-i\omega_0 u_0 = -ik_x P_0, \qquad -i\omega_0 w_0 = -ik_z P_0 + N r_0, \tag{5.29}$$

$$-i\omega_0 r_0 = -N w_0, \qquad k_x u_0 + k_z w_0 = 0 \tag{5.30}$$

polarizációs egyenletekhez jutunk.

Vegyük észre, hogy ez ekvivalens a tehetetlenségi hullámokra kapott (1.79)–(1.82) rendszerrel, ha ott az

$$u_0 \to w_0, \quad w_0 \to u_0, \quad v_0 \to r_0, \quad 2\Omega \to N, \quad k_x \to k_z, \quad k_z \to k_x \tag{5.31}$$

helyettesítést alkalmazzuk az előző fejezetben és az 5.1. táblázatban említett iránycserével összhangban. Az y irányú sebesség helyett most a sűrűségváltozás jelenik meg, és 2Ω szerepét a Brunt–Väisälä-frekvencia veszi át.

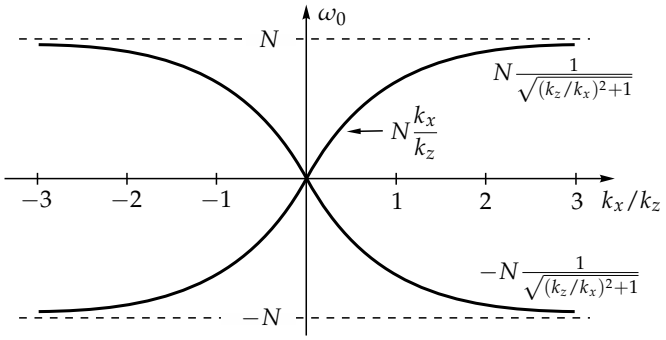
Az analógia alapján is látható, hogy az x, z síkban terjedő belső hullámok diszperziós relációja

$$\boxed{\omega_0\,(k_x, k_z) = \pm N \frac{k_x}{k} = \pm N \cos\theta,} \tag{5.32}$$

ahol θ a $\mathbf{k}$ vektor vízszintes tengellyel bezárt szöge[5] és $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ (5.3. ábra). A $\pm$ előjel azt fejezi ki, hogy minden hullámszámvektorhoz tartozik egy vele azonos és ellentétes irányban haladó hullám is. A $\cos\theta$ tényező mutatja, hogy a hullám frekvenciája felülről korlátos: nem lehet nagyobb az N értéknél : $|\omega_0| \leq N$. A legnagyobb frekvenciájúak a vízszintes irányába

[5] Az összefüggés y irányban is terjedő hullámokra is érvényes, amikor θ a hullámszámvektornak a vízszintes síkkal bezárt szögét jelöli.

haladó hullámok ($k_z = 0$), amelyekben a folyadékrészecskék függőlegesen mozognak a Brunt–Väisälä-frekvenciával. A belső hullámok $|\omega_0|/N$ aránya tekinthető belső Froude-számnak is, értéke $\cos\theta$, tehát egységnyi nagyságrendű, vagyis a hullámokban nem erős a rétegzettség. Kivételt képez a függőleges terjedés esete ($k_x \to 0$), amikor a hullámzás megszűnik: $\omega_0 \to 0$ ($Fr' \to 0$), összhangban a blokkolási jelenséggel.



5.3. ábra. A belső hullámok $\omega_0(k_x/k_z)$ diszperziós relációja ($k_y = 0$). N-nél nagyobb frekvenciájú belső hullámok nem létezhetnek. A nyílhoz tartozó alak az origó környékén érvényes. A $N \to 2\Omega$, $k_x \leftrightarrow k_z(\cos\theta \to \sin\theta)$ cserével a tehetetlenségi hullámok diszperziós relációját kapjuk (1.13. ábra).

A Brunt–Väisälä-frekvenciánál gyorsabban rezgő belső hullámok *nem gerjeszthetők*. Gyors gerjesztés esetén ugyanis a részecskéknek nincs lehetőségük saját, N-nél nem nagyobb frekvenciájú rezgésük kialakítására, ezért az energiaátadás lokális marad és nem vezet hullámterjedésre.

Az (5.30) egyenletből látszik, hogy a sebességtér merőleges a hullámszámvektor irányára, a hullám transzverzális (5.4. ábra). A folyadékelemek tehát a vízszintessel $\pi/2 - \theta$ szöget bezáró „lejtőn" mozognak. A nehézségi gyorsulás lejtő irányú komponense $g\cos\theta$, és a rezgés frekvenciája ezért a Brunt–Väisälä-frekvencia $\cos\theta$-szorosa. A polarizációs egyenletek szerint, ha u_0, w_0 valós, akkor P_0 is az, de r_0 imaginárius. Ez azt jelenti, hogy a nyomás-, és sűrűségmaximumok negyed periódus különbséggel követik egymást. u_0, w_0 azonos fázisban van, a hullám lineárisan polarizált.

5.7.2. Fázis és csoportsebesség

A belső hullámok sebessége az x és z irányban

$$c_x = \frac{\omega_0}{k_x} = \pm N\frac{1}{k}, \qquad c_z = \frac{\omega_0}{k_z} = \pm N\frac{k_x}{k_z k}. \tag{5.33}$$

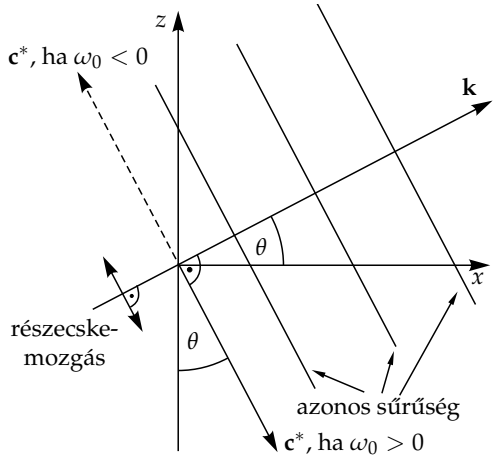
Az energia terjedését megadó $\mathbf{c}^*$ csoportsebességre azt kapjuk, hogy

$$c_x^* = \pm N\frac{k_z^2}{k^3}, \qquad c_z^* = \mp N\frac{k_x k_z}{k^3}. \tag{5.34}$$

A csoportsebesség abszolútértéke $N\sin\theta/k$, iránya pedig merőleges a $\mathbf{k}$ vektorra:

$$\boxed{\mathbf{c}^*\mathbf{k} = 0.} \tag{5.35}$$

Az első szögnegyedben fekvő hullámszámvektor ($k_x, k_z > 0$) esetén a pozitív (negatív) frekvenciájú hullám csoportsebessége a $\mathbf{k}$-tól jobbra lefelé (balra felfelé) mutat (5.4. ábra). Vízszintes



5.4. ábra. A $\mathbf{c}^*$ csoportsebesség és $\mathbf{k}$ hullámszámvektor viszonya belső hullámban. Az energia mindig $\mathbf{k}$-ra merőlegesen terjed. Az, hogy jobbra vagy balra, a frekvencia előjelétől függ. A részecskemozgás a hullámszámvektorra merőleges síkban történik.

terjedés ($k_z \to 0$) esetén a Brunt–Väisälä-frekvenciájú rezgés magától is fennmarad, az ilyen irányú hullámmal ezért energia nem halad, csoportsebessége eltűnik.

Ha a folyadékot valamilyen kis méretű test ω ($|\omega| < N$) frekvenciájú mozgatásával gerjesztjük, akkor a belső hullámok átveszik ezt a frekvenciát: $\omega_0 = \omega$, és $\theta = \pm \arccos(\omega/N)$ szög alatt haladnak az x tengelyhez képest. A belső hullám, mint a tehetetlenségi hullám, erősen *anizotróp* módon terjed. A csoportsebesség-vektorok $\pm\theta$ szöget zárnak be a függőleges tengellyel, éppúgy, ahogy az 1.16. ábra mutatja csak θ és ω kapcsolata más. A tehetetlenségi hullámok további tulajdonságait mutatja be a 12.1. fejezet.

A $\mathbf{c}^*$-hoz tartozó irányokban megváltozik a törésmutató, és az energiaterjedés folyamata jellegzetes X alakzatot rajzol ki. A gerjesztő szögsebesség növelésekor θ csökken, az energia terjedési iránya egyre közelebb esik a függőlegeshez, a kialakuló X alakzat egyre meredekebb. Ez látható a kísérletben, ahol a felső és alsó peremről visszavert hullámok is megfigyelhetők.

5.8. Hegy mögötti hullám

5.8.1. Szemléletes magyarázat

A domborzati egyenetlenségek fölött az adott irányból állandó U sebességgel fújó szél (vagy homogén áramlás) rétegzettség esetén jelentős felfelé irányuló energiaáramot biztosító *stacionárius* belső hullámokat hozhat létre, amelyek az egyenetlenség elhagyása után is fennmaradnak.

A domborzatnak az áramlás irányával párhuzamos átlagos λ hullámhossza meghatározza az általa keltett belső hullámok k_x hullámszámát: $k_x = 2\pi/\lambda$. A λ távolságban levő két domborzati maximum(hegyvonulat) közötti áthaladás ideje $\lambda/|U|$, a háttéráramlással együtt mozgó koordináta-rendszerben a hegyvonulatok tehát $|\omega| = 2\pi|U|/\lambda$ frekvenciával érkeznek, és ez felel meg a hullám gerjesztési frekvenciájának. Ilyen belső hullám, amelyet *hegy mögötti* hullámnak (lee wave-nek) hívnak, csak $|\omega| < N$ esetén gerjesztődnek, vagyis csak olyan U sebességű áramlásokra, amelyekre

$$\boxed{|U| \le U_c = \frac{\lambda N}{2\pi},} \tag{5.36}$$

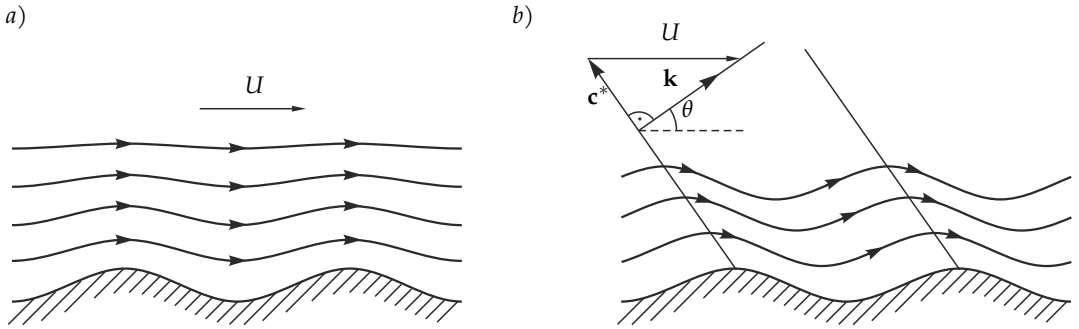
amelyek az U_c kritikus sebességnél *lassabbak* (5.5. ábra). Az (5.36) feltétel rögzített sebesség

esetén azt jelenti, hogy a domborzat hullámhosszának ki kell elégítenie a

$$\lambda \geq \lambda_c = 2\pi \frac{|U|}{N} \tag{5.37}$$

feltételt.

A kritikus sebesség a $N = 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$ értékkel számolva, $\lambda = 10$ km hullámhossz esetén $U_c = 16$ m/s. A nagy hegyek és hegyvonulatok fölött tehát még viszonylag erős szelek is képesek hullámokat kelteni. Az éppen a kritikus sebességgel érkező áramlás a Brunt–Väisälä-frekvenciát biztosítja, és hozzá vízszintes terjedési irány, $k_z = 0$ tartozik. Ennél lassabb áramlások kisebb frekvenciájú gerjesztést jelentenek, amely véges k_z hullámszámkomponens megjelenésével jár a belső hullámok (5.32) diszperziós relációja szerint. Mivel a keltés a domborzaton történik, a hullám innét távolodik $k_z > 0$, ezért $k_x > 0$-ra jobbra felfelé halad: a hullám frontja **k**-ra merőleges, az áramlás felé dől (5.5b. ábra). $U > U_c$ esetén viszont hullám nem keletkezik, felfelé lecsengő hullámzás alakul ki (5.5a. ábra).

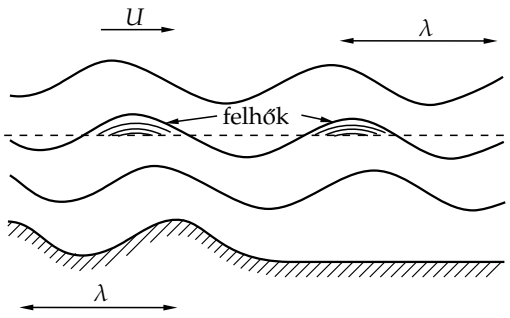


5.5. ábra. Periodikus domborzat háttéráramlásban stacionárius sebességteret alakíthat ki. A kritikus sebességnél gyorsabb áramlás esetén a mozgás erőssége a magassággal csökken (a). Ennél lassabb áramlásban csillapítatlan belső hullámok keletkeznek, amelyek az áramlás irányában és felfelé terjednek (b). A relatív mozgás csoportsebessége merőleges a terjedési irányra ($\mathrm{tg}(\theta) = k_z/k_x$), de a háttéráramlás sebességével képzett eredő párhuzamos vele, ahogy a felső betétrajz mutatja. A hegységrendszerek fölött kialakuló Rossby-hullámokkal (3.14. ábra) szemben a hullámzás itt a függőleges síkban történik, és bármilyen előjelű háttéráramlásban kialakulhat.



Laboratóriumban hegy mögötti hullám úgy hozható létre, hogy egy (vagy esetleg néhány egymás utáni) domborzati elemet húzunk rétegezett folyadékban, nem túl gyorsan. Ebben a kísérletben a hegy alakú idomot, a folyadék tetején húzzák. Látszik, hogy az akadály mozgása a különböző színűre festett rétegekben mindenütt hullámzást hoz létre, a legintenzívebbet természetesen az akadályhoz közel eső rétegekben. Jól megfigyelhető, hogy a hullámzás milyen hosszan elnyúlik a „hegy" mögött.

A hegyvonulatok vagy izolált hegyek mögötti hullámok érdekes meteorológiai jelenségekre vezetnek. A hullámzás okozta feláramlás térben periodikus (de időben alig változó) felhősödést és esetleg csapadékképződést okozhat, hiszen a hullámhegyekben a levegő elérheti a kicsapódási szintet. Az ilyen felhősávok a hegyvonulattal párhuzamosan, azaz a szél irányára merőlegesen alakulnak ki (5.6. ábra). A felhősávok távolsága a hegyvonulat hullámhossza. A hullámhegyekben időnként lokalizált lencse-felhők (lentikuláris felhők) jönnek létre. A hegy mögötti hullámokban kialakuló felhőket a szél nem elfújja, hanem átfúj rajtuk: a hullámvölgyekbe kerülve a vízgőz elpárolog, viszont új légcsomagok érkeznek a hullámhegyekbe, ahol végbemegy a kicsapódás. A felhő dinamikus egyensúlyban létezik, alakja helyhez kötött, a stacionárius áramlásnak megfelelően.



5.6. ábra. Hegy mögötti hullámok sematikus képe. Ha a középső levegőréteg nedves, és a hullámhegyek elérik a kicsapódási szintet (szaggatott vonal), akkor a hegyvonulattal párhuzamos felhősávok, vagy lencsefelhők alakulnak ki.

5.8.2. Lineáris leírás

Tekintsünk belső hullámokat egy $u_0 = U, w_0 = 0$ sebességű kétdimenziós háttéráramlásban. Az (5.19)–(5.21) mozgásegyenletet ekkor a sebességben ezen konstans érték körül kell linearizálni, amely a $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v} - (U, 0)$ sebesség-eltérésekre ideális folyadékban a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{v}' = -\frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad} p' - g\frac{\varrho'}{\varrho_0}\mathbf{n}, \tag{5.38}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\varrho' = w'\frac{\varrho_0}{g}N^2(z), \tag{5.39}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0 \tag{5.40}$$

egyenletekre vezet. Síkhullámmegoldásra az egyenletek azt mutatják, hogy az 5.7. fejezetben tárgyalt belső hullámokra vonatkozó eredményben az $\omega_0 \to \omega_0 - Uk_x$ helyettesítést kell elvégeznünk. A diszperziós reláció tehát a hegyhez rögzített rendszerben

$$\omega_0(k_x, k_z) = Uk_x \pm N\frac{k_x}{k}, \tag{5.41}$$

míg a háttéráramlással együtt mozgóban (5.32).

Amennyiben a hullámot egy

$$d(x) = A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \tag{5.42}$$

függvénnyel leírt hegyvonulat hozza létre, a hullám átveszi az ennek megfelelő $k_x = 2\pi/\lambda > 0$ hullámszámot. A hegyhez rögzített rendszerben a hullám akkor válik stacionáriussá, frekvenciája akkor tűnik el, ha

$$|U| = \frac{N}{k}, \tag{5.43}$$

vagyis ha a függőleges hullámszámkomponensre igaz, hogy

$$k_z^2 = \frac{N^2}{U^2} - k_x^2. \tag{5.44}$$

A valós megoldás feltétele $|N/U| \geq k_x$, azaz $|U| \leq U_c$, ahol U_c az (5.36)-ban meghatározott kritikus sebesség.

Az ennél gyorsabb áramlások esetén a hullámszám imaginárius: $k_z = \pm i/\delta$, ahol δ valós, és ez a függőleges irányban $\exp(-z/\delta)$ szerint lecsengő amplitúdójú hullámzásnak felel meg, amely pontosan követi a domborzat alakját (5.5a. ábra). A hullámzás a hegy fölött néhányszor δ vastagságú tartományra terjed csak ki. Ilyen exponenciálisan csillapodó hullámzások nem járnak energiaáramlással.

A kritikusnál lassabb, az (5.36) feltételnek eleget tevő sebességű áramlásokra k_z valós, és térbeli csillapítás nem történik. A balról jobbra haladó ($U > 0$) áramlásokhoz az (5.41) egyenlet alsó előjelének kell tartoznia, hiszen definíció szerint $N, k_x > 0$, és ω_0 csak úgy tűnhet el, ha a második tag negatív. A háttéráramláshoz képest létrejövő belső hullám (5.32) frekvenciái közül a negatívat (alsó előjel) kell tekinteni. Az energiának felfelé kell haladnia: $c_z^* > 0$, ami (5.34) szerint $k_z > 0$-ra lehetséges:

$$c_z^* = \frac{U^3}{N^2} k_x \sqrt{\frac{N^2}{U^2} - k_x^2}, \tag{5.45}$$

ahol használtuk (5.44)-et. A kritikus sebességhez tartozó ($N = 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$ 1/s, $\lambda = 10$ km) adatokat véve, annál kisebb, $U = 10$ m/s sebességet választva, $k_x = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$1/m, $k_z = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$1/m, amivel $c_z^* \approx 5$ m/s adódik.

Az 5.4. ábrának megfelelően a $\mathbf{c}^*$ csoportsebesség a széllel szemben és felfelé mutat. Az x irányú komponens (5.34) alsó előjelével

$$c_x^* = -\frac{U^3}{N^2}\left(\frac{N^2}{U^2} - k_x^2\right). \tag{5.46}$$

A nyugvó koordináta-rendszerbeli teljes csoportsebességben $\mathbf{c}^*$-hoz x irányban hozzáadódik az áramlás U sebessége, és a csoportsebesség x komponense $U + c_x^* = U^3 k_x^2/N^2$. A nyugvó rendszerben a csoportsebesség iránytangense

$$\frac{c_z^*}{U + c_x^*} = \sqrt{\frac{N^2}{U^2} - k_x^2}\,\frac{1}{k_x} = \frac{k_z}{k_x}, \tag{5.47}$$

az energiaáram iránya tehát *azonos* a hullámszámvektoréval (5.5b betét ábrája). A hegy mögötti hullámok energiája $\mathbf{k}$ irányában a sztratoszféráig is felhatolhat, ezt használják ki a vitorlázó repülők.

5.9. Belső hullám sekély, folytonosan rétegzett folyadékban, normálmódusok

5.9.1. Elemi megfontolások

Tekintsünk egy H mélységű folytonosan rétegzett közeget, amelynek vízszintes kiterjedése sokkal nagyobb mélységénél. A tipikus belső hullámok vízszintes hullámhossza ($2\pi/k_x$) ekkor sokkal nagyobb a függőleges irányhoz tartozó $2\pi/k_z$-nél. A k_x hullámszámkomponens tehát elhanyagolható a függőleges komponenshez képes, $k_x \ll k_z$, és az (5.32) diszperziós reláció az

$$\omega_0 = \pm N \frac{k_x}{k_z} \tag{5.48}$$

alakra vezet. Az 5.3. ábrán ez az origó körüli lineáris viselkedésnek felel meg. A H mélységhez csak bizonyos k_z hullámhosszak illeszkedhetnek, ezeknek egy *diszkrét* $k_z^{(n)}$ spektruma valósul-

hat csak meg. A belső hullámok tehát ilyenkor függőleges irányú viselkedésük szerint állóhullámok, amelyekre a diszperziós reláció

$$\omega_{0n}(k_x) = \pm N \frac{k_x}{k_z^{(n)}}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{5.49}$$

bennük $k_z^{(n)}$ paraméter. Hozzájuk a

$$c_n = \frac{N}{k_z^{(n)}}, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{5.50}$$

nagyságú vízszintes terjedési sebességek spektruma tartozik.

A lehetséges terjedési sebességek spektruma függ a peremfeltételtől. A függőleges hullámszámok lehetséges $k_z^{(n)}$ értékeinek meghatározása ugyanolyan típusú feladat, mint a kvantummechanikai potenciálgödrök energiaspektrumának kiszámítása.

A legegyszerűbb esetben, amikor a folyadékot egy lappal lefedjük (merevlap-közelítés), és ezért felületi mozgás nem alakulhat ki, a peremfeltétel az, hogy a w függőleges sebesség mind az aljzaton, mind a felszínen eltűnik. Állandó Brunt–Väisälä-frekvencia mellett a függőleges sebesség magasságfüggése trigonometrikus függvénnyel írható le. Ennek félhullámhossza n egész számszor férhet rá a H intervallumra, azaz $n\pi/k_z^{(n)} = H$, amiből $k_z^{(n)} = n\pi/H$. A lehetséges terjedési sebességek nagysága tehát

$$\boxed{c_n = \frac{NH}{n\pi}, \qquad n = 1,2,\ldots.} \tag{5.51}$$

Leggyorsabban az $n = 1$ indexű belső hullám terjed, a többiek sebessége n-nel fordítottan arányos. A légkörben ($N \approx 10^{-2}$ s^{-1}, $H = 10$ km) az első módus sebessége $c_1 = 32$ m/s. Az óceánok átlagára jellemző $N = 10^{-3}$ 1/s-os értékkel és $H = 4$ km-rel számolva, $c_1 \approx 1$ m/s. A Brunt–Väisälä-frekvencia átlagos redukált gyorsulással megadott (5.7) kifejezését használva

$$c_n \approx \frac{\sqrt{g'H}}{n\pi}, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{5.52}$$

Az ilyen belső hullámok tehát a sekély folyadék felszíni hullámainak megfelelői, de őket a redukált nehézségi gyorsulás határozza meg.

5.9.2. A szabad felszín hatása a normálmódusokra

Az általános vizsgálathoz először az (5.19)–(5.21) egyenletek sekély közegben érvényes alakját kell felírnunk. Mivel a dimenziótlan alakban az $\epsilon = H/L$ mélységi arány csak w dimenziótlan egyenletében jelenik meg, és ott ráadásul $1/\epsilon^2$ alakban, az $\epsilon \ll 1$ esetben a (5.25) egyenletben a zárójelnek el kell tűnnie. Dimenziósan ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -g\varrho', \tag{5.53}$$

vagyis hidrosztatika érvényes áramlás közben is. A feláramlási sebesség a sekélység miatt természetesen kicsi, és a felszíni alak a dinamikai nyomással arányos: $\eta = p'/(g\varrho_0)$.

A linearizált (5.19)–(5.21) egyenletek megoldása ideális sekély folyadék x, z síkjában keresheto exponenciális alakban, mint

$$u(x,z,t), p'(x,z,t) \sim a_n(z) e^{i(k_x x - \omega_0 t)} = a_n(z) e^{ik_x(x-c_n t)}, \tag{5.54}$$

ahol $a_n(z)$ ugyanaz a (dimenziótlan) együttható mindkét mennyiségre. Ez a hullámalak az x irányban haladó, a függőlegesben állóhullámot ír le, hiszen a_n időfüggetlen. A (5.53) összefüggésből látszik, hogy ϱ' az a_n deriváltjával arányos, az (5.21) divergenciamentességi feltételből pedig, hogy w az a_n integráljával, a_n tehát jellemzi az egész belső hullámzást. Az $a_n(z)$ magasságprofilt a rétegzett folyadék n-edik *normálmódusának* nevezzük. Lineáris problémáról lévén szó, az általános megoldás kifejthető a normálmódusok tetszőleges n-re vett lineáris kombinációjaként. Az egyes normálmódusok súlyát a kezdőfeltétel szabja meg.

A lehetséges c_n sebességeket a peremfeltételekből adódó *sajátérték-probléma* határozza meg. A szabad felszínt jelentő felső peremen

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\varrho_0 g}\frac{\partial p'}{\partial t}, \qquad z = H + \eta \approx H, \tag{5.55}$$

hiszen a feláramlási sebesség csak a felszín emelkedéséből adódhat. A linearizált (5.20) egyenletből $\partial \varrho'/\partial t = w\varrho_0 N^2/g$, amely az (5.53) hidrosztatikai egyenlettel a

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial t} = -g\frac{\partial \varrho'}{\partial t} = -w\varrho_0 N^2 = -\frac{N^2}{g}\frac{\partial p'}{\partial t} \tag{5.56}$$

összefüggésre vezet, ahol az utolsó átalakításban használtuk (5.55)-öt. A normálmódusok (5.54) alakja miatt az a_n amplitúdóra a

$$\frac{da_n}{dz} = -a_n\frac{N^2}{g}, \qquad z = H + \eta \approx H \tag{5.57}$$

peremfeltételnek kell fennállnia. Alul, a $z = 0$ szinten a függőleges sebességnek, és ezzel $a_n(z)$ integráljának el kell tűnnie A megoldást

$$a_n(z) = \cos(Nz/c_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.58}$$

alakban keresve, az alsó peremfeltétel teljesül. A felső feltétel (5.57)-ből

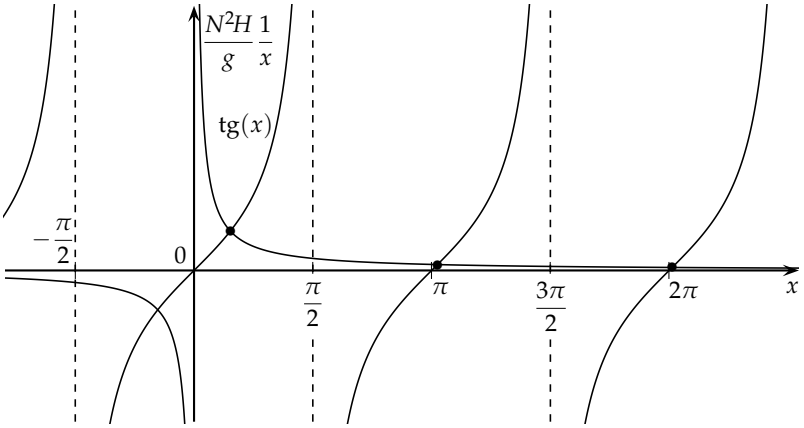
$$-\frac{N}{c_n}\sin(NH/c_n) = -\frac{N^2}{g}\cos(NH/c_n), \tag{5.59}$$

vagyis

$$\mathrm{tg}(NH/c_n) = \frac{Nc_n}{g} = \frac{N^2 H}{g}\frac{1}{NH/c_n}. \tag{5.60}$$

Az $x = NH/c_n$ mennyiségre nézve a gyökök tehát úgy adódnak, mint a $\mathrm{tg}(x)$ függvény és az $(N^2H/g)\,1/x$ hiperbola metszéspontjai. A grafikus megoldást illusztráló 5.7. ábra azt is mutatja, hogy végtelen sok megoldás létezik a lehetséges sebességek c_n nagyságára.

Általános paraméterekkel explicit megoldások nem adhatók meg. Vegyük azonban észre, hogy az N^2H/g kombináció az (5.7) becslés szerint $\Delta\varrho/\varrho_0 = g'/g$, vagyis kicsi. A gyenge statikus rétegzettség miatt a hiperbola együtthatója kis szám. Ezért a tangens függvény ágait a hiperbola az ágak zérushelyei, azaz $n\pi$ környékén ($n = 1, 2, \ldots$) metszi. Így azt kapjuk, hogy



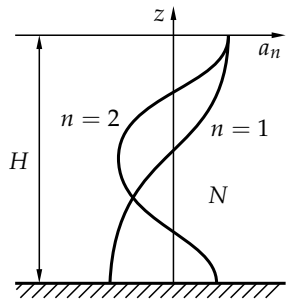
5.7. ábra. A szabad felszíni mozgáshoz tartozó normálmódusok sajátérték-problémájának grafikus alakja. A fekete metszéspontoknak megfelelő $x_n = NH/c_n$ megoldások megadják a lehetséges sebességeket.

a lehetséges belső hullámsebességeket az (5.51) kifejezés jó közelítéssel megadja szabad felszín esetén is. Ehhez természetesen N^2H/g-vel arányos korrekció járul.[6]

Az (5.58) normálmódusok az (5.51) megoldások szerint jó közelítéssel

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{H}z \tag{5.61}$$

alakúak, vagyis $nH/2$ hullámhosszú állóhullámok. Az első két normálmódust az 5.8. ábra mutatja.



5.8. ábra. Állandó Brunt–Väisälä-frekvenciájú folyadék első két belső hullám normálmódusa: $a_1(z)$, $a_2(z)$. Az ábra a vezető rendben érvényes eredményt mutatja. A normálmódusok zérushelyei (5.54) szerint a vízszintes sebesség előjelváltását jelzik, az n-edik módusban tehát a közeg $n+1$ ellentétes irányban mozgó rétegre bomlik.

Az 5.7. ábrán látszik, hogy a szabad felszíni mozgást figyelembe vevő spektrum tartalmaz egy kis x-hez tartozó megoldást is. Mivel a tangens függvény lineárisan indul az origóban, erre a megoldásra jó közelítéssel $x_0 = N^2H/g\ 1/x_0$, amiből $x_0 = N\sqrt{H/g}$, és a megfelelő sebesség

$$c_0 = \sqrt{gH}. \tag{5.62}$$

A spektrum tehát kiegészül az $n = 0$ indexhez tartozóan a homogén sekély közeg felszíni hullámának sebességével, amely sokkal nagyobb, mint bármelyik belső sebesség.[7] Konzisztens mó-

[6] A tangens n-edik ágának origó körüli $(x - n\pi)$ lineáris viselkedését használva, x_n-re az $x_n - n\pi = N^2H/g\ 1/x_n$ egyenletet kapjuk. Ennek iteratív megoldása $x_n = n\pi(1 + N^2H/g\ 1/(n\pi)^2)$, amelyből az első korrekcióval $c_n = (NH/(n\pi))(1 - 1/(n\pi)^2\ N^2H/g)$.

[7] Az első korrekcióval $c_0 = \sqrt{gH}(1 + 1/6\ N^2H/g)$.

don, az ehhez tartozó $a_0 = \cos(Nz/\sqrt{gH})$ normálmódus argumentumában még a legfelső szinten is $NH/\sqrt{gH} = \sqrt{N^2H/g}$ áll, ami nagyon kicsi. Az $n = 0$ normálmódus profilja tehát

$$a_0(z) \approx 1, \tag{5.63}$$

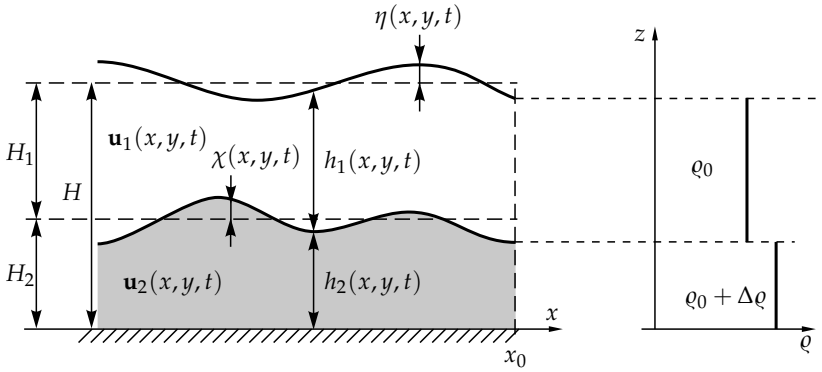
ami azt írja le, hogy a közeg azonosan mozog a teljes mélységben, vagyis homogén folyadékként.

Az $n \geq 1$ módusok az ún. *baroklin módusok*, hiszen a hozzájuk tartozó áramlásban a nyomás és a sűrűség magasságfüggése eltérő. Az ezektől különböző jellegű $n = 0$ módust *barotrópnak* nevezzük. A merevlap-közelítés jellegére vonatkozóan ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az kiszűri a gyors barotróp mozgást, a lassú baroklin módusokat viszont alig módosítja.

5.10. Kétrétegű közegek

5.10.1. Kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika

Amennyiben a $\overline{\varrho}(z)$ egyensúlyi sűrűségprofil változása nagyon erős egy keskeny tartományban, akkor ott jó közelítéssel sűrűségugrásról beszélhetünk. A legegyszerűbb képben ilyenkor két homogén összenyomhatatlan réteget különböztetünk meg, köztük valamekkora $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbséggel. Az egyensúlyi rétegzettség azt követeli meg, hogy a sűrűbb közeg legyen alul. A relatív sűrűségkülönbség kicsi, $\Delta\varrho/\varrho_0 << 1$.



5.9. ábra. A kétrétegű közelítésben két élesen elkülönülő, homogén és összenyomhatatlan sekély folyadékréteggel modellezzük a közeget. A belső és a külső felszín is szabadon mozoghat. A vízszintes sebesség mindkét rétegben független a magasságtól.

Mindkét réteget keskenynek feltételezve, alkalmazhatjuk a *hidrosztatikus közelítést*, miszerint a nyomás a sűrűség magasság szerinti integráljaként áll elő. Ez mindkét közegben lineáris z-függést jelent, a két közeg (idő- és helyfüggő) határán a nyomás folytonos, de gradiense ugrásszerűen változik. Az egyes közegek pillanatnyi és átlagos vastagsága legyen $h_1(x,y,t)$, $h_2(x,y,t)$, illetve H_1, H_2 (a 2-es közeg a sűrűbb). A $z = 0$ szinten vízszintes aljzatot feltételezve,[8] a teljes nyugalmi folyadékmélység $H = H_1 + H_2$. A felszín és a belső elválasztó felület ingadozását η-val, illetve χ-vel jelölve (5.9. ábra), a pillanatnyi rétegvastagságok

$$\boxed{h_1 = H_1 + \eta - \chi, \qquad h_2 = H_2 + \chi.} \tag{5.64}$$

A χ elválasztó felület a felső közeg számára időfüggő domborzatként jelenik meg. A teljes nyo-

[8] Az alsó domborzat szükség esetén könnyen figyelembe vehető.

máseloszlás a folyadékban:

$$p = p_0 + \varrho_0 g(H + \eta - z), \quad \text{ha} \quad z > h_2(x, y, t), \tag{5.65}$$

és

$$p = p_0 + \varrho_0 g h_1 + (\varrho_0 + \Delta\varrho) g(h_2 - z) \tag{5.66}$$

egyébként, ahol p_0 a konstans külső felszíni nyomás. A nyomáseloszlás tehát nem függ az áramlástól.

A felső és alsó közeg vízszintes síkbeli, magasságtól független sebességvektorait $\mathbf{u}_1$-gyel, illetve $\mathbf{u}_2$-vel jelölve, a mozgásegyenlet ideális folyadékban:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = -g \operatorname{grad} \eta, \qquad \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -g \operatorname{grad} \eta - g' \operatorname{grad} \chi.} \tag{5.67}$$

Itt $g' \equiv g\Delta\varrho/\varrho_0$ a sűrűségugrásból adódó redukált nehézségi gyorsulás. A d/dt teljes derivált a sebesség z-függetlensége miatt csak a vízszintes sebességkomponenseket tartalmazza, tehát például

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}. \tag{5.68}$$

Az egyes összenyomhatatlan folyadékrétegekben a kontinuitást a folyadékoszlopok térfogatának megmaradása jelenti. Ezért mindkét közeg h_i, $i = 1, 2$ vastagságára fennáll a (2.13) egyenlet, tehát

$$\boxed{\frac{\partial h_i}{\partial t} + \operatorname{div}(h_i \mathbf{u}_i), \qquad i = 1, 2.} \tag{5.69}$$

A fenti egyenletek az (5.64) kapcsolattal együtt zárt egyenletrendszert alkotnak, a két különböző sűrűségű sekélyfolyadék-réteg egyenleteit. A vízszintes áramlás ismerete mindkét rétegben meghatározza a feláramlás erősségét:

$$\frac{\partial w_i}{\partial z} = -\operatorname{div} \mathbf{u}_i. \tag{5.70}$$

A szokásos dimenziótlanítással a két kontinuitási egyenlet nem változik, a dinamikai egyenletekben grad η előtt a külső (1.32) Froude-szám, grad χ előtt pedig az (5.1) belső Froude-szám jelenik meg:

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = -\frac{1}{Fr^2} \operatorname{grad} \eta, \qquad \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -\frac{1}{Fr^2} \operatorname{grad} \eta - \frac{1}{Fr'^2} \operatorname{grad} \chi. \tag{5.71}$$

Ez mutatja, hogy Fr' csak a belső elválasztó felülettel kapcsolatos mozgásokat jellemzi.

5.10.2. Belső hullám két közeg határán

Kis amplitúdójú hullámokra az (5.67), (5.69) egyenletrendszer linearizálható a $h_i = H_i$ átlagos rétegvastagsághoz tartozó áramlásmentes, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ nyugalmi állapot körül. Az egyszerűség

kedvéért x irányban haladó síkhullámot az

$$(u_1, u_2, \eta, \chi) = (u_{10}, u_{20}, \eta_0, \chi_0)\, e^{i(k_x x - \omega_0 t)} \tag{5.72}$$

alakban keresve a

$$\omega_0 u_{10} = g k_x \eta_0, \qquad \omega_0 u_{20} = g k_x \eta_0 + g' k_x \chi_0, \tag{5.73}$$

$$\omega_0 (\eta_0 - \chi_0) = H_1 k_x u_{10}, \qquad \omega_0 \chi_0 = H_2 k_x u_{20} \tag{5.74}$$

polarizációs egyenletekre jutunk. (5.73) és (5.74) első egyenletéből a sebességeket kiküszöbölve a

$$\chi_0 = \eta_0 \left(1 - g H_1 \frac{k_x^2}{\omega_0^2}\right) \tag{5.75}$$

összefüggésre, majd a sebességek közötti

$$u_{10} = u_{20} \left(1 - g' H_2 \frac{k_x^2}{\omega_0^2}\right) \tag{5.76}$$

alakra jutunk. A felszín- és sebességváltozások amplitúdóinak a két közegben tehát *arányosnak* kell lenniük, de nem feltétlenül azonos előjelűnek. Az első és utolsó polarizációs egyenletből $u_{10}\chi_0 = u_{20}\eta_0\; g H_2 k_x^2/\omega_0^2$ következik. Ez csak akkor konzisztens (5.75), (5.76) szorzatával, ha

$$\left(1 - \frac{g' H_2 k_x^2}{\omega_0^2}\right)\left(1 - \frac{g H_1 k_x^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{g H_2 k_x^2}{\omega_0^2}. \tag{5.77}$$

Mivel az egyenletben csak az ω_0/k_x kombináció jelenik meg, a $c = \omega_0/k_x$ terjedési sebesség négyzetére a

$$c^4 - c^2(gH + g'H_2) + gg'H_1H_2 = 0 \tag{5.78}$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ez természetesen egzaktul is megoldható, de érdemes kihasználni, hogy a relatív sűrűségkülönbség csekély, vagyis $g' \ll g$.

A fenti egyenletnek van olyan megoldása, amelyben a sebesség nagy, a g'-vel arányos tagok elhanyagolhatók, és ezért vezető rendben a terjedési sebesség abszolútértéke[9]

$$c_0 = \sqrt{gH}. \tag{5.79}$$

Ekkor (5.76), (5.75)-ből $u_{10} \approx u_{20}$ és $\chi_0 = \eta_0 H_2/H$. A sebesség a két rétegben tehát alig különbözik, és a felszíni ingadozások aránya a rétegvastagságok arányát követi (5.10a. ábra). Ez lényegében a H vastagságú összenyomhatatlan homogén sekély folyadék hullámmozgása.

A másik gyök nagysága kicsi, g'-vel arányos, és ekkor c^4 hanyagolható el. Ezzel a

$$\boxed{c_1 = \sqrt{g' \frac{H_1 H_2}{H}} = \sqrt{g' \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}}} \tag{5.80}$$

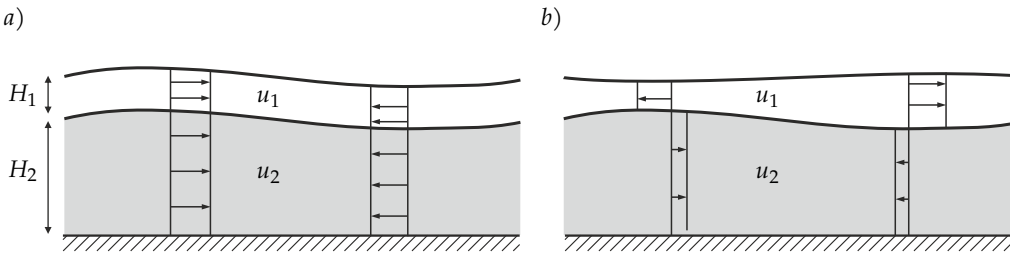
megoldást kapjuk, g'/g rendű korrekciók erejéig.[10] A belső hullám c_1 sebessége nagyságrendileg a

$$c_1 \sim \sqrt{g'/g}\, c_0 \tag{5.81}$$

kapcsolatban van a homogén sekély folyadék sebességével.

[9] Az első korrekcióval $c_0 = \sqrt{gH}\,(1 + 1/2\; g'/g\; H_2^2/H^2)$.

[10] Az első korrekcióval $c_1 = \sqrt{g' H_1 H_2/H}\,(1 - 1/2\; g'/g\; H_2^2/H^2)$.



5.10. ábra. Kis amplitudójú lineáris hullámok kétrétegű folyadékban. a) Barotróp módus: mindkét réteg hasonlóan mozog. b) Baroklin módus: mindkét réteg ellentétes irányban áramlik, és az elválasztó felület hullámzása sokkal erősebb a felszínénél.

A belső hullámban (5.76), (5.75)-ből $u_{20} = -u_{10}H_1/H_2$, és $\chi_0 \approx -\eta_0 gH/(g'H_2)$. A két rétegben tehát *ellenkező* előjelű a vízszintes sebesség, a keskenyebb közegben nagyobb (5.10b. ábra). Ráadásul a belső határfelület hullámzása jóval *erősebb* (g/g' arányban) a felszínénél. Az előjelek itt is különbözőek, tehát felszíni kidudorodáshoz belső behorpadás tartozik, és fordítva (5.10b. ábra). A c_1 sebességű megoldást nevezik ezért baroklin módusnak is. Egyforma vastagságú rétegek ($H_1 = H/2$) esetén az áramlás analóg a folytonosan rétegzett folyadék $n = 1$ baroklin módusával (5.8. ábra), hiszen ott is előjelet vált a sebesség a folyadék középmagasságában. Vegyük észre, hogy a belső hullám (5.80)-nal megadott terjedési sebességével az (5.1) belső Froude-szám a

$$Fr' \sim \frac{U}{c_1} \tag{5.82}$$

kapcsolatban van, összhangban a (2.1) külső Froude-szám $Fr = U/c_0$ alakjával.

Légköri rétegek határán futó belső hullámok gyakran megfigyelhetők pl. füst, köd vagy felhők szétterülésekor. Belső hullámok tavakban és tengerekben is rendszeresen előfordulnak a felső hígabb és alsó sűrűbb réteg határán, pl. folyótorkolatok közelében vagy a termoklin zónában. A felszínről nézve mozgásuk alig vehető észre, legfeljebb a belső hullámhegyek által keltett apró felszíni kapilláris hullámok okozta fényvisszaverés révén.

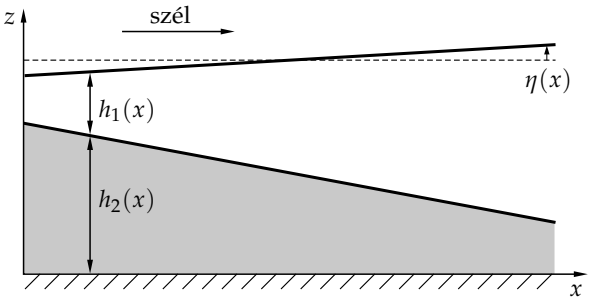
A tengeri belső hullámok felfedezésére az vezetett, hogy a torkolatok környékén a sós tengervízen néhány méter vastagságban szétterülő édesvízbe érkező hajók hirtelen lefékeződtek. Ahhoz ugyanis, hogy a nyugvó elválasztó felületen belső hullámok keletkezzenek, energiabefektetés szükséges, és ezt a hajók mozgásienergia-vesztesége fedezi. Ezt „holt víz" („dead water") jelenségnek nevezik, amelynek során a hajók mozgása nagy amplitúdójú, nemlineáris belső hullámokat gerjeszt.

Ez jól modellezhető úszó test mozgatásával két- vagy többrétegű folyadékkal feltöltött kádban, ahogy ebben a kísérletben látható.

A „holt víz" jelenség magyarázatát és a belső hullámok első elméletét ugyanaz a V. Ekman adta meg (1904-ben), akinek nevéhez fűződik a forgatott rendszerek határrétegének megértése (1902-től).

5.10.3. Megjegyzések

1.) A baroklin mozgásokra jellemző általános tulajdonság, hogy a felszíni alakváltozást azzal ellentétes előjelű és sokkal nagyobb mértékű belső változás követi. Képzeljük el például, hogy valamilyen külső hatás miatt egy csekély felszínemelkedés stabilizálódik. Ezt tavakban gyakran az adott irányból huzamos ideig fújó szél nyírási ereje okozza, amely az egyik oldalra hajtja a vizet. Tekintsük a közel állandó felszíni meredekséget adottnak, és alkalmazzuk az alsó közeg (5.67) egyenletét. A közel stacionárius állapot létezéséből azt a feltételt kapjuk, hogy a két



5.11. ábra. Az állandó szélnyírás következtében a tavak felszíne megdől. A belső elválasztó réteg (a termoklin zóna) ezzel ellentétes irányban és jóval nagyobb mértékben lejt.

gradiensnek közelítőleg kompenzálnia kell egymást, vagyis

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} \approx -\frac{g}{g'}\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{5.83}$$

Az állandó szél tehát a termoklin zóna jelentős lejtését válthatja ki (5.11. ábra). A szél elülése után ez az állapot megszűnik, a víz elkezd visszaáramolni. Tehetetlensége miatt azonban túllendül a nyugalmi állapoton, és ez okozza az állóhullámok, tólengések kialakulását (lásd 12.2. fejezet).

2.) Több réteg feltételezésekor annyi c_n hullámsebességet találunk, amennyi a rétegek száma. Egyre több, egyre keskenyebb réteg használatával, és a teljes folyadékmélységet állandó H értéken tartva visszakapjuk a folytonos rétegzettséghez tartozó c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ normálmódus-eloszlást. A folytonos rétegzettség tehát számos keskeny egymás fölötti réteg határesetének tekinthető.

5.11. A redukált sekélyfolyadék-modell

A kétrétegű leírás különösen egyszerű esetét kapjuk, ha az egyik közeg jóval nagyobb folyadéktömeget képvisel, mint a másik. Annak kifejezésére, hogy az eredmény független attól, hogy a keskeny közeg felül vagy alul helyezkedik el, a keskeny közeg pillanatnyi (átlagos) vastagságát $h(x, y, t)$-vel (h_0-lal) jelöljük. Feltesszük, hogy a teljes mélység sokkal nagyobb a vizsgált rétegénél, tehát h, $h_0 \ll H$.

A dinamikai egyenlet levezetéséhez célszerű azt az esetet tekinteni, amikor a keskeny közeg van alul. Ekkor a felső, ϱ sűrűségű közeg gyakorlatilag áll, számára a választófelület mozgása elhanyagolhatóan kis perturbációt jelent csak. Így elég az alsó, $\varrho_0 + \Delta\varrho$ sűrűségű közeg áramlásával törődnünk. Mivel érvényes a hidrosztatika, az alsó közegbeli nyomás $(H - h)\varrho_0 g + (\varrho_0 + \Delta\varrho)(h - z)g$, aminek a nyugalmi eset $(H - h_0)\varrho_0 g + (\varrho_0 + \Delta\varrho)(h_0 - z)g$ nyomásától való eltérése a p' dinamikai nyomás

$$p'(x, y, t) = g\Delta\varrho h(x, y, t) + \text{konstans}. \tag{5.84}$$

A sekély mozgó réteg vízszintes síkbeli sebességterét a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\,\mathrm{grad})\mathbf{u} = -g'\,\mathrm{grad}\,h \tag{5.85}$$

egyenlet adja meg, és homogén közegről lévén szó, kontinuitását a

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\,\mathrm{div}(\mathbf{u}h) \tag{5.86}$$

egyenlet fejezi ki. Mindez megfelel a kétrétegű (5.67), (5.69) sekélyfolyadék-dinamika $\mathbf{u_1}, \eta \to 0$

határesetének. Az alsó közeg dinamikájára tehát a (2.9) sekélyfolyadék-egyenlet forgatásmentes alakját kaptuk, de benne nem a teljes g nehézségi gyorsulás, hanem a $g' = g\Delta\varrho/\varrho_0$ redukált gyorsulás jelenik meg. Ezt az egyenletrendszert ezért redukált sekélyfolyadék-modellnek is nevezik. Ugyanezek az egyenletek igazak egy keskeny ritka közegre is, amely egy sűrűbb passzív folyadék felett helyezkedik el.

A keskeny réteg határán kialakuló belső hullámok sebessége az analógia alapján

$$c_1 = \sqrt{g'h_0}, \tag{5.87}$$

melyet az (5.80) egyenlet $h_0/H \ll 1$ határesetéből is megkaphatunk, ahol $h_0 = \min(H_1, H_2)$. A barotróp módus most nem jelenhet meg, hiszen a vastag közeg áll. A közeghatár hullámmozgása és (5.85), (5.86) értelmében a mozgó közeg egész hidrodinamikája *független* a folyadék teljes mélységétől.

A redukált sekélyfolyadék-modell túlzott egyszerűsítésnek tűnhet a kis amplitúdójú belső hullámok jellemzésére. Van azonban számos olyan *nemlineáris* jelenség, amelyek leírása már a kétrétegű közelítésben is igen nehéz. A redukált sekélyfolyadék-modell viszont sokszor meglepően valóságközeli eredményeket szolgáltat a véges amplitúdójú nemlineáris mozgásokra, ahogy a 12.3. fejezet bemutatja.

A redukált sekélyfolyadék-modell általános megoldása nem ismert. Egydimenziós változata ($u = u(x,t), v \equiv 0, h = h(x,t)$) *stacionárius* esetben két megmaradó mennyiséggel rendelkezik, amelyek ekvivalensek a hidrodinamikai egyenletekkel. Az

$$u(x)h(x) = Q \tag{5.88}$$

hozam állandósága az (5.86) kontinuitási egyenletből következik. Az (5.85) egyenlet $udu/dx = -g'dh/dx$ stacionárius változatából látszik, hogy sima $h(x)$ esetén érvényes az

$$\frac{u(x)^2}{2} + g'h(x) = B \tag{5.89}$$

Bernoulli-törvény (ahol B állandó), ami itt egyenértékű az energiamegmaradással.

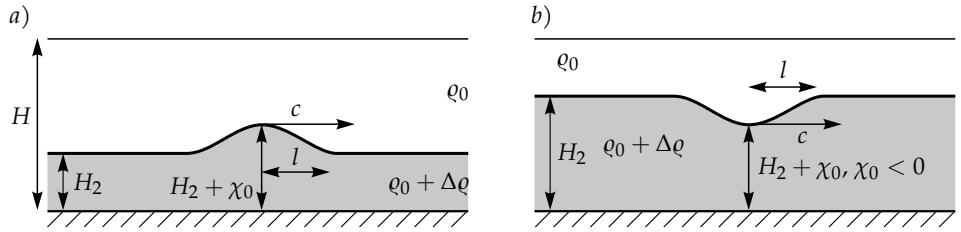
5.12. Belső szolitonok

Két különböző sűrűségű, keskeny, de véges vastagságú réteg határfelületén kialakulhatnak kidudorodások vagy behorpadások, amelyek alakjukat megtartva a c_1 belsőhullám-sebességnél *gyorsabban* terjednek, és a sebesség *függ* a kidudorodás nagyságától.[11]

A részletes elméleti leírás helyett csak a belső szolitonok legfontosabb tulajdonságait adjuk meg. H_1 és H_2 átlagos vastagságú rétegek határán, elhanyagolható külső felszíni változások és kis sűrűségkülönbség esetén a pozitív x irányban haladó, χ_0 amplitúdójú belső szoliton (5.12. ábra) sebessége

$$c = c_1\left(1 + \frac{\chi_0}{2}\frac{H_1 - H_2}{H_1 H_2}\right), \tag{5.90}$$

ahol c_1 a kétrétegű sekély folyadékbeli belső hullám (5.80) sebessége. A χ_0 amplitúdónak mindkét rétegvastagságnál jóval kisebbnek kell lennie. Vegyük észre, hogy a sűrűségkülönbség csak a c_1 belsőhullám-sebességen keresztül jelenik meg. A szolitonok mindig gyorsabbak a lineáris hullámoknál: $c > c_1$, belső Froude-számuk $Fr' > 1$. A fenti képlet így azt mutatja, hogy vastag alsó réteg, $H_2 > H_1$ esetén a χ_0 amplitúdónak negatívnak kell lennie. Ilyenkor tehát a szoliton a



5.12. ábra. A belső szoliton az elválasztó felület kidudorodásával jár. Ez felfelé történik, ha az alsó réteg keskenyebb a felsőnél (a), és lefelé, ha az alsó réteg a vastagabb (b).

réteghatár *lefelé* történő elmozdulásával jár (5.12b. ábra). A belső szoliton mindig a keskenyebb réteg lokális megvastagodása.

A szoliton l félszélessége is amplitúdófüggő az

$$l^2 = \frac{4}{3}\frac{H_1^2 H_2^2}{\chi_0 (H_1 - H_2)} \tag{5.91}$$

összefüggés szerint.[12] A szoliton $2l$ „hullámhossza" jóval nagyobb a rétegvastagságoknál. A folyadék sebessége csak a szoliton kiterjedésének megfelelő tartományban tér el lényegesen zérustól. Ott egy rétegen belül azonos irányú, de a két rétegben ellentett előjelű.[13]

A felső rétegnél jóval keskenyebb alsó réteg, $h_0 \equiv H_2 \ll H$ határesetében (5.90), (5.91)-ből

$$c = c_1 \left(1 + \frac{\chi_0}{2h_0}\right), \tag{5.92}$$

$$l^2 = \frac{4}{3}\frac{h_0^3}{\chi_0}\frac{H}{h_0}. \tag{5.93}$$

A terjedési sebesség ugyanúgy függ az alsó réteg vastagságától, mint szabad felszíni társáé a teljes mélységtől (2.9. fejezet).

A légkörben a hideg gravitációs áramlatok (12.3.2. fejezet) hegyekről való visszaverődése vezethet belső szolitonokhoz. A tengeri belső szolitonokat domborzati egyenetlenségek és az árapály hatás gerjeszthetik a termoklin zónában. Amplitúdójuk néhányszor 10 m is lehet, sebességük m/s nagyságrendű, hosszuk a több 10 km-t is elérheti.

5.13. Kelvin–Helmholtz-(KH)-instabilitás

5.13.1. Instabilitásokról általában

Egy áramlás csak akkor valósul meg a természetben, ha a mindig jelen levő kis külső hatásokkal szemben ellenálló. Tehát nem elég, hogy a hidrodinamikai egyenletek megoldása legyen, hanem *stabilnak* is kell lennie. Ez azt jelenti, hogy ha a vizsgált $\overline{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ alapáramlást[14] megváltoztatjuk,

[11] Hasonlóan a külső felszíni szolitonokhoz, 2.9., 9.2., 9.3. fejezet.

[12] Az egyforma rétegvastagságot jelentő $H_1 = H_2$ esetben a fenti összefüggések értelmüket vesztik. A részletes elemzés szerint ilyenkor is létezik szoliton, de jóval lassabb és szélesebb, mint az eltérő rétegvastagsághoz tartozók.

[13] A χ belső felszíni alak kielégíti a (9.10) KdV-egyenletet a $c_0 \to c_1$, $3c_0/(2H) \to 3c_1 (H_1 - H_2) / (2H_1 H_2)$, $c_0 H^2/6 \to c_1 H_1 H_2/6$ helyettesítéssel. A szolitonmegoldás: $\chi(x,t) = \chi_0/\mathrm{ch}^2\left[(x - ct)/l\right]$, a sebességek $u_1 = -c_1\chi/H_1$ és $u_2 = c_1\chi/H_2$.

[14] Az egyszerűség kedvéért csak stacionárius alapáramlásokra szorítkozunk.

akkor az eredeti formájához hasonló marad. Ha nem, az áramlás instabil, vagyis rövid idő alatt más jellegűvé válik.

A lineáris *stabilitásvizsgálat* során azt vizsgáljuk, milyen áramlás alakul ki, ha a folyadékot *kissé* kimozdítjuk a $\overline{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ sebességtérhez és a hozzá tartozó nyomás- és sűrűségeloszláshoz tartozó alapállapotából, adott peremfeltételek mellett. A kis perturbáció miatt az alapállapottól való eltérés, legalábbis eleinte, csekély, ezért a teljes hidrodinamikai egyenletrendszert *linearizáljuk* az alapáramlás körül. Mivel nem a nyugalmi állapot körül vizsgálódunk (mint a hullámok esetén), most az advektív gyorsulások is adhatnak járulékot. A linearizált mozgásegyenletek *állandó együtthatós, homogén* lineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Tetszőleges kezdeti perturbáció Fourier-sorba fejthető, és elég egyetlen $\mathbf{k}$ hullámszámvektorhoz tartozó perturbációt követni, mert az általános megoldás ezek lineáris kombinációja lesz. A $\mathbf{k}$-hoz tartozó időfüggő viselkedés az egyenlet lineáris jellege miatt exponenciális függvénnyel írható le, és ezért minden változó eltérése az alapáramlástól

$$e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega_0 t)} \tag{5.94}$$

tényezővel arányos síkhullám alakban kereshető. Itt $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ tetszőleges hullámszámvektor és $\omega_0(\mathbf{k})$ a feltételezett hullám frekvenciája, amely azonban nem feltétlenül valós, arra utalva, hogy nincs hullámmegoldás. Ezt a linearizált mozgásegyenletekbe helyettesítve homogén lineáris algebrai egyenletrendszerhez jutunk. Ennek nemtriviális megoldása adja a frekvencia hullámszámfüggését, az

$$\boxed{\omega_0(\mathbf{k}) = is(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k})} \tag{5.95}$$

diszperziós relációt, ahol s és ω valós. Instabilitás akkor lép fel, ha az $s(\mathbf{k})$ imaginárius rész pozitív. Ekkor ugyanis $-i\omega_0 = s - i\omega$, és a kitevő valós részében megjelenik az

$$e^{s(\mathbf{k})t} \tag{5.96}$$

időfüggés. Ez exponenciálisan növekvő viselkedés, vagyis a perturbált áramlás az alapáramlástól gyorsan eltávolodik. Ezért ilyenkor az $s(\mathbf{k})$ mennyiséget *instabilitási rátának*, vagy az instabil alapáramlás *Ljapunov-exponensének* nevezzük. Az (5.95) diszperziós reláció valós része, $\omega(\mathbf{k})$ az időben növekedő viselkedés periodikus modulálását írja le a $2\pi/\omega$ periódussal.

Mivel az általános megoldás az (5.94) típusú normálmódusok lineáris kombinációja, az alapáramlás akkor stabil, ha $s(\mathbf{k}) < 0$ *minden* hullámszámra. Az instabilitás feltétele az, hogy s legalább egy hullámszámra pozitív legyen.

Rendszerint létezik olyan *kritikusnak* nevezett $\mathbf{k}_c$ hullámszám, amelyre $s(\mathbf{k}_c) = 0$ vagyis, amelynél az instabilitás megjelenik. Előfordulhat, hogy ez csak bizonyos paraméterekre fordul elő, az ettől különböző paraméterekre az alapáramlás stabilnak bizonyul.

A kritikus hullámszám környékén általában van egy hullámszámtartomány (legalábbis bizonyos paraméterekre), amelyekben minden $\mathbf{k}$ instabil pozitív s exponensekkel. Ezek a $\mathbf{k}_c$-hez közeli hullámszámú megoldások lassan egyre nagyobb amplitúdójúakká válnak, és eközben az áramlás jellegzetes hullámhossza $\lambda_c = 2\pi/k_c$. Ez a megoldás természetesen csak átmeneti, hiszen a linearizált egyenletek nagy amplitúdók esetén már *nem* érvényesek. A végső állapot pontos leírásához a teljes hidrodinamikai egyenletre van szükség. Ez az állapot sokszor turbulens, de előfordulhat az is, hogy szabályos áramlás stabilizálódik.

5.13.2. Szemléletes kép a KH-instabilitásról

Tekintsünk két, ϱ_1, ϱ_2 sűrűségű, egymás felett elhelyezkedő vastag folyadékréteget, amelyek egymáshoz képest ΔU relatív sebességgel áramolnak a vízszintes síkban, súrlódásmentesen.

Legyen az alsó közeg sűrűbb, $\varrho_2 > \varrho_1$, és tegyük fel, hogy az elválasztó felület sík. Vizsgáljuk meg, hogy a felület kis deformáció után a kezdeti állapota felé indul vissza, vagy éppen távolodik tőle, vagyis a sík elválasztó felület stabil-e.

Mivel $\Delta\varrho = \varrho_2 - \varrho_0 > 0$, a ΔU relatív sebesség megszűnésekor instabilitás nem lép fel hiszen a statikus rétegzettség stabil. Ezért véges sebességkülönbség esetén csak valamilyen $\lambda_c = 2\pi/k_c$ kritikus hullámhosszú, vagy annál rövidebb zavarok válhatnak instabillá. Csak így teljesülhet ugyanis, hogy λ_c egyre kisebb lesz ΔU csökkenésével, vagyis nem marad instabil hullámszám $\Delta U = 0$-ra. Ha a folyadékréteg vastag, a probléma legfontosabb hosszúságjellegű paramétere λ_c, amely sokkal kisebb a teljes H mélységnél. Kis sűrűségkülönbségekre nyilván lényeges a g' redukált gyorsulás is. A ΔU, g' és λ_c mennyiségekből csak egy dimenziótlan szám alkotható, a

$$\frac{\Delta U^2}{g'\lambda_c} \tag{5.97}$$

kritikus hullámhosszal képzett belső Froude-szám négyzete. Ezt egységnyinek tételezve azt kapjuk, hogy λ_c arányos $\Delta U^2/g'$-vel. (Ebből látszik, hogy az a feltevés, hogy az instabilitás a λ_c-nél hosszabb zavarokra alakul ki, arra vezetne, hogy sebességkülönbség nélkül minden hullám instabil.)

Az instabilitás tehát olyan λ hullámhosszú zavarokra áll fenn, amelyek rövidebbek a kritikus hullámhossznál, tehát amelyekre

$$\boxed{\lambda < \lambda_c \equiv C\frac{\Delta U^2}{g'}.} \tag{5.98}$$

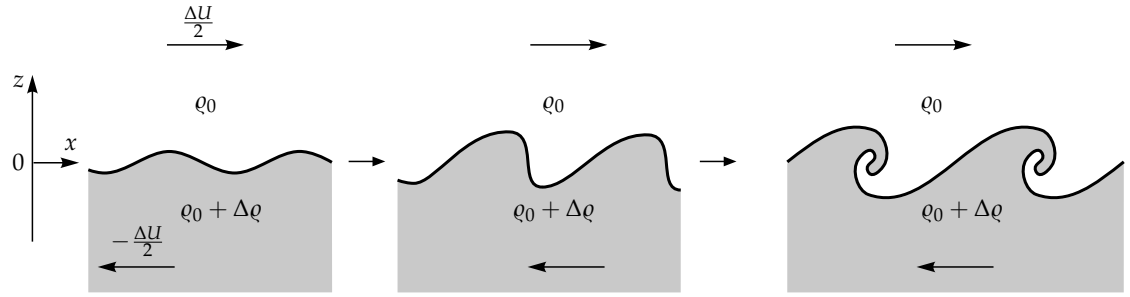
Itt C dimenziótlan szám, amely enyhén függhet a H vastagságtól. Mély közegben a C konstans π-nek adódik (lásd következő alfejezet). A kritikus hullámhossz a légkörre jellemző 10 m/s-os sebességkülönbséggel és tízszeres redukcióval $\lambda_c \approx 300$ m, éppúgy, mint $\Delta U = 1$ m/s sebességkülönbséggel és a tengerben gyakori ezerszeres redukcióval. Laboratóriumban 10-szeres redukcióval és $\Delta U = 10$ cm/s-mal számolva $\lambda_c \approx 3$ cm.

Véges sebességkülönbség esetén tehát mindig létezik olyan elegendően rövid hullámhosszú perturbáció, amelyre nézve a sima felület begyűrődik. Első leírójukról ezt a jelenséget Kelvin–Helmholtz-instabilitásnak nevezzük. A különböző vízszintes áramlásokat elválasztó felületek tehát nem maradnak simák. Vegyük észre, hogy ez azonos sűrűségű ($g' = 0$) rétegekre, amelyekben csak a sebességek különböznek (az ún. nyírási instabilitás esete) méginkább igaz, ott $\lambda_c \to \infty$ semmilyen hullámszámú perturbáció sem stabil. A sűrűségkülönbség tehát valamelyest stabilizálja a helyzetet, de csak nagy hullámhosszakra.

Az instabillá vált felület valamilyen $\lambda \approx \lambda_c$ hullámhosszal egyre nagyobb amplitúdójú kitérést mutat, de előbb-utóbb elhagyjuk a lineáris viselkedés tartományát, és a felületi alak már nem írható le szinuszfüggvénnyel. A tapasztalat szerint a határfelület begyűrődik, és a megtörő felszíni hullámokhoz (pl. tengerhullámokhoz) hasonló alakot rajzol ki meglepő szabályossággal. A folyamatot a sematikus 5.13. ábra szemlélteti. Ha az elválasztó felület a kicsapódási zónában van, akkor a hullámtörésszerű mintázat felhőképekben, az ún. Kelvin–Helmholtz-felhőkben rajzolódik ki.

Az instabilitás két, kezdetben vízszintes, egymásra rétegzett folyadékréteg tartályának megdöntésével laboratóriumban is jól tanulmányozható. Megfigyelhető, hogy amint az áramlás beindul, az elválasztó felület hullámossá válik, gyorsan nagy amplitúdójú átbukó hullámok alakulnak ki, amelyek végül turbulens keveredéshez vezetnek, amint ebben a kísérletben is látható.

A kísérleti berendezés véges mérete miatt a szabályos (nemlineáris) Kelvin–Helmholtz-hullámok csak rövid ideig figyelhetők meg. Ezért érdemes a mintázatot lassított felvételen is követni, mint itt.



5.13. ábra. A két folyadékot elválasztó felület időfejlődése a relatív sebességkülönbség hatására kialakuló Kelvin–Helmholtz-instabilitás következtében. A megfigyelt átmeneti mintázat periodicitása a λ_c kritikus hullámhossz nagyságrendjébe esik. A valódi hullámtörés is a KH-instabilitás mechanizmusa szerint zajlik, csak ott a levegő és a víz közötti sűrűségkülönbség nem kicsi. A végállapot mindig turbulens áramlás.

A turbulens végállapotban felülről nem korlátozott közegben egy λ_c-vel arányos vastagságú turbulensen kevert réteg válik köztes sűrűségűvé. A KH-instabilitás tehát a rétegzett közegekre jellemző turbulencia (7.4. fejezet) megjelenésének egyik kulcsmechanizmusa. Véges H vastagságú folyadékrétegre gondolva becslésként írhatjuk, hogy ha H kisebb, mint a kritikus hullámszám, vagyis

$$H < C\frac{\Delta U^2}{g'}, \tag{5.99}$$

akkor a teljes folyadékréteg turbulenssé válik.

5.13.3. Stabilitásvizsgálat

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy mindkét folyadékréteg nagyon vastag, és legyen az elválasztófelület a $z = 0$ sík. A sűrűséget a két közegben tetszőlegesnek választjuk, mert ez nem teszi bonyolultabbá a tárgyalást, viszont számos érdekes kitekintésre ad lehetőséget. Jelöljük a $\overline{\mathbf{v}} = (\overline{u}(z), 0, 0)$ alapáramlás két rétege közötti x irányú sebességkülönbséget ΔU-val. A koordináta-rendszert mindig választhatjuk úgy, hogy a sebességprofil szimmetrikus legyen, az átlagsebesség tűnjön el, az alsó, ϱ_2 sűrűségű közeg negatív irányban mozogjon. Az $\overline{u}(z)$ alapáramlás sebessége akkor itt $-U \equiv -\Delta U/2 < 0$. A felette elhelyezkedő $\varrho_1 < \varrho_2$ sűrűségű folyadékréteg $U \equiv \Delta U/2$ sebességgel áramlik a pozitív irányba (5.14. ábra), az alapáramlásban a nyomás hidrosztatikus.

Tegyük fel, hogy az áramlás az y irányban eltolásinvariáns. Jelölje az elválasztó felület pillanatnyi alakját a $\chi(x,t)$ függvény. A teljes nyomás a felső közegben

$$p = p_0 - \varrho_1 g z + p', \qquad \text{ha} \qquad z > \chi, \tag{5.100}$$

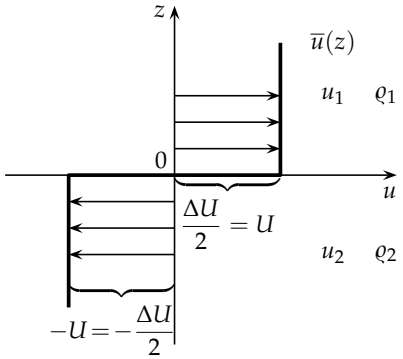
ahol p_0 az elválasztó felületen érvényes nyomás, p' pedig a dinamikai nyomás. Ezzel a felső közegben érvényes mozgásegyenlet a $d\mathbf{v}/dt = -\operatorname{grad} p/\varrho - \mathbf{g}$ Euler-egyenlet alapján:

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p'}{\partial x}, \qquad \frac{dw_1}{dt} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p'}{\partial z}. \tag{5.101}$$

Az alsó közegben $(z < \chi)$ nyomást a

$$p = p_0 - \varrho_1 g\chi - \varrho_2 g\,(z - \chi) + p' = p_0 + \Delta\varrho g\chi - \varrho_2 g z + p' \tag{5.102}$$

egyenlet definiálja, ahol $\Delta\varrho = \varrho_2 - \varrho_1 > 0$, és a dinamikai nyomás $\Delta\varrho g\chi + p'$. Ezt az Euler-



5.14. ábra. Az $\overline{u}(z)$ alapáramlás sebességprofilja (vastag vonal). Az elválasztó felület kezdeti alakja a $z = 0$ sík, $\chi = 0$. Az 1 és 2 indexek a felső, illetve alsó közegre vonatkoznak.

egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{\Delta\varrho}{\varrho_2} g \frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial p'}{\partial x}, \qquad \frac{dw_2}{dt} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial p'}{\partial z}. \tag{5.103}$$

A sekély folyadékkal szemben a feláramlás most nem gyenge, és a nyomás nem hidrosztatikus, p' nem zérus.

Az áramlás az (x, z) síkban összenyomhatatlan, ezért mindkét közegben létezik egy $\psi_i(x, z, t)$ áramlási függvény, amellyel $u_i = -\partial\psi_i/\partial z$ és $w_i = \partial\psi_i/\partial x$, $i = 1, 2$. Feltehetjük, hogy az áramlás örvénymentes is, hiszen mindkét közeg homogén, és így y irányú forgatónyomaték nem hat a folyadékelemekre. Az örvényesség y komponense $\partial u_i/\partial z - \partial w_i/\partial x = 0$, ezért ψ_i-nek ki kell elégítenie a Laplace-egyenletet,

$$\Delta\psi_i = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{5.104}$$

Mozgó elválasztófelület esetén két fontos peremfeltétel teljesül.

I.: Súrlódásmentes esetben a folyadékelem a χ elválasztó felület mentén mozog. Δx vízszintes elmozduláshoz $\Delta\chi = \Delta x\partial\chi/\partial x$ függőleges elmozdulás tartozik, vagyis Δt idő alatt $u\partial\chi/\partial x$ sebesség. A felszín időfüggése miatt ehhez járul a $\partial\chi/\partial t$ derivált, ezért a függőleges sebesség az elválasztó felület mentén $w = d\chi/dt$. Az emelkedés sebessége azon is múlik, hogy milyen gyorsan sodródik a folyadékelem a vízszintes irányba. A függőleges áramlási sebesség a határ mindkét oldalán úgy írható, mint az $\chi(x, t)$ elválasztó felület teljes deriváltja:

$$w_1 = \frac{\partial\chi}{\partial t} + u_1\frac{\partial\chi}{\partial x}, \qquad w_2 = \frac{\partial\chi}{\partial t} + u_2\frac{\partial\chi}{\partial x}, \qquad z = \chi. \tag{5.105}$$

A felület két oldalán a folyadékelem feláramlási sebessége különbözik, hiszen a vízszintes sebesség nem azonos a két közegben.

II: A $\partial p'/\partial x$ vízszintes nyomásgradiens folytonos a felületen. A $-\partial p'/\partial x$ állandóságát (5.101) és (5.103) alapján felírva, a

$$\varrho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) = \varrho_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + w_2\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \Delta\varrho g\frac{\partial\chi}{\partial x}, \qquad z = \chi \tag{5.106}$$

megszorítást kapjuk.

Az alapáramlás gyenge perturbációja azt jelenti, hogy az eredeti konstans sebességekhez kis perturbáló tagokat adunk. Ezt az áramlást ezért az

$$u_1 = U + u_1', \qquad w_1 = w_1', \qquad u_2 = -U + u_2', \qquad w_2 = w_2' \tag{5.107}$$

alakban írjuk, ahol a vesszős mennyiségek kicsik. Az alapsebességtől való eltérést leíró ψ_i' áramlási függvényekkel:

$$\psi_1 = -Uz + \psi_1', \qquad \psi_2 = Uz + \psi_2'. \tag{5.108}$$

Kis eltérések esetén mind ψ_1'-t, mind ψ_2'-t az $\exp\left[i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)\right]$ alakban keresve a Laplace-egyenlet a $k_x^2 + k_z^2 = 0$ megszorítást jelenti. Mivel x irányban hullámalakot tételezünk fel, k_x-et valósnak (sőt pozitívnak) választjuk, de ekkor

$$k_z = \pm i k_x \tag{5.109}$$

imaginárius. A függőleges irányban tehát nem történik hullámzás, exponenciális változás jelenik meg a k_x lecsengési rátával. A végtelenbe tartó megoldás kizárásával (ψ_i' akkor nem maradhatna kicsi), a felső közegben a negatív, az alsóban a pozitív előjelet tartjuk meg:

$$\psi_1' = \psi_{10} e^{-k_x z + i k_x x - i\omega_0 t}, \qquad \psi_2' = \psi_{20} e^{k_x z + i k_x x - i\omega_0 t}. \tag{5.110}$$

A sebességtér tehát z-ben exponenciális gyorsasággal tart a homogén alapáramláshoz.

A diszperziós reláció az elválasztó felületre vonatkozó határfeltételekből adódik. Az I. határfeltételt megfogalmazó (5.105) egyenletet az $u_1 = U$, $u_2 = -U$ sebességű homogén áramlás körül linearizálva a $z = \chi \approx 0$ szinten:

$$w_1 = \frac{\partial \chi}{\partial t} + U\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \text{illetve} \quad w_2 = \frac{\partial \chi}{\partial t} - U\frac{\partial \chi}{\partial x}. \tag{5.111}$$

A megoldást a

$$\chi(x,t) = \chi_0 e^{i(k_x x - \omega_0 t)} \tag{5.112}$$

alakban keresve és a függőleges sebességet az áramlási függvénnyel $w_i = \partial \psi_i'/\partial x$ szerint kifejezve $z = 0$-ra (5.111)-ből a

$$k_x \psi_{10} = -(\omega_0 - U k_x)\chi_0, \quad \text{illetve} \quad k_x \psi_{20} = -(\omega_0 + U k_x)\chi_0 \tag{5.113}$$

összefüggést kapjuk.

A II. határfeltétel, (5.106) linearizált változata a ψ_i' áramlási függvényekkel a $z = \chi \approx 0$ felületen adja, hogy:

$$\varrho_1 \left(-\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial t \partial z} - U\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x \partial z} \right) = \varrho_2 \left(-\frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial t \partial z} + U\frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial x \partial z} \right) + \Delta\varrho g \frac{\partial \chi}{\partial x}. \tag{5.114}$$

A ψ_i'-kre vonatkozó (5.110) alakok behelyettesítésével:

$$-\varrho_1(\omega_0 - U k_x) k_x \psi_{10} = \varrho_2(\omega_0 + U k_x) k_x \psi_{20} + \Delta\varrho k_x g \chi_0 \tag{5.115}$$

(5.113) alapján a

$$\varrho_1(\omega_0 - U k_x)^2 + \varrho_2(\omega_0 + U k_x)^2 - \Delta\varrho g k_x = 0 \tag{5.116}$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Átrendezve

$$\omega_0^2(\varrho_1 + \varrho_2) + \omega_0 \Delta\varrho 2 U k_x + U^2(\varrho_1 + \varrho_2)k_x^2 - \Delta\varrho g k_x = 0. \tag{5.117}$$

Ebből

$$\omega_0(k_x) = -\frac{\Delta U \Delta\varrho}{2(\varrho_1 + \varrho_2)} k_x \pm \sqrt{\frac{g\Delta\varrho}{\varrho_1 + \varrho_2} k_x - \frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + \varrho_2)^2} \Delta U^2 k_x^2}. \tag{5.118}$$

Itt használtuk, hogy a teljes sebességkülönbség $\Delta U = 2U$.

Amikor mindkét közeg együtt mozog vagy nyugalomban van, azaz $U = 0$, a frekvencia valós:[15] $\omega_0 = \pm\sqrt{g\Delta\varrho/(\varrho_1+\varrho_2)k_x}$.

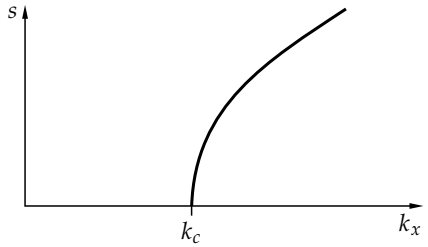
Nullától eltérő ΔU áramlási sebességekre a frekvencia sohasem valós minden hullámszámra. A

$$k_c = \frac{(\varrho_1+\varrho_2)\Delta\varrho}{\varrho_1\varrho_2}\frac{g}{\Delta U^2} \tag{5.119}$$

hullámszámnál nagyobbak esetén ω_0 komplex. A $k_x > k_c$ tartományban az $\exp(-i\omega_0 t) = \exp(\pm st)$ faktorok közül a pozitív előjelű exponenciálisan növekvő időfüggést ír le. Az instabilitási ráta tehát (5.15. ábra)

$$s(k_x) = \sqrt{\frac{\varrho_1\varrho_2}{(\varrho_1+\varrho_2)^2}\Delta U^2 k_x^2 - \frac{g\Delta\varrho}{\varrho_1+\varrho_2}k_x} = \sqrt{\frac{\Delta\varrho}{\varrho_1+\varrho_2}g\frac{k_x}{k_c}(k_x-k_c)}. \tag{5.120}$$

A k_c-nél nagyobb hullámszámokra *minden* perturbáció instabil.



5.15. ábra. A k_x hullámszámú perturbáció s instabilitási rátájának sematikus rajza a Kelvin–Helmholtz-instabilitásban. A k_c kritikusnál kisebb hullámszámú perturbációk stabilak, ott az áramlást a sűrűségkülönbség stabilizálja.

Fontos speciális eset, ahogy már említettük, az állandó sűrűségű folyadéké, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ ($\Delta\varrho = 0$), amelyben csak a sebesség különbözik az elválasztó felület két oldalán. Ebben a *nyírási instabilitásban*

$$s = Uk_x. \tag{5.121}$$

Itt *minden* hullámszám instabil: $k_c = 0$, és az instabilitási ráta egyenesen arányos a hullámszámmal. Vegyük észre, hogy a sűrűségek azonossá tételével a nehézségi gyorsulás eltűnt. Ez arra utal, hogy a nyírási instabilitás *vízszintes* áramlásokban is jelen van: két, különböző sebességgel áramló folyadéktartomány határa nem maradhat sík, óhatatlanul begyűrődik. A sík elválasztó felületen a sebességgradiens, a nyírás, formálisan végtelen nagy lenne, ami nem valósulhat meg. A kevésbe erős nyírású vízszintes áramlások sem feltétlenül stabilak, amit a 10.4. fejezet tárgyal.

A kis sűrűségkülönbség esetén $\Delta\varrho g/(\varrho_1+\varrho_2) = g'/2$, és

$$k_c = \frac{g'}{2U^2} = \frac{2g'}{\Delta U^2}, \qquad s = \sqrt{\frac{g'}{2}k_x\left(\frac{k_x}{k_c}-1\right)}. \tag{5.122}$$

A kritikus hullámhossz $\lambda_c = 2\pi/k_c = \pi\Delta U^2/g'$. Az (5.98)-ben fellépő együttható tehát $C = \pi$.

Az instabilitás erősségére példaként említjük, hogy kis sűrűségkülönbségekre az s exponens a kétszeres kritikus hullámszám, $k_x = 2k_c$ esetén $s = \sqrt{g'k_c} = \sqrt{2g'}/\Delta U$ már egyáltalán nem kicsi. Jellegzetes időként tekintsük azt az időt, amely alatt a két rétegben levő részecskék a kritikus

[15] Ez a két mély folyadékréteg határán kialakuló belső hullám diszperziós relációja. A hullám, szemben a sekély rétegek között kialakuló társával, diszperzív. Ha $\varrho_1 = 0$, a mélyvizi hullámok $\omega_0 = \sqrt{gk_x}$ diszperziós relációját kapjuk.

hullámhossz távolságára kerülnek, amely $t = \lambda_c/\Delta U = \pi\Delta U/g'$. Mivel $st = s\pi\Delta U/g' = \sqrt{2}\pi$, ennyi idő alatt a ψ_1', ψ_2', χ mennyiségek kiindulási értékük $e^{\sqrt{2}\pi} \approx 85$-szörösére nőnek.

Eredményeinkből egy másik instabilitás, a *Rayleigh–Taylor-instabilitás* leírása is következik. Ez akkor alakul ki, ha egy nyugvó közegre nála *nehezebb* közeg kerül. Intuitíve világos, hogy ez az alapállapot is nagyon instabil. A vizsgált elrendezésben ennek $\Delta U = 0$, $\varrho_1 > \varrho_2$ felel meg. (5.120) alapján

$$s(k_x) = \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)g}{\varrho_1 + \varrho_2} k_x}. \tag{5.123}$$

Minden hullám instabil, éppúgy mint a nyírási instabilitásban, csak a hullámszámfüggés más.

A gyakorlatban ez azinstabilitás úgy valósítható meg, hogy két azonos edényt színültig töltünk nemkeveredő folyadékokkal, majd a nehezebbet egy lappal lezárva a könnyebbre borítjuk. A lap kihúzásakor először a perem mentén, majd a teljes felületen gyors áramlás indul meg. Kitüntetett hullámhossz hiányában ez rögtön erős turbulens keveredésre vezet, ahogy ebben a kísérletben látható.

Annak vizsgálatával, hogy a felületi feszültség hogyan befolyásolja a Kelvin–Helmholtz- és Rayleigh–Taylor-instabilitásokat, a 12.4. fejezet foglalkozik.

5.14. Termikus konvekció

Meglepő eredményre vezetnek az olyan instabilitások, amelyekben az alapáramlás homogén, és adott paraméter mellett az instabilitási folyamat vége nem turbulencia, hanem az instabillá vált λ_c (vagy ahhoz közeli) periodicitású viselkedés stabilizálódik. Ilyenkor a „semmiből lesz valami", *mintázatképződés* történik, stacionárius térbeli struktúrák jelennek meg az áramlásban. A rendszer energiabetáplálásnak van kitéve, amely átfolyik rajta, tehát *nyílt rendszer*, amely kifejezés a termikus egyensúlytól való eltérésre utal. Az új stabil állapot beállása tekinthető egyfajta *nemegyensúlyi fázisátalakulásnak*. Ez az áramlás is instabillá válhat további paraméterváltozás következtében, így esetenként instabilitások sorozata is megfigyelhető. Minderre fontos példa a termikus konvekció jelensége, illetve a 12.5. fejezetben tárgyalt kettős diffúziós instabilitás.

5.14.1. Szemléletes kép

Az eddig tárgyalt jelenségekben a hőmérséklet passzív szerepet játszott, mintegy a sűrűséggel vándorolt megmaradó mennyiségként. A kisskálájú jelenségekben azonban a hővezetés jelentős, ahogy az 5.2. fejezetben említettük. A T hőmérsékletre vonatkozó egyenlet[16] (feltéve, hogy fázisátalakulás nem történik) a

$$\frac{dT}{dt} = \kappa\nabla^2 T \tag{5.124}$$

hődiffúziós egyenlet. Hangsúlyozzuk, hogy a bal oldalon a teljes derivált áll, ugyanis a folyadékelem mozgás közben is érzékeli a hődiffúziót. Ezzel megjelent egy új paraméter, a κ hődiffúziós állandó, amely új dimenziótlan számmal (számokkal) is együtt jár. Bármely homogén anyagi összetételű közegben kis hőmérséklet-változás esetén a hőtágulás következtében a sűrűség és hőmérséklet közötti kapcsolat

$$\varrho = \varrho_0\big(1 - \alpha(T - T_0)\big) \tag{5.125}$$

(α a hőtágulási együttható), a nulla index pedig valamely referenciaállapotot jelöl. Az (5.124) hődiffúziós egyenlet ekkor tehát az (5.13) sűrűségegyenlet általánosítását jelenti. A sűrűség már

[16] Ebben és a 12.4. fejezetben a Laplace-operátort ∇^2-tel jelöljük, hogy a Δ szimbólumot különbségek jelölésére használhassuk.

nem állandó a pálya mentén, hanem diffúziós folyamatnak van kitéve, miközben az (5.12) divergenciamentességi feltétel továbbra is érvényes. Mivel a hővezetés alapvető eltérést jelent az ideális folyadék leírásától, amelyben csak adiabatikus folyamatok létezhetnek, a hővezetés mindig disszipációval, viszkozitással párosul.

Az egyik legfontosabb új jelenség a termikus konvekció, a nehézségi erő hatásával ellentétes irányú hőáram (pl. alulról történő egyenletes melegítés, olajréteg palacsintasütőben) hatására kialakuló áramlás. Az ezzel kapcsolatos instabilitást első tanulmányozóiról Rayleigh–Bénard-instabilitásnak nevezik (Lord Rayleigh (1842–1919) brit elméleti fizikus, H. Bénard (1874–1939) francia kísérleti fizikus). A stacionárius alapállapotban áramlás *nélküli* hővezetés zajlik.

A kialakuló áramlás jellegzetes vízszintes síkbeli lineáris mérete mindig összemérhető a folyadékréteg H vastagságával. Az (5.124) egyenlet szerint a jellegzetes U sebességet a hődiffúzió szabja meg. Abból a tényből, hogy a $(\mathbf{v}\,\mathrm{grad})T$ és a $\kappa\nabla^2 T$ tagok összemérhetők, a sebesség nagyságrendje $U = \kappa/H$ (a karakterisztikus idő H^2/κ). A konvekciót jellemző legfontosabb dimenziótlan szám a Rayleigh-szám

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T H^3}{\nu\kappa}, \tag{5.126}$$

ahol ΔT a folyadék alja és teteje közötti hőmérséklet-különbség. Ez a szám nem más, mint a felhajtóerőből származó $g\alpha\Delta T$ gyorsulás viszonya a $\nu U/H^2 = \nu\kappa/H^3$ viszkózus gyorsuláshoz:

$$Ra = \frac{\text{felhajtóerő}}{\text{viszkózus erő}}. \tag{5.127}$$

Áramlás nyilván akkor indul be, ha a felhajtóerő, azaz a hőmérséklet-különbség elég nagy, vagyis ha Ra nagyobb egy Ra_c kritikus értéknél. Az áramlás nélküli állapot tehát

$$Ra > Ra_c \tag{5.128}$$

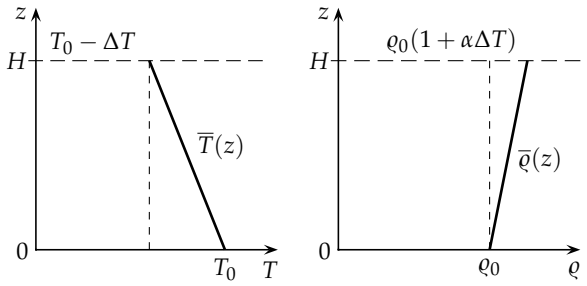
esetén instabil. A kritikus Rayleigh-szám értéke függ a peremfeltételektől és az edény szimmetriájától is, de értéke mindegyik esetben $Ra_c \approx 1000$ körüli. Ezzel a kritikus Rayleigh-számmal számolva könnyű megbecsülni, hogy $H = 1$ cm vastagságú réteg mekkora hőmérséklet-különbség esetén válik instabillá. Vízre és levegőre (7.1. táblázat) $\Delta T_c \approx 0{,}1$, illetve 10° C adódik. Mivel már $H = 10$ cm-hez is 1000-szer kisebb kritikus hőmérséklet-különbség tartozik, levonhatjuk a következtetést, hogy természetes közegeinkben nagy skálán a konvekció nem a kritikus Rayleigh-szám közelében jellemző áramlást mutatja.

A Rayleigh-szám definíciójában a ΔT hőmérséklet-különbség akkor pozitív, ha a kívülről előírt hőmérséklet az edény *alján nagyobb*, mint a tetején. A hőmérséklet felfelé egyenletesen csökken az áramlásmentes állapotban, az ehhez tartozó $\overline{\varrho}(z)$ sűrűség *növekszik* a magassággal (5.16. ábra). Vegyük észre, hogy az ilyen rétegzettség hővezetés és viszkozitás nélkül instabil, a Brunt–Väisälä-frekvencia négyzete negatív! Az ideális folyadékokra jellemző Rayleigh–Taylor-instabilitás nem alakul ki, a disszipatív hatások képesek *stabilizálni* olyan rétegzettséget is, amely anélkül már régen felbomlana. Ez a stabilizálódás azonban nem terjedhet minden határon túl, és a kritikus Rayleigh-szám éppen azt fejezi ki, hogy a felhajtóerő egyszer legyőzi a hődiffúzió és viszkozitás stabilizáló hatását.

A kritikus Rayleigh-számnál a λ_c kritikus hullámhossz válik instabillá, amelynek tipikus értéke

$$\lambda_c \approx 2H, \tag{5.129}$$

azaz a kritikus hullámhossz fele egyezik meg a folyadékmélységgel.



5.16. ábra. Az alapállapoti hőmérséklet- és sűrűségprofil, amely áramlással nem társul. Ez az állapot válik instabillá az Ra_c kritikus Rayleigh-számnál, ahol beindul az áramlás.

5.14.2. Stabilitásvizsgálat

Az alulról melegített áramlásmentes stacionárius állapotban az (5.124) egyenlet szerint a hőmérsékletprofil magasság szerinti második deriváltja eltűnik, vagyis a hőmérséklet lineárisan változik. Az 5.16. ábra szerinti alapállapotban

$$\overline{T}(z) = T_0 - \frac{\Delta T}{H} z, \qquad \overline{\varrho}(z) = \varrho_0 \left(1 + \alpha \frac{\Delta T}{H} z\right). \tag{5.130}$$

Használhatjuk ezért a függőleges rétegzettség esetén érvényes (5.19)–(5.21) hidrodinamikai egyenleteket (a Boussinesq-közelítés szellemében), a diffúziós taggal kiegészítve. Ehhez vegyük észre, hogy az (5.125) állapotegyenlet miatt (5.130) alapján

$$\varrho'(\mathbf{r},t) = \varrho(\mathbf{r},t) - \overline{\varrho}(z) = -\alpha\varrho_0 \left(T(\mathbf{r},t) - \overline{T}(z)\right) = -\alpha\varrho_0 T'(\mathbf{r},t), \tag{5.131}$$

ahol T' az alapállapoti profiltól való eltérés. Ezért az (5.19)-ben szereplő $-g\varrho'/\varrho_0$ helyett írható $g\alpha T'$, és ezzel a megfeleltetéssel az (5.20) egyenlet a

$$\frac{dT'}{dt} = w\frac{\Delta T}{H} \tag{5.132}$$

alakot ölti.

Ehhez hozzávéve a hődiffúziós tagot, az alapállapottól való, vesszővel jelölt eltérések időfejlődését megadó teljes hidrodinamikai egyenletrendszer

$$\frac{dT'}{dt} = w'\frac{\Delta T}{H} + \kappa\nabla^2 T', \tag{5.133}$$

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}\, p' + g\alpha T'\mathbf{n} + \nu\nabla^2\mathbf{v}', \tag{5.134}$$

a továbbra is érvényes divergenciamentességi feltétellel. Itt a sebességet is vesszős mennyiségként jelöltük, hiszen az egyben az áramlásmentes alapállapot zérus sebességétől való eltérés.

A p' dinamikai nyomás konkrét alakjára nincs szükség, ha rotációképzéssel áttérünk az örvényesség egyenletére. A továbbiakban feltesszük, hogy az áramlás kétdimenziós, az x, z síkban történik, és minden térmennyiség csak ettől a két koordinátától függ. Az örvényesség az áramlási síkra merőleges $\omega'_y = \partial u'/\partial z - \partial w'/\partial x$ komponensére (5.134) alapján a

$$\frac{d\omega'_y}{dt} = -g\alpha\frac{\partial T'}{\partial x} + \nu\nabla^2\omega'_y \tag{5.135}$$

egyenletet kapjuk, ami mutatja, hogy a hőmérséklet-eloszlás x irányú inhomogenitása örvényességet kelt az y tengely körül.

A divergenciamentességet egy $\psi'(x,z)$ áramlási függvény létezése biztosítja, amellyel $u' = -\partial\psi'/\partial z$, $w' = \partial\psi'/\partial x$ és $\omega'_y = -\nabla^2\psi'$. A probléma így két skalárfüggvénnyel, ψ', T'-vel teljesen leírható.

Az egyenleteket most már kis eltéréseket feltételezve adjuk meg, amikor a teljes deriváltak a parciálisokkal közelíthetők:

$$\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial t} = g\alpha\frac{\partial T'}{\partial x} + \nu\nabla^4\psi', \tag{5.136}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2 T'. \tag{5.137}$$

A dimenziótlanítást az $\mathbf{r} \to H\mathbf{r}$, $t \to H^2/\kappa\, t$, $T' \to \Delta T\, T'$, $\psi' \to \kappa\,\psi'$ transzformációval végezve az egyenletek

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial t} = Ra\frac{\partial T'}{\partial x} + \nabla^4\psi', \tag{5.138}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \nabla^2 T', \tag{5.139}$$

ahol megjelent az (5.126) Rayleigh-szám, és a

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\text{kinematikai viszkozitás}}{\text{hődiffúziós állandó}} \tag{5.140}$$

Prandtl-szám is (L. Prandtl német mérnök, fizikus (1875–1953), aki megalapozta a (nem forgatott) folyadékok határréteg-elméletét.) A Prandtl-szám természetes közegeinkre egységnyi rendű, vízben 7, levegőben 0,7 (a földköpenyben viszont kb. 10^{23}).

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása kereshető a

$$\psi' = \psi'_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)}, \qquad T' = T'_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)} \tag{5.141}$$

alakban. Függőleges irányban a véges kiterjedés miatt haladó hullám nem létezhet, a k_z hullámszám tehát állóhullámhoz tartozik majd. Egyelőre paraméternek tekintjük, és a diszperziós reláció k_x-függését keressük. Az exponenciális alakokat az (5.138), (5.139) egyenletekbe helyettesítve az amplitúdókra a

$$\left[\frac{1}{Pr} i\omega_0\left(k_x^2 + k_z^2\right) - \left(k_x^2 + k_z^2\right)^2\right]\psi'_0, = ik_x Ra T'_0, \tag{5.142}$$

$$\left[-i\omega_0 + \left(k_x^2 + k_z^2\right)\right] T'_0 = ik_x\psi'_0 \tag{5.143}$$

adódik. Az egyenleteket összeszorozva $\omega_0(k_x)$-ra másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldása

$$\omega_0 = \frac{i}{2\left(k_x^2 + k_z^2\right)^{1/2}}\left[-\left(k_x^2 + k_z^2\right)^{3/2}(1 + Pr) \pm \sqrt{\left(k_x^2 + k_z^2\right)^3(1 - Pr)^2 + 4k_x^2 RaPr}\right]. \tag{5.144}$$

Mivel a gyökjel alatt pozitív szám áll, a frekvencia tisztán képzetes. Az instabilitás a pozitív előjelű járulékból adódik, ezért az instabilitási ráta

$$s(k_x) = \frac{1}{2\left(k_x^2 + k_z^2\right)^{1/2}}\left[\sqrt{\left(k_x^2 + k_z^2\right)^3(1 - Pr)^2 + 4k_x^2 RaPr} - \left(k_x^2 + k_z^2\right)^{3/2}(1 + Pr)\right], \tag{5.145}$$

amennyiben a szögletes zárójel pozitív.

Vizsgáljuk először az instabilitás megjelenésének feltételét, vagyis mikor lehet $s = 0$ (és $\omega_0 = 0$). A szögletes zárójel eltűnéséből azt kapjuk, hogy

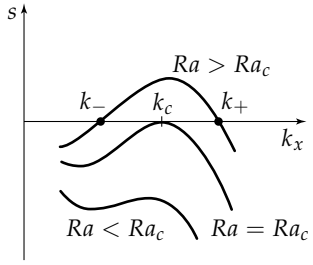
$$Ra = \frac{\left(k_x^2 + k_z^2\right)^3}{k_x^2}. \tag{5.146}$$

Az, hogy ebben a kifejezésben a Pr Prandtl-szám nem jelenik meg, annak következménye, hogy Pr az (5.138) egyenletnek csak az időfüggő tagjában van jelen, és most egy időfüggetlen feltételt keresünk. A jobb oldal k_x-nek olyan függvénye, amelynek minimuma pozitív érték. Adott k_z mellett a minimum a $k_x = k_c = k_z/\sqrt{2}$ hullámszámhoz tartozik, és nagysága $27k_z^4/4$. Ha a Rayleigh-szám ennél kisebb, a szögletes zárójel negatív. Ezért az instabilitás szükséges feltétele, hogy Ra az

$$Ra_c = \frac{27}{4}k_z^4 \tag{5.147}$$

kritikus értéknél nagyobb legyen.

Az $s(k_x)$ mennyiség viselkedése a Rayleigh-szám függvényében a következő. Amíg Ra kicsi, s negatív. Amikor $Ra = Ra_c$, a görbe alulról érinti a vízszintes tengelyt, a k_c hullámszámnál. Itt tehát megjelenik az instabilitás lehetősége. Ennél nagyobb Ra-kra s a (k_-, k_+) intervallumban pozitív, amint az 5.17. ábra mutatja. A $k_\pm$ értékek a $(k_\pm^2 + k_z^2)^3 = Rak_\pm^2$ irracionális egyenlet pozitív megoldásai $Ra > Ra_c$-re.



5.17. ábra. A s mennyiség sematikus függése a k_x hullámszámtól különböző Ra Rayleigh-számok esetén

Az instabilitás szempontjából releváns k_z hullámszám a folyadékréteg alján ($z = 0$) és tetején ($z = H$) előírt határfeltételeken múlik. Ez lehet szabad, azaz nyírásmentes, vagy merev, azaz elmozdulásmentes, bármelyik lapon. Minden esetben a függőleges irányban több állóhullám is kialakulhat, hasonlóan a belső hullámok normálmódusaihoz (5.9. fejezet).

Legegyszerűbb esetként itt csak a szabad-szabad határfeltételt tárgyaljuk részletesen. Ez annak felel meg, hogy a konvektív réteg egy sűrűbb folyadék fölött úszik. A függőleges normálisú lapra x irányban ható nyíróerő (4.22) szerint $(\partial u'/\partial z + \partial w'/\partial x)$-szel arányos. A felületeken azonban w' mindenütt eltűnik, x szerint deriváltja is nulla, ezért a felületen $\partial u'/\partial z$ is eltűnik. Az (x, z) síkbeli divergencia z szerinti deriváltja $\partial^2 u'/\partial x \partial z + \partial^2 w'/\partial z^2$. Mivel ez nulla, w' z szerinti második deriváltja eltűnik a felületeken. A peremfeltétel a szabad-szabad esetben tehát

$$w' = T' = 0, \qquad \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = 0, \qquad \text{ha} \qquad z = 0, H. \tag{5.148}$$

Ennek megfelelően w' olyan szinuszfüggvény z-ben, amelynek félhullámhossza egész számszor fér rá a H magasságra. Dimenziótlan alakban

$$w' \sim T' \sim \sin n\pi z, \qquad \text{vagyis} \qquad k_z^{(n)} = n\pi. \tag{5.149}$$

Az (5.147) kifejezés jobb oldalán a minimumot a *legkisebb* hullámszám adja meg, azaz az $n = 1$

módus. Így a kritikus Rayleigh-szám erre a peremfeltételre

$$Ra_c = \frac{27}{4}\left(k_z^{(1)}\right)^4 = \frac{27}{4}\pi^4 = 657. \tag{5.150}$$

A kritikus k_x-hullámszám $k_c = k_z^{(1)}/\sqrt{2} = \pi/\sqrt{2}$, az ehhez tartozó kritikus vízszintes (dimenziós) hullámhossz

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}H = 2\sqrt{2}H = 2{,}82H. \tag{5.151}$$

A többi esetben is érvényes kritikus adatokat az 5.2. táblázat foglalja össze. Megjegyzés: ezek az eredmények széles felületek felett kialakuló instabilitásokra vonatkoznak, amennyiben az edény L vízszintes mérete összemérhető H-val, az instabilitás más jellegű.

5.2. táblázat. A kritikus Rayleigh-szám és hullámhossz a különböző felszíni peremfeltételek mellett. A merev-szabad esetben az eredmény független attól, hogy melyik felszín a szabad.

	MEREV-MEREV	MEREV-SZABAD	SZABAD-SZABAD
Ra_c	1708	1101	657
λ_c	$2{,}02H$	$2{,}34H$	$2{,}82H$

A kritikus értéknél éppen beinduló áramlás függőleges sebessége $w' \sim \sin \pi z$. Az áramlási függvény ezért $\sin \pi z$-vel arányos, és az x-függésben $k_c x$ argumentumú periodicitás jelenik meg. Választhatjuk tehát az (5.141) dimenziótlan áramlási függvényt a

$$\psi'(x,z) \sim -\sin k_c x \sin \pi z \tag{5.152}$$

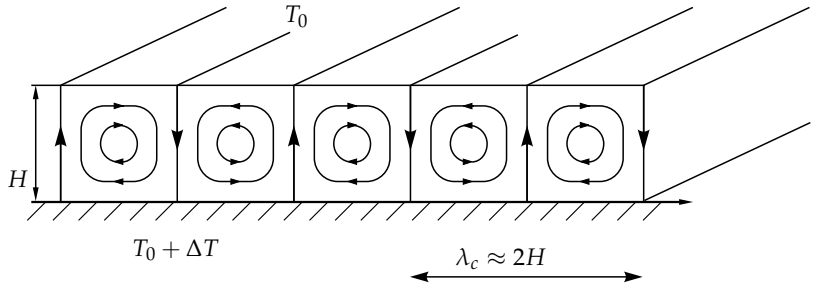
valós alakban, hiszen $s = \omega_0 = 0$. A síkbeli áramlás sebességkomponensei

$$u' \sim \pi \sin k_c x \cos \pi z, \qquad w' \sim -k_c \cos k_c x \sin \pi z, \qquad 0 < z < 1. \tag{5.153}$$

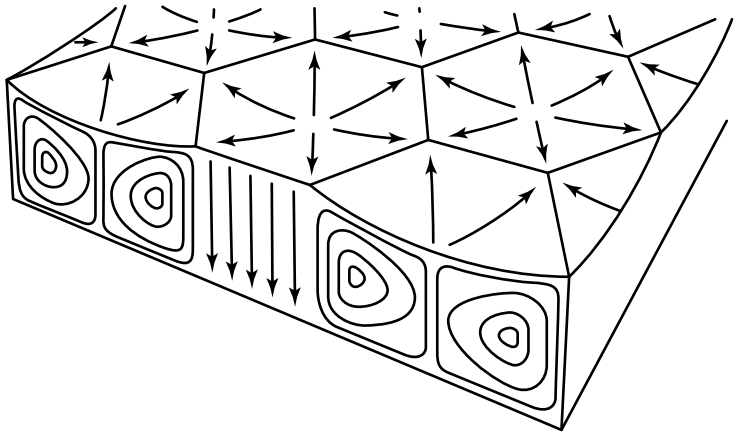
A $(0, \lambda_c/2)$ intervallumban $z < 1/2$-re u' pozitív, w' előjelet vált $x = \lambda_c/4$-re, és éppen ott $(x = 0, \lambda_c/2)$ maximális abszolútértékű, ahol u' eltűnik. A következő fél hullámhossznyi intervallumban fordított a helyzet, és $z > 1/2$-re is. A teljes hullámhossznyi intervallum szélén $x = 0$, λ_c-re leáramlás történik, középen feláramlás. Az intervallum tehát két, ellenkező irányban forgó körkörös áramlási *cellára* bomlik. Amennyiben az elrendezés y irányban eltolásinvariáns, az áramlás szemben forgó hengerek kialakulására vezet (5.18. ábra), amelyek között felváltva felés leszálló áramlási zónák helyezkednek el.

A stabilitásvizsgálat elvégezhető a síkbeli áramlás feltételezése nélkül is. Az adódik, hogy a kritikus hullámszámvektor tetszőleges irányú lehet a vízszintes síkban, de nagysága ugyanaz, mint amit a síkbeli áramlásra kaptunk. Az (5.151) összefüggés tehát tetszőleges irányban érvényes lehet. A síkbeli izotrópiával azonban csak néhány elrendezés lehet összhangban. Három, egymással 120 fokos szöget bezáró kritikus hullámszámvektorhoz tartozó áramlást szuperponálva, felülnézetben hatszöges szimmetriájú áramlást kapunk (de elvileg lehetséges két egymásra merőleges hullámszámvektorból adódó négyzetes szimmetriájú áramlás is). A peremektől távol általában közel hatszöges áramlási cellák alakulnak ki, amelyekben pl. középen történik feláramlás, a hatszög alapú hasáb oldallapjai mentén pedig leáramlás (5.19. ábra).

A ΔT_c kritikus hőmérsékleten az áramlási sebesség még zérus, de növekvő ΔT-re gyorsan növekszik. Az, hogy milyen végállapothoz tart, az elvégzett lineáris stabilitásvizsgálatból nem



5.18. ábra. Stacionárius konvekciós áramlás. Közvetlenül a kritikus hőmérséklet-különbség (kritikus Rayleigh-szám) elérése után a peremektől távol szabályos, hengeres áramlási cellák alakulnak ki, ha a geometria (az oldalsó peremekkel együtt) y irányban eltolásinvariáns.



5.19. ábra. Stacionárius konvekciós áramlás. Közvetlenül a kritikus hőmérséklet-különbség (kritikus Rayleigh-szám) elérése után szabályos, hatszöges szerkezetű áramlási cellák is kialakulhatnak. A hatszög alapú hasáb szemközti oldalai közötti távolság λ_c.

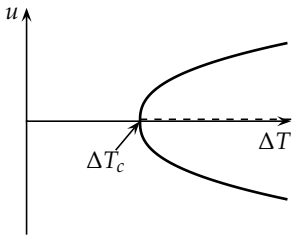
derülhet ki, ahhoz nemlineáris vizsgálatra, illetve kísérletekre van szükség. A tapasztalat szerint van egy véges hőmérséklet-tartomány, amelyben a legfontosabb változás az instabilitás során kialakult áramlás stacionáriussá válása, nullától eltérő sebességgel. *Ra* növekedésével a sebesség növekszik, miközben a térbeli szerkezet gyakorlatilag változatlan.

Kísérletileg mindez egyszerűen demonstrálható alulról fűtött keskeny folyadékrétegben: az instabillá vált áramlás felülről nézve szemcsés szerkezetű, amely a hatszöges szerkezet véletlenszerűen módosult formájának tekinthető. Ez látható ebben a kísérletben.

A kép teljesebb, ha a megfigyelést hőmérsékletmérés egészíti ki. Ebben a kísérletben szenzorok mérik a folyadékréteg alján és felszíne alatt a hőmérsékletet, és látszik, hogy a különbség emelkedésével a mintázat alig változik.

Az instabilitást az 5.20. ábrával szokás illusztrálni: egy cella előjeles tipikus sebessége látható ΔT függvényében. A ΔT_c (vagy Ra_c) alatti stabil állapotban nincs áramlás. $\Delta T > \Delta T_c$-re a cellás áramlás a stabil, ez a hidrodinamika új attraktora. Az alapáramlás viszont instabillá vált, nem attraktor többé. A két ág arra utal, hogy egy adott cellában két, ellenkező körüljárású áramlás lehetséges.

A pontmechanikában az ehhez hasonló stabilitásváltást *bifurkációnak* nevezik. Itt azonban térben kiterjedt, sok szabadsági fokú rendszerben történik stabilitásváltás, amit ezért jogos fázisátalakulás-szerű jelenségnek tekinteni. Mivel mindez nem termikus egyensúlyban történik, az ehhez hasonló jelenségeket – ahogy korábban említettük –, nemegyensúlyi fázisátala-



5.20. ábra. A konvekciós áramlás erősségének függése a hőmérséklet-különbségtől a $\Delta T < 2\Delta T_c$ ($Ra < 2Ra_c$) tartományban. A függőleges tengelyen az adott helyre jellemző áramlási cella tipikus u sebessége látható. A szaggatott vonal instabil állapotot jelöl.

kulásnak nevezik. A görbe jellege valóban megfelel a ferromágneses anyagok mágnesezettsége hőmérsékletfüggésének (csak ott magas hőmérsékleten tűnik el a mágnesezettség, és a kritikus pont a Curie-pont).

A kritikus pont átlépésével az áramlásmentes állapotból mintázatot mutató áramlás alakul ki. A konvekció első instabilitásának felderítésével (Bénard kísérletei 1900-ban kezdődtek) a fizika előfutárává vált a más tudományterületeken pl. kémiában, biológiában előforduló mintázatképződési folyamatok megértésének. Ezek a XX. század második felében kerültek az érdeklődés középpontjába, amelyeket összefoglalóan Turing-instabilitás néven ismerünk. (A. Turing (1912–1954) angol matematikus, aki a nevével fémjelzett mechanizmust 1952-ben írta le.)

5.14.3. Konvekció jóval az első instabilitás után

A kritikus Rayleigh-szám néhányszorosának megfelelő fűtés esetén az áramlás időben periodikussá, majd egyre bonyolultabbá válik, és karakterisztikus mérete is eltérhet a λ_c hullámhossztól. A feláramlás tipikus sebessége abból becsülhető meg, hogy az $\alpha g \Delta T$ felhajtóerőt a $\nu W/H^2$ viszkózus erő átlagban kompenzálja, amelyből:

$$W = \frac{\alpha g \Delta T H^2}{\nu}. \tag{5.154}$$

A WH/κ dimenziótlan feláramlási sebesség tehát a Rayleigh-számmal arányos. A feláramlás sokkal gyorsabb (az Ra tényezőször nagyobb), mint a hődiffúzió jellegzetes κ/H sebessége, a konvekció tehát jóval hatékonyabb transzportfolyamat, mint a hővezetés.

Ez pontosabban is megfogalmazható az ún. *Nusselt-szám* segítségével (W. Nusselt, 1882–1957, német mérnök, fizikus, a hőtranszport elismert kutatója). Az áramlásmentes állapotban a q_0 hőfluxus (az egységnyi vízszintes felületen átáramló hőáram) $q_0 = -k \operatorname{grad} T = k\Delta T/H$, ahol k a hővezetési állandó.[17] A konvekció beindulása utáni q hőfluxus mérésekkel határozható meg, és a Nusselt-szám az

$$Nu = \frac{q}{q_0} = \frac{qH}{k\Delta T} = \frac{\text{teljes hőfluxus}}{\text{áramlás nélküli hővezetési hőfluxus}}. \tag{5.155}$$

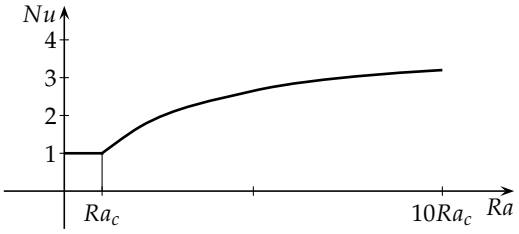
Az áramlásmentes $Ra < Ra_c$ tartományban $q = q_0$, a Nusselt-szám 1, Ra_c fölött növekedni kezd, és a tapasztalat szerint Ra monoton növekvő függvénye marad. A bifurkációt jellemző 5.20. ábra tehát kiegészíthető az 5.21. ábrával. Ez a Nusselt-számot mutatja a Rayleigh-szám függvényében. Az $Nu(Ra)$ grafikon növekedése Ra_c felett eleinte lineáris, de aztán lassabbá

[17] A κ hődiffúziós állandóval a $\kappa = k/(\varrho_0 c_p)$) kapcsolatban áll, ahol c_p a közeg állandó nyomáson vett fajhője.

válik. Az $Ra \gg Ra_c$ tartományban

$$Nu \sim Ra^{\gamma}, \tag{5.156}$$

s a mérések szerint a kitevő $\gamma \approx 1/3$.

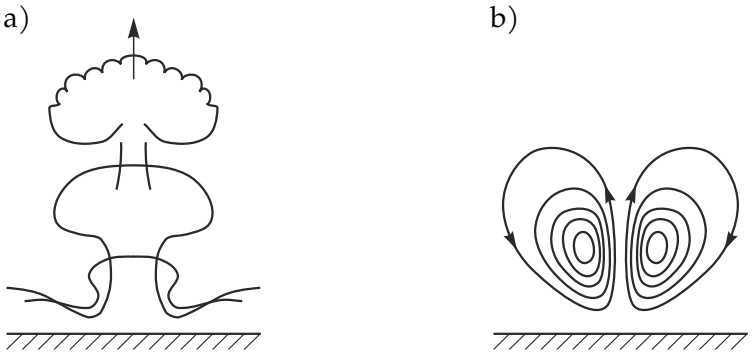


5.21. ábra. A Nusselt-szám függése a Rayleigh-számtól, az első instabilitást jóval meghaladó értékekig. A mérési eredményeket összefoglaló sematikus rajz

Nagy Rayleigh-számok mellett (az $Ra \approx 50000$ tartományban) az áramlás a peremfeltételtől függetlenül szabálytalanná, turbulenssé válik. A légköri és óceáni tipikus értékekkel számolt Rayleigh-számok is a turbulens tartományba esnek. Az anyagi paraméterekkel (7.1. táblázat) és mindössze egy fok különbséggel számolva, a planetáris határrétegben ($H = 1\,\mathrm{km}$) $Ra = 10^{17}$, az óceáni keveredési rétegben ($H = 40\,\mathrm{m}$) pedig $Ra = 10^{15}$.

A nagyon nagy Rayleigh-szám ellenére a légkörben időnként mégis megfigyelhető hengeres áramlás. Stabilizálódásában ezért konvekción kívüli tényezőknek (pl. a szélnek) is szerepet kell játszania. A reggeli órákban a gyorsan melegedő talaj az alsó légréteget fűti, és a sík felszín fölött valóban kialakulhat az 5.18. ábrán látotthoz hasonló áramlás. A felszálló ökvekben a levegő elérheti a kicsapódási szintet, amely párhuzamos felhőutcák megjelenésére vezet.

A természetes közegek tipikus turbulens konvekciós folyamata a *termikek* kialakulása. A felmelegedett folyadékcsomagok véletlenszerűen szakadnak el az alsó peremtől (5.22a. ábra). Az egész áramlás a szabályos hatszöges áramlás térben és időben is szabálytalanná vált esetének tekinthető. A felszálló meleg közeg peremén örvényesség keletkezik, ezért a termikek sebességtere hasonlít egy felfelé mozgó örvénygyűrűjéhez (5.22b. ábra). Részletes vizsgálatukra a turbulencia kapcsán a 14.1.1. fejezetben kerül sor.



5.22. ábra. Termik szerkezete. a) A felszállás három fázisa (a vonal a hideg–meleg határfelületet mutatja). b) Áramvonalak az (x, z) síkmetszeten, adott pillanatban

A *légköri* termikek alakja a kicsapódási szint elérése után a gomolyfelhők képében rajzolódik ki. A termikek által dominált turbulens keveredés vezet a planetáris határréteg jó keveredéséhez is (14.2. fejezet). A termikek legerősebb változata a nagy zivatarfelhők kialakulásához vezető gyors konvekciós feláramlás, amelyet a vízpára kicsapódásakor felszabaduló hő még gyorsít is.

Az ilyen termikek szélessége 10 km is lehet, feláramlási sebességük néhány m/s, és feljuthatnak a troposzféra tetejéig (12.12. ábra).

A természetes *vizek* konvekcióját általában az éjjeli vagy az őszi-téli felszíni hűtés váltja ki. Az édesvizű tavakban őszre kialakuló turbulens konvekció a víz hőmérsékletének homogenizálódásához vezet. A 4 fokos hőmérséklet elérése után már csak a felszín hűl tovább, mert a víz 4 fokon a legsűrűbb. A rétegződés stabil, mert 4 fok alatt a hőtágulási együttható már negatív. Ez az anomális viselkedés az oka annak, hogy a tavak nem fagynak be teljes mélységükben, és annak is, hogy a tavaszi felszíni melegedés képes konvekciót beindítani (α és $\Delta T < 0$, de $Ra > 0$). A tengerek felszínén télen a sós víz $-1{,}7$ fokos is lehet, a 100 m körüli mélységben viszont $+1$, $+2$ fok, és ez is turbulens konvekcióra vezet.

A konvekció fontos szerepet játszik a Föld mintegy 3000 km mélységig terjedő *köpenyében* is. A köpeny szilárd anyaga igen hosszú időskálán (millió év) folyadékként viselkedik. E folyadék természetesen igen erősen súrlódó: viszkozitási együtthatója $\nu = 10^{17}$ m^2/s-mal becsülhető.[18] A hőtágulási és a hővezetési együttható a nem fémes szilárd anyagokénak megfelelő (7.3. táblázat). A Rayleigh-szám $H = 3000$ km-es vastagsággal és 4000 fok hőmérséklet-különbséggel számolva $Ra \approx 10^8$. Ez mutatja, hogy a konvekció a földköpenyben is turbulens. A áramlás felszálló ágai termikeknek tekinthetők. A velük kapcsolatos (szabálytalan) konvektív áramlási cellák mozgatják a földfelszín nagy tektonikai egységeit, lemezeit. E lemezek átlagos sebessége, éppúgy mint a köpeny termikeié néhány cm évente. Ezzel a sebességgel egy 3000 km sugarú kör bejárásához néhányszor százmillió év szükséges. A konvekcióban résztvevő anyagok tehát csak 30–40-szer fordulhattak körül a kéregben a Föld egész élettörténete során. Ennél sokkal gyorsabb konvekció zajlik a Föld még mélyebben elhelyezkedő külső magjában is, sőt ott a Coriolis-erő is lényeges, de a mágneses hatások is fontosak, és ezért magnetohidrodinamikai leírásra van szükség (8.3. fejezet).

[18] A Föld forgása és a nagy méretek ellenére a köpeny áramlásában a Coriolis-hatás nem lényeges, a súrlódás dominál, a jellemző Ekman-szám 10^9 nagyságrendű (amely akkor lenne kicsi, ha a Coriolis-erő fontos lenne a folyamatban).

6. fejezet

A forgatás és rétegzés együttes hatása sekély folyadékra

A forgatott rétegzett folyadék vizsgálata az eddigiek szintetizáló alkalmazását igényli. Két karakterisztikus frekvencia verseng egymással: az N Brunt–Väisälä-frekvencia (vagy kétrétegű közegbeli megfelelője, a $\sqrt{g'/H}$ mennyiség) és az adott szélességi körre jellemző f_0 Coriolis-paraméter. Mivel természetes közegeinkben N tipikus értéke $10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$, a közepes szélességeken pedig az f_0 helyi Coriolis-paraméter $10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$ körüli, a két frekvencia hányadosa, az

$$\boxed{Fn \equiv \frac{N}{|f_0|}} \tag{6.1}$$

frekvenciaarány (a jelölés e szó betűiből származik) 100 nagyságrendű. A rétegzettség önmagában tehát sokkal gyorsabb mozgásokat hoz létre, mint a forgás.

Mivel a rétegzettség hatása főleg a függőleges irányú mozgáshoz kapcsolódik, a forgatásé pedig a vízszintes síkbelihez, célszerű a frekvenciaaránynak a $\varepsilon = H/L$ méretaránnyal vett szorzatát, illetve e szám négyzetét, a

$$\boxed{Bu \equiv \left(\frac{NH}{f_0 L}\right)^2 = (Fn\varepsilon)^2} \tag{6.2}$$

Burger-számot használni (A. P. Burger, 1927–2003, dél-afrikai meteorológus). Ennek kis értéke forgás-dominált, nagy értéke pedig rétegzettség-dominált áramlásra utal. A sekélyfolyadék-tulajdonság szerint $H \ll L$, és a Földön két nagyságrend a tipikus arány. A Burger-szám jellegzetes értéke tehát a Földön egységnyi, és ez azt jelenti, hogy a forgás és a rétegzettség fontossága összemérhető. A Burger-szám maga nem tartalmazza az áramlásra jellemző sebességet, de előáll két ilyen mennyiség, az (1.1) Ro Rossby-szám és az (5.2) Fr' belső Froude-szám arányának négyzeteként $Bu = Ro^2/Fr'^2$.

A Burger-szám és az áramlás vízszintes L kiterjedése segítségével definiálható egy jellegzetes vízszintes síkbeli méret, a *belső* Rossby-sugár. A belső jelző arra utal, hogy ez a távolság a rétegzettség következtében jelenlévő belső elválasztó felületek mozgásával kapcsolatos. Mivel a belső mozgásokat a rétegek közötti sűrűségkülönbség szabályozza, amely mindig lényegesen kisebb az átlagos sűrűségnél, a belső Rossby-sugár mindig kisebb a külsőnél.

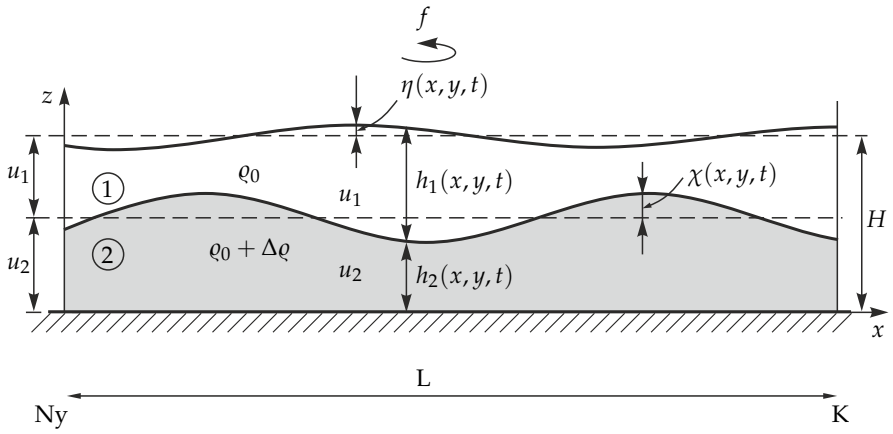
6.1. A forgatott kétrétegű sekély folyadék egyenletei

Célunk a sekély, rétegzett folyadék áramlásának leírása a forgó Földön, a 3.5. ábra szerinti elrendezésben. Nagyskálájú áramlásokat vizsgálva a viszkozitást elhanyagoljuk. Először a közeget két élesen különböző sűrűségű rétegből állónak tekintjük, köztük $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbséggel (6.1. ábra). A tapasztalathoz igazodva feltesszük, hogy a relatív sűrűségkülönbség kicsi, $\Delta\varrho/\varrho_0 \ll 1$.

A sekélység következtében mindkét rétegben alkalmazhatjuk a *hidrosztatikus közelítést*. A nyomáseloszlást ezért (5.65), (5.66) adja meg. A vízszintes sebességkomponensekre vonatkozó Euler-egyenletekben új tagként a Coriolis-gyorsulás jelenik meg, az 5.10. fejezet jelöléseit használva

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} = f\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} - g\,\mathrm{grad}\,\eta, \qquad \frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = f\mathbf{u}_2 \times \mathbf{n} - g\,\mathrm{grad}\,\eta - g'\,\mathrm{grad}\,\chi.} \tag{6.3}$$

Mindkét egyenlet a forgó Föld felszínén érvényes, és a z tengely a lokális függőleges $\mathbf{n}$ irányt jelöli ki. A forgás helyi erősségét az $f = f_0 + \beta y$ Coriolis-paraméter méri (3.5. fejezet). A g, illetve g' nehézségi gyorsulások magukban foglalják a centrifugális járulékot is. A d/dt derivált a kétdimenziós advektív gyorsulást tartalmazza, hiszen az egyes sekély rétegekben a sebesség feltevés szerint független a magasságtól. A kontinuitást a folyadékoszlopok térfogatának megmaradása jelenti, ezért mindkét közeg pillanatnyi $h_1 = \eta - \chi + H_1$ és $h_2 = \chi + H_2$ vastagságára fennáll az (5.69) egyenlet.



6.1. ábra. A Föld φ_0 szélességi köre érintősíkjában fekvő kétrétegű sekély folyadék. A koordinátarendszer z tengelye a lokális függőleges irányba mutat, az x tengely a szélességi körökkel párhuzamos. A külső folyadékfelszín nyugalmi szinthez viszonyított alakját az $\eta(x,y,t)$, a ϱ_0 sűrűségű 1-es közeget a $\varrho_0 + \Delta\varrho$ sűrűségű 2-es közegtől elválasztó *belső* felületét a $\chi(x,y,t)$ függvény írja le. A folyadék átlagos H mélysége sokkal kisebb L vízszintes kiterjedésénél.

Mindkét rétegben azonos U nagyságrendű sebességeket feltételezve, az (1.35) dimenziótlanítással, amelyben a nyomás helyett az $\eta \to (|f_0|LU/g)\eta$ helyettesítést használjuk, a dinamikai egyenletekben a keresztszorzat és a grad η tag előtt a $Ro = U/(|f_0|L)$ Rossby-szám jelenik meg, a H egységekben mért belső felszíni ingadozás grad χ gradiense előtt pedig az $Fr' = U/\sqrt{g'H}$ belső Froude-szám. (A két kontinuitási egyenlet nem változik.) Az alsó közeg dimenziótlan

egyenlete például:

$$\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = \frac{1}{Ro}(\pm\mathbf{u}_2 \times \mathbf{n} - \operatorname{grad}\eta) - \frac{1}{Fr'^2}\operatorname{grad}\chi \tag{6.4}$$

(az alsó előjel a déli féltekére vonatkozik). A problémában tehát mind a forgatásra, mind a rétegzettségre jellemző dimenziótlan szám jelen van.

Mivel a külső felszínen és a rétegek között sem tételezünk fel súrlódást, *mindkettőben* fennáll a potenciális örvényesség megmaradása (lásd 2.3. fejezet). Ezért az $i = 1, 2$ réteg ζ_i függőleges örvényességkomponense és h_i pillanatnyi vastagsága segítségével képzett

$$\boxed{q_i = \frac{\zeta_i + f(y)}{h_i} H_i, \qquad i = 1, 2} \tag{6.5}$$

potenciális örvényesség az i-edik közegben mozgásállandó.

A redukált sekélyfolyadék-modell azt az esetet írja le, amelyben valamelyik réteg sokkal vastagabb a másiknál, és a vastag rétegben áll a folyadék. A mozgó réteg változóiban a forgatott sekélyfolyadék-modell egyenletei

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f\mathbf{u} \times \mathbf{n} - g' \operatorname{grad} h \tag{6.6}$$

és az (5.86) kontinuitási egyenlet, ahol a nyugalmi rétegvastagság $h_0 \equiv \min(H_1, H_2)$. A szélnyírással kiegészített (6.6) egyenlet alkalmas arra, hogy a part menti óceáni feláramlásokat elemi módon leírja, ahogy a 13.3. fejezetben látjuk majd.

A (6.6) egyenlet ugyanolyan struktúrájú, mint (2.9), és ez mutatja, hogy minden jelenség, amelyet forgatott sekély folyadékban megismertünk, előfordul rétegzettség esetén is, csak *rövidebb* távolságon jelenik meg, amelyet a g' redukált gravitációs gyorsulás határoz meg. Mivel a későbbiek szempontjából fontos mindkét közeg sebességtere, ahol nem túl bonyolult, a kétrétegű leírást használjuk.

6.2. A kis sűrűségeltérésű és a függőleges rétegzettségű forgatott sekély folyadék egyenletei

Kis sűrűségeltérés esetén a Boussinesq-közelítést (5.3. fejezet) alkalmazzuk a forgó Föld felszínén felírt Euler-egyenletben. A sekélységből adódóan elhanyagolható függőleges gyorsulás a nyomáseloszlás z-függésére hidrosztatikai viszonyokat biztosít. A geometriai elrendezés azonos a 6.1. ábrán látottal, de most a sebességtér folytonos magasságfüggésű. A külső felszín η alakján kívül a belső elválasztó felületek mozgását külön nem követjük, ezek az állandó sűrűségű felületeknek felelnek meg.

Kis sűrűségeltérés esetén az 5.3. fejezet szemléletét követjük, mert forgatott rendszerben a függőlegestől eltérő *ferde* rétegzettség is kialakulhat. A H vastagságú forgatott folyadékban a mozgásegyenlet a két vízszintes sebességkomponens időfejlődésére ekkor

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f\mathbf{u} \times \mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad} p''.} \tag{6.7}$$

Itt p'' a ϱ_0 átlagsűrűséggel képzett hidrosztatikai nyomástól való (5.14) eltérést, grad az (x, y) változók szerinti gradienst jelenti. A harmadik sebességkomponens egyenletéből a sekélység

következtében $dw/dt \approx 0$, tehát hidrosztatikai viszonyok érvényesülnek:

$$\boxed{\frac{\partial p''}{\partial z} = -\varrho'' g.} \tag{6.8}$$

Fennáll továbbá a Boussinesq-közelítésből adódó (5.12) divergenciamentességi feltétel, és az (5.13) sűrűségi egyenlet is.

A (6.8) hidrosztatikai egyenlet integrálásával a teljes nyomás kifejezhető a sűrűségeltéréssel és a szabad felszíni η alakkal,

$$p(x,y,z,t) = p_0 + \varrho_0 g\,(\eta(x,y,t) + H - z) + g\int_z^{\eta+H} \varrho''(x,y,z',t)dz' \equiv p_0(z) + p'', \tag{6.9}$$

ahol a külső felszíni p_0 nyomás feltevés szerint állandó (teljesül, hogy $p(x,y,z=\eta+H,t) = p_0$). A ϱ'' sűrűségeltérés járulékot ad tehát a p'' nyomáshoz, és így (6.7) szerint *vízszintes irányú gyorsulást is okozhat*.

Függőleges rétegzettség esetén az 5.4. fejezet szerint a $\overline{\varrho}(z)$ profiltól való (5.16) eltérést megadó ϱ' dinamikai sűrűséget és az egyensúlyi $\overline{p}(z)$ nyomástól mért eltérést (5.18) szerint kifejező p' dinamikai nyomást használjuk. A (6.7), (6.8) egyenletek ekkor a kétvesszős helyett az egyvesszős dinamikai mennyiségekkel érvényesek:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f\mathbf{u}\times\mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad} p',} \tag{6.10}$$

$$\boxed{\frac{\partial p'}{\partial z} = -\varrho' g.} \tag{6.11}$$

A $d\varrho''/dt = 0$ egyenlet szerepét a ϱ'-re vonatkozó (5.20) sűrűségegyenlet veszi át.

6.3. Hullámok forgatott kétrétegű sekély folyadékban

A nyugalmi állapotból történő kis eltéréseket a (6.3) egyenletek

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = f\mathbf{u}_1\times\mathbf{n} - g\operatorname{grad}\eta, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = f\mathbf{u}_2\times\mathbf{n} - g\operatorname{grad}\eta - g'\operatorname{grad}\chi \tag{6.12}$$

linearizált változatai adják meg. Az (5.69) kontinuitási egyenletek linearizált alakja pedig

$$\frac{\partial(\eta-\chi)}{\partial t} = -H_1\operatorname{div}\mathbf{u}_1, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial t} = -H_2\operatorname{div}\mathbf{u}_2, \tag{6.13}$$

hiszen a felső réteg vastagságának ingadozása $\eta-\chi$, az alsóé pedig χ.

A nem forgatott rendszerben látottak alapján (5.10. fejezet) azt várjuk, hogy a jelentős χ belső felszíni változásokkal járó baroklin mozgások esetén a külső felszín η változása csekély szerepet játszik csak. Ezért a belső mozgások vizsgálatát a merevlap-közelítéssel érdemes kezdeni. Ennek előnye, hogy zárt egyenletet kapunk a két közeg közötti $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u_2} - \mathbf{u_1}$ relatív sebességre,

a (6.12) egyenletek kivonásával ugyanis

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f\,\mathbf{u} \times \mathbf{n} - g' \operatorname{grad} \chi. \tag{6.14}$$

A különbségi mozgást tehát a belső felszín alakváltozása vezérli forgatott esetben is. A kontinuitási egyenletek összegéből ugyanekkor az következik, hogy az

$$\overline{\mathbf{u}} \equiv \frac{H_1\mathbf{u}_1 + H_2\mathbf{u}_2}{H} \tag{6.15}$$

mélységi átlagsebesség síkbeli divergenciája eltűnik. Az időben változó belső felszín miatt a divergencia nem tűnhet el egyszerre mindkét rétegben, ezért hullámmegoldás csak úgy létezhet, hogy a mélységi átlagsebesség térben állandó. Mivel kis amplitúdójú hullámban mindkét sebesség időben oszcillál, az állandó csak zérus lehet: $H_1\mathbf{u}_1 = -H_2\mathbf{u}_2$. Az így előálló *baroklin* hullámokban a két rétegben tehát *ellenkező* előjelű a sebesség, éppúgy, mint a nem forgatott kétrétegű rendszer belső hulláma esetén, amelyeknek terjedési sebessége az (5.80)-nal megadott c_1.

Mivel a (6.14) mozgásegyenlet megfeleltethető a (3.21) egyenletnek, a belső mozgást jellemző fontos paramétereknek is hasonló alakban kell megjelenniük. A $R = c_0/|f_0| = \sqrt{gH}/|f_0|$ külső Rossby-sugár megfelelője az R'-vel jelölt

$$\boxed{R' = \frac{c_1}{|f_0|} = \frac{\sqrt{g'\frac{H_1H_2}{H}}}{|f_0|}} \tag{6.16}$$

belső Rossby-sugár a kétrétegű leírásban. Az L síkbeli távolsághoz viszonyított R'/L belső Rossby-sugár úgy is írható, mint a Rossby-szám és az $Fr' = U/\sqrt{g'H}$ belső Froude-szám hányadosa szorozva egy, a rétegvastagságok arányától függő kifejezéssel. A belső Rossby-sugár tehát becsülhető az

$$\frac{R'}{L} \approx \frac{Ro}{Fr'} \tag{6.17}$$

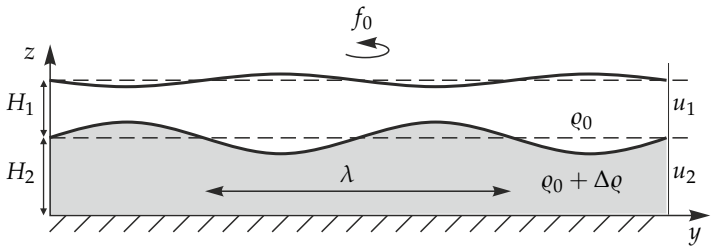
aránnyal, amely (2.56) megfelelője baroklin esetekben. Ez sugallja, hogy a belső Rossby-sugár az a távolság, ahol a forgásból és a rétegzettségből adódó hatások összemérhető szerepet játszanak.

Az óceáni belső Rossby-sugár jóval kisebb a külsőnél, amely 1000 km nagyságrendűnek adódott (3.4. fejezet). Tipikus $g' = 0{,}03$ m/s^2, $H_1 = 400$ m, $H_2 = 3600$ m értékekkel és $f_0 = 10^{-4}$ 1/s Coriolis-paraméterrel számolva azt kapjuk, hogy $R' \approx 30$ km$(c_1 \approx 3$ m/s$)$. A légköri különbség nem ilyen nagy: a légkört a becslés kedvéért két egyforma vastag rétegre bontva ($H_1 = H_2 = 5000$ m), $g' = 1$ m/s^2-tel a kétrétegű közelítésben $R' \approx 500$ km $(c_1 \approx 50$ m/s$)$ adódik, szemben a kb. 3000 km-es külső értékkel.

A homogén közegek Poincaré-hullámai (2.7. fejezet) mintájára a kétrétegű közegben kialakul a tehetetlenségi gravitációhullám *belső* vagy *baroklin* változata is (6.2. ábra). Diszperziós relációjuk

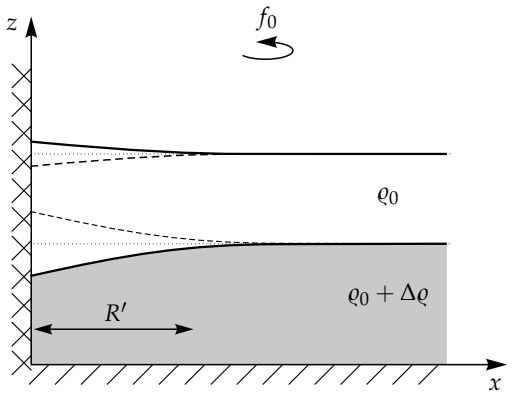
$$\boxed{\omega_0(k_x, k_y) = \pm\left(f_0^2 + c_1^2k^2\right)^{1/2} = \pm f_0\left(1 + (R'k)^2\right)^{1/2},} \tag{6.18}$$

ahol $k = \left(k_x^2 + k_y^2\right)^{1/2}$ a síkbeli hullámszámvektor hossza. A $c_1 = R'|f_0|$ sebességű belső hullámoktól a forgatás következtében megjelenő eltérés az R' belső Rossby-sugárral *összemérhető* vagy annál *nagyobb* hullámhosszakra ($\lambda \geq 2\pi R'$) válik jelentőssé, a rövid hullámok ($R'k \gg 1$) esetén a Coriolis-hatás elhanyagolható.



6.2. ábra. Belső (baroklin) Poincaré- (tehetetlenségi gravitáció-) hullám kétrétegű közegben. A mozgás a tehetetlenségi körmozgás és a g' redukált gravitációs térben kialakuló belső hullámzás kombinációja. A külső felszín változásánál jóval erősebb a belső felszíné.

Meredek, egyenes partvonalak mentén kialakulnak *belső* (baroklin) *Kelvin-hullámok* is az $\omega_0(k) = c_1 k$ diszperziós relációval. Az árapály által keltett belső Kelvin-hullámok a nem forgatott rendszer belső hullámainak c_1 sebességével haladnak a partvonal mentén ($x = 0$ sík a 6.3. ábrán), és arra merőlegesen, az y irányban az $\exp(-x/R')$ összefüggés szerint csengenek le. Partra merőleges kiterjedésük tehát néhány belső Rossby-sugárnyi.



6.3. ábra. Belső Kelvin-hullám kétrétegű közegben. A hosszú szaggatott vonalak a felületek alakját jelzik a folytonos vonalnak megfelelőnél fél periódussal később. A hullám a $-y$ irányban halad a belső hullámok c_1 sebességével, az x tengely mentén pedig lecseng az R' belső Rossby-sugárnak megfelelő távolságon.

Az η felszíni alakváltozás megtartása (a merevlap-közelítés elvetése) esetén a nem forgatott esethez hasonlóan kiderül, hogy a baroklin mozgás során $\eta \approx -\chi g'/g$. A felszíni alakváltozás tehát csekély és *ellenkező előjelű* a belsőhöz képest. Ennek megfelelően a (6.16) belső Rossby-sugárhoz is csak $g'/g \ll 1$ rendű korrekciót kapunk a merevlap-közelítéshez képest. Létezik ugyanakkor olyan megoldás is, amelyben a felszíni alakváltozás jelentős, a belső felszín ingadozása azzal összemérhető és azonos előjelű. A (6.12) egyenletből látszik, hogy ekkor a g' grad χ tag kicsi, és $\mathbf{u}_2 \approx \mathbf{u}_1$, tehát a két réteg közel azonosan mozog. g'/g nagyságú korrekciók erejéig visszakapjuk a homogén forgatott közegben megjelenő hullámokat (Poincaré- vagy Kelvin-hullámok), és ezeket a rétegzett közeg *barotróp* hullámainak nevezzük.

6.4. Hullámok függőleges rétegzettségű forgatott, sekély folyadékban

A 6.2. fejezet végén bemutatott mozgásegyenletek állandó Brunt–Väisälä-frekvenciájú rétegzettség esetén érvényes linearizált alakja

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{6.19}$$

s fennáll a (6.11) hidrosztatikai kapcsolat. Az (5.20) sűrűségegyenlet linearizált változata

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} = w\frac{\varrho_0}{g}N^2. \tag{6.20}$$

A baroklin mozgások megtalálásához alkalmazzuk most is a merevlap-közelítést, azaz tegyük fel, hogy a felszín nem mozdulhat el, tehát a függőleges sebesség a $z = H$ felső szinten éppúgy eltűnik, mint a közeg alján, $z = 0$-ra. Ekkor a függőleges sebesség magasságfüggése szinuszos (5.9. fejezet, 5.8. ábra), és a hullámszám függőleges komponense a

$$k_z^{(n)} = n\frac{\pi}{H}, \tag{6.21}$$

$n = 1, 2, \ldots$ értékeket veheti csak fel. Az n-edik normálmódushoz tartozó belső hullám sebessége az (5.51) egyenlettel megadott c_n.

A terjedési sebességek egész spektruma miatt a problémához a belső Rossby-sugarak *diszkrét spektruma* tartozik:

$$\boxed{R'_n = \frac{c_n}{|f_0|} = \frac{NH}{|f_0|\pi n} \qquad n = 1, 2, \ldots}. \tag{6.22}$$

Mivel a rövidebb hullámok gyorsabban csillapodnak, az első normálmódusok a legjelentősebbek. Nagyságrendi becslésekben a folytonos rétegzettségű közeg belső Rossby-sugarára az

$$R' \approx \frac{NH}{|f_0|} = H\,Fn \approx \frac{\sqrt{g'H}}{|f_0|} \tag{6.23}$$

értéket használjuk (a második összefüggésben az (5.7) egyenletet alkalmazzuk). A (6.1) frekvenciaarány tipikusan nagy értéke miatt látjuk, hogy a belső Rossby-sugár sokkal nagyobb a teljes mélységnél. Végül is ez a dinamikai (tehát nem a puszta geometriai adatokból származó) feltétel mutatja, hogy a nagy frekvenciaarány teszi jogossá a sekélyfolyadék-közelítés használatát forgatott rétegzett közegben.

A légköri $N = 10^{-2}$ 1/s Brunt–Väisälä-frekvenciával és $H = 10$ km vastagsággal számolva közepes szélességeken ($f_0 = 10^{-4}$ 1/s) azt kapjuk, hogy $R' \approx NH/|f_0| = 1000$ km. A Brunt–Väisälä-frekvencia tipikus óceáni $N = 5 \cdot 10^{-3}$ 1/s értékével a belső Rossby-sugár a folytonos rétegzettségű óceán felső, $H = 1$ km-es rétegében 50 km.

Az n-edik normálmódusnak megfelelő belső Poincaré-hullám diszperziós relációja folytonos rétegzettség esetén

$$\omega_{0n}(k_x, k_y) = \pm\left(f_0^2 + c_n^2k^2\right)^{1/2} = \pm f_0\left(1 + (R'_nk)^2\right)^{1/2}, \tag{6.24}$$

ahol $k = \left(k_x^2 + k_y^2\right)^{1/2}$ a hullámszámvektor hossza a vízszintes síkban. Figyelembe véve a függőleges hullámszámvektor (6.21) lehetséges értékeit, a teljes diszperziós reláció úgy is írható,

mint [1]

$$\boxed{\omega_{0n}\left(k_x,k_y\right)=\pm\left(f_0^2+N^2\left(\frac{k}{k_z^{(n)}}\right)^2\right)^{1/2}.} \tag{6.25}$$

Ez a belső hullámokra vonatkozó (5.49) reláció forgatott sekély rendszerre történő általánosításának is tekinthető. Mivel a függőleges és a vízszintes hullámszám a H mélység, illetve az L síkbeli kiterjedés reciprokával arányos, és $H \ll L$, a k_z függőleges hullámszámkomponens sokkal nagyobb, mint k_x, k_y $(k/kz^{(n)} \ll 1)$, vagyis a teljes hullámszámvektor vízszintessel bezárt szöge közel 90 fok. A hullámok tehát majdnem függőleges terjedési irányúak. Mivel $k \sim 1/L$, $k_z^{(n)} \sim 1/H$, a frekvencia tipikus értéke $\omega_0^2 = f_0^2\left(1+(NH/(f_0L))^2\right) = f_0^2(1+Bu)$, a hullámok lassúak, frekvenciájuk $|f_0|$ és néhányszor $|f_0|$ közé esik.

A belső Kelvin-hullámok folytonosan rétegzett közegben a c_n sebességek valamelyikével haladnak, és az n indexnek megfelelő R_n' belső Rossby-sugárral csengenek le. Az első normálmódus geometriája azonos a 6.3. ábrán látottal, és a belső elválasztó felületnek bármelyik állandó sűrűségű felületet tekinthetjük.

Az η felszíni alak megtartása most is csekély változást jelent csak a baroklin hullámok tulajdonságaiban. Létezik ugyanakkor barotróp hullám is, ahol a felszíni alakváltozás jelentős, és a két réteg közel azonosan mozog, hasonlóan a homogén közeg esetéhez. Ezt a $c_0/|f_0|$ külső Rossby-sugár jellemzi. Érdemes ezért a Rossby-sugarak (6.22) spektrumát kiegészíteni a külső Rossby-sugárral. Ez formálisan az $n = 0$ indexhez tartozónak tekinthető, mivel a felszíni hullámok c_0 sebességét tartalmazza.

6.5. Geosztrofikus áramlás kétrétegű sekély folyadékban

A (6.3) egyenletekben fellépő hidrodinamikai gyorsulás Rossby-számszor kisebb jelentőségű, mint a Coriolis-gyorsulás. A gyors forgatás határesetében a hidrodinamikai gyorsulás eltűnik, és kialakulhat egy $\mathbf{u}_{g,1}$, $\mathbf{u}_{g,2}$ stacionárius áramlás, amelyben az időfüggetlen felszínalakok kompenzálják a Coriolis-hatást. Az f-síkon

$$f_0\mathbf{n}\times\mathbf{u}_{g,1} = -g\,\mathrm{grad}\,\eta, \tag{6.26}$$

$$f_0\mathbf{n}\times\mathbf{u}_{g,2} = -g\,\mathrm{grad}\,\eta - g'\,\mathrm{grad}\,\chi. \tag{6.27}$$

A két egyenletet kivonva:

$$f_0\mathbf{n}\times(\mathbf{u}_{g,2}-\mathbf{u}_{g,1}) = -g'\,\mathrm{grad}\,\chi. \tag{6.28}$$

A geosztrofikus áramlást a felső közegben tehát a felszíni alak határozza meg, a két közeg közötti sebességkülönbséget viszont az elválasztó felület alakja, és az elválasztó felület szintvonalaival

[1] Mély rétegzett folyadékban, amelyben a hidrosztatikus közelítés nem használható, a diszperziós relációra $\omega_0^2 = f_0^2\sin^2\theta + N^2\cos^2\theta$ adódik, ahol θ a hullámszámvektor vízszintessel bezárt szöge. Az ilyen hullámok frekvenciája az $(|f_0|, N)$ intervallumba esik. Ez az 1.3.1. fejezetben látott tehetetlenségi hullámok és az 5.5. fejezet belső hullámai diszperziós relációinak egyfajta kombinációja. A (6.25) alak a sekély folyadéknak megfelelő $k_z \gg k_x, k_y$ esetben adódik, amikor $\sin\theta \approx 1$ és $\mathrm{tg}\,\theta \approx k/k_z$.

párhuzamos a relatív sebesség. Komponensekben:

$$v_{g,1} = \frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad u_{g,1} = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{6.29}$$

és

$$v_{g,2} = \frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g'}{f_0}\frac{\partial \chi}{\partial x}, \qquad u_{g,2} = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g'}{f_0}\frac{\partial \chi}{\partial y}. \tag{6.30}$$

Az f-síkon zajló geosztrofikus áramlás mindkét közegben kétdimenziós, divergenciamentes. Létezik tehát egy ψ_1 és egy ψ_2 áramlási függvény, amelyből a geosztrofikus sebességek a szokásos deriválási szabállyal (1.58) kaphatók. A (6.29), (6.30) egyenletek alapján

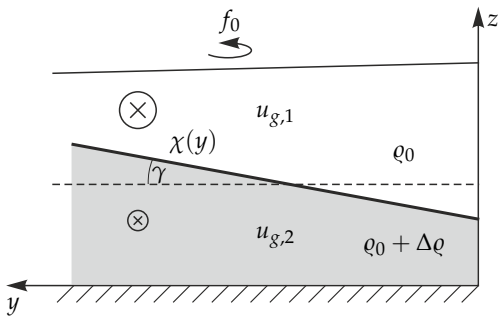
$$\boxed{\psi_1 = \frac{g}{f_0}\eta, \qquad \psi_2 = \frac{g}{f_0}\eta + \frac{g'}{f_0}\chi.} \tag{6.31}$$

A baroklin viselkedést leíró esetekben ψ_2-ben mindkét tag egyformán fontos, vagyis $g\eta$ és $g'\chi$ azonos nagyságrendű, amiből következik, hogy $\chi \gg \eta$.

Konkrét példaként tekintsük azt az elrendezést, amikor az elválasztó felület az y irányban egyenletesen változik. Tegyük föl, hogy észak felé emelkedik, azaz az y tengellyel bezárt γ dőlésszöge pozitív. Ez annak felel meg pl., hogy az Északi-sark felé haladva az alsó hidegebb légréteg egyre vastagabb. A (6.29), (6.30) egyenletekből

$$u_{g,1} - u_{g,2} = \frac{g'}{f_0}\operatorname{tg}\gamma, \tag{6.32}$$

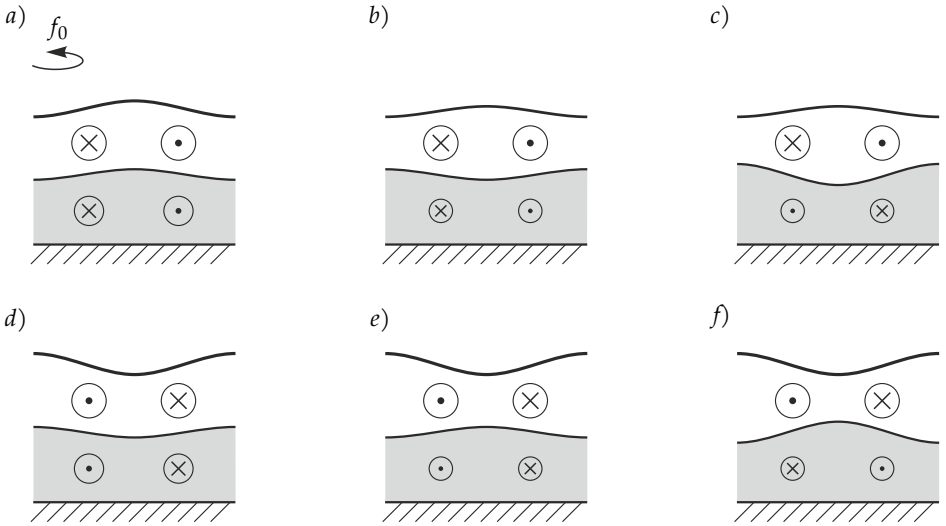
s a sebességek időtől és helytől is függetlenek.



6.4. ábra. Geosztrofikus áramlás kétrétegű közegben. A belső elválasztó felületnek a közelebbi pólus irányában történő egyenletes emelkedése olyan stacionárius áramlással van egyensúlyban, amely *keletre* történik, és *a felső* (*melegebb*) *rétegben gyorsabb*, ott a sebesség nagyságát jelző kör nagyobb sugarú. A benne levő kereszt utal arra, hogy az áramlás a rajz síkjából kifelé mutat, a sebességvektort jellemző nyílnak mintegy a „tollazatát" látjuk, hátulról.

Az ilyen dőlés tehát az északi féltekén a keletre irányuló áramlási sebességet befolyásolja. A felső rétegben az áramlás *erősebb*, mint alul (6.4. ábra), *függetlenül* attól, milyen a külső felszíni alak. Ez az első példa arra, hogy a forgatás létrehozhat *ferde* sűrűséggradiensű rétegződést. Folytonos rétegzettségű változatát a 6.8.1. fejezet mutatja be.

A következő példában megvizsgáljuk, hogyan befolyásolja az áramlást a felszín és a belső elválasztó felület viszonya. Tegyük fel, hogy a felszínen kidudorodás figyelhető meg, η lokális maximummal rendelkezik, amely anticiklonális áramlást hoz létre $f_0 > 0$-ra. Az egyszerűség



6.5. ábra. Geosztrofikus áramlás kétrétegű közegben a külső és belső felszíni alak viszonyának függvényében. A kis körökben levő pont (kereszt) a rajz síkjába (abból kifelé) mutató áramlási irányra utal, és ezt a konvenciót a későbbiekben is követjük. A külső felszín kiemelkedése alatt az áramlás mindig anticiklonális (a)–(c), de az alsó rétegben lassabb, ha a belső felszín változása ellenkező előjelű mint a külsőé (b), sőt előjelét is megváltoztathatja (c). Hasonló a helyzet a külső felszín behorpadása esetén is (d)–(f). Az ábra tekinthető az x, y síkon közel forgásszimmetrikus elrendezések oldalnézetének, de az y irányban eltolásinvariáns felszíni alakokhoz tartozónak is.

kedvéért tegyük fel azt is, hogy χ arányos η-val. Ha χ és η azonos nagyságrendűek, akkor (6.30)-ban a g'-vel arányos tagok csekély szerepet játszanak, és ezért az áramlás gyakorlatilag azonos mindkét rétegben (6.5a. ábra), amely egy homogén anticiklonnak felel meg (2.5. ábra). Ha a belső elválasztó felület behorpad, és változása jóval erősebb, mint a felszíné, de $\eta + \chi g'/g$ még pozitív, akkor az alsó közeg jóval lassabban mozog, mint a felső (6.5b. ábra). Abban a kivételes esetben, amikor $|\chi|$ olyan nagy, hogy $\chi < -\eta g/g'$, akkor az alsó áramlás iránya is megváltozik: ott ciklonális forgású a sebesség (6.5c. ábra). Ez jól mutatja, hogy rétegzett közegben csak adott magassági szinten értelmes a ciklonális-anticiklonális megkülönböztetés. A felszín behorpadása esetén is hasonló a helyzet (6.5d–f. ábra).

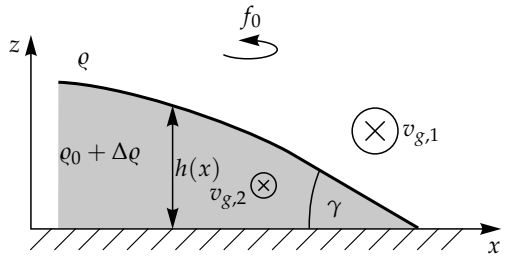
6.6. Frontok forgatott rendszerben, a Margules-összefüggés

Frontról akkor beszélünk, ha a különböző sűrűségű közegeket elválasztó felület kifut az *aljzatra* vagy a *külső felszínre*. Ez nemcsak a légkörben, hanem az óceánokban is előfordulhat. A geosztrofikus egyensúly egyik megdöbbentő következménye, hogy a frontoknak ebben az állapotban *nem* kell mozogniuk a frontvonalra merőleges irányban.

A frontok viselkedésének leírására a kétrétegű közelítés jól alkalmazható. Legyen a sűrű közeget elválasztó felület alakja az egyszerűség kedvéért y-tól független (6.6. ábra). A sűrűbb közeg vastagságát változónak tekintjük, amelyet $h = h(x,t)$-vel jelölünk. A frontvonal mentén, az alsó felszínen természetesen $h = 0$. A geosztrofikus áramlás feltétele ekkor (6.29), (6.30) szerint

$$v_{g,2} - v_{g,1} = \frac{g'}{f_0}\frac{dh}{dx}. \tag{6.33}$$

Ez azt mutatja, hogy a front elválasztó felületén *a frontvonallal párhuzamosan* sebességugrás alakul ki.



6.6. ábra. Nyugalomban levő front körüli áramlás geosztrofikus egyensúlyban. A sűrű (hideg) közeg a $h(x)$ függvénnyel határolt tartományban helyezkedik el. Az áramlási sebesség mindkét közegben merőleges a rajz síkjára és az alsó közegben *gyengébb*. A γ szög az x tengellyel bezárt szög, ezért negatív.

Az összefüggést a front γ hajlásszögű élére alkalmazva

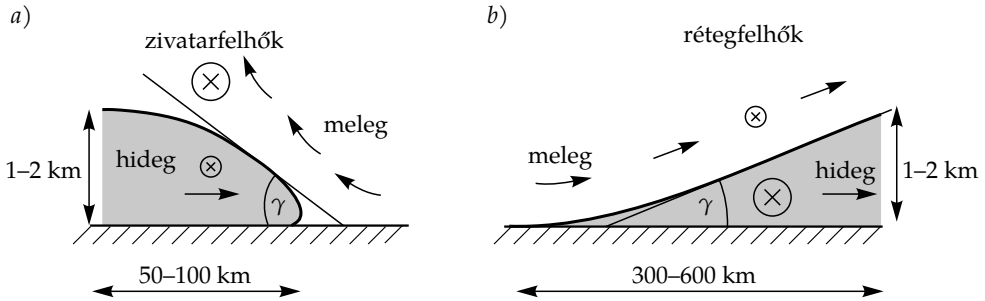
$$\boxed{v_{g,2} - v_{g,1} = \frac{g'}{f_0} \operatorname{tg} \gamma.} \tag{6.34}$$

Ez az ún. Margules-féle összefüggés (M. Margules (1856–1920) osztrák természettudós, meteorológus). A front γ dőlésszöge határozza meg a sebességugrást a frontvonal helyén. A szög általában kicsi, és ezért tangensével helyettesíthető. A front hajlásszögének sűrűség-, illetve hőmérséklet-különbséggel megadott kifejezése ezért

$$\gamma = \frac{f_0}{g} \frac{\varrho_0}{\Delta\varrho} (v_{g,2} - v_{g,1}) = \frac{f_0}{g\alpha|\Delta T|} (v_{g,2} - v_{g,1}). \tag{6.35}$$

Az utolsó átalakításban használtuk, hogy $\Delta\varrho = \alpha\varrho_0|\Delta T|$, ahol α a hőtágulási együttható és ΔT a két közeg közötti hőmérséklet-különbség. Levegőben, közepes szélességeken ($f_0 = 10^{-4}1/\mathrm{s}$) a kb. 3 fok hőmérséklet-különbségnek megfelelő 100-szoros redukcióval és 10 m/s sebességkülönbséggel számolva a meredekség 1/100 radián, ami kb. 0,6 foknak felel meg.

A Margules-összefüggés geosztrofikus egyensúlyban lévő stacionárius frontokra vonatkozik. A valóságos frontok a kvázi-geosztrofikus földi áramlásokban alakulnak ki, és ezért a fenti elmélet csak első közelítés. A frontok általában mozognak, és a felszínnel való súrlódás alakjukat befolyásolja.



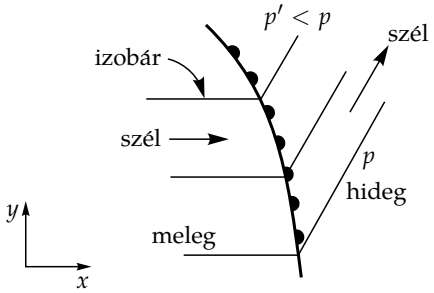
6.7. ábra. Mozgó légköri frontok alakja (oldalnézet) és sematikus áramlási viszonyaik az északi féltekén. A sebességnek a frontvonalra merőleges és azzal párhuzamos komponense is van. (a) Hidegfront. A frontvonal előtti heves feláramlás zivatarfelhők kialakulására vezet. (b) Melegfront. A feláramlás gyengébb, a meleg levegő tolja a hideg réteget, felhatol a hideg fölé, és rétegfelhők megjelenésével jár.

A légköri hidegfrontok (hideg levegő behatolása a meleg alá) határfelülete előregyűrődik a felszínen eltűnő sebesség miatt (6.7a. ábra). Az általában gyorsan mozgó hidegfrontok dőlésszöge 1/50 körüli. A hideg légréteg az 1 km vastagságot a frontvonal mögött mintegy 50 km-re éri el.

A légköri melegfront (a meleg levegő a lassan mozgó hideg légréteg fölé csúszik) határfelülete a súrlódás miatt ellaposodik (6.7b. ábra), a dőlésszög kisebb, 1/200 körüli. Az 1 km-es szintet az elválasztó felület tehát kb. 200 km-rel a közeledő front előtt éri el.

Mozgó frontok mentén az alsó légrétegek ütköznek, összeáramlás történik, ez feláramláshoz vezet (6.7. ábra), a frontok ezért a felszínen *mindig lokális nyomáscsökkenéssel* járnak, amit a barométer jelez.

A frontvonal mentén a felszíni izobárok *megtörnek* (6.8. ábra). A felszíni szélsebességben *ugrás* történik a frontvonallal párhuzamos irányban: a 6.7. ábra szerint a frontvonal előtt a vele párhuzamos szélsebesség-komponens erősebb, mint utána. Az irányítottságot is figyelembe véve az izobárok a ciklon *középpontja felé* törnek mindkét fronttípusban (ahogyan a 6.15., 6.16. ábrákon is látszik). A meteorológusok és vitorlázók a front érkezését a hirtelen *szélfordulással* azonosítják (amely gyorsabban történik, mint pl. a hőmérséklet megváltozása).



6.8. ábra. Felszíni nyomáseloszlás légköri front mentén az északi féltekén. A felszíni sebességugrás következtében az izobárok *megtörnek*. Az ábra egy nyugatról érkező melegfront (vonal kis félkörökkel) körüli közel geosztrofikus viszonyokat mutató sematikus rajz.

Térjünk most vissza a geosztrofikus közelítéshez tetszőleges közegben, és tekintsünk egy konkrét *nemlineáris* elválasztó felületalakot a redukált sekélyfolyadék (6.6) közelítésében. Legyen (6.9. ábra)

$$h(x) = h_0 \left(1 - e^{-x/r_0}\right), \tag{6.36}$$

s emlékeztetünk arra, hogy a vastagabb közegben a sebesség eltűnik.

A sebesség a 6.9a. ábra hidegfrontjában északra mutat, és értéke (6.33) szerint

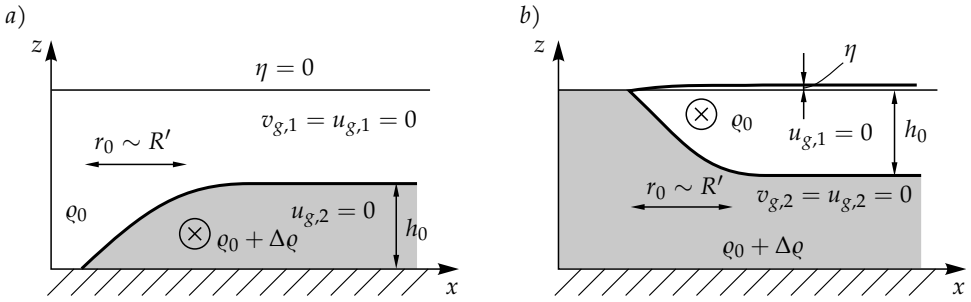
$$v_{g,2}(x) = \frac{g'}{f_0}\frac{h_0}{r_0} e^{-x/r_0}. \tag{6.37}$$

A sebesség tehát gyorsan csökken a frontvonal mögött. Az x pont körüli egységnyi szélességű függőleges lapon átáramló teljes anyagmennyiség

$$Q(x) = v_{g,2}(x)h(x) = \frac{g'}{f_0}\frac{h_0^2}{r_0}\left(1 - e^{-x/r_0}\right) e^{-x/r_0} \tag{6.38}$$

a frontvonalnál még zérus, maximumát attól $r_0 \ln 2$ távolságra éri el.

A 6.9b. ábra szerinti óceáni melegfrontban a közeg felső határán a sebességet és az anyagtranszportot szintén a fenti képletek adják. A külső felszín alakja is következik a belső felület



6.9. ábra. Az r_0 távolságon exponenciálisan lecsengő függvénnyel leírt frontok geosztrofikus egyensúlyban az északi féltekén. (a) Hidegfront (levegő vagy folyadék) az aljzaton. (b) Melegfront a folyadék felszíne alatt. Ez egyben a Golf-áramlat modelljének tekinthető, annak az amerikai partvonallal párhuzamosan futó szakaszában. A pólus felé irányuló áramlás a front melletti r_0 vastagságú tartományban jelentős.

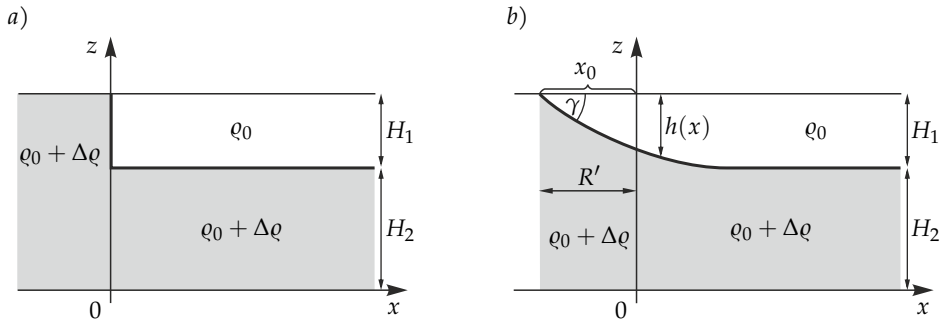
$\chi \approx H - h$ alakjából, ahol H a teljes vízmélység. Az alsó közegben ugyanis csak úgy tűnhet el a v_g sebesség, ha (6.30) első egyenlete szerint $g d\eta/dx + g' d(H-h)/dx = 0$, ahonnét

$$\eta(x) = \frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} h(x). \tag{6.39}$$

A meleg folyadék északra történő áramlása tehát felszíni kidudorodással jár, amit a homogén esetben (2.4. ábra) már láttunk. Mivel az anyagtranszport egy r_0 vastagságú tartományra korlátozódik, a frontok ilyen modellje egyben óceáni *áramlatok*, így a Golf-áramlat modellje is. A felszíni kb. 1 méter megfigyelt emelkedéssel (100 km távolságon) a (6.39) összefüggésben 1000-szeres redukcióval számolva a belső felszín kb. 1 km süllyedése jár együtt.

6.7. A geosztrofikus egyensúly beállása

Ha eltávolodunk a geosztrofikus egyensúlytól, megérthetjük, hogy egy kezdeti ugrásszerű sűrűségkülönbségből hogyan alakul ki az egyensúlyi konfiguráció. Használjuk ismét a kétrétegű közelítést, és vizsgáljunk egy melegfrontot, amely kezdetben a pozitív x tengely mentén helyezkedik el, véges H_1 állandó vastagsággal (6.10a. ábra), az alatta levő sűrű réteg vastagsága H_2.



6.10. ábra. A geosztrofikus egyensúly beállása kezdetben függőleges elválasztó felület esetén. (a) A meleg közeg a pozitív félegyenes mentén állandó H_1 vastagságú rétegből indul. (b) A végállapotot exponenciális függvény írja le, amely az R' belső Rossby-sugáron cseng le az eredeti H_1 mélységig. A front is éppen R' távolságot mozdul el. A geosztrofikus egyensúlyi front meredeksége $|\gamma| \approx H_1/R'$.

Az y koordinátától független $\mathbf{u}_i(x,t) = (0, v_i(x,t)), i = 1,2$ áramlásokat feltételezve, elhanyagolható felszíni alakváltozás esetén a (6.5) potenciális örvényesség az egyes közegekben az f-sík-közelítésben

$$q_i = \frac{f_0 + \partial v_i(x,t)/\partial x}{h_i(x,t)} H_i, \qquad i = 1,2, \tag{6.40}$$

ahol $h_1 = h$ a felső réteg pillanatnyi vastagsága, és $h_2 = H_1 + H_2 - h = \chi$. Mivel kezdetben nem volt mozgás, $q_i = f_0$, és a megmaradási tételből következik, hogy adott folyadékelemre

$$\partial v_i(x,t)/\partial x = f_0(h_i(x,t)/H_i - 1) \qquad (x,t). \tag{6.41}$$

A végállapotban (6.10b. ábra) feltesszük, hogy az áramlás időfüggetlen lett, geosztrofikus: $v_i(x,t) \to v_g(x), h(x,t) \to h(x)$, (6.29), (6.30) alkalmazható, de a fenti összefüggés is érvényben marad. Így

$$\frac{\partial v_{g,2}}{\partial x} - \frac{\partial v_{g,1}}{\partial x} = f_0 \left(\frac{H - h(x)}{H_2} - \frac{h(x)}{H_1} \right) = f_0 \left(\frac{H}{H_2} - \frac{H}{H_1 H_2} h(x) \right) = -\frac{g'}{f_0} \frac{d^2 h}{dx^2}. \tag{6.42}$$

A jobb oldali egyenlőség által definiált lineáris differenciálegyenlet megoldása exponenciális változás a $\sqrt{g' H_1 H_2 / H}/|f_0|$ távolságon, amely nem más, mint a (6.16) belső Rossby-sugár. Mivel csak a lecsengő megoldás rendelkezhet fizikai jelentéssel, az egyensúlyi alak

$$h(x) = H_1 \left(1 - e^{-(x+x_0)/R'} \right), \qquad x > -x_0, \tag{6.43}$$

ahol $x_0 > 0$ a front élének távolsága a végállapotban (6.10b. ábra). Értéke abból kapható meg, hogy a ϱ_0 sűrűségű közeg teljes anyagmennyisége nem változott, tehát $\int_0^\infty (H_1 - h) dx = \int_{-x_0}^0 h dx$. Ebből az adódik, hogy $x_0 = R'$, vagyis az elmozdulás is az R' belső Rossby-sugárral egyenlő! Szokták ezért R'-t belső *deformációs* sugárnak is nevezni. A nem forgatott ($f_0 = 0$) határesetben $R' \to \infty$, összhangban azzal, hogy a gravitációs áramlatok (12.3.2. fejezet) mozognak, és elmozdulásuk tetszőlegesen nagy lehet.

A belső Rossby-sugár tehát nemcsak a hullámokban jelentős, hanem a frontok, tengeráramlatok jellegzetes távolságadatait is meghatározza. Utólag látjuk, hogy a (6.36) alakban $r_0 = R'$, és a frontfelület iránytangense a frontvonalon $\gamma \approx h_0/R'$. A sugár szóhasználat jogos a ciklonokra nézve is, azok átmérője $2R'$-ként becsülhető.

A geosztrofikus egyensúly beállása forgóhengeres kísérlettel demonstrálható. Ha kezdetben a henger közepén egy kisebb átmérőjű hengerrel elválasztjuk a nagyobb sűrűségű megfestett folyadékot, akkor a kis henger eltávolítása után áramlás indul meg sugárirányban. Elegendően nagy szögsebesség esetén az áramlat *nem* éri el a nagyobb henger külső falát, mert belső Rossby-sugárnyi elmozdulás után a szétterjedés megszűnik! Ezzel egyidejűleg tangenciális áramlás jön létre, és kialakul a geosztrofikus egyensúly. Felülnézetben a színes folyadék véges átmérőjű korongot alkot, oldalnézetben kúpszerű alakzatot, amelynek jobb oldala hasonlít a 6.6. ábrához. Ahogy a kísérletben is látható, a felszínre helyezett papírdarabkák mozgása összhangban van az ábrán jelölt iránnyal.

6.8. Geosztrofikus egyensúly folytonos rétegzettségű sekély folyadékban

Gyors forgatás esetén folytonos rétegzettség mellett is igaz, hogy tetszőleges *időfüggetlen* $\varrho'' \equiv \overline{\varrho}(x,y,z)$ ferde sűrűségprofil esetén kialakul egy stacionárius geosztrofikus áramlás, amelyre

(6.7)-et és (6.9)-et használva az f-síkon

$$f_0\mathbf{u}\times\mathbf{n}=g\,\mathrm{grad}\,\eta+\frac{g}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}\int_z^H\overline{\varrho}(x,y,z')dz'. \tag{6.44}$$

Az integrál felső határában az η felszíni alakot elhanyagoltuk, hiszen az mindig kicsi a teljes H mélységhez képest. Komponensekben

$$u_g=-\frac{g}{f_0}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_z^H\overline{\varrho}dz',\qquad v_g=\frac{g}{f_0}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_z^H\overline{\varrho}dz'. \tag{6.45}$$

A fentiekből következik, hogy az áramlás magasságfüggő, de minden vízszintes síkban divergenciamentes.

Az η-ból adódó felszíni járulék kiküszöbölhető, amennyiben tudjuk, hogy a folyadék nagy mélységben mozdulatlan. Ekkor tehát létezik egy olyan z_0 szint, amelyben a geosztrofikus áramlás eltűnik. A z_0 szintre felírt (6.45) egyenletek

$$0=-\frac{g}{f_0}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^H\overline{\varrho}dz',\qquad 0=\frac{g}{f_0}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^H\overline{\varrho}dz' \tag{6.46}$$

használhatók a felszíni alak meghatározására is. Ezeket az egyenleteket az eredetiekből kivonva:

$$u_g=\frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^z\overline{\varrho}dz',\qquad v_g=-\frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^z\overline{\varrho}dz'. \tag{6.47}$$

A stacionárius, ferde rétegzettségű sűrűségeloszlás tehát a felszíni alaktól *függetlenül* is meghatároz egy geosztrofikus áramlást. A Coriolis-hatás következtében tehát olyan sűrűségprofilok is stacionáriusak lehetnek, amelyek eltérnek a helyzeti energia minimumát megvalósító függőleges rétegzettségtől. Az ilyen állapot külső energia betáplálása nélkül is fennmarad, de mint látni fogjuk, nem feltétlenül stabil.

Megjegyezzük, hogy függőleges rétegzettség, $\overline{\varrho}=\overline{\varrho}(z)$ esetén az integrálok függetlenek a vízszintes koordinátáktól, így ilyenkor a (6.45) geosztrofikus áramlás teljes mértékben *megegyezik* a homogén közegbeli (3.26)-tal. A rétegződés csak akkor okozhat új geosztrofikus vonásokat, ha az állandó sűrűségű felületek nem vízszintesek.

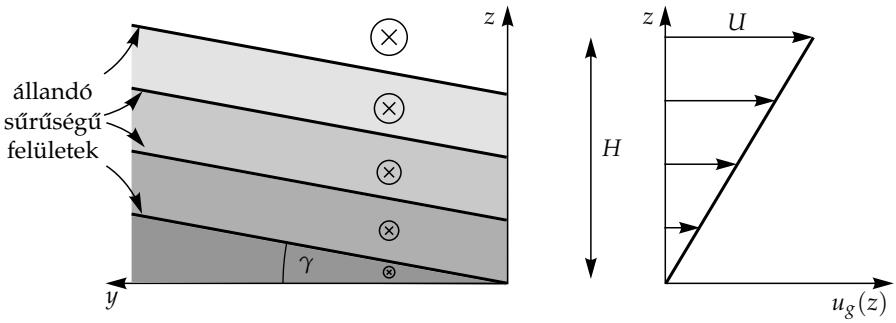
6.8.1. A termikus áramlás

A környezeti áramlások szempontjából talán a legfontosabb ferde rétegzettség a közegek sarkvidékek felé egyre sűrűbbé, egyre hidegebbé válásából adódik. Az ezzel kapcsolatos geosztrofikus áramlást nevezzük termikus áramlásnak, a légkörben termikus szélnek. (Az óceáni gyűrűk geosztrofikus áramlását a 13.2. fejezet mutatja be.)

Tegyük fel, hogy a geosztrofikus áramlás az aljzaton, vagyis a $z=z_0=0$ szinten tűnik el. A (6.45) vagy (6.47) sebességkomponenseket z szerint deriválva ekkor

$$\frac{\partial u_g}{\partial z}=\frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial\overline{\varrho}}{\partial y},\qquad \frac{\partial v_g}{\partial z}=-\frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial\overline{\varrho}}{\partial x}. \tag{6.48}$$

A sűrűséggradiens vízszintes komponensei tehát egyértelműen meghatározzák a geosztrofikus sebesség magasságfüggését. Az északi féltekén ($f_0>0$) az észak felé növekvő sűrűség a keletre irányuló áramlás sebességének *növekedését* okozza a magassággal (6.11. ábra). Más szempontból mutatja be ugyanezt a jelenséget a 10.1. és 13.1. fejezet.



6.11. ábra. A termikus áramlás a ferdén elhelyezkedő sűrűségfelületekhez tartozó geosztrofikus áramlás. Ha az emelkedés a pólus irányában történik, függőlegesen felfelé haladva egyre erősebb keletre mutató áramlást (nyugati szelet) tapasztalunk.

Ha a sűrűség nem függ x-től és egyenletesen változik (a $\partial\overline{\varrho}/\partial y$ derivált állandó), akkor a geosztrofikus áramlás lineárisan erősödik (6.11. ábra):

$$\boxed{u_g(z) = \frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial\overline{\varrho}}{\partial y}z \equiv U\frac{z}{H}.} \tag{6.49}$$

Ilyen mozgás forgatott homogén folyadékban nem alakulhat ki, hiszen ott egyedül a felszíni alak határozza meg az áramlást (amely ezért független a magasságtól). A H magassághoz tartozó U termikus sebesség nagyságát ezek szerint becsülhetjük az L vízszintes távolságon kialakuló $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbséggel, mint

$$U = \frac{g|\Delta\varrho|H}{\varrho_0 L|f_0|} = \frac{g|\Delta\varrho|}{\varrho_0 H}\frac{H^2}{L|f_0|} = \frac{N^2H^2}{L|f_0|} = NH\sqrt{Bu}, \tag{6.50}$$

ahol megjelent a H magasságban $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbség hatására kialakuló N Brunt–Väisälä-frekvencia, és a (6.2) Burger-szám.

Mivel a valóságban a sűrűségeloszlás x, y-függését rendszerint a hőmérséklet-eloszlás inhomogenitása okozza, a (6.48) geosztrofikus áramlást *termikus* áramlásnak nevezik. A $\overline{\varrho} = -\varrho_0\alpha\overline{T}+$konstans összefüggést használva, ahol $\overline{T}$ a hőmérsékletprofil, az áramlásra fennáll, hogy

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{g\alpha}{f_0}\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{g\alpha}{f_0}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}. \tag{6.51}$$

A vízszintes síkban kialakult hőmérséklet-különbségek jelentős szélerősödéshez vezethetnek a magasabb légrétegekben.[2] A termikus sebesség nagysága a H magasságban a (6.50) kifejezés első egyenlősége (vagy a fenti egyenletek) szerint a

$$\boxed{U = \frac{g\alpha|\Delta T|H}{|f_0|L} = \frac{g'H}{|f_0|L}} \tag{6.52}$$

kifejezéssel becsülhető. Az $L = 1000$ km távolságon 10 fokos hőmérséklet-különbség esetén és a hőtágulási adatok alapján (7.1. táblázat) a sebesség a troposzféra tetején ($H = 10$ km) 30 m/s, az óceánban ($H = 4$ km) pedig valamivel kisebb, mint 1 m/s.

[2] Ez a szélerősödés nem jár irányváltozással, mint a viszkozitásból származó Ekman-rétegben.

Forgókádas kísérletben a termikus áramlás úgy demonstrálható, hogy a henger közepén egy kisebb átmérőjű, jó hővezető falú henger belsejébe jeget helyezünk. Ez a fal mentén lehűti a külső folyadékot, és ezzel a tartályban ideiglenesen ferde hőmérséklet-, ill. sűrűség-rétegzettség alakul ki. Az aljzatig lenyúló festékcsíkot befecskendezve látszik, hogy a színes csík megdől, hosszú idő után körül is öleli a hengert, a kialakuló termikus áramlás kísérletben megfigyelhető jeleként. Ha a folyadékban $L = 10$ cm-enként kb. $\Delta T = 1$ fok a hőmérsékletesés, $H = 10$ cm, és lassú forgatással: $f_0 = 2\Omega \approx 0{,}2$ 1/s, a felszíni sebesség $U \approx 1$ cm/s. Pozitív forgatási irány esetén a festékcsík elmozdulása a forgó rendszeren belül ugyanolyan irányítottságú, tehát nyugati szélnek felel meg.

Az azonos sűrűségű felületek γ dőlésszögét abból a feltételből kapjuk, hogy $\overline{\varrho}(y,z) =$ állandó, amelyből az iránytangens $\gamma = -(\partial\overline{\varrho}/\partial y)/(\partial\overline{\varrho}/\partial z)$. A deriváltakat különbségekkel helyettesítve, mivel ugyanaz a $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbség alakul ki a H magasságban és az L hosszon, a szög nagysága

$$\gamma \approx \frac{H}{L} = \frac{|f_0|}{N}\sqrt{Bu} = \frac{1}{Fn}\sqrt{Bu} \ll 1, \tag{6.53}$$

ahol használtuk a (6.1) frekvenciaarány és (6.2) Burger-szám definícióját. Mivel az utóbbi tipikus értéke 1 körüli a Földön, azt mondhatjuk, hogy a dőlésszög radiánban mért kicsinysége a természetes közegek sekélységének vagy a frekvenciaarány nagy értékének következménye. A $\gamma \approx 1/Fn$ reláció összhangban van a kétrétegű közegekben vizsgált frontokban talált $\gamma \approx H/R'$ összefüggéssel a belső Rossby-sugár (6.23) kifejezése alapján.

A dőlésszög és a termikus sebesség kapcsolatát megkapjuk, ha a (6.53) kifejezésben a $\sqrt{Bu}$ tényezőt kifejezzük (6.50)-ből:

$$\gamma \approx \frac{|f_0|}{N^2}\frac{U}{H} \approx \frac{|f_0|U}{g\alpha|\Delta T|} \ll 1. \tag{6.54}$$

A második relációban a nevezőben levő $N^2H \approx g'$ mennyiséget a hőmérséklet-különbséggel kifejezve adtuk meg. Ez egyben mutatja, hogy a kétrétegű közegben kapott (6.35) Margules-összefüggés a termikus áramlásra levezett alak diszkrét változata.

6.9. Kvázi-geosztrofikus egyenlet kétrétegű közegben

A H_i átlagos rétegvastagságokhoz képest csekély η külső és χ belső felszíni ingadozást feltételezve az egyes rétegek (6.5) potenciális örvényessége:

$$q_i = \frac{\zeta_i + f}{1 + (h_i - H_i)/H_i} \approx \zeta_i + f\left(1 - \frac{h_i - H_i}{H_i}\right) \approx f_0 + \zeta_i + \beta y - \frac{f_0}{H_i}(h_i - H_i), \tag{6.55}$$

$i = 1, 2$. Az átalakításokban kihasználtuk, hogy a $(h_i - H_i)/H_i$ relatív vastagságingadozás, a ζ_i örvényesség és a Coriolis-paraméter helyfüggéséből adódó $f - f_0 = \beta y$ változás kicsi, egymással vett szorzatuk tehát elhanyagolható.[3] Mivel a kvázi-geosztrofikus közelítés gyengén időfüggő áramlásokat ír le, a potenciális örvényesség kifejezésében szereplő tagok időderiváltjai kicsik. Ezért a ζ_i örvényesség és a pillanatnyi rétegvastagságok ugyanúgy fejezhetők ki a ψ_i áramlási függvénnyel, mint geosztrofikus egyensúlyban. Írhatjuk tehát, hogy $\zeta_i = \Delta\psi_i$. Másrészt $h_1 - H_1 = \eta - \chi$ és $h_2 - H_2 = \chi$ (az utóbbi kifejezésben felhasználtuk, hogy az aljzat

[3] A potenciális örvényesség megmaradása most is ekvivalens a teljes hidrodinamikai leírással kvázi-geosztrofikus folyamatokra.

vízszintes), és ezért (6.31) alapján

$$h_2 - H_2 = \frac{f_0}{g'}(\psi_2 - \psi_1), \qquad h_1 - H_1 = \frac{f_0}{g}\psi_1 - \frac{f_0}{g'}(\psi_2 - \psi_1). \tag{6.56}$$

A q_i potenciális örvényességek megmaradásából így a

$$\frac{dq_1}{dt} = \boxed{\frac{d}{dt}\left(\Delta\psi_1 + \beta y + \frac{f_0^2}{gH_1}\psi_1 - \frac{f_0^2}{g'H_1}(\psi_1 - \psi_2)\right) = 0,} \tag{6.57}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \boxed{\frac{d}{dt}\left(\Delta\psi_2 + \beta y + \frac{f_0^2}{g'H_2}(\psi_1 - \psi_2)\right) = 0} \tag{6.58}$$

egyenletrendszer adódik. A teljes időderivált az $i = 1, 2$ rétegben a

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \tag{6.59}$$

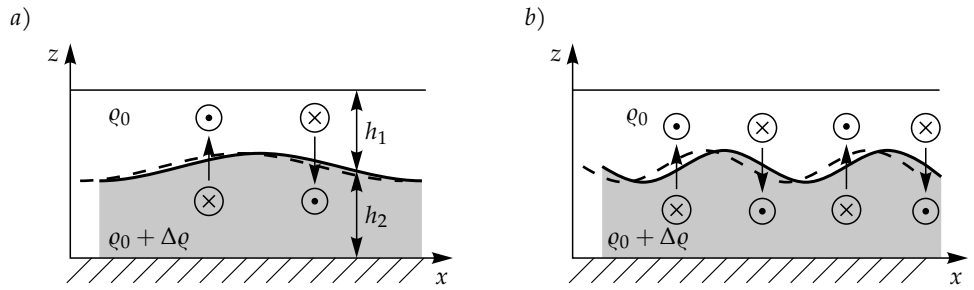
kifejezést jelenti. A fenti csatolt nemlineáris egyenletrendszer a kétrétegű közelítés kvázi-geosztrofikus egyenlete. A merevlap-közelítés azt jelenti, hogy az η felszíni ingadozás elhanyagolhatóan kicsi, ezért $(h_1 - H_1)$-ben és következésképpen a (6.57) egyenletben a ψ_1-gyel arányos tag nem jelenik meg. A kvázi-geosztrofikus mozgást ekkor tehát csakis az elválasztó felület viselkedése és a g' redukált gyorsulás határozza meg. A kvázi-geosztrofikus egyenletet folytonos függőleges rétegzettség esetén a 13.4. fejezet tárgyalja.

6.10. Belső Rossby-hullám kétrétegű közegben

6.10.1. Szemléletes kép

Tekintsünk egy felülről zárt folyadékot (merevlap-közelítés), amelyben az elválasztó felület kis lokális kidudorodását hoztuk létre (6.12a. ábra). Az alsó, sűrűbb rétegben ez egyértelmű nyomásnövekedést jelent. A maximum körül ezért alul anticiklonális jellegű (de nem egészen stacionárius áramlás) jön létre. A felső réteg szempontjából az elválasztó felület pillanatnyi kidudorodása nyomáscsökkenéssel jár, ezért ott ciklonális az áramlás.

A felső rétegben az elválasztó felszín kidudorodásától keletre a folyadék sebessége északra mutat. A folyadékelemek így olyan tartományba kerülnek (az Északi-sark felé közeledve), ahol az f planetáris örvényesség erősebb. A $q_1 = H_1(f_0 + \beta y)/h_1$ potenciális örvényesség csak úgy maradhat meg, ha a h_1 folyadékmélység nő. Az alsó rétegben is arra a következtetésre jutunk, hogy a keleti oldalon enyhe leáramlásnak kell kialakulnia, a nyugati oldalon feláramlásnak, és ezzel az egész kezdeti kidudorodás *nyugatra mozdul el*. A hullám a $-x$ irányban mozog, de az áramlás lényegi része a *vízszintes síkban zajlik*. Hasonló következtetésre jutunk, ha az elválasztó felületet hullámzó alakúnak tételezzük fel (6.12b. ábra). A potenciális örvényesség megmaradása következtében tehát létezik a Rossby-hullám megfelelője kétrétegű folyadékban, amely a *belső Rossby-hullám* vagy a baroklin Rossby-hullám nevet viseli.



6.12. ábra. Belső Rossby-hullám kialakulása kétrétegű közegben, $f_0 > 0$. (a) Lokalizált belső felszíni kidudorodás körüli kvázi-geosztrofikus áramlás a felső közegben ciklonális, az alsóban ellentétes irányú. A potenciális örvényesség megmaradása következtében ez *mindkét* közegben leáramlást kelt a keleti (jobb) oldalon és feláramlást a nyugatin, amely a kidudorodást *nyugati* irányba tolja (szaggatott vonal). (b) Hullámalakú, y-ban eltolásinvariáns belső felszíni forma mozgása

6.10.2. Rossby-hullám a kvázi-geosztrofikus egyenletből

Kis amplitúdójú belső hullámokat vizsgálva tekintsük a linearizált (6.57), (6.58) kvázi-geosztrofikus egyenleteket a merevlap-közelítésben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\psi_1 - \frac{f_0^2}{g'H_1}(\psi_1 - \psi_2)\right) + \beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = 0, \tag{6.60}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\psi_2 + \frac{f_0^2}{g'H_2}(\psi_1 - \psi_2)\right) + \beta\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = 0. \tag{6.61}$$

Az x irányban haladó hullámokat leíró áramlási függvényeket

$$\psi_i = \psi_{i,0}e^{i(k_x x - \omega_0 t)} \tag{6.62}$$

alakban keresve, az

$$\left(\omega_0(k_x^2 + \frac{f_0^2}{g'H_1}) + \beta k_x\right)\psi_{1,0} = \omega_0\frac{f_0^2}{g'H_1}\psi_{2,0}, \tag{6.63}$$

$$\left(\omega_0(k_x^2 + \frac{f_0^2}{g'H_2}) + \beta k_x\right)\psi_{2,0} = \omega_0\frac{f_0^2}{g'H_2}\psi_{1,0} \tag{6.64}$$

polarizációs egyenletekre jutunk. Ezeket összeszorozva összefüggést kapunk ω_0-ra, amelyet kéttényezős szorzat alakra hozunk:

$$\left(\frac{\beta k_x}{\omega_0} + k_x^2 + \frac{f_0^2}{g'H_1} + \frac{f_0^2}{g'H_2}\right)\left(\frac{\beta k_x}{\omega_0} + k_x^2\right) = 0. \tag{6.65}$$

Az első tényező akkor tűnik el, ha

$$\omega_0(k_x) = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + R'^{-2}}, \tag{6.66}$$

ahol R' a kétrétegű közegre jellemző (6.16) belső Rossby-sugár. A (6.63), (6.64) egyenletek bármelyikéből a (6.66) diszperziós relációt használva azt kapjuk, hogy $\psi_{1,0}/\psi_{2,0} = -H_2/H_1$, azaz az áramlás a két rétegben *ellentétes* előjelű.

Az ilyen belső, baroklin Rossby-hullám mellett létezik a másik megoldásként adódó

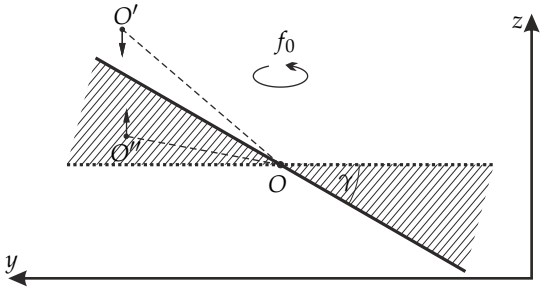
$$\omega_0(k_x) = -\frac{\beta}{k_x} \tag{6.67}$$

diszperziós relációjú Rossby-hullám is. Az ehhez tartozó amplitúdók (6.63), (6.64) szerint azonos nagyságúak: $\psi_{1,0}/\psi_{2,0} = 1$. Ebben a Rossby-hullámban a két réteg azonosan mozog, és visszakapjuk a homogén közegben kialakuló, felszíni változással nem járó Rossby-hullám diszperziós relációját. Folytonosan rétegzett közegben a belső Rossby-hullámok egész spektruma létezik, amit a 13.5.1. fejezet mutat be.

6.11. Baroklin instabilitás

6.11.1. Szemléletes kép

A termikus áramlás azokon a helyeken a legerősebb, ahol jelentősen eltérő hőmérsékletű közegek találkoznak. A légkörben ilyen a poláris front, amely a felszínen a 40–60 fokos szélességek tartományába esik, nagy amplitúdójú meanderezést mutatva (3.12. ábra hullámzó görbéi). Az óceánban ilyen például a Golf-áramlat északi határvonala az amerikai partok elhagyása után, amely elválasztja a sarki hideg tengervizet az egyenlítői melegtől. Az alakzatok meanderező jellege mutatja, hogy itt a mozgás nem szigorúan keletre történik, a termikus áramlás alapformája nem stabil.



6.13. ábra. A baroklin instabilitás lehetősége termikus áramlásban. A folytonos rétegzettségű közegben a γ szöggel döntött sűrűségfelület (folytonos vonal) és a vízszintes sík (pontozott vonal) közötti (satírozott) tartományba eső elmozdulás a kiindulási helyzettől történő *távolodást* eredményez. A kiindulási helyzet az O–O'' elmozdulásra nézve instabil (az O–O'-re stabil).

A ferde rétegzettségű geosztrofikus áramlásban az instabilitás lehetősége egyszerű gondolatmenettel megmutatható. Tekintsünk egy folytonosan rétegzett közeget, amelyben a sűrűségfelületek északra emelkednek, és kövessünk egy folyadékelemet (a 6.13. ábrán O-val jelölt pontot), amelyet egyensúlyi helyzetéből kissé kimozdítunk. Ha az elmozdulás (szaggatott vonal) északra történik, és az azonos sűrűségű felületek γ dőlésszögénél nagyobb szögben, a folyadékelem sajátjánál alacsonyabb sűrűségű környezetbe kerül (az ábrán az O′ pont), és ezért lefelé mozdul el. Közelebb kerül kiindulási állapotához, amely tehát stabil. A γ szögnél alacsonyabb szögben történő elmozdulásokra a folyadékelem a sajátjánál nagyobb sűrűségű közegbe kerül (O″ pont), rá eredő *felhajtóerő* hat, ezért *emelkedik*, és így távolodik eredeti állapotától. A kezdeti állapot tehát *instabil* minden olyan elmozdulásra, amely a vízszintes sík és az állandó sűrűségű felületek által bezárt szögtartományba esik. Áramlás indul meg, amelynek során ritkább (melegebb) közeg kerül sűrűbb (hidegebb) közegbe, és azt hígabbá (melegebbé) teszi. Az állandó sűrűségű felület a vízszintes felé fordul, tehát helyzeti energia szabadul fel. Ezt a jelenséget

baroklin instabilitásnak hívjuk. Az instabilitás hajtóereje tehát a döntött sűrűségfelületekben felhalmozódott helyzeti energia. Ez az energia közel vízszintes síkbeli kis zavarok hatására felszabadul, az áramlás időfüggővé válik, és erősödő hullámmozgásra, *baroklin hullámok* kialakulására vezet, amely rendszerint turbulens keveredést okoz.

Mivel a forgatott rétegzett közeg egyetlen karakterisztikus távolsága az R' belső Rossby-sugár, azt várjuk, hogy az instabilitás jellegzetes λ_c hullámhossza azzal arányos:

$$\boxed{\lambda_c \sim R'.} \tag{6.68}$$

A baroklin instabilitás tehát a *belső Rossby-sugárral* összemérhető hosszúságú hullámokra következik be. Ennek megfelelően a $k_c = 2\pi/\lambda_c$ kritikus hullámszám

$$k_c = CR'^{-1}, \tag{6.69}$$

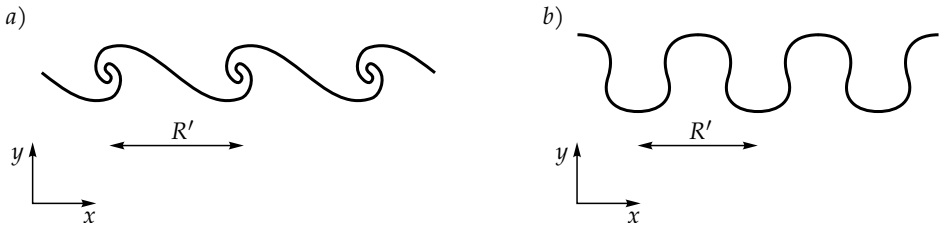
ahol C egy dimenziótlan arányossági tényező.

A problémára jellemző karakterisztikus sebesség a termikus áramlás (6.52) sebessége. Az R'/U mennyiség idődimenziójú, az s instabilitási ráta viszont 1/idő-jellegű. Ezért természetes, hogy

$$\boxed{s \sim \frac{U}{R'}} \tag{6.70}$$

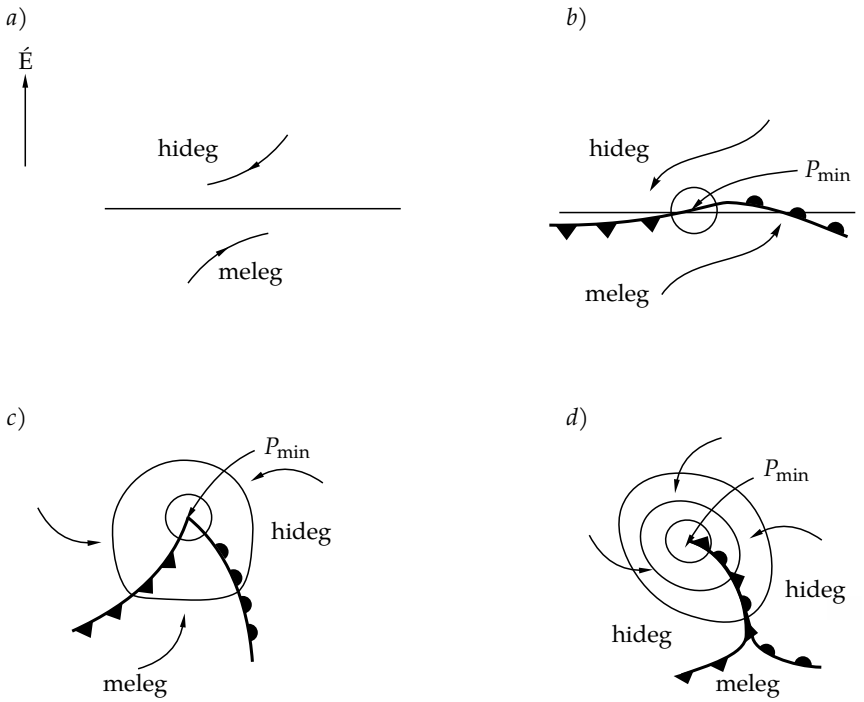
minden esetben.

Az egyre erősödő mozgás csak eleinte tartja meg a szinuszos hullámalakot. A baroklin instabilitás rendszerint a nemlineáris hullám begyűrődéséhez, meanderezéséhez vezet a vízszintes síkban (6.14. ábra). A baroklin hullám alakja 'felülnézetből' hasonlíthat a Kelvin–Helmholtz-instabilitásban látotthoz (5.13. ábra), csak sokkal nagyobb távolságskálán. A begyűrődésekből nagy örvények válnak le, mint a ciklonok vagy a Golf-áramlat gyűrűi, és ezen *örvények mérete is tipikusan* R'. Ez a mechanizmus jelentős hőcserét tesz lehetővé az egyenlítői meleg és a sarki hideg közegek között, jóval hatékonyabbat, mint az egyszerű hővezetés.



6.14. ábra. A baroklin instabilitás következtében megjelenő nagy amplitúdójú baroklin hullámok sematikus alakjai (felülnézet) a több belső Rossby-sugárnyi skálán. (a) Begyűrődő hullámok (a Kelvin–Helmholtz-hullámokhoz hasonló szerkezet). (b) Meanderező áramlás

A meteorológiában jól tanulmányozott a ciklonképződés folyamata. Ennek kvalitatív megértéséhez gondoljunk az északi féltekére, és tegyük fel, hogy a poláris front rövid szakasza egyenes, és itt egyelőre geosztrofikus egyensúly áll fenn (6.15a. ábra). Amennyiben a magasabb légrétegekben perturbáció történik, és az állandó sűrűségű felület kissé behorpad, a nyomás lecsökken, és ciklonális áramlás jön létre az alacsony légrétegekben egy centrum körül. Ez a centrumtól keletre kissé északra tolja a frontvonalat. Így meleg levegő kerül hideg környezetbe, ezért ott feláramlás indul meg. A felszíni áramlás tehát a magas légköri ciklonális áramlást erősíti, és így a hidrodinamikai viszonyok egyre jobban *eltérnek* a termikus széltől ebben az

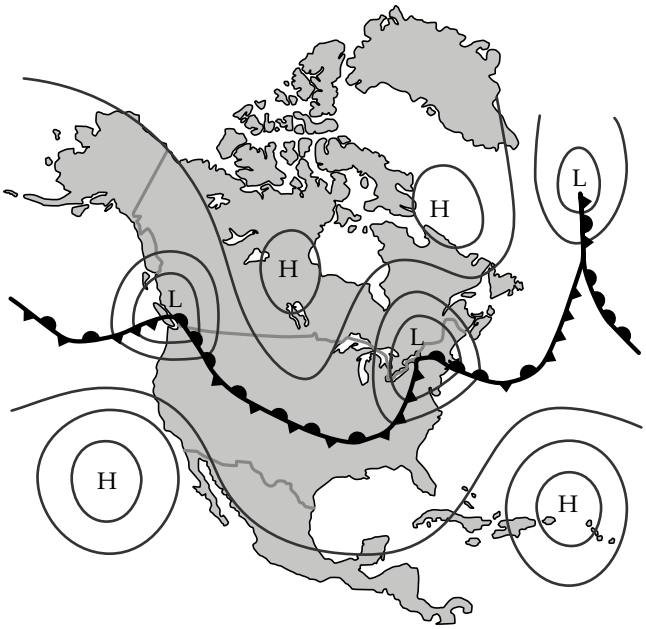


6.15. ábra. A mérsékelt övi ciklonok kialakulásának sematikus rajza az északi féltekén, felszíni viszonyok. (a) Kiindulási állapot: a poláris front (egyenes vonal) nem mozog. (b) Kis perturbáció: a meleg feláramlás miatt létrejövő ciklonális mozgás a nyugati oldalon mozgó hidegfrontot (kis háromszögekkel jelölt görbe), a keletin pedig mozgó melegfrontot (kis félkörökkel jelölt görbe) hoz létre. (c) A közép stádium: a frontvonalak begörbülnek, a hidegfront kezdi utolérni a meleget (a ciklon középpontja a termikus szél miatt kelet felé mozog). (d) A végállapot (okklúziós fronttal): a meleg levegő az alacsony nyomású központ körül mindenütt a felső légrétegekbe szorult, az instabilitás hajtóereje megszűnt.

öngerjesztő folyamatban. A ciklonális áramlás a centrumtól nyugatra a hideg levegőt a meleg levegő alá tolja. Ott mozgó hidegfront alakul ki, a másik oldalon pedig melegfront (6.15b. ábra).

Az átlagos termikus szél a kifejlődőben lévő ciklont keletre sodorja, és így a felszínen a melegfront északkeletre mozdul, de általában jóval lassabban, mint a délkeletre haladó hidegfront, amelyet a felszíni nyugati szél támogat (6.15c. ábra). A meleg levegő kiszorítása tovább folytatódik, és végül a felszíni frontok összezáródnak, ún. *okklúziós* front jön létre (kis háromszögekkel és félkörökkel együtt jelölt vonal a 6.15d ábrán), amelynek mindkét oldalán hideg levegő található (köztük csekély hőmérséklet-különbséggel). A felszíni meleg levegő magasabb szintre emelése befejeződött, és a ciklon teljes felszíni területét elárasztotta a hideg levegő, a poláris front vonala délebbre került. A ciklon skáláján lokálisan csökkent a rétegzettség dőlési szöge. Ezzel nagy hideg levegőtömeg került a mérsékelt égövbe, és jelentős energia áramlott a sarok felé. A ciklon ezután lassan elhal.

A ciklonok teljes életciklusa néhány nap, ez időjárásunk változásának jellegzetes ideje. Összhangban van ez (6.70)-nel, amelyből az $1/s \sim R'/U$ e-szerződési idő a folytonos rétegzettségre jellemző $R' = 1000$ km értékkel $10^6\,\mathrm{m}/(10\,\mathrm{m/s}) = 10^5$ s, valamivel több, mint 1 nap. A ciklonok általában *csoportosan* keletkeznek, a baroklin hullám ilyenkor hasonlít a Kelvin–Helmholtz-instabilitás következtében létrejövő megtörő hullámokhoz. Nagyon hosszú hullámvonulat megfigyelésére nem számíthatunk, mert a belső Rossby-sugár nem fér rá sokszor a mérsékelt övi szélességi körökre (6.16. ábra).



6.16. ábra. Tipikus frontvonulat, baroklin hullám felszíni képe és a front körüli ciklonok sora. A ciklonok közötti távolság néhányszor 1000 km nagyságrendű.

A megtört baroklin hullámok nyomán nagy, szabálytalan örvények maradnak vissza, a légkörben ciklonok és anticiklonok, az óceánban az áramlatokról leszakadó jobbra vagy balra forgó gyűrűk. Ennek a szabálytalan mozgásnak *geosztrofikus turbulencia* (7.5.3. fejezet) a neve. Meglepőnek tűnhet, hogy nagy, jól áttekinthető struktúrák, örvények mellett turbulenciáról beszélünk, de ez nem ellentmondás. A természetes közegek nagyskálájú áramlása kétdimenziós, és a kétdimenziós és az ahhoz hasonló geosztrofikus turbulenciában az örvények összeolvadnak, és a végállapotban csak nagy örvények maradnak vissza (szemben a háromdimenziós turbulenciával), ahogy a 7. fejezetben látjuk. A geosztrofikus turbulencia, mint minden turbulencia *előrejelezhetetlen*. Hétköznapi életünket tekintve tehát a baroklin instabilitás az oka időjárásunk *változékonyságának*. Olyan bolygón, pl. a Vénuszon, ahol a lassú forgás miatt nem következik be az instabilitás, a szelek szinte állandóak, az időjárás előrejelezhető.

A baroklin instabilitás fontosságának felismerése és első leírása J. Charney nevéhez fűződik, a ciklonképződés kialakulásának mechanizmusa pedig V. Bjerknes (norvég meteorológus, 1862–1951, a meteorológia tudományának egyik megalapozója) nevéhez.

6.11.2. Stabilitásvizsgálat kétrétegű közegben

Tekintsünk egy kétrétegű közeget merevlap-közelítésben. Az alapáramlás geosztrofikus, észak felé igen enyhén emelkedő belső elválasztó felülettel az északi féltekén. Ha a dőlésszög γ, akkor a két réteg közötti keletre mutató sebességek különbsége a (6.32) Margules-összefüggés alapján $\Delta U = \gamma g'/f_0$, ami a termikus szél erőssége ebben az elrendezésben. Az egyszerűség kedvéért legyenek a rétegek azonos átlagos vastagságúak:[4] $H_1 = H_2 = H/2$, amelyből az következik, hogy a (6.16) belső Rossby-sugár

$$R' = \frac{\sqrt{g'H}}{2f_0}. \tag{6.71}$$

[4]Mivel a γ szög kicsi, a vastagságok jelentős térbeli tartományban konstansnak tekinthetők.

Célszerű a jelenséget olyan koordináta-rendszerből vizsgálni, amelyben a felső közeg $U = \Delta U/2$ sebességgel mozog keletre, az alsó pedig $-U$ sebességgel nyugatra. Az alapáramlás tehát a vízszintes síkban x irányban zajlik, és $\overline{u}(x)$ a két rétegben szimmetrikusan az

$$u_1 = U, \qquad u_2 = -U \tag{6.72}$$

sebességeket veszi fel, amelyhez a sűrűségeket elválasztó felület γ szögű lejtése társul y irányban a 6.4. ábra szerint.

A (6.57), (6.58) kétrétegű kvázi-geosztrofikus egyenletben az áramlási függvényeket a

$$\psi_1 = -Uy + \psi_1', \qquad \psi_2 = Uy + \psi_2' \tag{6.73}$$

alakban vesszük fel, ahol a ψ_i'-k az alapáramlás körüli kis perturbációkat leíró idő- és helyfüggő áramlási függvények. Ezt a merevlap-közelítéssel (6.57), (6.58)-ba helyettesítve és csak a lineáris tagokat megtartva:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\Delta\psi_1' + \frac{R'^{-2}}{2}\left(\psi_2' - \psi_1'\right)\right) + \left(\beta + R'^{-2}U\right)\frac{\partial \psi_1'}{\partial x} = 0, \tag{6.74}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\Delta\psi_2' - \frac{R'^{-2}}{2}\left(\psi_2' - \psi_1'\right)\right) + \left(\beta - R'^{-2}U\right)\frac{\partial \psi_2'}{\partial x} = 0. \tag{6.75}$$

Az utolsó tagok abból következnek, hogy a (6.57), (6.58) egyenletekben fellépő $\psi_1 - \psi_2$ különbség vezető rendben $-2Uy$, amely ugyanolyan jellegű járulékot ad a lineáris egyenletben, mint a β tag. Az alapáramlás körül kialakuló (esetleg instabil) hullámokat most is a (6.62) alakban keresve, a

$$\left[(\omega_0 - Uk_x)\left(k_x^2 + \frac{R'^{-2}}{2}\right) + k_x\left(\beta + R'^{-2}U\right)\right]\psi_{1,0} = (\omega_0 - Uk_x)\frac{R'^{-2}}{2}\psi_{2,0}, \tag{6.76}$$

$$\left[(\omega_0 + Uk_x)\left(k_x^2 + \frac{R'^{-2}}{2}\right) + k_x\left(\beta - R'^{-2}U\right)\right]\psi_{2,0} = (\omega_0 + Uk_x)\frac{R'^{-2}}{2}\psi_{1,0} \tag{6.77}$$

egyenletrendszerre jutunk. Az egyenletek összeszorzása után a diszperziós relációt meghatározó összefüggés:

$$\left(\omega_0\left(k_x^2R'^2 + \frac{1}{2}\right) + k_x\beta R'^2\right)^2 - \frac{\omega_0^2}{4} = U^2k_x^2\left(\left(k_x^2R'^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right). \tag{6.78}$$

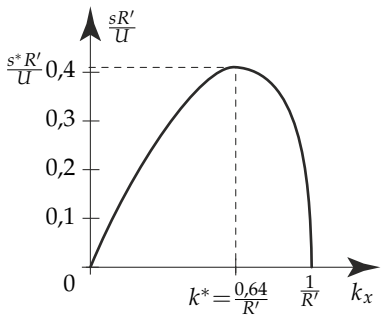
Itt az f-sík közelítést részletezzük, mert a következő fejezetben bemutatott kísérletek lapos aljú edényben történnek (a β-síkon érvényes eredményt a 13.7. fejezet tárgyalja). $\beta = 0$-ra a frekvencia közvetlenül leolvasható mint

$$\omega_0^2 = U^2k_x^2\frac{\left(k_xR'\right)^2 - 1}{\left(k_xR'\right)^2 + 1}. \tag{6.79}$$

Ez a baroklin hullám diszperziós relációja. Ennek gyöke imaginárius, ha

$$k_x < k_c \equiv R'^{-1}. \tag{6.80}$$

Minden, a belső Rossby-szám reciprokánál kisebb hullámszámra, vagyis $2\pi R'$-nél nagyobb hullámhosszakra a perturbáció instabil. Az ilyen hullám amplitúdója időben nő, növekedésének



6.17. ábra. A baroklin instabilitás s instabilitási rátája kétrétegű közegben f-sík-közelítésben. Az instabilitási tartomány és a leggyorsabban növekvő hullám k^* hullámszáma *nem* függ a termikus áramlás sebességétől.

gyorsaságát az

$$s(k_x) = \frac{U}{R'}\sqrt{\frac{\left(k_xR'\right)^2\left[1-\left(k_xR'\right)^2\right]}{\left(k_xR'\right)^2+1}} \tag{6.81}$$

instabilitási ráta jellemzi (6.17. ábra).

A leggyorsabban növekvő amplitúdó a

$$k^* = \sqrt{\sqrt{2}-1}R'^{-1} \approx 0{,}64R'^{-1} \tag{6.82}$$

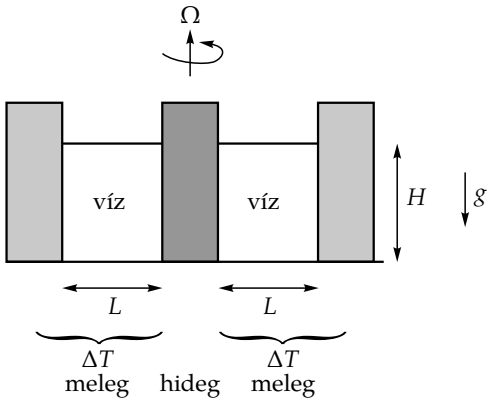
hullámszámhoz tartozik. A megfelelő hullámhossz $\lambda^* = 2\pi/k^* \approx 10R'$, amely levegőre 5000 km, vízben 300 km nagyságrendű, R' kétrétegű közegre vonatkozó (6.3. fejezet) becslése szerint. Az ehhez tartozó instabilitási ráta

$$s^* = \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{U}{R'} = 0{,}41\frac{U}{R'}. \tag{6.83}$$

Ennek $1/s^*$ reciproka $U = 10$ m/s légköri sebességgel kb. 1,5 nap. Az óceáni 0,1 m/s értékkel 1 hét az e-szereződési idő. Ezen eredmények megfelelőjét folytonosan rétegzett közegre a 13.6. fejezet mutatja be.

6.11.3. A baroklin instabilitás kísérleti kimutatása

A forgóhengeres kísérlet leggyakoribb változatában lapos aljú edényt használnak. A forgatott rendszerben oldalról hűtött-fűtött folyadék áramlásának kísérleti vizsgálata során egy hengert koaxiálisan három részre osztanak. A belső kis hengert hidegen tartják, a külső hengergyűrűt pedig melegen (6.18. ábra). Ezek képviselik egy bolygó sarki, illetve egyenlítői tartományait. A közbenső hengergyűrű ekkor az egyik oldalról melegített, a másikról hűtött tartomány, és a benne elhelyezkedő folyadék mozgását a légkör vagy egy óceáni tartomány modelljének tekinthetjük közepes szélességeken. A forgatás szögsebessége vagy a hőmérséklet-különbség függvényében vizsgálható, mikor válik a termikus áramlásnak megfelelő hengerszimmetrikus áramlás instabillá, vagyis mikor alakulnak ki baroklin hullámok. Szemben a Rossby-hullámokat bemutató kísérlettel (2.11. ábra), mechanikus gerjesztésre itt nincs szükség, hiszen a hőmérséklet-különbség állandó energiabetáplálást biztosít. A forgóhengeres elrendezés nemcsak a baroklin instabilitás kísérleti megvalósítása, a megfigyelt áramlások bepillantást nyújthatnak a Föld és más bolygók jellegzetes áramlási rendszereibe is. Az ilyen típusú szisztematikus kísérletek



6.18. ábra. A baroklin instabilitás kimutatásának forgóhengeres kísérleti elrendezésének keresztmetszete és a rendszer jellemző paraméterei

bevezetése az 1950-es években D. Fultz (1921–2002) amerikai meteorológus nevéhez fűződik, amelyeket R. Hide (1929–2016) angol fizikus fejlesztett tovább.

Kísérleti paraméterként változtatható az Ω forgatási szögsebesség, a ΔT hőmérséklet-különbség, a folyadék H mélysége és a közbenső hengergyűrű L szélessége (6.18. ábra). A hengerszimmetrikus alapáramlásban a ΔT hőmérséklet-különbségű hideg és meleg felületen történő le-, illetve felszálló mozgás nagyságrendileg ugyanekkora hőmérséklet-különbségre vezet a függőleges irányban is. Az ezzel kapcsolatos termikus áramlás tipikus erősségét a (6.52) kifejezés adja, és a kísérletben f_0 helyett 2Ω írandó. A $|\Delta T|$ függőleges hőmérséklet-különbséghez tartozó Brunt–Väisälä-frekvencia az (5.7) kifejezés szerint $N^2 = g\alpha|\Delta T|/H$-val becsülhető.

Az eredményeket dimenziótlan kombinációk függvényében érdemes megadni, hogy különböző mérések adatai is összehasonlíthatóvá váljanak. Láttuk, hogy tetszőleges rétegzett, forgatott folyadékban az (5.2) belső Froude-szám alapvető paraméter. A (6.52) termikus sebességgel

$$Fr' = \frac{U}{H\sqrt{g\alpha|\Delta T|/H}} = \frac{g\alpha|\Delta T|H/(2\Omega L)}{\sqrt{g\alpha|\Delta T|H}} = \frac{\sqrt{g\alpha|\Delta T|H}}{2\Omega L}. \tag{6.84}$$

A kísérletek során ennek négyzetét szokás használni, amely egyben a (6.52) sebességgel számolt (1.1) Rossby-szám,

$$Ro_T \equiv \frac{g\alpha|\Delta T|H}{(2\Omega)^2 L^2}, \tag{6.85}$$

s ezért termikus Rossby-számnak nevezik.[5]

A viszkozitás fontosságát forgatott közegben az Ek Ekman-szám (4.1) méri, a rétegvastagságét pedig az ε mélységi arány (2.2) (amely most nem feltétlenül kicsi). A kísérletben a forgatás és viszkozitás arányát a

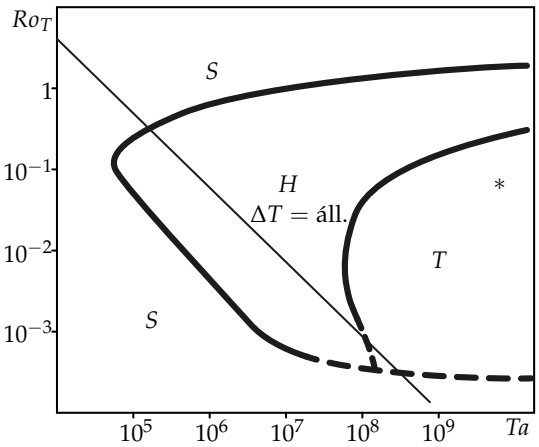
$$Ta = Ek^{-2}\varepsilon^{-5} = \frac{(2\Omega)^2 H^4}{\nu^2}\left(\frac{L}{H}\right)^5 = \frac{(2\Omega)^2 L^5}{\nu^2 H} \tag{6.86}$$

Taylor-számmal adják meg.[6]

[5] Az irodalomban gyakran (6.85) 4-szeresét tekintik termikus Rossby-számnak.

[6] Mivel a kísérleti probléma forgatott konvekciónak felel meg, természetes, hogy a (6.85) termikus Rossby-szám az (5.126) Rayleigh-számmal és az (5.140) Prandtl-számmal is kifejezhető: $Ro_T = Ra/(PrTa\varepsilon^3)$. Másrészt, Ro_T egyben a probléma Bu (6.2) Burger-számával is azonos.

A fenti Ro_T és Ta paraméter tipikus értéke 20 cm-es L szélességgel, 5 cm-es H mélységgel, $\Delta T = 20$ fok hőmérséklet-különbséggel és percenkénti 5 fordulattal ($2\Omega \approx 1\mathrm{s}^{-1}$) és a 7.1. táblázat adataival számolva vízben $5 \cdot 10^{-2}$, illetve $6 \cdot 10^{9}$. Az $R' \approx NH/2\Omega$ összefüggéssel becsülhető belső Rossby-sugárra kapjuk, hogy $R' = L \cdot \sqrt{Ro_T}$, amely a fenti adatokkal kb. 5 cm-nek adódik. A két fontos kísérleti paraméterrel kifejezve a belső Rossby-sugár $\sqrt{|\Delta T|}/\Omega$-val arányosan változik.



6.19. ábra. Forgóhengeres mérések eredményének sematikus áttekintése a Ta Taylor-szám és az Ro_T termikus Rossby-szám logaritmusai által definiált paramétersíkon. (A vonalak szaggatottsága a kísérleti eredmények bizonytalanságára utal.) Az S-sel jelölt tartományban a termikus áramlás stabil és forgásszimmetrikus. A H tartományban a termikus áramlás instabillá vált, de nagy amplitúdójú baroklin hullámok stabilizálódnak. A T jelű tartományban az áramlás szabálytalan, a geosztrofikus turbulencia jegyeit mutatja. A szövegben említett laboratóriumi adatpár a csillaggal jelölt pontnak felel meg.

A mára nagyszámúvá vált kísérleti eredmény a két legfontosabb paraméter által definiált Ta–Ro_T síkon a 6.19. ábrával foglalható össze. Az ívelt vastag vonal a baroklin instabilitás kísérleti határgörbéje. A stabil forgásszimmetrikus termikus áramlás tartományát választja el az instabil viselkedéstől. Az elrendezés véges mérete miatt ennek jelentése különbözik az igen nagy vízszintes kiterjedésű közegben érvényestől, ahol mind a kétrétegű rendszerben (6.11.2. fejezet), mind folytonos rétegzettség esetén (13.6 fejezet) rendezetlen, turbulens áramlás várható. A kísérletben az instabilitás következtében időben eleinte növekvő amplitúdót a véges geometria megállítja. A baroklin hullámok viszonylag kis Ta értékekre stabilnak bizonyulnak,[7] nagy amplitúdójú, nemlineáris hullámok, és időben pontosan periodikusak, vagy közelítőleg azok, miközben hullámhosszuk az R' belső Rossby-sugárral arányos (a (6.68) összefüggéssel összhangban).

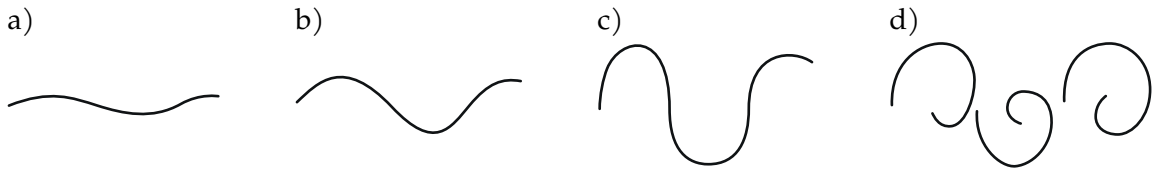
A termikus áramlás instabillá válása következtében kialakult nagy amplitúdójú baroklin hullámot mutat ez az infrakamerával készült felvétel. Mivel az edényben hőmérsékleti inhomogenitások vannak, a hullámzás a hőmérséklet-eloszlásban is megmutatkozik. A kísérletben négy, majd három hullám fér rá a körgyűrűre.

A véges geometria viszonylag kis hőmérséklet-különbségek esetén úgy módosítja a baroklin instabilitást, hogy periodikus vagy kvázi-periodikus időfüggésű és nagy amplitúdójú hullámmá teszi a termikus áramlást, vagyis az instabilitás ebben a tartományban mintázatképződésre vezet. Az S $\rightarrow$ H átmenet tehát az első konvekciós instabilitáshoz hasonlít, a következőkben tárgyalt S $\rightarrow$ T átmenet viszont a rögtön turbulenciára vezető Kelvin–Helmholtz-instabilitáshoz.

[7] A meteorológai irodalom a vízszintes aljazatú kísérlet baroklin hullámait gyakran Rossby-hullámoknak nevezi.

Az ábra jobb oldalán egy meredeken felfelé induló másik stabilitási határgörbe látható. Ez a baroklin hullámok instabillá válását, vagy általánosabban a turbulens (geosztrofikusan turbulens) áramlásba való átmenetet jelzi. Ettől a görbétől jobbra, a T tartományban a meanderező központi hullámmozgásról nagy ciklonális és anticiklonális örvények szakadnak le, amelyek sugara R' rendű, és szabálytalanul változnak. A nagy örvények száma időben közel változatlan, hiszen csak adott számú $2R'$ átmérőjű korong fér rá az L vastagságú körgyűrűre.

Ha ebben a tartományban egy eleinte alig hullámzó megfestett folyadékvonal változását követjük időben (ahogy a 6.20. ábra mutatja), az egyre jobban hullámzóvá válik (b), egyre kevésbé hasonlít szinuszfüggvényhez (nemlineáris baroklin hullámot jelez) (c), majd megtörik, jobbrabalra forgó R' sugarú örvényeket rajzol ki (d). Ez az eseménysorozat a szennyezések terjedése szempontjából (7.6. fejezet) mutatja a geosztrofikus turbulencia jelenlétét. A terjedési folyamat ilyenkor időben szabálytalan, kaotikus, összhangban azzal, hogy a turbulens áramlás sebességtere minden pillanatban rendezetlen.



6.20. ábra. A baroklin instabilitás következtében kifejlődő tipikus szennyeződési (festékterjedési) mintázat a forgóhengeres kísérlet turbulens tartományában. Az a)–d) rajzok egy megfestett folyadékvonal alakjának időbeli változását mutatják sematikusan. Az a), b) fázisok az instabilitás kezdetére utalnak, a c) állapot nagy amplitúdójú, instabillá váló hullámra, a d) pedig hullámtörésre, amely szabálytalan ciklonális, anticiklonális örvényszerű rajzolatok kialakulására vezet.

Demonstrációs jellegű kísérlethez használt, egyszerűen elérhető adatokkal általában a T turbulens tartományban vagyunk. (A termikus áramlás bemutatásához az S vagy H tartományba tartozó paraméterek illenek.) A belső (hideg) henger közelébe juttatott festék a kísérletben kifelé, a külső (meleg) tartományból induló befelé mozdul el. Ez a baroklin instabilitással járó intenzív hőtranszportot illusztrálja.

Megfigyelhető az is, hogy a kialakuló nagy örvények néhányszor férnek rá a közepes hőmérsékletű körgyűrűre. A mérsékelt övi légköri képződményekkel való hasonlóság olyan nagy lehet, hogy a kísérlet örvényei meggyőzően rávetíthetők a földi geometriára.

Mivel Ro_T és Ta szorzata arányos ΔT-vel, Ω-tól függetlenül, a 6.19. ábra kétszeresen logaritmikus skáláján adott hőmérséklet-különbség mellett a forgatási sebesség változtatása egy -1 meredekségű egyenesen történő elmozdulásnak felel meg (lefelé, ha a szögsebesség növekszik). Az egyenes annál feljebb fut, minél nagyobb ΔT. Az ívelt fekete görbe alsó ága azt mutatja, hogy nagyon kis ΔT hőmérséklet-különbség esetén a kísérletben nem következik be instabilitás. A -1 meredekségű egyenes mentén, tehát ΔT-t állandónak tartva a belső Rossby-sugár $1/\Omega$-val arányos. Lassú forgatás esetén a belső Rossby-sugár olyan naggyá válhat, hogy a közel R' méretű hullámok már egyszer sem férnek rá az L szélességre, és ezzel megszűnik az instabilitás. Ez történik a fekete görbe felső ága mentén.

Érdemes elgondolkozni azon, milyen következtetés vonható le a kísérletekből a földi légkörzést vagy a bolygólégkörök jellegére vonatkozóan. A Ta, Ro_T számpárok bolygókhoz történő közvetlen hozzárendelésére nem számíthatunk, hiszen nem nyilvánvaló, hogy a ν molekuláris viszkozitásnak mi a megfelelője a bolygólégkörökben, és a hengeres geometria nyilván különbözik a gömbitől.[8] Kvalitatív megfeleltetés azonban a Ta, Ro_T síkon is lehetséges.

[8] Probléma az is, hogy a tisztán hidrodinamikai leírás mellett más jelenségek is fontosak lehetnek a bolygólégkörök

A *földi* globális légkörzés szempontjából a kísérletben az S tartomány bal alsó sarkához tartozó viselkedés megfelel a földi alacsony szélességi körök (az Egyenlítő) mentén kialakuló stabil zonális áramlásoknak, szeleknek, hiszen itt a Coriolis-paraméter és a ΔT hőmérséklet-különbség is kicsi. A mérsékelt égövi zónában a Coriolis-paraméter és ΔT is nagyobb, ez a zóna a T tartományba esik. Az eredmény mutatja, hogy a turbulenciához vezető baroklin instabilitás a földi viszonyok között elkerülhetetlen a közepes szélességeken. Az itt tapasztalt laboratóriumi viselkedés tükrözi mérsékelt övi időjárásunk állandó változékonyságát.

A *bolygók* esetében nem feltétlenül ez a helyzet, amely a 7.2. táblázat adatainak vizsgálatából is látszik. A bolygók termikus Rossby-számat az 1.1. fejezetben meghatározott Rossby-számmal becsüljük, hiszen a termikus szél erőssége általában a felszíni szélsebességek nagyságrendjébe esik. A földi szubtrópusihoz hasonló tartomány jellemzi a lassan forgó Vénusz légkörét, ahol a Rossby-szám nagy, a baroklin instabilitás nem játszik szerepet (S tartomány), és ciklonok sem alakulhatnak ki. A Mars átlagos Rossby-száma alig kisebb 1-nél, ciklonok itt sincsenek, az időjárás adott helyen periodikusan ismétlődik, vagyis a helyzet a kísérlet stabil baroklin hullámainak felel meg (H tartomány). A Jupiter Rossby-száma a földinél lényegesen kisebb, a baroklin instabilitás aktív szerepet játszhat (T tartomány). Időben változó ciklonok, anticiklonok vannak jelen a felső légkörben. A nagy méret és a görbület miatt új vonás, hogy a légkör számos sávra bomlik, ahogy a 7.5.3. fejezetben tárgyaljuk majd.

6.12. Nem kvázi-geosztrofikus frontok és jetek

A baroklin instabilitás kialakulása leírható a kvázi-geosztrofikus közelítésben. Az instabilitás következtében kialakuló áramlások maguk már gyakran kívül esnek a közelítés érvényességi körén. Idézzük fel, hogy a geosztrofikus egyensúly felé tartás (6.7. fejezet) az R' belső Rossby-sugár által meghatározott tipikus vastagságú frontokra vezet. A front két oldalán sűrűség- és hőmérséklet-különbség áll fenn, amely a (6.52) összefüggéssel megadott U termikus áramlási sebességre vezet a H magasságban. Ezt a tetszőleges L vízszintes méret helyett az $R' = \sqrt{g'H}/|f_0| \sim NH/|f_0|$ Rossby-sugárral kiértékelve

$$U = \frac{g'H}{|f_0|R'} = \sqrt{g'H}. \tag{6.87}$$

Az ezzel a sebességgel számolt Rossby- és Froude-számok

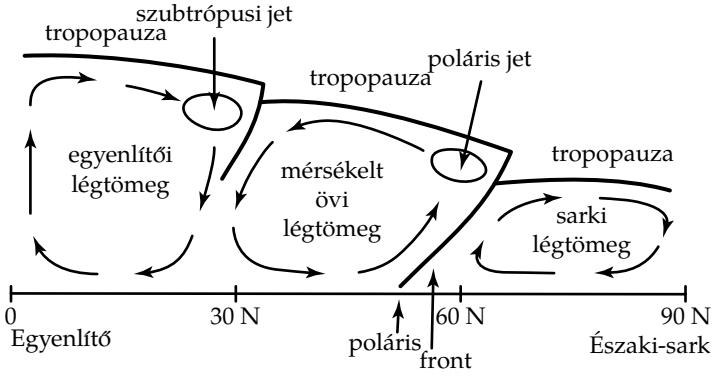
$$Ro = \frac{U}{|f_0|R'} = \frac{U}{\sqrt{g'H}} = 1, \qquad Fr' = \frac{U}{NH} = \frac{U}{\sqrt{g'H}} = 1. \tag{6.88}$$

A frontokkal kapcsolatos jelenségek tehát az R' belső Rossby-sugár skáláján már nem kvázi-geosztrofikusak, Rossby- és belső Froude-számaik egységnyi nagyságrendűek. A két szám azonossága arra utal, hogy a forgás és a rétegzettség szerepe ilyenkor (is) összemérhető.

Ilyen nem kvázi-geosztrofikus frontok és a velük párhuzamosan futó jetek nemcsak a légkörben fordulnak elő, hanem az óceánokban is, ahol legismertebb példájuk a Golf-áramlat, miután a Hatteras-foknál átlagosan kelet–nyugati irányúra fordul. Az életünkkel legközvetlenebbül kapcsolatos jetek a légköri jetek, jetstreamek, amelyekről a 3.8. fejezetben már röviden volt szó.

A felszínközeli áramlásokat mutató 3.13. ábra kiegészítéseként a 6.21. ábra a troposzférán belüli pillanatnyi térbeli szerkezetet mutatja egy hosszúsági kör mentén sematikusan. A közel

dinamikájában, mint pl. a Nap sugárzása. Ez új dimenziótlan paramétert jelent, tehát a pontos megfeleltetéshez mindenképpen a síknál magasabb dimenziójú paramétertér lenne szükséges.



6.21. ábra. A globális légkörzés magasságfüggésének sematikus rajza az északi féltekén, benne három cellával és a jetekkel. Az egyenlítői cellát szokás Hadley-cellának is nevezni. G. Hadley (1685–1768) angol meteorológus, első vizsgálója annak, hogy a Föld forgása hogyan befolyásolja a légkör térbeli áramlását, aki még egyetlen, az Egyenlítőtől a sarkig terjedő cellát jósolt.

vízszintes vastag görbék a tropopauzát jelzik, ahol, mint láttuk, jelentős ugrás történik a rétegzettségben, és a tropopauza ezért záró felületnek tekinthető. Az ábráról leolvasható, hogy a troposzféra tipikus magassága függ a földrajzi helytől, illetve attól, melyik nagy légköri celláról van szó. A sarki cellában a tropopauza magassága 6–9 km körüli, az Egyenlítő környékén viszont elérheti a 15 km-t is (és évszakos ingadozást is mutat). A nyilak a szelek irányát mutatják, és az áramlás természetesen ki van téve a Coriolis-eltérítésnek minden magasságban. A sarki és mérsékelt övi levegő közötti jelentős hőmérséklet-különbségre utal a felszínig lefutó vastag vonal, a poláris front. Az ezzel megjelenő rajzolat hasonlít a 6.9.a ábra geosztrofikus frontjához, amelynek stacionárius áramláshoz kellene tartoznia, a poláris front azonban jelentős hullámzást, a felszín mentén is meanderezést mutat, amit a 3.13. ábra is jelez. A poláris front mentén felfelé haladva a termikus szél egyre erősebb, és maximuma, a poláris jet a front külső oldalán alakul ki, közvetlenül a tropopauza alatt. A szélsebességre jó becslést ad a (6.52) összefüggés, amely a $H = 10$ km magasságban $L = R' = 1000$ km-rel 30 m/s-ot eredményez. Természetesen ez is átlagérték, télen a poláris jet mindig erősebb, mert nagyobb a hőmérsékleti kontraszt. Ahogy már említettük, a repülőgépek a jetben hátszelezve rövidítik repülési idejüket kelet felé haladva.

A 6.21. ábrán jól látszik, hogy a poláris jet felszíni vetülete közelebb van a sarokhoz, mint a poláris front frontvonala. Egymással azonban többé-kevésbé összehangoltan mozognak, egyfajta baroklin hullámként. Ha tehát a poláris jetben, pl. a repülési adatok alapján egy Egyenlítő-irányú kitüremkedés figyelhető meg, akkor ugyanez várható a felszíni poláris frontvonal alakjában is. A front sarok felőli oldalán ilyenkor ciklon helyezkedik el, sarok irányú kitüremkedés esetén pedig anticiklon. Különösen viharos ciklon alakulhat ki, ha a jet felszíni alacsony nyomású központ fölé kerül, hiszen akkor a fenti gyors áramlás a levegőt megszívja, és erős feláramlást okoz. A jet követése tehát segíti az időjárás előrejelzését.

Az egyenlítői és mérsékelt övi cellák felső határán megindul egy szubtrópusi front kialakulása, ez azonban nem ér le a felszínig, ahogy a sematikus 6.21. ábra is mutatja. A front mentén megjelenik a termikus szél, és ennek maximumánál alakul ki a szubtrópusi jet. Ez kevésbé meanderezik, mint poláris párja, és előrejelzési jelentősége is kisebb, hiszen nem kapcsolatos felszíni frontvonallal. Az egyes féltekék két jetje időnként össze is olvadhat, és ez sajátos időjárási következményekkel járhat.

7. fejezet

Turbulencia

A turbulencia térben is és időben is véletlenszerű, rendezetlen áramlás. A sebességtér minden megfigyelési skálán és időben is olyan gyorsan változik, hogy az átlagértékétől való eltérések, a fluktuációk részletei ismeretlenek maradnak, célszerű azokat véletlen változóknak tekinteni. A fluktuációk nem kicsik, a turbulencia alapvetően nemlineáris jelenség. A turbulencia a folyadékmozgás igen bonyolult állapota, az alapegyenletek analitikus megoldása reménytelen, ismereteink elsősorban kísérleti megfigyelésekből, numerikus szimulációkból és dimenziós megfontolásokból származnak.

A turbulencia a nagyon gyors áramlások, illetve erősen fűtött közegek jellemzője. A turbulencia feltétele dimenziótlan számok segítségével adható meg. Áramló homogén közegben az

$$\boxed{Re = \frac{UL}{\nu}} \tag{7.1}$$

Reynolds-szám a mérvadó, ahol U az áramlás jellegzetes sebessége, L a mérete és ν a dinamikai viszkozitás (O. Reynolds (1842–1912) brit fizikus, a csőbeli áramlás turbulenssé válásának első kutatója).

Fűtött közegben a konvekció beindulása kapcsán már megismert

$$\boxed{Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}} \tag{7.2}$$

Rayleigh-szám játszik szerepet.

A közeg stabil rétegzettsége a turbulencia kialakulását megnehezíti, hiszen függőleges keveredés csak akkor alakulhat ki, ha az egymás fölötti folyadékrétegek $\overline{u}$ átlagsebessége elegendően különbözik. A turbulencia kialakulását rétegzett közegben az

$$\boxed{Ri = \frac{N^2}{(d\overline{u}/dz)^2}} \tag{7.3}$$

Richardson-szám jellemzi, ahol N a Brunt–Väisälä-frekvencia , a nevezőben pedig az átlagsebesség függőleges nyírásának négyzete áll (L. F. Richardson (1881–1953) angol meteorológus, a turbulencia és az időjárás-előrejelzés első jelentős kutatója).

A turbulencia a folyadék egyre gyorsabb áramoltatása, illetve egyre erősebb fűtése eredményeként alakul ki. Az erősödő energiabefektetés során a rendszer különböző instabilitásokon megy keresztül, amelyek lehetnek pl. a Kelvin–Helmholtz-instabilitás, a Rayleigh–Bénard-instabilitás, vagy forgatott közegben a baroklin instabilitás. A *teljesen kifejlett turbulencia* tehát

egyfajta végállapot, a folyadékmozgás legbonyolultabb állapota, amelyhez igen nagy energiabefektetés szükséges, ezért dimenziótlan számokkal kifejezett feltétele:

$$Re \gg 1, \qquad \text{vagy} \qquad Ra \gg 1.$$

A Richardson-számnak viszont egységnyi kritikus értéknél kisebbnek kell lennie, amely azt fejezi ki, hogy a nyírás le tudja rombolni a rétegzettséget. A természetben a turbulencia igen gyakori, alapvető szerepet játszik a planetáris határrétegben vagy az óceáni keveredési rétegben. A környezeti áramlásokat kis skálán, a néhány méteres, kilométeres távolságokon megfigyelve azok mindig turbulensnek bizonyulnak. Ebben a véletlenszerű folyadékmozgásban mindhárom térbeli irány lényeges szerepet játszik, háromdimenziós turbulenciáról van szó. A nagy vízszintes távolságokon viszont, mint láttuk, az áramlások gyakorlatilag kétdimenziósak. A turbulencia jellege alapvetően függ a dimenziószámtól: a háromdimenziós turbulens folyadék „zubog", sok kis örvény figyelhető meg benne. A kétdimenziós viszont ehhez képest simán változik, de véletlenszerűen: nagy méretű örvények jellemzik, és a körülöttük megfigyelhető „szálas" szerkezetek. A turbulencia harmadik fajtája a geosztrofikus turbulencia, amely a kétdimenziós eset kiterjesztése olyan áramlásokra, amelyekben a forgatás és a görbület is szerepet játszik: mind a légkör, mind az óceánok nagyskálájú rendezetlen mozgása geosztrofikus turbulencia.

Az áramlásban sodródó anyagok (szennyeződések) diffúziójának fontosságát a

$$\boxed{Pe = \frac{UL}{D}} \tag{7.4}$$

Péclet-szám méri (J. C. E. Péclet (1793–1857) francia fizikus, a transzportfolyamatok kutatója), ahol D a diffúziós állandó. A diffúziós hatás akkor jelentős, ha Péclet-szám kicsi. Ez kis skálán háromdimenziós turbulenciában mindig teljesül, nagy skálán, a kétdimenziós/geosztrofikus turbulenciában viszont tipikusan nem ez a helyzet, a diffúzió elenyésző szerepet játszik, és így előtérbe kerül a sodródás kaotikus jellege.

7.1. Az átlagolt hidrodinamikai egyenletek

A turbulens áramlásban a sebességtér állandóan változtatja irányát és nagyságát. Mivel e fluktuációkról nem rendelkezhetünk elég információval, célszerű azokat egy átlag körül kialakuló *véletlen* változóknak tekinteni, és azok tulajdonsága alapján az *átlagokra* vonatkozó hidrodinamikai egyenleteket felírni.

Bontsuk fel a folyadékmozgásra jellemző valamely $A(\mathbf{r}, t)$ mennyiséget (amely lehet pl. valamelyik sebességkomponens, a nyomás, a hőmérséklet stb.) ugyanezen mennyiség $\overline{A}(\mathbf{r}, t)$ átlagára és az átlagtól való eltérést jelölő $A'(\mathbf{r}, t)$ (nem feltétlenül kicsi) fluktuációra. Az átlagot úgy képezzük, hogy $N_0 \gg 1$ mérést végzünk hasonló körülmények mellett, és az adott helyen és pillanatban mért mennyiségek számtani közepét képezzük: $\overline{A}(\mathbf{r}, t) = (1/N_0) \sum_{l=1}^{N_0} A_l(\mathbf{r}, t)$, ahol l az egyes mérések sorszáma. Ez az ún. *sokaságátlag*. A definíció alapján

$$A(\mathbf{r}, t) = \overline{A}(\mathbf{r}, t) + A'(\mathbf{r}, t), \tag{7.5}$$

és a *fluktuációk* átlaga természetesen zérus:

$$\overline{A'(\mathbf{r}, t)} = 0. \tag{7.6}$$

A definícióból adódóan az $\overline{A(\mathbf{r}, t)}$ átlagolt mennyiség térben és időben simán változik. A fluktuációk nem kicsik, négyzetes átlaguk $\overline{A'^2}$ összemérhető (vagy akár nagyobb) az átlagolt mennyiség $\overline{A}^2$ négyzetével.

Mivel a differenciálás és a sokaságátlag képzése egymással felcserélhető lineáris művelet, az átlagolt egyenletek lineáris tagjai ugyanolyan formában érvényesek, mint az eredeti mennyiséget tartalmazók. Így például:

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}, \tag{7.7}$$

azaz az időderivált átlaga azonos az átlagolt mennyiség időderiváltjával. Hasonlóan, a $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ feltételből azt kapjuk, hogy *összenyomhatatlan* közegben mind az átlagsebesség, mind a fluktuációk divergenciamentesek:

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0. \tag{7.8}$$

Más a helyzet a nemlineáris kifejezésekben. Tekintsük az A mennyiség teljes időderiváltjának advektív tagját, azaz a

$$(\mathbf{v}\operatorname{grad})A = \sum_{j=1}^{3}\left(\overline{v}_j + v_j'\right)\frac{\partial(\overline{A} + A')}{\partial x_j} \tag{7.9}$$

kifejezést. A vesszős és átlagolt tényezők szorzatát tartalmazó tagok átlaga (7.6) alapján eltűnik, ezért

$$\overline{(\mathbf{v}\operatorname{grad})A} = (\overline{\mathbf{v}}\operatorname{grad})\overline{A} + \sum_j \overline{v_j'\frac{\partial A'}{\partial x_j}}. \tag{7.10}$$

Az utolsó tag úgy is írható, mint a $\overline{v_j'A'}$ korreláció divergenciája, hiszen $\partial(v_j'A')/\partial x_j = v_j'\partial A'/\partial x_j + A'\partial v_j'/\partial x_j$, de a második tagok összege zérus, mert $\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0$. Az általános szabály az, hogy az advektív derivált átlaga

$$\boxed{\overline{(\mathbf{v}\operatorname{grad})A} = (\overline{\mathbf{v}}\operatorname{grad})\overline{A} + \operatorname{div}\overline{\mathbf{v}'A'}.} \tag{7.11}$$

Az átlagos advektív deriválthoz tehát járulékot ad az $\overline{A'\mathbf{v}'}$ korrelációs vektor divergenciája is. Az A mennyiség teljes deriváltjának átlaga tehát

$$\overline{\frac{dA}{dt}} = \frac{\partial\overline{A}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{v}}\operatorname{grad})\overline{A} + \operatorname{div}\overline{\mathbf{v}'A'}. \tag{7.12}$$

Fontos következmény adódik ebből az (1.28) Navier–Stokes-egyenlet átlagolt alakjára. A sebesség i komponensére vonatkozó egyenletben az $A = v_i$ megfeleltetéssel az advektív gyorsulás

$$\overline{(\mathbf{v}\operatorname{grad})v_i} = (\overline{\mathbf{v}}\operatorname{grad})\overline{v}_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v_i'v_j'}. \tag{7.13}$$

Az i-edik sebességkomponens átlagára vonatkozó egyenlet ezért (az egyszerűség kedvéért homogén közeget tekintünk, és a Coriolis-gyorsulást nem írjuk ki)

$$\frac{d\overline{v}_i}{dt} = -g\delta_{i3} - \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} - \overline{v_i'v_j'}\right) = -g\delta_{i3} + \frac{1}{\varrho_0}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\sigma}_{ij}, \tag{7.14}$$

ahol megjelent a fluktuációkkal korrigált átlagolt feszültségtenzor

$$\overline{\sigma}_{ij} = -\overline{p}\delta_{ij} + \lambda\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right) - \varrho_0\overline{v_i'v_j'}. \tag{7.15}$$

Itt $\lambda = \nu\varrho_0$ a dinamikai viszkozitás, az első két tag az átlagértékekkel képzett szokásos (4.21) feszültség, az új,

$$-\varrho_0\overline{v_i'v_j'} \tag{7.16}$$

tag pedig az ún. *Reynolds-feszültség*, amely *független a viszkozitásra jellemző anyagi paramétertől*. A fluktuációk jelenléte tehát módosítja a feszültségtenzort. Elsősorban a nemdiagonális $i \neq j$

elemek a fontosak, mert ezek a nyírás megváltozását jelentik, míg az $i = j$ elemek a nyomáshoz adnak járulékot. Érdemes megjegyezni, hogy a $\varrho_0 \overline{v_i' v_j'}$ mennyiség úgy is értelmezhető, mint a j irányú $\varrho_0 v_j'$ impulzus i irányba haladó $\varrho_0 v_i' v_j'$ áramának átlaga (vagy fordítva).

Az átlagolt Navier–Stokes-egyenlet i komponense írható így is:

$$\frac{d\overline{\mathbf{v}}_i}{dt} = -g\mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0}(\operatorname{grad}\overline{p})_i + \nu\Delta\overline{\mathbf{v}}_i - \operatorname{div}\overline{\mathbf{v}'v_i'}. \tag{7.17}$$

Az utolsó tag a sűrűségtől is függetlenül kizárólag a sebességfluktuációk eredménye, és járulékot ad a nyíráshoz. Emlékeztetünk arra, hogy a négyzetes közegellenállási erő is független a molekuláris viszkozitástól, ugyanis a közegellenállás ezen fajtája a sebességfluktuációk, az örvények szabálytalan leszakadásának következménye a vizsgált test mögött.

Tekintsük most az (5.124) hődiffúziós egyenlet átlagolt változatát ($A = T$). Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\overline{T} = \kappa\Delta\overline{T} - \operatorname{div}\overline{\mathbf{v}'T'} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j} - \overline{v_j'T'}\right), \tag{7.18}$$

ahol κ a hődiffúziós állandó. A fluktuációk tehát megváltoztatják a hődiffúziós egyenlet jellegét is: Az átlagos hőmérséklettel kapcsolatos $-\varrho_0 c_p \kappa \operatorname{grad}\overline{T}$ hőáram mellett megjelenik a $\varrho_0 c_p \overline{\mathbf{v}'T'}$ turbulens hőáram is (amely arányos a hőmennyiség fluktuációinak a $\mathbf{v}'$ okozta áramával).

Amennyiben valamilyen koncentráció, pl. az S sótartalom diffúzió révén terjed szét, akkor a hagyományos $dS/dt = D\Delta S$ diffúziós egyenletre vezető $-D \operatorname{grad} S$ diffúziós áramhoz hozzáadódik a $\overline{\mathbf{v}'S'}$ turbulens diffúziós áram is:

$$\frac{d}{dt}\overline{S} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(D\frac{\partial\overline{S}}{\partial x_j} - \overline{v_j'S'}\right) = D\Delta\overline{S} - \operatorname{div}\overline{\mathbf{v}'S'}. \tag{7.19}$$

Mindkétfajta turbulens áram nagyságában jóval meghaladhatja a hagyományos áramokat: a turbulencia tehát jelentősen felgyorsíthatja a keveredési folyamatokat.

Összefoglalva, a turbulens fluktuációk miatt az advektív derivált nemlinearitásából következően az átlagolt térmennyiségekre vonatkozó egyenletekben megjelenik ezen térmennyiségek fluktuációi szorzatának átlagértéke, a korreláció. Ahhoz, hogy az egyenletek egyértelműen megoldhatók legyenek, szükségünk van a korrelációk egyenleteire. Ezek a hidrodinamikai egyenletek beszorzásával átlagolás után egyszerűen megkaphatók, de bennük a háromszoros szorzatok átlagértéke, a hármas korrelációk lépnek fel. Így az egyre magasabb rendű korrelációk végtelen hierarchiáját kapjuk, amely jól mutatja, hogy a turbulencia teljes leírása csak a fluktuációk statisztikájának pontos ismeretében lenne lehetséges. A gyakorlatban kezelhető egyenleteket csak akkor kapunk, ha feltételezhetjük, hogy egy bizonyos rend fölött a korrelációs függvények mind kifejezhetők alacsonyabb rendűekkel. Ha ez igaz, akkor sikerült a hierarchiát véges szinten lezárni. Ez az ún. *lezárási* (closure) *probléma*. Az, hogy milyen lezárás alkalmazható, függ attól is, hogy a folyadék mely tartományát vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy már az elsőrendű lezárás (a kétszeres korreláció visszavezetése az átlagértékre) is hasznos közelítést adhat.

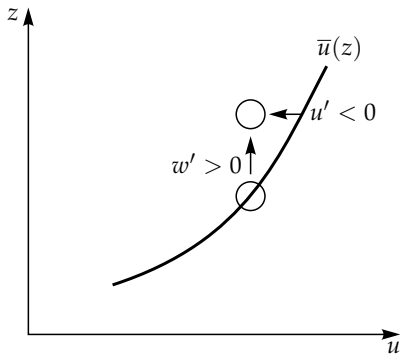
7.2. Turbulens transzportegyütthatók

Tekintsünk egy falhoz közeli turbulens áramlást. Legyen a fal az x, y síkban, és tegyük fel, hogy az átlagos áramlás a fallal párhuzamos. Ezért a függőleges átlagolt sebesség eltűnik, a fluktuációk viszont bármilyen irányúak lehetnek, tehát mind u', mind v', mind w' lényeges. Ugyanakkor

viszont a vízszintes $\overline{u}(z)$ átlagsebesség növekszik a faltól távolodva (azaz z növekedésével). Ha egy folyadékelem felfelé mozdul el, a w' fluktuáció pozitív, akkor új helyén vízszintes sebessége az ottani átlagsebességnél kisebb lesz, súrlódás révén fékezi a folyadékot, és így általában negatív előjelű u', v' fluktuációt hoz létre, ahogy a 7.1. ábra mutatja. Hasonlóan, ha lefelé mozdul el, vagyis $w' < 0$, akkor a környező folyadékot gyorsítja, és ott pozitív u', v' fluktuáció alakul ki. A fluktuációk $w'u'$ és $w'v'$ szorzata negatív. Átlagosan tehát a függőleges és a vízszintes irányú sebességfluktuációk *antikorreláltak* a határrétegben, azaz korrelációjuk negatív:

$$\overline{w'u'} < 0, \qquad \overline{w'v'} < 0. \tag{7.20}$$

A (7.16) Reynolds-feszültség tehát pozitív, a turbulencia növeli a feszültséget, a viszkozitást.



7.1. ábra. A sebességfluktuációk korrelációja negatív a határrétegben. Az $\overline{u}(z)$ átlagos sebességprofil mellett az x irányban áramló közegben a $w' > 0$ függőleges sebességfluktuáció okozta elmozdulás után a folyadékelem a helyi átlagsebességnél lassabban mozog, a környező folyadékot lassítja, és $u' < 0$.

Mivel az antikorreláció megszűnik, ha az $\overline{u}(z)$ átlagsebesség állandó, legegyszerűbb feltételezni, hogy a Reynolds-feszültségek arányosak a megfelelő átlagsebesség függőleges deriváltjával:

$$-\overline{w'u'} \sim \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}, \qquad -\overline{w'v'} \sim \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}. \tag{7.21}$$

Izotróp síklap esetén az arányossági tényező független attól, hogy melyik komponensről van szó, ezért az $\mathbf{u}$ vízszintes síkbeli sebességre, illetve fluktuációira nézve általánosan írható, hogy

$$-\overline{w'\mathbf{u}'} = \nu_{turb} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial z}, \tag{7.22}$$

ahol a $\nu_{turb} > 0$ arányossági tényező az ún. turbulens viszkozitás (angolul eddy viscosity). A tapasztalat szerint a Reynolds-feszültség ezen kifejezése jó első közelítés. A (7.22) turbulens viszkozitási közelítéssel a korrelációkat visszavezettük az átlagsebességek deriváltjaira, és ezzel a határrétegbeli átlagolt Navier–Stokes-egyenletet lezártuk.

A turbulens viszkozitás *független* a ν molekuláris viszkozitástól. A ν_{turb} mennyiséget az egész áramlás határozza meg, a határrétegben azonban függhet pl. a z magasságtól. Tipikus értéke mindig több nagyságrenddel meghaladja a ν molekuláris viszkozitását. A légkörben $\nu_{turb} \approx 5\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, az óceánban pedig $\nu_{turb} \approx 10^{-2}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ (a 10^{-5}, illetve 10^{-6} nagyságrendű molekuláris értékekkel szemben (7.1. táblázat).

A teljes viszkozitással kapcsolatos gyorsulás sekély folyadékban ezért

$$(\nu + \nu_{turb}) \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{u}}}{\partial z^2} \approx \nu_{turb} \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{u}}}{\partial z^2} \tag{7.23}$$

alakú. Ez annak felel meg, hogy az eredeti egyenletben a $\nu \to \nu_{turb}$ helyettesítést hajtjuk végre,

ahogyan azt az Ekman-határréteg tárgyalásakor tettük a 4.1. fejezetben. Ezután az átlagolás jele elhagyható a térmennyiségekben.

Alulról melegített közegben, amelyben a hőmérséklet felfelé csökken, a fluktuáció miatt kialakuló $w' > 0$ feláramlás a folyadékot hidegebb környezetbe juttatja, amelyet ezért felmelegít: $T' > 0$. A $\overline{w'T'}$ korreláció ilyenkor pozitív. Mivel $\partial\overline{T}/\partial z$ negatív, általánosan is írhatjuk (7.22) szellemében, hogy

$$-\overline{w'T'} = \kappa_{turb}\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}, \tag{7.24}$$

ahol $\kappa_{turb} \gg \kappa$ a *turbulens hődiffúziós együttható*.

Hasonlóan, egy adott anyag, pl. az S sótartalom szempontjából inhomogén közegben fennáll, hogy

$$-\overline{w'S'} = D_{turb}\frac{\partial\overline{S}}{\partial z}, \tag{7.25}$$

ahol $D_{turb} \gg D$ a *turbulens diffúziós együttható*.

Mivel a turbulens transzport nem az anyagi állandóktól függ, hanem magától az áramlástól, a transzportegyütthatók *azonos nagyságrendűek*. Sokszor jó közelítéssel igaz, hogy $\nu_{turb} = \kappa_{turb} = D_{turb}$. Szemléletesen fogalmazva, a turbulens transzportfolyamatokat örvények jelenléte okozza, és azok ugyanolyan keveredést biztosítanak bármelyik továbbított mennyiségre.

7.3. Logaritmikus sebességprofil

Megvizsgáljuk, hogy egy vízszintes fal közvetlen közelében zajló turbulens áramlásra milyen átlagos sebességeloszlás jellemző. Feltesszük, hogy a turbulencia a fal mentén eltolásinvariáns (homogén), és ebben a síkban izotróp, a közeg sűrűsége állandó. Vízszintes síkban történő átlagos áramlást vizsgálunk, amelyben az áramlási sebesség $\overline{u}$ nagysága csak a z magasságtól függ. A falhoz elegendően közel, az úgynevezett fal menti rétegben, ahol a z magasság sokkal kisebb a határréteg (a planetáris határréteg vagy az óceáni keveredési réteg, illetve jelentős Coriolis-hatás esetén az Ekman-réteg) vastagságánál, a $\overline{u}$ sebességről feltehető, hogy nem függ a határréteg felső peremén érvényes sebességtől. Az $\overline{u}(z)$ sebességprofil vagy z szerinti deriváltja ekkor csak a z koordinátától, a ν kinematikai viszkozitástól, a ϱ_0 sűrűségtől és a fal felszínén ható τ_0 nyírástól függhet. Mivel a tömeg mértékegységét csak ϱ_0 és τ_0 tartalmazza, ezért ez a két mennyiség csak a τ_0/ϱ_0 hányados formájában fordulhat elő. E hányados négyzetgyöke sebesség mértékegységű, az

$$\boxed{u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho_0}}} \tag{7.26}$$

mennyiség az ún. *súrlódási sebesség*. A $\tau_0 = 0{,}1\ \mathrm{N/m^2}$ tipikus szélnyírási erősségből a levegőben $u^* = 30$ cm/s, az óceánban pedig $u^* = 1$ cm/s a súrlódási sebesség.

A súrlódási sebesség kapcsán érdemes említeni, hogy a turbulens Ekman-réteg D vastagságát is a súrlódási sebességgel természetes kifejezni. Dimenziós megfontolás alapján u^*/f_0 távolság mértékegységű. A tapasztalat szerint a D vastagság jó közelítéssel

$$\boxed{D \approx 0{,}4\frac{u^*}{|f_0|}.} \tag{7.27}$$

Ellenőrizhető, hogy az $u^* = 30$ cm/s, $u^* = 1$ cm/s értékkel a fenti D valóan az eddig becsült légköri és óceáni értékeket adja, de most nincs szükség a turbulens viszkozitás használatára.

Az alsó peremhez közel a forgás nem lényeges, az $\overline{u}$ átlagsebesség magasság szerinti deriváltja tehát csak u^*, ν és z függvénye lehet:

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = f(u^*, \nu, z). \tag{7.28}$$

A fal egészen keskeny kis környezetén kívül a turbulens fluktuációk miatt a molekuláris viszkozitás *nem* játszik szerepet. Itt tehát a ν-függés nem léphet fel, a $d\overline{u}/dz$ derivált csak u^* és z függvénye lehet. Ezekből 1/idő-dimenziójú mennyiség csakis egyféleképpen képezhető, azaz

$$\frac{d\overline{u}}{dz} \sim \frac{u^*}{z}. \tag{7.29}$$

A dimenziótlan arányossági tényezőt az $1/K$ alakban szokás írni, ahol K a Kármán-féle konstans, amelynek értéke a mérések szerint $K = 0{,}41$. (Kármán Tódor (1881–1963) magyar származású mérnök, a turbulencia kutatója, a repüléstudomány meghatározó alakja, a logaritmikus profil egyik első leírója.) A fentiekből az átlagos sebesség magasságfüggése

$$\overline{u}(z) = \frac{u^*}{K} \ln z + \text{konstans}. \tag{7.30}$$

Ez a *logaritmikus sebességprofil* (7.2a. ábra), amely *univerzálisan* érvényes minden turbulens határréteg fal menti rétegében: nem forgatott műszaki problémáktól (pl. csőbeli áramlás) kezdve a környezeti áramlásokig. Ugyanakkor a fal közvetlen közelében ν lényeges, hiszen a peremfeltétel szerint ott $\nu\varrho_0 d\overline{u}/dz = \tau_0$, amelyből

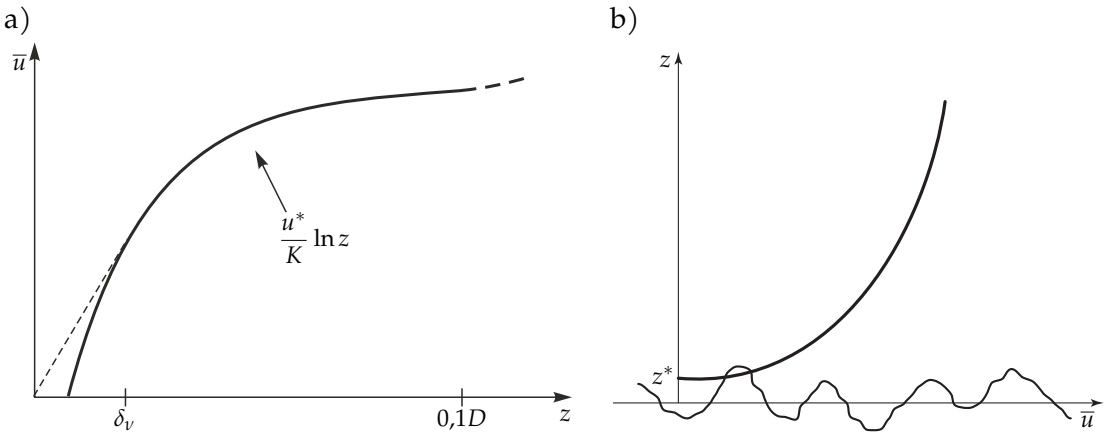
$$\overline{u}(z) = \frac{z\tau_0}{\nu\varrho_0}, \qquad \text{vagy} \qquad \frac{\overline{u}(z)}{u^*} = \frac{zu^*}{\nu}. \tag{7.31}$$

Ez egyben azt is mutatja, hogy a zu^*/ν kombináció dimenziótlan, egyfajta lokális Reynolds-szám, ν/u^* pedig egy hosszúságdimenziójú mennyiség. A fenti lineáris profil általában a $\delta_\nu \approx 5\nu/u^*$ távolságig érvényes. A fal menti rétegnek ez a falhoz igen közeli tartománya a *viszkózus alréteg*, δ_ν pedig az alréteg vastagsága. Ebből látszik, hogy az u^* súrlódási sebesség a viszkózus alréteg tetején érvényes sebességnek is tekintető. Az alréteg vastagsága mind a légkörben, mind az óceánban 1 mm alatti. Az alrétegen kívül a (7.30) logaritmikus sebességprofil érvényes, amely univerzális abban az értelemben, hogy sem a molekuláris paraméterektől, sem a határréteg felső peremén érvényes sebességtől nem függ. Ez a fal menti réteg a megfigyelések szerint a határréteg 10 százalékáig is kiterjedhet, a planetáris határrétegben akár 100 m magasságig. A fal menti rétegen kívül a sebességeloszlás már a határréteg feletti sebességtől is függ, és nem univerzális. A forgatott közegek határrétegében az Ekman-spirál elfordulása ott válik lényegessé, ahol a logaritmikus sebességprofil érvényét veszti.

A határréteget létrehozó fal nem mindig sima. Gyakran előfordul, hogy a felület kidudorodásai összemérhetők vagy nagyobbak a viszkózus alréteg vastagságánál. Jó példa erre a planetáris határréteg, amelyben az alsó falat pl. a domborzat vagy a vegetáció jelenti. A felületi szabálytalanságok mögött örvények keletkeznek, amelyek a viszkózus alréteget *lerombolják*. Durva felületek esetén ezért a (7.31) lineáris profil egyáltalán nem alakul ki, az áramlás még a fal közvetlen közelében sem függ az anyagi paraméterektől. Ilyenkor a logaritmikus sebességprofil a teljes fal menti rétegben érvényes. Az átlagos sebesség nyilván eltűnik valahol a felületi akadályok között. A (7.30)-ban fellépő konstans éppen azt adja meg, hogy ez milyen z^* magasságban történik. A *durva* felületekre vonatkozó logaritmikus sebességprofil tehát

$$\boxed{\overline{u}(z) = \frac{u^*}{K} \ln \frac{z}{z^*}, \qquad \text{ha} \qquad z \geq z^*.} \tag{7.32}$$

A z^* távolság a felület durvaságára jellemző ún. *érdességi magasság*. A (7.32) eloszlás a



7.2. ábra. a) A logaritmikus sebességprofil sima felület esetén: a vízszintes átlagsebesség $\overline{u}(z)$ nagyságának magasságfüggése a turbulens határrétegben. A δ_ν vastagságú viszkózus alrétegben a logaritmikus függés lineárisba vált át (szaggatott vonal). A fal menti rétegen kívül az univerzális logaritmikus alak érvényét veszti, amit a hosszú szaggatott görbe jelez. b) Durva felület (szabálytalan görbe) esetén viszkózus alréteg nem alakulhat ki. z^* az a magasság, ahol a tipikus sebesség eltűnik, értéke a felület érdességét jellemzi. A profil (7.32) alakú, itt a $z(\overline{u})$ függvényt ábrázoljuk.

határréteg-meteorológiában alapvető szerepet játszik. A légkör alsó, kb. 100 méteres rétegében nagy pontosságú mérések bizonyítják a (7.32) alak érvényességét, és lehetővé teszik a z^* érdességi magasság meghatározását. Ennek értéke alacsony bokrok esetén 20 cm, fűre kb. 1 cm, nyugvó vízfelszín felett pedig kb. 1 mm.

7.4. Turbulencia rétegzett közegekben

A közegek stabil rétegződése a függőleges irányú mozgásokat, és ezzel a turbulencia kialakulását is megnehezíti, hiszen ekkor a spontán hidrodinamikai mozgások közel vízszintes síkban zajlanak. A térbeli turbulencia kialakulásához függőleges keverés szükséges. Ehhez munkát kell végezni. A munka a gravitáció ellenében történik annak érdekében, hogy a sűrűbb folyadékot magasabb, a könnyebbet pedig alacsonyabb szintre juttassuk. A potenciális energia növeléséhez szükséges energia csakis a folyadék átlagos mozgási energiájából adódhat. Turbulencia ezért rétegzett közegben csak akkor alakulhat ki, ha az egymás feletti folyadékrétegek *különböző* vízszintes sebességgel mozognak, és ez a nyírás elegendően erős, amint azt a Kelvin–Helmholtz-instabilitás példáján (5.13. fejezet) is láttuk.

A pontos feltétel megtalálása érdekében tekintsünk két egymás feletti h vastagságú folyadékréteget, amelyek eltérő vízszintes sebességgel mozognak. Legyen az alsó réteg $\varrho_0 + \Delta\varrho$, a felső kissé hígabb, ϱ_0 sűrűségű. Válasszuk meg koordináta-rendszerünket úgy, hogy a felső réteg $\Delta U/2$, az alsó $-\Delta U/2$ sebességgel mozogjon. Ha a két réteg teljesen elkeveredik, akkor az átlagsebesség nulla lesz, az átlagsűrűség pedig $\varrho_0 + \Delta\varrho/2$. Az egységnyi vízszintes felület feletti $h(2\varrho_0 + \Delta\varrho)$ tömeg súlypontja h magasságban van, amely $gh^2(2\varrho_0 + \Delta\varrho)$ potenciális energiának felel meg. A kezdeti potenciális energia a $h(\varrho_0 + \Delta\varrho)$ tömeg $h/2$, illetve a $h\varrho_0$ tömeg $3h/2$ magasságban levő súlypontjai miatt $gh^2(2\varrho_0 + \Delta\varrho/2)$. A potenciális energia tehát a keveredés miatt növekedett, méghozzá a $gh^2\Delta\varrho/2$ értékkel. Ugyanakkor a kezdeti $(\varrho_0 + \Delta\varrho)h(\Delta U)^2/8 + \varrho_0 h(\Delta U)^2/8$ kinetikus energia zérusra csökkent. A mozgási energia változása a sűrűségkülönbség kicsinysége miatt jó közelítéssel $\varrho_0 h(\Delta U)^2/4$. A folyamat csak akkor

lehetséges, ha a kinetikus energia változása fedezni tudja a helyzeti energiát, vagyis ha

$$(\Delta U)^2 > 2h\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0}g. \tag{7.33}$$

A rétegzett állapot stabil, megbontása csak energiabefektetéssel lehetséges. A teljes homogenizálásra vezető turbulens keveredés a $2h$ vastagságú rétegben tehát akkor történhet, ha a h függőleges távolságra eső vízszintes sebességkülönbség négyzete meghaladja a jobb oldali értéket. Erősebb rétegződést csak erősebb nyírás képes turbulenssé tenni.

Elegendően kis rétegvastagságok esetén $\Delta U/h$ az $\overline{u}(z)$ átlagsebesség, $\Delta\varrho_0/h$ pedig a $\overline{\varrho}(z)$ sűrűség magasság szerinti deriváltját adja. A (7.33) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2 > 2\left(-\frac{d\overline{\varrho}}{dz}\frac{g}{\varrho_0}\right) = 2N^2, \tag{7.34}$$

ahol N az (5.6) Brunt–Väisälä-frekvencia. A turbulencia feltétele tehát a fentiek szerint megfogalmazható a (7.3) Richardson-szám segítségével. A Richardson-szám tehát

$$Ri = \frac{\text{átlagos helyzeti energianövekmény}}{\text{átlagos mozgási energiaveszteség}}. \tag{7.35}$$

A turbulencia rétegzett közegben akkor alakul ki, ha az Ri Richardson-szám kisebb egy Ri_c kritikus értéknél,

$$Ri < Ri_c, \tag{7.36}$$

ahol Ri_c egységnyi nagyságrendű szám (becslésünkben $1/2$.) Ekkor válik a nyírás elég erőssé ahhoz, hogy felbontsa a rétegzettség stabilitását.

Noha a Brunt–Väisälä-frekvencia definíció szerint valós, a hőmérsékletprofillal formálisan kifejezve $N^2 = \alpha g d\overline{T}/dz$, és ezzel

$$Ri = \frac{\alpha g d\overline{T}/dz}{(d\overline{u}/dz)^2}. \tag{7.37}$$

Felfelé csökkenő hőmérséklet esetén Ri negatív (N formálisan imaginárius). A negatív érték arra utal, hogy a rétegzettség instabil, és a termikus konvekció lényeges szerepet játszik, aminek esetleg szabályos áramlását a nyírás lerontja. Ekkor nincs szükség kritikus érték keresésére, Ri negatív előjele eleve turbulenciára utal.

Egy H vastagságú rétegzett közegben, amelyre ΔU sebességkülönbség jellemző, a Richardson-szám (7.33) alapján becsülhető a

$$Ri_0 \equiv \frac{g'H}{(\Delta U)^2} \tag{7.38}$$

globális Richardson-számmal is, ahol $g' = g\Delta\varrho/\varrho_0$ a redukált gravitációs gyorsulás. Ez a szám a sebességkülönbséggel képzett belső Froude-szám négyzetének a reciproka. A globális Richardson-szám értéke mind az óceáni keveredési rétegben, mind a planetáris határrétegben lehet 1 körüli. E rétegek általános állapota tehát közel van ahhoz, hogy háromdimenziós turbulencia kialakulhasson bennük.

Megjegyezzük, hogy a $Ri_0 \approx 1$ feltételből a turbulens kevert réteg vastagságára ΔU nyírási sebesség esetén

$$H \approx \frac{(\Delta U)^2}{g'} \tag{7.39}$$

adódik. Ez összhangban van a Kelvin–Helmholtz-instabilitás esetében kapott (5.99) becsléssel.

A rétegzettség hatására a fal menti rétegben a (7.32) logaritmikus profil módosul, ahogy a 14.2. fejezet bemutatja. A teljes határrétegben turbulens homogenizálódás történik, amelynek időbeli alakulását a 14.3. fejezet tárgyalja.

7.5. Teljesen kifejlett (homogén, izotróp) turbulencia

A falaktól, akadályoktól, hőforrásoktól távol a $Re \gg 1$ vagy $Ra \gg 1$ esetben az elegendően hosszú idő után kialakuló turbulens fluktuációk a *helytől és az iránytól is függetlenek*, a turbulencia homogén és izotróp. Ekkor a domináló jelenség az örvények egymásba alakulása. Jellegzetes kisskálájú, és ezért inhomogén turbulens jelenségekről a 14.1. fejezetben olvashatunk.

Az, hogy a véletlen fluktuációk időtől függetlenné válnak, arra utal, hogy a teljesen kifejlett turbulencia az – óhatatlanul viszkózus – folyadékmozgás egyfajta komplex *kaotikus attraktora*. Ekkor az összes nemdiagonális Reynolds-feszültség és az átlagos turbulens hőáram is zérus: $\overline{v_i' v_j'} = 0$, ha $i \neq j$, és $\overline{v_i' T'} = 0$ minden i-re. A sebesség $\mathbf{v}'$ turbulens fluktuációit a $\overline{\mathbf{v}'^2} = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$ szórásnégyzet jellemzi. Ezt célszerű felbontani a különböző $\mathbf{k}$ hullámszámokból adódó járulékokra, és azt írni, hogy

$$\overline{\mathbf{v}'^2} = \int E(k) dk. \tag{7.40}$$

Mivel $\mathbf{v}'^2$ a fluktuációk mozgási energiájával arányos, az $E(k)$ mennyiség neve *energiaspektrum*. A turbulencia izotróp mivolta abban tükröződik, hogy az E mennyiség nem függ a hullámszámvektor irányától: az energiaspektrum csak a hullámszám k abszolútértékének függvénye. Az $E(k)\Delta k$ mennyiség jelenti a k és $k + \Delta k$ hullámszámtartományba eső perturbációk átlagos energiáját. Az $E(k)$ mennyiség az $l \sim 1/k$ méretű örvények egységnyi hullámszámra eső átlagos kinetikus energiájának is tekinthető. Ha a peremek közötti teljes vizsgált tartomány lineáris mérete L, izotróp viselkedés az $l \ll L$ méretű örvényekre várható, vagyis a $k \gg 1/L$ tartományban.

Az energiaspektrum központi szerepet játszik a teljesen kifejlett turbulencia jellemzésében. A kutatások arra utalnak, hogy általános alakja *hatványfüggvény*:

$$\boxed{E(k) \sim k^{-\mu},} \tag{7.41}$$

ahol μ pozitív szám. Az energiaeloszlás tehát *csökkenő*, a nagyobb k-jú, azaz kisebb méretű örvények kevesebb energiát hordoznak. Egy termodinamikai egyensúlyban lévő rendszerben (pl. ideális gázban) a mozgási energia az impulzus négyzetével arányos, ezért hullámképben a k-hoz tartozó energia k^2-tel arányos, így az $E(k)$ energiaspektrum a hullámszámnak mindenképpen pozitív hatványa. A kapott negatív kitevő azt mutatja, hogy a turbulens áramlás a termikus egyensúlytól igen távol esik. Az energiaspektrum (7.41) alakját A. N. Kolmogorov (1903–1987) orosz matematikus javasolta 1941-ben, ő alakította ki ezzel kapcsolatban az energiakaszkád fogalmát, és a következőben bemutatott gondolatmenet lényegét is ő fogalmazta meg. A kitevő konkrét értéke és a hatványalak érvényességi tartománya függ a közeg dimenziójától, és attól is, hogy forgatott rendszerről van-e szó. Ezért, mielőtt az energiaspektrumot meghatároznánk, felsorolunk néhány olyan tulajdonságot, amely mindenfajta homogén és izotróp turbulens rendszerre érvényes.

A tapasztalat szerint a kifejlett turbulenciára az jellemző, hogy:

- Örvények egymásra épülő rendszere, *hierarchiája*, a probléma térben és időben sokskálájú. Az örvények nemlineáris kölcsönhatásuk miatt idővel instabillá válnak, felbomlanak, de helyükön újak képződnek. Egy örvényt követve a folyamat *véletlenszerű*.

- Az *energiabetáplálás nagy skálán* történik, és valamilyen $l_0 \sim 1/k_0$ méretű örvényeket hoz létre (k_0 az ilyen örvények hullámszáma). Ha pl. a turbulenciát rács kelti, akkor l_0 a rácstávolság. Általában l_0 összemérhető a teljes L lineáris mérettel, de annál néhány nagyságrenddel kisebb is lehet. A betáplált energia a viszkozitás miatt disszipálódik, és ezért

bizonyos idő után beáll egy stacionárius állapot, azaz a fluktuáló mennyiségek statisztikai jellemzői, pl. szórásai időfüggetlenné válnak.

- Az $l \sim 1/k$ méretű örvény *karakterisztikus ideje* az örvény

$$\tau = l/v' \sim \frac{1}{kv'} \tag{7.42}$$

körülfordulási ideje. Itt v'^2 az örvény két széle közötti átlagos sebességkülönbség nagysága, azaz az $l \sim 1/k$ hullámhosszhoz tartozó sebességfluktuációk szórása.[1] A v' jellegzetes sebesség és τ idő tehát függ az l mérettől.

- A viszkozitásból adódó disszipatív *csillapítási idő*, a Navier–Stokes-egyenlet $\nu\Delta\mathbf{v}$ tagjából adódóan tetszőleges l méretű örvényre becsülhető mint

$$\tau_d = \frac{1}{\nu k^2} \sim \frac{l^2}{\nu}. \tag{7.43}$$

A kétfajta jellegzetes idő hányadosa

$$\frac{\tau_d}{\tau} = \frac{lv'}{\nu} \tag{7.44}$$

az l méretű örvény Reynolds-száma a v' sebességfluktuációval képezve. A turbulens folyamat Re_0 Reynolds-számát az energiabetáplálásra jellemző l_0 lineáris mérettel definiáljuk, azaz

$$Re_0 = \frac{l_0 v'_0}{\nu}, \tag{7.45}$$

ahol v'_0 az l_0 hullámhosszhoz tartozó sebességfluktuáció. Mivel ez a „betáplálási" Reynolds-szám mindig nagy, sok olyan örvény létezik, amelyek ugyan kisebb méretűek, de Reynolds-számuk nagy: $\tau_d \gg \tau$.

- Az l_d *disszipációs hossz* az a távolság, ahol a körülfordulási idő és a csillapítási idő azonossá válik:

$$l_d = \frac{\nu}{v'}. \tag{7.46}$$

Az ehhez a távolsághoz tartozó Reynolds-szám egységnyi. Ez a hossz tekinthető a legkisebb örvények méretének. Ezekben a tipikus sebességeltérés l_d ismeretében a $v' \equiv v'_d = \nu/l_d$ kifejezéssel becsülhető. Ezen a skálán igaz, hogy a $\nu v'_d/l_d^2$ viszkózus gyorsulás összemérhető a ${v'_d}^2/l_d$ nagyságrendű advektív gyorsulással. A molekuláris viszkozitás tehát csak az l_d skálán (vagyis a $k_d \sim 1/l_d$ disszipációs hullámszámnál) válik lényegessé. Ennél kisebb távolságokon a mozgási energia hővé alakul, az áramlás lamináris, örvények nincsenek jelen.

- A $l_0 < l < l_d$ tartomány belsejében ezért létezik az l örvényméretek egy széles tartománya, amelyben az örvények karakterisztikus ideje sokkal kisebb a disszipációs időnél, nincs idejük észrevenni a viszkozitás hatását. A folyadék gyakorlatilag *súrlódásmentesnek* tekinthető. Az ilyen örvényekre az Euler-egyenlet érvényes, és ennek megfelelően a rendszer energiája *megmarad*. Az l méretű örvények energiája ezért egyszerűen átadódik a más méretű örvényekre. Ennek jellegzetes ideje is a τ körülfordulási idő. Ebben a tartományban a

[1] A 7.1., 7.2. fejezetekkel szemben itt a vesszős jelölés nem a fluktuáló mennyiséget, hanem annak tipikus értékét jelöli.

mozgási energia különböző méretű örvényeken veszteség nélkül folyik át. Ez a jelenség az *energiakaszkád*, az a hullámszámtartomány pedig, amelyben érvényes, az ún. *tehetetlenségi tartomány*.

A felsorolt tulajdonságok, elsősorban az energiakaszkád jelensége központi fontosságú a turbulencia megértésében. Az $E(k)$ energiaspektrum konkrét alakja a tér dimenziójára jellemző vonások beépítése után a fentiekből adódik.

Előbb említjük, hogy az eddigiek alapján lehetőség nyílik arra, hogy a turbulens transzportegyütthatók és a molekuláris paraméterek viszonyát új megvilágításban vizsgáljuk. A turbulens viszkozitás, hődiffúzió és diffúzió az impulzus, energia, illetve tömeg transzportja. Mindegyik mennyiséget a betáplálási skála örvényei osztják szét, és az együtthatók tekinthetők az időegységre eső négyzetes elmozdulás nagyságának (mindegyik együttható mértékegysége m^2/s). A betáplálási örvények tipikus l_0 méretével és τ_0 karakterisztikus idejével a transzportegyütthatók becsülhetők mint l_0^2/τ_0. A $\tau_0 = l_0/v_0'$ összefüggés, (7.42) alapján írhatjuk, hogy

$$\nu_{turb} \approx \kappa_{turb} \approx D_{turb} \sim v_0' l_0. \tag{7.47}$$

Ebből látszik, hogy a turbulens együtthatók *nem* anyagi állandók, kizárólag az áramlásra, a turbulencia jellegére utalnak, más áramlásban más értéket vehetnek fel. Ha azt kívánjuk megbecsülni, hányszorosai a molekuláris paramétereknek, akkor (7.47) jobb oldalát ezekkel érdemes bővíteni. Így kapjuk, hogy

$$\nu_{turb} \sim Re_0 \nu, \qquad \kappa_{turb} \sim Re_0 Pr \kappa, \qquad D_{turb} \sim Pe_0 D. \tag{7.48}$$

Itt Pr az (5.140) Prandtl-szám, Pe_0 pedig a betáplálási örvényadatokkal képzett (7.4) Péclet-szám. Mivel Re_0 és Pe_0 nagy, ismét azt látjuk, hogy a turbulens együtthatók jóval nagyobbak a molekulárisoknál.

7.5.1. Háromdimenziós turbulencia

A hétköznapi tapasztalat, pl. a csapból gyorsan kiömlő víz megfigyelése is azt sugallja, hogy a térbeli turbulens áramlásokban nagy örvények *kisebbekre* bomlanak (7.3. ábra), amely természetes közegeinkben a planetáris határrétegben és az óceáni keveredési rétegben fordul elő leggyakrabban.



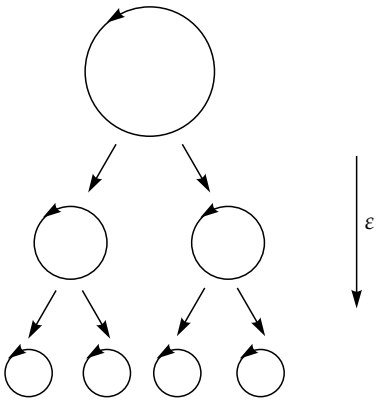
Ebben a kísérletben koncentrált függőleges áramlás, jet érkezik felülről egy rétegzett közegre, és jól látszik, hogy a jet elejének jellegzetes frontvonala kisebb örvényekre bomlik.

A pontosabb vizsgálat is alátámasztja, hogy az energia a *nagy örvényekből a kisebbek felé áramlik*. Ebben az ún. *direkt* energiakaszkádban az energia a kis hullámszámoktól a nagyok felé halad. Mivel azonban a teljes energia megmarad, az időegység alatt átadott energiának, az ún. *energiafluxusnak* állandónak kell lennie, legalábbis a disszipációs hullámszám $k_d \sim 1/l_d$ eléréséig.

Az összenyomhatatlanság miatt tekinthetjük az egységnyi tömegre eső mozgási energia fluxusát, mert az is állandó. Jelölje ε ezt a fajlagos energiafluxust, amelynek mértékegysége $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3$. Ha az energiabetáplálás a k_0 hullámszámon történik, akkor az annál nagyobb hullámszámokra a turbulencia már homogénnek és izotrópnak tekinthető. A tehetetlenségi tartomány tehát

$$k_0 < k < k_d. \tag{7.49}$$

Mivel egy l méretű örvény $\mathbf{v}'$ háromdimenziós sebességfluktuációiból adódó tipikus v'^2



7.3. ábra. A direkt energiakaszkád. A háromdimenziós turbulenciában a nagy örvények egyre kisebbekre esnek szét. A rajtuk átfolyó ε energiafluxus az l_d disszipációs hossznak megfelelő legkisebb örvényméret eléréséig állandó. Az ábra adott előjelű örvényeket mutat, az ellenkező forgásúak természetesen hasonlóan bomlanak.

energiáját a τ_l körülfordulási idő néhányszorosa alatt adja le, az ε energiafluxus becsülhető mint

$$\varepsilon \sim \frac{v'^2}{l/v'} = \frac{v'^3}{l}. \tag{7.50}$$

A tehetetlenségi tartományban ε állandó, ezért az l méretű örvények sebessége és kiterjedése a

$$v' \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3} \sim (\varepsilon/k)^{1/3} \tag{7.51}$$

kapcsolatban van egymással. A karakterisztikus sebesség a méret köbgyökével arányos, nem lineárisan, ahogy naivan várhatnánk. A disszipációs hosszt definiáló (7.46) összefüggésbe ezt behelyettesítve $l_d \sim \nu/(\varepsilon l_d)^{1/3}$, és innét

$$\boxed{l_d \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}}. \tag{7.52}$$

Ez a *Kolmogorov-hossz*. Laboratóriumi körülmények között ε értéke 100 $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3$, és ezzel a disszipációs hossz mind vízben, mind levegőben 0,01 mm körüli. A légkörben és az óceánban az energiafluxus kisebb (az időskálák nagyobbak), $\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-4}$ $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3$, amelyhez mm nagyságrendű mikroskála tartozik. Azt látjuk tehát, hogy a disszipáció nagyon kis, de még makroszkopikus távolságokon válik csak lényegessé! Mivel a gerjesztés lineáris mérete legalább 1 m (a környezeti viszonylatban több km is lehet), a (7.49) tehetetlenségi tartomány sok nagyságrendet foglal magába.

Az örvények kinetikus energiája (7.51) szerint $v'^2 \sim (\varepsilon/k)^{2/3}$, az egységnyi hullámszámra eső energia pedig v'^2/k nagyságrendű. Ennek megfelelően a (7.41) képlettel definiált energiaspektrum

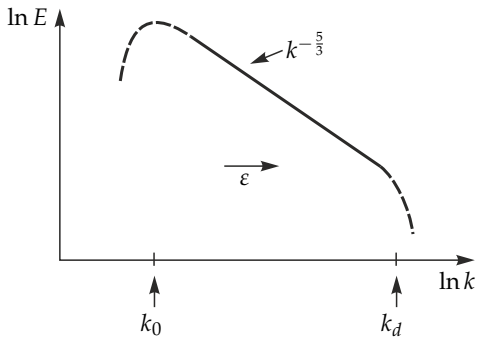
$$\boxed{E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}}. \tag{7.53}$$

Ez a híres *Kolmogorov-spektrum* (7.4. ábra), amely a $\mu = 5/3$ kitevőt adja. Nagyobb örvények nagyobb energiát hordoznak, de ez nemtriviális módon csökken a mérettel.

A Kolmogorov-spektrumot nagyszámú mérés igazolja. Különböző irányokból érkező örvénygyűrűk ütköztetésével rács nélkül is homogén izotróp turbulencia hozható létre, ahogy ez a – segítő animációkkal kiegészített – kísérlet mutatja.



Az energiaspektrum a k_0 betáplálási hullámszám környékén természetesen eltér a fenti hatványalaktól, hiszen ott a turbulencia nem homogén és izotróp. Ugyanígy eltér a $k_d \sim 1/l_d$ hullámszámnál nagyobb hullámszámú (az l_d Kolmogorov-hossznál kisebb hullámhosszú) tartományban, ahol a disszipáció miatt az energiafluxus már nem állandó.



7.4. ábra. A háromdimenziós turbulencia energiaspektruma. k_0 és $k_d \sim \left(\varepsilon/\nu^3\right)^{1/4}$ az energiabetáplálási és a disszipációs hullámszám. A $k^{-5/3}$ hatványviselkedés a $k_0 < k < k_d$ tehetetlenségi tartományban érvényes.

A tehetetlenségi tartomány hosszát az l_0/l_d hányados jellemzi. A betáplálási Reynolds-szám (7.45) értékét, az energiafluxus l_0-ig kiterjeszett (7.50) kifejezését és a Kolmogorov-hossz (7.52) alakját használva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{l_0}{l_d} \sim Re_0^{3/4}. \tag{7.54}$$

A tehetetlenségi tartomány tehát az $Re_0 \gg 1$ esetben igen széles. A disszipációs hossznál kisebb skálán az áramlás egyszerű, ezért az ilyen kis távolságon néhány adat is elég a sebességtér jellemzéséhez. A tehetetlenségi tartományban azonban minden örvény meghatározása újabb adatokat igényel. Ezért három dimenzióban $(l_0/l_d)^3$-nal arányosként becsülhető a turbulencia leírásához szükséges változók száma. A turbulens viselkedés tehát az

$$Re_0^{9/4} \tag{7.55}$$

mennyiséggel arányos számú közönséges differenciálegyenlettel írható le. A (7.55) számot szokás a kifejlett háromdimenziós turbulencia szabadsági fokainak tekinteni. (Ezek makroszkopikus értelemben vett szabadsági fokok, hiszen nincs közük a folyadékot alkotó molekulákhoz.)

Az örvények körülfordulási ideje tekinthető az adott méretű objektumok *előrejelzési* idejének is, hiszen néhány körülfordulás után az örvény átadja energiáját más örvényeknek, és megszűnik. A fentiekből az l hullámhosszhoz tartozó előrejelzési idő

$$\tau \sim l/v' \sim \varepsilon^{-1/3} l^{2/3}. \tag{7.56}$$

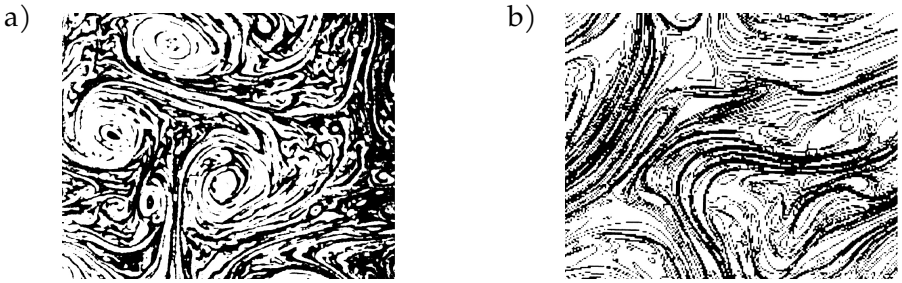
A nagyobb objektumok hosszabb ideig jelezhetők előre. A légköri $\varepsilon = 10^{-3}\ \mathrm{m^2/s^3}$-nel számolva $l = 1$ m-re az előrejelzési idő kb. 10 s, a felhők méretére vagy planetáris határréteg vastagságára jellemző 1 km-es skálán pedig 1000 s adódik. A határrétegbeli hosszútávú pontos előrejelzése tehát reménytelen. A laboratóriumi érték $\varepsilon = 100\ \mathrm{m^2/s^3}$-bel sokkal rövidebb: az 1 m-es skálán 0,2 s. A rövid előrejelzési idők miatt a turbulencia tekinthető magas dimenziós *káosznak* is, amelynek hosszútávú előrejelzése elvileg is csak valószínűségi értelemben lehetséges.

7.5.2. Kétdimenziós turbulencia

A kétdimenziós áramlásokban (vékony folyadékhártyában vagy egy irányban eltolásinvariáns áramlásokban) fellépő turbulencia alapvetően különbözik a háromdimenzióstól. Természetes közegeink áramlása a határrétegeken kívül jó közelítéssel kétdimenziós, ezért ezekben a tartományokban a szabálytalan folyadékmozgás a kétdimenziós turbulencia, nagyobb skálán a geosztrofikus turbulencia jellegzetességeit mutatja. Az időjárási helyzetet mutató műholdfelvételek ilyen típusú turbulenciát tükröznek.

A kétdimenziós turbulencia jellegzetességei megfigyelhetők függőleges síkban kifeszített szappanhártyákban. Az áramlásba helyezett akadállyal vagy kis méretű tárgy szabálytalan mozgatásával nagy méretű örvények alakulnak ki a kísérletben. Állandó relatív sebesség esetén megjelenik a *Kármán-féle örvénysor*, amelynek során ellenkező előjelű örvények válnak le az akadályról.[2]

A forgókádas kísérletekben eddig is látott szabálytalan mintázatok mind kétdimenziós turbulencia következményei. Szögletes edényben az egyenletes forgatásra rászuperponált lassú szinuszos lüktetés következében az edény sarkaiban állandóan kis örvények keletkeznek, és ezek biztosítják, hogy a turbulencia ne haljon el, mint ebben a kísérletben.



7.5. ábra. Kétdimenziós turbulencia jellegzetes tartományai. a) Nagy örvények b) Az örvények közötti szálas, nyírási mintázat (P. Tabeling (2002) alapján)

Minden esetben megfigyelhető a nagy örvények kialakulása, illetve a közöttük húzódó nyírási tartomány, amely szálas szerkezettel jár (7.5. ábra). A háromdimenziós esettől való eltérés egyik fontos oka, hogy két dimenzióban a mozgási energia mellett léteznek más megmaradó mennyiségek is: az $\mathbf{u}$ síkbeli sebességvektor $\zeta \equiv \mathrm{rot}_z\, \mathbf{u}$ örvényessége ideális folyadékban a mozgás során *megmarad*. Ez következik a korábban vizsgált (2.24) potenciális örvényesség megmaradásának forgatásmentes ($\Omega = 0$) és állandó mélységű ($h = H$) határesetéből is. ζ előjeles mennyiség, ezért érdemes annak négyzetét, az *ensztrófiának* nevezett ζ^2 négyzetes örvényességet tekinteni, amely szintén megmarad. Az új megmaradás miatt a folyadék számára mintegy kevesebb lehetőség marad, mozgása korlátozottabb. A kétdimenziós turbulencia ezért „szelídebb", mint a háromdimenziós. Ez természetesen nem mond ellent annak, hogy a kétdimenziós turbulencia is erősen véletlenszerű és előrejelezhetetlen nemlineáris jelenség.

Érdemes felidézni, hogy az örvényesség nem feltétlenül csak az örvények jellemzője. Az egyszerű lamináris nyírási áramlás, amelyben az egymás fölötti folyadékrétegek egyre gyorsabban mozognak, örvényes. Maguk a nagy örvények viszont nem hordoznak jelentős örvényességet, gondoljunk például a pontörvényekre, amelyek a centrumon kívül teljesen örvénymentesek. A 7.5a. ábra örvénydominált, tehát nagy mozgási energiát hordozó turbulens tartományt mutat, a b) pedig jelentős nyírásút, amelyben az örvényesség, illetve annak négyzete, az ensztrófia nagy.

[2] Ha az örvénysor felhőképekben rajzolódik ki, az a szél kétdimenziós jellegére utal.

Az ensztrófia megmaradásából következik, hogy a ζ' örvényességfluktuációkból alkotott $\overline{\zeta'^2}$ mennyiség, azaz a fluktuációkból adódó ensztrófia is megmarad ideális folyadékban. A mozgási energia spektrumához hasonlóan definiálható egy $Z(k)$ *ensztrófiaspektrum* a

$$\overline{\zeta'^2} = \int Z(k)dk \tag{7.57}$$

összefüggéssel, ahol $Z(k)\Delta k$ jelenti a k és $k+\Delta k$ hullámszámtartományba eső perturbációk átlagos ensztrófiáját. Mivel az örvényesség a sebesség térbeli deriváltját tartalmazza, az ensztrófia $Z(k)$ spektruma és az $\mathbf{u}'$ sebességfluktuációkból[3] adódó u'^2 mozgási energia $E(k)$ spektruma között fennáll a $Z(k) \sim k^2 E(k)$ kapcsolat.

Annak illusztrálására, hogy a két mennyiség együttes megmaradása új helyzetet teremt, tételezzük fel, hogy a k_0 hullámszámnál betáplált energia két hullámszámtartományba, a $k_1 < k_0$ és a $k_2 > k_0$ hullámszámú örvények környékére tevődik át. Meg szeretnénk tudni, hogy melyik típusú örvény energiája és ensztrófiája nagyobb. A megmaradási feltételek (azonos Δk-kat választva):

$$\begin{aligned} E(k_0) &= E(k_1) + E(k_2), \\ Z(k_0) = k_0^2 E(k_0) &= k_1^2 E(k_1) + k_2^2 E(k_2) = Z(k_1) + Z(k_2). \end{aligned} \tag{7.58}$$

Ezekből

$$E(k_1) = \frac{k_2^2 - k_0^2}{k_0^2 - k_1^2} E(k_2), \tag{7.59}$$

$$Z(k_1) = \frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{k_2^2 - k_0^2}{k_0^2 - k_1^2} Z(k_2). \tag{7.60}$$

Ha például $k_1 = k_0/n$ és $k_2 = nk_0$ $(n \geq 2)$, akkor $E(k_1) = n^2 E(k_2)$ és $Z(k_1) = Z(k_2)/n^2$. Az energia tehát a *kisebb* hullámszámok felé, az ensztrófia pedig a *nagyobb* hullámszámok felé adódik át. A kétdimenziós turbulencia alapvető vonása, hogy az örvények nem kisebbekre szakadnak, az energia ezért nem az egyre kisebb örvények felé halad, hanem az örvények spontán módon *összeolvadnak*, és ezzel a nagy energiasűrűségű tartományok az egyre nagyobb skálák felé tolódnak, 7.6. ábra. Az örvényekben ugyanakkor enyhe a nyírás, a nagy örvények kevés ensztrófiát tartalmaznak. A nyírás az örvények peremén erős, ahol kevés a mozgási energia, és ezek a tartományok az örvények növekedése miatt egyre kisebbekké válnak, miközben ensztrófiájuk nő.

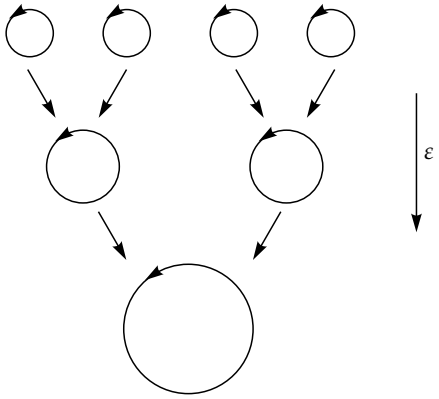
A kétdimenziós turbulenciában *két* tehetetlenségi tartomány alakul ki, az energiabetáplálási hullámszám két oldalán:

$$1/L < k < k_0, \qquad k_0 < k < k_d, \tag{7.61}$$

ahol L az áramlási tartomány maximális mérete. A kisebb hullámszámokhoz tartozóban történik az *inverz energiakaszkád*, amelynek során az energiafluxus állandó, de az energia most a nagyobb méretek irányába halad. A nagy hullámszámok tartományában az ensztrófia bomlik a közepes méretektől a kisebbek irányába, itt egy (direkt) *ensztrófiakaszkád* figyelhető meg.

Az inverz energiakaszkádhoz tartozó $E(k)$ spektrum ugyanazzal a gondolamenettel határozható meg, mint a háromdimenziós turbulenciában. Ezért (7.53) itt is érvényes, azaz az energiaspektrum kitevője $\mu = 5/3$ (7.7. ábra).

[3] A kétdimenziós sebességet eddigi jelölésünkkel összhangban **u**-val jelöljük.



7.6. ábra. Az inverz energiakaszkád. A kétdimenziós turbulenciában a kis örvények egyre nagyobbakká olvadnak össze. A rajtuk átfolyó ε energiafluxus állandó. Az ábra adott előjelű örvényeket mutat, az ellenkező forgásúak természetesen hasonlóan egyesülnek.

Az ensztrófiakaszkád során az ensztrófiaátadás állandó, legalábbis a disszipációs hossz eléréséig, ugyanakkor az energiafluxus elhanyagolható. Jelölje χ az *ensztrófiafluxust*, azaz az időegység alatt átadott ensztrófiát. Laboratóriumi kísérletekben $\chi = 0{,}1 - 1\ \mathrm{s}^{-3}$, a légkörben pedig $\chi = 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-3}$.

Mivel az örvényesség karakterisztikus értéke $u'/l \sim 1/\tau$, ahol u' a kétdimenziós sebességfluktuációk szórása az l hosszon, és az $(u'/l)^2 \sim 1/\tau^2$ ensztrófiatartalom a τ idő alatt átadódik, írhatjuk, hogy

$$\chi \sim \tau^{-3} \sim \frac{u'^3}{l^3}. \tag{7.62}$$

A tehetetlenségi tartományban a χ *ensztrófiafluxus* állandó, ezért az ensztrófiakaszkádban

$$u' \sim \chi^{1/3} l \sim \chi^{1/3} k^{-1}, \tag{7.63}$$

azaz a sebességfluktuáció most arányos a mérettel. Az energiaspektrum u'^2/k-val arányos, amelyből

$$\boxed{E(k) \sim \chi^{2/3} k^{-3}.} \tag{7.64}$$

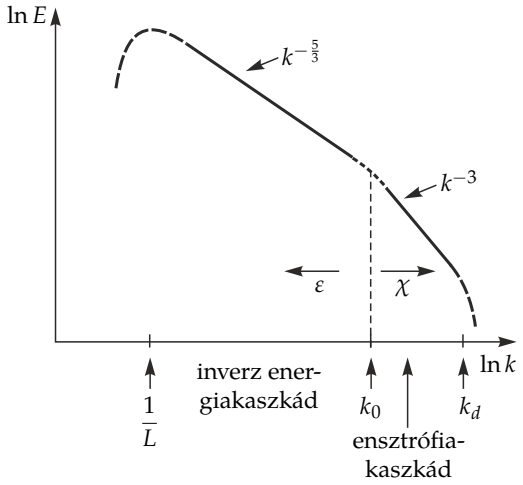
Az ensztrófiakaszkádhoz tartozó energiaspektrum jóval meredekebb, mint az inverz energiakaszkádban, kitevője $\mu = 3$. Ez az eredmény is jól egyezik a kísérleti tapasztalattal. A két kaszkád jelenlétének a felismerése, illetve a spektrumok meghatározása R. Fjortoft (1913–1998) norvég meteorológus, illetve R. H. Kraichnan (1928–2008) amerikai és G. K. Batchelor (1920–2000) ausztrál fizikus nevéhez fűződik, akik az elméletet az 50-es, 60-as években dolgozták ki.

Érdemes hangsúlyozni, hogy mindkét tehetetlenségi tartomány csak akkor létezik, ha az energiabetáplálás $l_0 \sim 1/k_0$ lineáris mérete (például a rácsállandó) jóval kisebb a teljes lineáris L hossznál, és ugyanakkor sokkal nagyobb az l_d disszipációs hossznál. Attól függően, hogy l_0 értéke mekkora, az egyik vagy másik spektrum elnyomódhat. Ha például l_0 közel esik a teljes L mérethez, akkor az inverz kaszkád nem alakul ki.

A (7.46) disszipációs hossz most is a körülfordulási idő és a disszipációs idő azonosságából adódik: $l_d = \nu/u'$, ahol u' az l_d-hez tartozó sebességfluktuáció, (7.63). Ebből $l_d \sim \nu/\left(\chi^{1/3} l_d\right)$, vagyis

$$l_d \sim \left(\frac{\nu^3}{\chi}\right)^{1/6}. \tag{7.65}$$

Az atmoszférában a disszipációs hossz kb. 1 m, a laboratóriumban pedig 1 mm.



7.7. ábra. A kétdimenziós turbulencia energiaspektruma. k_0 és $k_d \sim \left(\chi/\nu^3\right)^{1/6}$ az energiabetáplálási, illetve a disszipációs hullámszám. Az energiakaszkád $k^{-5/3}$ hatványviselkedése az $1/L < k < k_0$, az ensztrófiakaszkádot jellemző k^{-3} alak pedig a $k_0 < k < k_d$ tehetetlenségi tartományban érvényes.

Mivel az ensztrófiafluxus a betáplálási skála adataival a $\chi \sim {u_0'}^3/l_0^3$ összefüggésben van, az ensztrófiakaszkád tehetetlenségi tartományára

$$\frac{l_0}{l_d} \sim Re_0^{1/2}. \tag{7.66}$$

Az ensztrófiakaszkádban résztvevő szabadsági fokok számát $(l_0/l_d)^2$-vel becsülve az arányos az

$$Re_0 \tag{7.67}$$

Reynolds-számmal. Az enyhébb függés is arra utal, hogy a kétdimenziós turbulencia szelídebb, mint a háromdimenziós.

A (7.63) összefüggésből az l hullámhosszhoz tartozó $\tau = l/u'$ előrejelzési idő

$$\tau \sim \chi^{-1/3}, \tag{7.68}$$

amely most független az objektumok hosszától. A laboratóriumi előrejelzési idő 1 s körüli, a légkörire néhány nap adódik. A kétdimenziós turbulencia tehát jobban jósolható, mint a háromdimenziós.

7.5.3. Geosztrofikus turbulencia

A forgatott sekély rendszerek nagyskálájú áramlásait, és így turbulens viselkedésüket is a sekélyfolyadék egyenletek (illetve az ebből következő kvázi-geosztrofikus egyenlet) jó közelítéssel leírják. Az ilyen, geosztrofikusnak nevezett (de lokálisan időfüggő) turbulenciában a dinamika a kétdimenziós viselkedéssel rokon, mert a $q = H(\zeta + f)/h$ potenciális örvényesség megmaradó mennyiség. Turbulens esetben ennek q' fluktuációiból képezhető a $\overline{q'^2}$ potenciális ensztrófia, illetve annak $Z(k)$ spektruma. A második megmaradó mennyiség létezése ugyanazt a megkötést jelenti, mint a kétdimenziós turbulencia esetén. Ezért a geosztrofikus turbulenciában is kettős kaszkád lehet jelen: egy inverz energiakaszkád és egy direkt potenciális ensztrófiakaszkád, csak ebben χ a potenciális örvényesség ensztrófiafluxusa. A megfelelő spekrumok

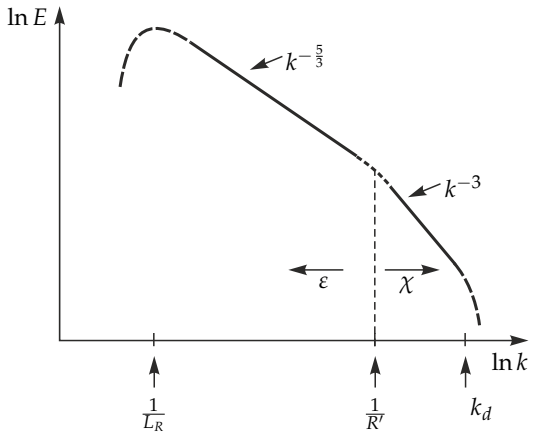
alakjai is ugyanazok: az elsőben $\mu = 5/3$ az exponens, a másodikban $\mu = 3$. A geosztrofikus turbulenciát a *baroklin instabilitás* gerjeszti. Mivel annak jellegzetes hullámhossza az R' belső Rossby-sugár, az energiabeviteli távolságskála most $l_0 \sim R'$, vagyis a hullámszám $k_0 \sim 1/R'$. Az ennél kisebb távolságokon az ensztrófiakaszkád zajlik, a nagyobb távolságokon viszont az örvények egyre nagyobbakká történő összeolvadása figyelhető meg. Az f-síkon az energiaspektrum az $1/L$ nagyságrendű hullámszámoknál kezdődik, és hasonló, mint a 7.7. ábrán látott, csak a k_0 helyett $1/R'$ jelenik meg.

A β-síkon azonban az örvények nem feltétlenül növekedhetnek a bolygó sugarának eléréséig, hanem a szélességi körök mentén megnyúlnak, és egy kritikus méret elérése után nagy amplitúdójú nemlineáris Rossby-hullámokba mennek át. Ez a méret az

$$\boxed{L_R = \sqrt{\frac{u'}{|\beta|}}} \tag{7.69}$$

Rhines-hossz (P. B. Rhines (1942-), amerikai oceanográfus), amelyben $u' \equiv \overline{\mathbf{u}'^2}^{1/2}$ a kétdimenziós sebességfluktuációk szórása.[4] Az L_R szerepét bemutató gondolatmenet a következő: Az l méretű örvény $k \sim 1/l$ hullámszámával kialakuló, $|\omega_0| = \beta/k$ frekvenciájú x irányban haladó, zárt felszínű Rossby-hullám periódusideje $T \sim 1/(l\beta)$. Amennyiben ez sokkal nagyobb az örvény $\tau \sim l/u'$ élettartamánál, akkor nincs idő Rossby-hullámok keltésére. Ha viszont $T < \tau$, $1/(l\beta) < l/u'$, akkor a nagy turbulens örvényekből Rossby-hullámok válnak le. Ennek feltétele $l > L_R$. Döntött aljú edénnyel végzett laboratóriumi kísérletben a β paraméter szerepét a γ topográfiai paraméter játssza, és a 3.7. fejezetben megbeszéltek szerint a (7.69) Rhines-hossz a β helyett $\gamma f_0/H$-val értékelendő ki.

A Rhines-hossz az örvények lehető legnagyobb mérete, és egyben a legkisebb hullámhossz, amellyel Rossby-hullámok megjelenhetnek. A turbulens energia tehát az L_R-nél nagyobb skálán hullámkeltésre fordítódik, azaz ott az energia kicsatolódik a turbulenciából. Az inverz kaszkád ezért az $1/L_R$ hullámszámnál *megszűnik*, ha az nagyobb az L lineáris méret reciprokánál, ha $L > L_R$.



7.8. ábra. A geosztrofikus turbulencia energiaspektruma a β-síkon. $k_0 \approx 1/R'$ és $k_d \sim \left(\chi/\nu^3\right)^{1/6}$ a baroklin instabilitás energiabetáplálási hullámszáma, illetve a disszipációs hullámszám. Az inverz energiakaszkád az $1/L_R$ hullámszámig tart.

[4] Az u' helyett az U átlagsebességgel képzett hasonló távolság fellépett már a zonális áramlásokban kialakuló struktúrák jellemző méreteként (3.9. fejezet)



A geosztrofikus turbulenciára a szélességi körök mentén elnyúló hullámzónák, *jetek* jellemzők, amelyek vízszintes kiterjedése L_R, és forgókádas elrendezésekben is tanulmányozhatók. A kísérletben megfigyelhető zonális jetek kialakulása domborzati akadály jelenlétében.

A fentiekkel összhangban az *óriásbolygók*, pl. a Jupiter vagy a Szaturnusz troposzférájában megfigyelhetők felváltva ellenkező irányítottságú zonális jetek, amelyekben az áramlás jó közelítéssel kétdimenziós. A Jupiter közepes szélességein a β paraméter a 7.2. táblázat alapján $\beta = 2\Omega\cos(\pi/4)/R = 3\cdot 10^{-12}1/(\mathrm{ms})$. Az $u' = 100$ m/s átlagos sebességszórással $L_R = 6000$ km.

Az örvények egyesülési és növekedési tendenciája a Nagy Vörös Folt magyarázatául is szolgálhat, amely tekinthető úgy, mint az összeolvadt örvények L_R sugarú végállapota (melyből még éppen nem keletkezett Rossby-hullám). Az óriásbolygók atmoszférája tehát a mindkét kaszkádot tartalmazó geosztrofikus turbulencia természetben előforduló példái. A 7.8. ábra arra is utal, hogy óriásbolygókon, amelyekre a Rhines-hossz kisebb a bolygó sugaránál, az áramlás maximális méretének szerepét a sugár helyett L_R veszi át.

Földi viszonyok között a Rhines-hossz a légkörben 1000, az óceánban pedig 100 km nagyságrendű ($u' = 10$, illetve 0,1 m/s és $\beta = 10^{-11}$ m^{-1} s^{-1}). A Földön a Rhines-hossz a belső Rossby-sugár nagyságrendjébe esik. Ezért az inverz kaszkád nem tud nagy hullámhossztartományban kifejlődni: A légkörben a belső Rossby-sugár összemérhető a Föld sugarával, így az óriásbolygókra jellemző zonális áramlási hierarchia nem figyelhető meg. A földi körülmények között a geosztrofikus turbulenciát az *ensztrófiakaszkád* dominálja. A nagy örvények, ciklonok, anticiklonok, óceáni gyűrűk a belső Rossby-sugár gerjesztési skáláján kialakulnak, de többszörös összeolvadásukra helyhiány vagy a peremfeltételek miatt a Földön nincs mód. Az előrejelzési idő az ensztófiakaszkádból adódik, és azt a (7.68) összefüggés adja meg a potenciális ensztrófiafluxussal. A légköri értéket használva néhány napos előrejelzési idő adódik. Ez összhangban van a meteorológiai gyakorlattal, az előrejelzés nagy átlagban valóban néhány napra sikeres.

7.6. Szennyezések terjedése

A 7.2., 7.5. fejezetekben láttuk, hogy a turbulencia következtében a transzportegyütthatók olyan nagy új értékeket vehetnek fel, amelyek mellett a molekuláris együtthatók elhanyagolhatóak. Az anyagok továbbítását ekkor a turbulens paraméterek határozzák meg. Az S sókoncentráció mellett tetszőleges más, akár szennyező hatású anyag átlagolt $\overline{c}(\mathbf{r}, t)$ koncentrációja is követhető. Természetesen a turbulens diffúziós együttható lehet irány-, esetleg helyfüggő is, az egyszerűség kedvéért azonban itt feltesszük, hogy konstans. Az áramlással együtt mozgó folyadékelem $\overline{c}$ koncentrációja a

$$\frac{d\overline{c}}{dt} = D_{turb}\Delta\overline{c} \tag{7.70}$$

diffúziós egyenlet szerint változik.

A teljes deriváltat kiírva a koncentráció helyi deriváltjára rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{\partial\overline{c}}{\partial t} = -\overline{\mathbf{v}}\,\mathrm{grad}\,\overline{c} + D_{turb}\Delta\overline{c}. \tag{7.71}$$

Rögzített helyen tehát a diffúziós tagon kívül fellép egy advektív tag, $-\overline{\mathbf{v}}\,\mathrm{grad}\,\overline{c}$, amelyet az *átlagolt* áramlási sebesség vezérel. Innét leolvasható, hogy a turbulencia hatása két mennyiségben is megjelenik: az áramlás helyett az átlagolt áramlást kell figyelembe venni, és a molekuláris diffúzió helyett a turbulens diffúziót.[5] A (7.71) egyenlet nevezhető *advekciós diffúziós egyenletnek*

[5] Az egyenlet lamináris áramlásban is érvényes, amikor nincsenek fluktuációk és a diffúzió mindig molekuláris.

is. Az átlagolás vezethet nulla eredő sebességre, ekkor egyedül a diffúzió jellegét változtatja a turbulencia. Az egyenlet alkalmas arra is, hogy anyagforrást vagy nyelőt írjon le az áramlási térbe, ami a jobb oldalon egy $q(\mathbf{r},t)$ forrástag megjelenésével történhet meg.

A (7.71) egyenlet $\overline{c}$-ben lineáris, ezért a szokásos dimenziótlanítás után, amelyben a sebesség karakterisztikus érteke U, a jellegzetes távolság L, a koncentráció egysége nem jelenik meg, és a dimenziótlan egyenlet a forrásmentes esetben

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} = -\overline{\mathbf{v}}\,\mathrm{grad}\,\overline{c} + \frac{1}{Pe}\Delta\overline{c}. \tag{7.72}$$

Ebben fellép a (7.4) Péclet-szám a turbulens diffúziós állandóval kiértékelve. Látszik, hogy a Péclet-szám a jobb oldali két tag nagyságrendjét hasonlítja össze, akkor nagy, ha az áramlás jelentősebb, mint a diffúzió, és fordítva, kis értéke a diffúzió fontosságát mutatja. Mivel a diffúziós idő L távolságon L^2/D_{turb}-bal becsülhető, a hidrodinamikai idő pedig L/U-val arányos, írhatjuk, hogy

$$Pe = \frac{\text{diffúziós idő}}{\text{hidrodinamikai idő}}. \tag{7.73}$$

Forrás és nyelő hiányában a (7.72) egyenlet a diffundáló anyag megmaradását fejezi ki. Különösen jól látható ez akkor, ha kihasználjuk, hogy az átlagolt áramlás is divergenciamentes (7.8), amivel $-\overline{\mathbf{v}}\,\mathrm{grad}\,\overline{c} = -\,\mathrm{div}(\overline{\mathbf{v}}\overline{c})$, és így

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} = -\,\mathrm{div}(\overline{\mathbf{v}}\overline{c}) + \frac{1}{Pe}\Delta\overline{c}. \tag{7.74}$$

Az egész térre integrálva, a jobb oldalon mindkét tag eltűnik, mert csak felületi járulékot tartalmaznak, ha feltehető, hogy a koncentráció a távoli helyeken nullához tart. A teljes anyagmennyiség véges, vagyis $\int \overline{c}(\mathbf{r},t)\,d^3\mathbf{r}$ állandó.

Ez lehetőséget ad arra, hogy az egyenletet átírjuk a

$$P(\mathbf{r},t) = \frac{\overline{c}(\mathbf{r},t)}{\int \overline{c}(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{r}} \tag{7.75}$$

alakra, ahol P annak a *valószínűsége*, hogy adott koncentrációértéket találjunk térben és időben, és természetesen $\int P\,d^3\mathbf{r} = 1$. Az egyenlet megoldása akkor egyértelmű, ha ismerjük a kezdeti $P(\mathbf{r},0)$ eloszlást.

A P-re vonatkozó egyenletet – a szokásos jelölést követve és a $\mathbf{v}$ felülvonását elhagyva – a dimenziós alakban adjuk meg:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = -\,\mathrm{div}(\mathbf{v}P) + D\Delta P.} \tag{7.76}$$

Ez a valószínűség-elméletből ismert *Fokker–Planck-egyenlet* (A. Fokker (1887–1972) holland fizikus, M. Planck (1858–1947) német fizikus), amelyben most $D = D_{turb}$. Az első tagot driftnek nevezik, amely a valószínűség determinisztikus elmozdulását írja le a $\mathbf{v}$ sebességtér hatására, a második tag pedig a sztochasztikus szétfolyást adó diffúziós tag.

A „makroszkopikus" Fokker–Planck-egyenlethez tartozik egy „mikroszkopikus" mozgásegyenlet, az

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r},t) + \sqrt{2D}\boldsymbol{\xi}(t) \tag{7.77}$$

Langevin-egyenlet (P. Langevin (1872–1946) francia fizikus). Ez sztochasztikus differenciálegyenlet, mert az utolsó tagban megjelenő $\boldsymbol{\xi}(t)$ vektor véletlen zaj, ún. gaussi fehér zaj. Ennek

időátlaga nulla: $< \boldsymbol{\xi}(t) >= 0$, ezen kívül korrelálatlan és egységnyi intenzitású, vagyis különböző pillanatokban vett korrelációja eltűnik, azonos pillanatokban pedig egységnyi:

$$< \boldsymbol{\xi}(t)\boldsymbol{\xi}(t') >= \delta(t - t'), \tag{7.78}$$

ahol δ a Dirac-féle deltafüggvény. Ezeket a megszorításokat sok konkrét $\boldsymbol{\xi}(t)$ függvényalak kielégíti, amelyeket különböző zajrealizációknak nevezünk. A (7.77) egyenlet számos különböző zajrealizációval oldandó meg. Úgy tekinthető, hogy a Langevin-egyenlet az egyedi szennyező részecskék, folyadékelemek mozgását követi a diffúzió által meghatározott erősségű zajban. A (7.76) Fokker–Planck- és a (7.77) Langevin-egyenlet ugyanannak a jelenségnek két *ekvivalens* leírását adja (ahogy a valószínűség-elmélet bizonyítja): a zajos mozgásegyenlet különböző zajrealizációkra véletlen megoldásokra vezet, amelyek $\mathbf{r}$ helykoordinátáinak eloszlása minden pillanatban valószínűség-eloszlást definiál. Ez éppen a (7.76) $P(\mathbf{r}, t)$ megoldása, amely a (7.77) kezdőfeltételeinek megfelelő $P(\mathbf{r}, 0)$ kezdeti eloszláshoz tartozik.

A szennyezésterjedés leírására tehát két módszer is rendelkezésünkre áll: parciális differenciálegyenlettel (az advekciós diffúziós egyenlet vagy az azzal egyenértékű Fokker–Planck-egyenlet segítségével), amelyek eloszlásokat adnak meg, illetve közönséges, de sztochasztikus egyenlettel (Langevin-egyenlet, a diffúziós állandó ugyanaz), amely nagyszámú egyedi életút követését teszi lehetővé. Az egyedi szennyező részecskék életútjainak *sokasága* adja a koncentrációeloszlást és annak időfejlődését.

A planetáris határrétegben a viszonylag nagy $D_{turb} = 10^4$ m^2/s turbulens diffúzióval számolva a jellegzetes $U = 10$ m/s szélsebességgel $L = 1$ km-en Pe éppen egységnyi, vagyis a diffúzió hatása lényeges.

Vegyük észre, hogy még a határrétegen belül is, 100 km-en a Péclet-szám már 100, vagyis a diffúzió jelentősége már csak 1 százaléknyi. Az óceáni keveredési rétegben történő szennyezéstranszportban ez sokkal kisebb skálán következik be. A határrétegeken kívül ráadásul a turbulencia kétdimenziós/geosztrofikus jelleget mutat. Itt átfogó elmélet nem létezik. Ha meg is nő a diffúziós együttható, biztosan nem olyan mértékben, mint homogén izotróp turbulenciában. Ha a magas légkörben $D_{turb} = 1$ m^2/s-mal számolunk, 100 kilométeren $Pe = 10^6$ adódik.

Nagyskálán tehát a diffúzió hatása elenyésző: $Pe \gg 1$. A valószínűség-eloszlásra (7.76) alapján a

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mathbf{v}P) \tag{7.79}$$

egyenlet érvényes, amely világosan mutatja, hogy az anyagterjedést egyedül az *áramlás* okozza. A konkrét szennyezéskövetéshez egyszerűbb a megfelelő „mikroszkopikus” egyenletet használni, amely (7.77)-ból adódóan:

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).} \tag{7.80}$$

Ez *közönséges* (nem sztochasztikus) differenciálegyenlet: a *passzív sodródás* egyenlete. Azt fejezi ki, hogy a kis méretű szennyező részecske azonnal felveszi a körülötte levő folyadék sebességét, tehát mindig a folyadék sebességével mozog. Az $\mathbf{r}(t)$ megoldás, vagyis a szennyező részecske pályája mégsem feltétlenül egyszerű. A sebességtér ugyanis általában nemlineáris függvénye a helynek és időnek, és az egyenlet megoldása tipikusan *kaotikus*. Ebből adódóan az egyedi részecskepályák bonyolult görbék, kiterjedt szennyeződésfoltok a káoszra jellemző erős megnyúlás és visszahajlás következtében szálas, *fraktál* szerkezetet mutatnak.

A kétdimenziós vagy geosztrofikus turbulenciára jellemző szennyeződésterjedés több, korábban látott videón is megfigyelhető. A forgókádas kísérletekben ugyanis az áramlás láthatóvá tétele legegyszerűbben festék (rendszerint ételfesték) bejuttatásával történik, és a különböző festékfoltok követéséből kapunk képet az áramlás jellegéről.

Különösen jól látszik a szálas, fraktál szerkezet kialakulása, amikor néhány lokalizált festékcsepp bejuttatásával kezdődik a folyamat, mint pl. ebben a lapos aljú forgatott edényben végzett kísérletben. A kezdeti gyors szétterjedés mutatja, hogy a festék/szennyező anyag helyéről alkotott eredetileg pontos ismeret gyorsan bizonytalanná válik, a sodródással járó mozgás előrejelezhetetlen, kaotikus.[6] Az a tény, hogy a festékrajzolat végig éles marad, a diffúzió elhanyagolható hatására utal, és egyben a Taylor-függönyök, -oszlopok jelenlétére is. Oldalnézetben jól látható, hogy a sodródás minden szinten ugyanúgy történik.

Összefoglalásként megjegyezzük, hogy a szennyezésterjedés jól tükrözi a háromdimenziós és a kétdimenziós/geosztrofikus turbulencia közötti éles különbséget. Kis skálán a háromdimenziós turbulenciára jellemző (és hétköznapi tapasztalatunkkal összhangban levő) kompakt, foltszerű terjedés figyelhető meg. Nagy skálán viszont a szálas, gyorsan megnyúló szennyeződési mintázatok a jellemzők, amelyeket nehéz előrejelezni (és ellenük nehéz védekezni is), amint pl. a tengeri olajszennyezésekről, illetve a vulkáni hamu légköri terjedéséről készült műholdfelvételek mutatják.

[6] A kezdeti festékrajzolat néhányszor tíz másodperc alatt megváltozik, a festék-előrejelzési idő rövid. A kis kezdeti különbségek exponenciálisan felerősödnek, amit a festékcsepp gyors megnyúlása mutat. Ez a 7.5b ábrának megfelelő erős nyírású (nagy ensztrófiájú) tartományokban következik be. Ennek a felerősödésnek a mérőszáma az ún. Ljapunov-exponens, és ennek reciprokával becsülhető az előrejelzési idő. A Ljapunov-exponens hasonló az instabilitási pontokat jellemző instabilitási rátához, 5.13.1. fejezet (de míg az csak speciális paramétertartományra és véges ideig jellemző, a Ljapunov-exponens az egész mozgás során pozitív).

Utószó az első részhez

Célunk a környezeti áramlások alapvonásainak bemutatása volt, az eltérő anyagi összetételű folyadékok közös vonásaira, elsősorban összenyomhatatlanságukra alapozva. Ez összhangban van a geofizikai folyadékdinamika nemzetközi értelmezésével, amely a folyadékmozgásra helyezi a hangsúlyt, és a több termodinamikát igénylő vonatkozásokat (pl. fázisátalakulások) a szaktudományokra, a meteorológiára, oceanográfiára, geológiára hagyja. Ez az általános megközelítés összhangban van azzal is, hogy a környezeti áramlások témája egyre inkább megjelenik a mérnökképzésben vagy általában az alkalmazott tudományokban.

Az általános fizikusi/geofizikusi/mérnöki szemlélet szempontjából levonható fontos – akár alapkurzusokba is illő – következtetés, hogy

- a Coriolis-erő nagy skálán a megszokotthoz képest alapvetően új mozgásformákra vezet,
- a lineáris hullámok világában a hang és a fény a kivételesek, erősen diszperzív hullámok a gyakoriak,
- nemlineáris hullámok és egyéb nemlineáris áramlási jelenségek ismerete megkerülhetetlen,
- a nemlinearitás instabilitásokat tesz lehetővé, amelyek a kiindulási áramlástól minőségileg különböző áramlásokba való átbillenést eredményeznek,
- az instabilitások vagy egymásutánjuk turbulens viselkedésre vezetnek, és ennek leírása új szemléletet igényel,
- a fizikai megértés az elmélet és a kísérletek összhangján alapul, amelyet itt a témakörhöz illeszkedő demonstrációs videók bemutatásával illusztráltunk.

Mindezek összefoglalásaként érdemes megnézni ezt a hosszabb, kommentált kísérleti összeállítást, amely egyben ismétlésül is szolgálhat, de bemutat eddig nem tárgyalt jelenségeket is.



A földi légkör állapotának pillanatnyi áttekintésére ad lehetőséget a Zoom Earth oldala. Ezen „megfigyelő kísérletezőként” követhetjük nyomon az aktuális turbulens állapotot, 10 perces frissítési időkkel, különböző mennyiségeket megadó térképeken.

Befejezésként említjük, hogy a klímaváltozás kérdése szorosan kapcsolódik témánkhoz. Alapvető különbség, hogy míg mi minden külső paramétert (pl. az Egyenlítő–sarkvidék hőmérséklet-különbséget) hallgatólagosan időben állandónak tekintettünk, a klímaváltozás során azonban ezek a paraméterek változnak. A részleteket tekintve a nemzetközi irodalomra utalunk, de az itt bemutatott anyag annak előzetes ismereteként mindképpen hasznos. Ezek a jelenségek univerzálisak, hiszen más bolygókon is megfigyelhetők, ezért nem kétséges, hogy a klímaváltozás során is jelen vannak.

Általános értelemben a klímaváltozás dinamikája egy eddig kevéssé tanulmányozott kategóriába tartozik, a paraméterváltozásnak kitett, feltehetően kaotikus rendszerek dinamikájába. Érdemes tudni, hogy ebben az osztályban instabilitások nemcsak módosulhatnak, hanem a paraméterváltozás következtében akár teljesen új instabilitások, veszélyes átbillenések is bekövetkezhetnek.

Összefoglaló táblázatok

Áramló közegek fontosabb anyagi paraméterei

7.1. táblázat. A víz és a levegő legfontosabb anyagi paraméterei légköri nyomáson és 20 fok hőmérsékleten. Az egyes mennyiségek rendre sűrűség, kinematikai viszkozitás, hődiffúziós állandó, tipikus diffúziós állandó, hőtágulási együttható, állandó nyomáson mért fajhő, hangsebesség.

	ϱ_0	ν	κ		D	α	c_p	c_{hang}
	$\mathrm{kg/m^3}$	$\mathrm{m^2/s}$	$\mathrm{m^2/s}$		$\mathrm{m^2/s}$	1/fok	J/(kg fok)	m/s
VÍZ	10^3	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	$1{,}4 \cdot 10^{-7}$	só:	$1{,}4 \cdot 10^{-9}$	$2{,}1 \cdot 10^{-4}$	$4{,}2 \cdot 10^3$	$1{,}5 \cdot 10^3$
LEVEGŐ	1,2	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	$2{,}1 \cdot 10^{-5}$	vízgőz:	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$	$3{,}4 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0 \cdot 10^3$	$3{,}4 \cdot 10^2$

7.2. táblázat. Néhány bolygó légkörének fontosabb paraméterei. A bolygó sugara (az óriásbolygók sugarán a legkülső átlátszatlan felhőréteg központtól mért távolságát értjük), forgási szögsebessége, felszíni átlagsűrűsége, nyomása, hőmérséklete és nehézségi gyorsulása, a troposzféra vastagsága, hangsebesség. Többségükben kerekített értékek. Összehasonlításként a Föld légkörének adatait is feltüntettük.

	R	Ω	ϱ_0	p_0	T_0	g	H	c_{hang}
	km	1/s	$\mathrm{kg/m^3}$	kPa	K	$\mathrm{m/s^2}$	km	m/s
VÉNUSZ	6000	$3 \cdot 10^{-7}$	65	9200	730	8,9	70	410
MARS	3400	$7 \cdot 10^{-5}$	0,02	0,7	210	3,7	40	250
JUPITER	72 000	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	1,3	70	150	25	50	1000
FÖLD	6370	$7{,}3 \cdot 10^{-5}$	1,2	100	288	9,8	10	340

7.3. táblázat. A Föld belseje áramló közegeinek anyagi paraméterei, becsült értékek. Az egyes mennyiségek rendre sűrűség, kinematikai viszkozitás, hődiffúziós állandó, vezetőképesség, hőtágulási együttható, állandó nyomáson mért fajhő, hangsebesség.

	ϱ_0	ν	κ	σ	α	c_p	c_{hang}
	$\mathrm{kg/m^3}$	$\mathrm{m^2/s}$	$\mathrm{m^2/s}$	1/(Ohm m)	1/fok	J/(kg fok)	km/s
FÖLDKÖPENY	$4{,}5 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{17}$	10^{-6}	1	$3{,}5 \cdot 10^{-5}$	$1{,}3 \cdot 10^3$	7
KÜLSŐ MAG	10^4	10^{-6}	10^{-5}	$5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^2$	10

Dimenziótlan arányszámok

7.4. táblázat. A nagyskálájú környezeti áramlásokat jellemző legfontosabb dimenziótlan számok. Az Ekman- és Péclet-számokat a turbulens viszkozitással képeztük, a Richardson-szám értéke a határrétegre vonatkozik. Laboratóriumi mérésekben az f_0 Coriolis-paraméter szerepét a forgatási szögsebesség kétszerese, 2Ω veszi át, a Be paraméter pedig az aljzat γ meredekségével adható meg: $Be = \gamma L/H$.

DIMENZIÓTLAN SZÁM	TIPIKUS ÉRTÉKE A FÖLDÖN	
	LÉGKÖR	ÓCEÁN
Rossby-szám $Ro = \frac{U}{\lvert f_0 \rvert L}$	0,1	0,1–0,01
Reynolds-szám $Re = \frac{UL}{\nu}$	10^{12}	10^{11}
Froude-szám $Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$	10^{-2}	10^{-2}
β paraméter $Be = \frac{\beta L}{f_0}$	0,1	0,1–0,01
Ekman-szám $Ek = \frac{\nu}{\lvert f_0 \rvert H^2}$	turbulens viszkozitással 10^{-4}	 10^{-5}
Belső Froude-szám $Fr' = \frac{U}{NH} = \frac{U}{\sqrt{g'H}}$	10^{-2}	10^{-2}
Frekvencia-arány $Fn = \frac{N}{\lvert f_0 \rvert}$	10^{-2}	10^{-2}
Burger-szám $Bu = \left(\frac{NH}{f_0 L}\right)^2$	1	1–0,1
Rayleigh-szám $Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$	10^{17}	10^{15}
Richardson-szám $Ri = \frac{N^2}{(d\overline{u}/dz)^2}$	1	1
Péclet-szám $Pe = \frac{UL}{D}$	nagy skálán 10^4	 10^6

Jellegzetes távolságok

7.5. táblázat. A környezeti áramlásokat jellemző legfontosabb távolságjellegű mennyiségek. Az u' mennyiség a vízszintes síkbeli sebességfluktuációk jellegzetes értéke. Az Ekman-féle határréteg vastagságát a ν_{turb} turbulens viszkozitással képeztük. Laboratóriumban az f_0 Coriolis-paraméter szerepét a forgatási szögsebesség kétszerese, 2Ω veszi át.

TÁVOLSÁGOK	TIPIKUS ÉRTÉKEK A FÖLDÖN (km)	
	LÉGKÖR	ÓCEÁN
Rossby-sugár		
$R = \frac{\sqrt{gH}}{\lvert f_0 \rvert} = L\ \frac{Ro}{Fr}$	3000	2000
Kritikus hullámhossz		
$\lambda_c = 2\pi\sqrt{\frac{U}{\beta}} = 2\pi L\sqrt{\frac{Ro}{Be}}$	6280	628
Ekman-réteg vastagság		
$D = \pi\sqrt{\frac{2\nu}{\lvert f_0 \rvert}} = H\pi\sqrt{2Ek}$	1	0,04
Belső Rossby-sugár	folytonos rétegzettséggel	
$R' = \frac{NH}{\lvert f_0 \rvert} = \frac{\sqrt{g'H}}{\lvert f_0 \rvert} = L\ \frac{Ro}{Fr'}$	1000	50
Rhines-hossz		
$L_R = \sqrt{\frac{u'}{\lvert \beta \rvert}}$	1000	100

Közelítések

7.6. táblázat. A használt közelítések áttekintő táblázata

KÖZELÍTÉS NEVE	FELTÉTELE	ELHANYAGOLT JELENSÉG
Összenyomhatatlan	Áramlás lassabb a hangnál: $U \ll c$	Hang, lökéshullám
Ideális	Viszkozitás kicsi: $Re \gg 1$	Közegellenállás, szélnyírás
Sekély	Vízszintes méret nagy: $H \ll L$	Mélyvízi hullámok, erős feláramlások, felfelé haladó energia
Merev lap	Felszíni mozgás gyenge a belső mozgásokhoz képest	Felszíni hullámok, barotróp módusok
Geosztrofikus	Coriolis-erő és nyomás dominál: $Ro \to 0$	Időfüggő mozgások, hullámok
f-sík	A bolygó görbülete nem lényeges: $\beta = 0$	Rossby-hullám, peremáramlatok
β-sík	Kiterjedés kisebb a bolygó sugaránál, $\beta L \ll f_0$	Az egész bolygóra kiterjedő mozgások
Kvázi-geosztrofikus	Kis eltérés a geosztrofikustól $Ro \ll 1$	Gyors mozgások, Poincaré-, Kelvin-hullámok
Boussinesq	Kis sűrűségingadozás $\varrho'' \ll \varrho_0$	Nagy sűrűségváltozással járó folyamatok
Egyenletes rétegzettség	Profil állandó gradiensű: $N =$ konstans	Belső hullám elhajlása, törése, visszaverődése
Kétrétegű	Sűrűség eltérő konstans a két rétegben	Felfelé haladó belső hullámok, magasabb módusok
Redukált sekélyfolyadék-modell	A vastag réteg nem mozog	Ellenáramok, baroklin instabilitás

II. rész

Kiegészítő fejezetek

8. fejezet

Forgatott homogén közegek áramlása (folytatás)

8.1. Az örvényvektor egyenlete

A hidrodinamikai mozgásegyenlet alapján összefüggést kapunk az örvényesség változására. A forgatott folyadék

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho_0} + gz\right) + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{8.1}$$

Navier–Stokes-egyenletéből a $\boldsymbol{\omega} \equiv \operatorname{rot}\mathbf{v}$ örvényvektor időfejlődésére lehet következtetni. A kapott forma előnye, hogy abban a nyomás és a konzervatív erő nem jelennek már meg. A $(\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{v} \equiv \operatorname{grad} v^2/2 + \operatorname{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ azonosság felhasználásával az állandó sűrűség esetén érvényes (1.28) egyenlet a

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\left(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}\right) \times \mathbf{v} - \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\varrho_0} + gz\right) + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{8.2}$$

alakot ölti. Az egyenlet rotációját véve:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}\left[\left(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}\right) \times \mathbf{v}\right] = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{8.3}$$

Mivel a forgatás $\boldsymbol{\Omega}$ frekvenciája időben állandó, az idő- és térbeli deriváltakban az örvényvektorhoz hozzáadhatjuk $2\boldsymbol{\Omega}$-t. Ezért érdemes bevezetni az $\boldsymbol{\omega}_T$ teljes örvényességet (melyet néha abszolút örvényességnek is hívnak) mint az $\boldsymbol{\omega}$ relatív örvényesség és a $2\boldsymbol{\Omega}$ Coriolis-paraméter összegét:

$$\boldsymbol{\omega}_T \equiv \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}. \tag{8.4}$$

Az örvényességi egyenlet teljes örvényességre vonatkozó formája:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_T}{\partial t} + \operatorname{rot}\left[\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{v}\right] = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}_T. \tag{8.5}$$

Furcsának tűnhet, hogy $\boldsymbol{\omega}$-hoz a forgatási szögsebesség kétszerese adódik hozzá. Ennek oka az, hogy $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ szemléletes jelentése a folyadékkal merev testként együtt forgó test szögsebességének a kétszerese. (Ha $1/2\operatorname{rot}\mathbf{v}$-t tekintenénk örvényességnek, akkor ahhoz csak $\boldsymbol{\Omega}$ adódna hozzá.)

A $\mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}$ azonosságot és $\mathbf{v}$ és $\boldsymbol{\omega}$ divergenciamentességét felhasználva:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_T\,\mathrm{grad})\mathbf{v} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}_T, \tag{8.6}$$

ahol a $(\mathbf{v}\,\mathrm{grad})\boldsymbol{\omega}_T$ tag beolvadt a teljes deriváltba. Ebből magára az örvényvektorra kapjuk, hogy:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad})\mathbf{v} + (2\boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{grad})\mathbf{v} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{8.7}$$

Az (1.35) dimenziótlanítás után:

$$Ro\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = Ro(\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad})\mathbf{v} + (2\mathbf{n}\,\mathrm{grad})\mathbf{v} + \frac{Ro}{Re}\Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{8.8}$$

A gyors forgatásnak megfelelő $Ro \ll 1$ határesetből egységnyi deriváltakat feltételezve ideális folyadékra $(\mathbf{n}\,\mathrm{grad})\mathbf{v} = 0$ adódik, amely szerint $\partial\mathbf{v}/\partial z = 0$. Az (1.51), (1.53) Taylor–Proudman-tétel tehát következik az örvényvektor dinamikájából is.

A (8.6) alakból leolvasható az is, hogy ideális folyadék *kétdimenziós* áramlásában ateljes örvényesség megmaradó mennyiség. Ha ugyanis a sebességvektor az (x,y) síkban fekszik, akkor az örvényvektor z irányú. Ezért az $(\boldsymbol{\omega}_T\,\mathrm{grad})$ operáció a sebesség w függőleges komponensére hat, de kétdimenziós áramlásban $w = 0$. A teljes örvényvektor ζ_T függőleges komponensére ezért

$$\frac{d\zeta_T}{dt} = \nu\Delta\zeta_T. \tag{8.9}$$

Kétdimenziós súrlódásmentes áramlásban tehát a teljes örvényvektor ζ_T függőleges komponense állandó:

$$\zeta_T \equiv \zeta + 2\Omega = \mathrm{konst.} \tag{8.10}$$

Ez azt jelenti, hogy ha együtt mozgunk a folyadékelemmel, akkor ζ_T-t időtől függetlennek találjuk.

Végül megadjuk a (8.9) örvényegyenlet kifejezését az áramlási függvénnyel:

$$\frac{d\zeta_T}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \boxed{\frac{d\Delta\psi}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta\psi = \nu\Delta^2\psi.} \tag{8.11}$$

Itt fölhasználtuk, hogy minden síkbeli összenyomhatatlan áramláshoz tartozik egy (1.58) áramlási függvény, amelyből az örvényesség a $\zeta = \Delta\psi$ összefüggés alapján kapható meg. A 2. fejezetben tárgyalt (2.52) kvázi-geosztrofikus egyenlet ennek a kétdimenziós örvényegyenletnek általánosítása a potenciális örvényesség megmaradására ideális folyadékban.

8.2. A cirkuláció változása

A fentiek alapján az 1.1. ábra kvalitatív képének üzenetét matematikai formában is meg tudjuk adni. A cirkuláció a sebességvektor körintegrálja:

$$\Gamma \equiv \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}d\mathbf{s}, \tag{8.12}$$

ahol $\mathcal{C}$ tetszőleges görbe, amely együtt mozog a folyadékkal. A hagyományos hidrodinamikában a cirkuláció megmaradó mennyiség állandó sűrűségű ideális ($\nu = 0$) folyadékban.

A cirkuláció időderiváltja

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\int_C \mathbf{v}d\mathbf{s} = \int_C \frac{d\mathbf{v}}{dt}d\mathbf{s} + \int_C \mathbf{v}\frac{d}{dt}d\mathbf{s}. \tag{8.13}$$

A második tag nulla járulékot ad, mivel $d\mathbf{s}$ időderiváltja $d\mathbf{v}$, hiszen a görbe maga is folyadékként mozog, de $\int_C \mathbf{v}d\mathbf{v} = \int_C 1/2 d\mathbf{v}^2$, ami teljes derivált, ezért körintegrálja nulla. Az első integrálba a (8.1) mozgásegyenletet $\nu = 0$-val beírva, a gradiens-tag nem ad járulékot, így

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\int_C 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}\, d\mathbf{s}. \tag{8.14}$$

A vonalintegrált átírhatjuk felületivé (Stokes-tétel) az argumentum rotációját véve. A (8.6) feletti azonosságot használva

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int (2\boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{grad})\mathbf{v}d\mathbf{A}, \tag{8.15}$$

ahol a felületi integrál tetszőleges olyan (egyszeresen összefüggő) $\mathcal{A}$ felületen történhet, amelynek $\mathcal{C}$ a peremgörbéje. Válasszuk az $\mathcal{A}$ felület normálisát a z, azaz $\boldsymbol{\Omega}$ irányába mutatónak. Ekkor a sebességnek csak a függőleges, w komponense marad meg, amelyre az $(\boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{grad}) = \Omega\partial/\partial z$ operátor hat, tehát $\Omega\partial w/\partial z$-t kell integrálni az A felületen. A divergenciamentesség miatt azonban $\partial w/\partial z$ a síkbeli divergencia ellentettje, amely utóbbiról a (2.11) összefüggésben láttuk, hogy a $d\dot{A}/dA$ lokális területnövekedési aránnyal azonos. Így végül az $\int d\dot{A}$ integrál végzendő el, de ez a terület időderiváltja. A Γ cirkuláció változásának mértéke:

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = -2\Omega\frac{dA}{dt},} \tag{8.16}$$

arányos a forgatás erősségével és a kontúr forgástengelyre merőleges vetülete területének időbeli változásával. Ez Bjerknes tétele homogén folyadékra. Forgatott közegben a cirkuláció tehát nem marad meg. Ha a vizsgált kontúr úgy mozog, hogy merőleges vetületének területe csökken, akkor pozitív forgatási irány esetén a Γ cirkuláció nő, és fordítva, összhangban az 1.1. ábra kvalitatív képével. A (8.16) cirkulációtétel tehát a Coriolis-hatás egyik hidrodinamikai következménye.

A Stokes-tétel alapján a cirkuláció az örvényvektor felületi integrálja

$$\Gamma = \int \boldsymbol{\omega}d\mathbf{A}, \tag{8.17}$$

ahol $\mathcal{A}$ az a felület, amelynek pereme a $\mathcal{C}$ görbe. A cirkuláció időderiváltja

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{\omega}d\mathbf{A} = \int \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}d\mathbf{A} + \int \boldsymbol{\omega}\frac{d}{dt}d\mathbf{A}. \tag{8.18}$$

Az első tagba az örvényvektor (8.7) teljes deriváltját beírva $\nu = 0$-ra:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int [(\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad})\mathbf{v} + (2\boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{grad})\mathbf{v}]\, d\mathbf{A} + \int \boldsymbol{\omega}\frac{d}{dt}d\mathbf{A}. \tag{8.19}$$

(8.15) szerint a középső kifejezés a cirkuláció időderiváltja, ezért

$$\int \boldsymbol{\omega}\frac{d}{dt}d\mathbf{A} = -\int (\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad})\mathbf{v}d\mathbf{A}, \tag{8.20}$$

vagyis a területváltozással kapcsolatos tag kifejezhető egy, a térmennyiségeket tartalmazó felü-

leti integrállal. Ezt az azonosságot (8.18) második tagjában alkalmazva,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - (\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{grad})\mathbf{v}\right] d\mathbf{A}. \tag{8.21}$$

A teljes cirkulációt a (8.10)-ben definiált $\boldsymbol{\omega}_T$ teljes örvényesség felületi integráljaként definiáljuk:

$$\Gamma_T = \int \boldsymbol{\omega}_T d\mathbf{A} = \int \boldsymbol{\omega} d\mathbf{A} + 2\Omega\mathbf{n}\mathbf{A} = \Gamma + 2\Omega\mathbf{n}\mathbf{A}. \tag{8.22}$$

Ennek deriváltját véve és használva a Γ cirkuláció (8.16) időfüggését vagy (8.6)-ot, azt kapjuk, hogy a teljes cirkuláció forgatott ideális folyadékban *megmarad*:

$$\boxed{\frac{d\Gamma_T}{dt} = 0.} \tag{8.23}$$

Figyelemre méltó, hogy miközben az $\boldsymbol{\omega}_T$ teljes örvényesség három dimenzióban nem megmaradó mennyiség, felületi integrálja: Γ_T megmarad (ráadásul tetszőleges felületen).

Kis $d\mathbf{A}$ felületet választva, amelyen az örvényesség konstans, azt kapjuk, hogy a teljes örvényesség és a felületelem $\boldsymbol{\omega}_T d\mathbf{A}$ szorzata állandó a mozgás során. Ha ezt a sekély folyadékok speciális esetére alkalmazzuk, amelyekben az áramlás oszlopos szerkezetű (2.2. ábra), és a teljes örvényesség a forgatás irányába (a z irányba) mutat, a felületelemet választhatjuk erre merőlegesen, amiből a $\zeta_T dA$ szorzat állandóságát kapjuk. Ezt a h helyi folyadékmélységgel bővítve, a

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\zeta_T}{h}(dAh)\right] = \text{állandó} \tag{8.24}$$

megmaradási tétel adódik. Mivel azonban $dA\ h$ a folyadékelem térfogata, amely az összenyomhatatlanság miatt állandó, a ζ_T/h mennyiségnek, vagyis a (2.24) potenciális örvényességnek is állandónak kell lennie (ζ_T önmagában nem állandó, mert w nem tűnik el). Ez a megmaradási törvény tehát gondolatmenetünkben a cirkulációtétel következményeként adódik.

8.3. Magnetohidrodinamikai áramlások forgó égitestek belsejében

A Naprendszer legtöbb bolygójának magja legbelül szilárd, de a külső magok meglehetősen folyékonyak. A közeget az ott uralkodó igen magas hőmérsékleten ionok és elektronok alkotják. A Föld esetében a külső mag elektromosan jól vezető folyékony fémet (főleg vasat) tartalmaz, de szinte az összes többi bolygó – köztük az óriásbolygók – belsejében is fémesen vezető folyékony zóna található. A folyékony közeg mozgását a jelentős hőmérséklet- és sűrűségkülönbség indítja be. A töltött részecskék mágneses térben mozogva elektromos áramot hoznak létre indukció révén, és az áram mágneses tere hozzáadódik az eredetihez. Ha ez a mágneses teret erősíti, *mágneses dinamó* hatás lép fel, és jelentős tér alakulhat ki. A belső vezető közeg áramlása tehát a bolygók mágneses terének szükséges feltétele. Az egyetlen mágneses tér nélküli bolygó a Mars, belseje úgy tűnik, jelen állapotában kihűlt, szilárd állapotú.

A bolygók magjában az áramlás és a mágneses hatás összecsatolódik. Az alapjelenség megértése érdekében áttekintjük a plazmák (ionizált gázok és folyékony fémek) mágneses térbeli áramlását leíró ún. *magnetohidrodinamika* (MHD) elemeit.

8.3.1. A Maxwell-egyenletek és a magnetohidrodinamikai közelítések

Tekintsük át először az elektromágnesség egyenleteit homogén, izotróp közeget feltételezve, az **E** elektromos térerősséget és a **B** mágneses indukcióvektort használva. A gerjesztési törvény és az indukciós törvény

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{j} + \mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{8.25}$$

a terek örvényességét adják meg, a Gauss-törvény és a mágneses Gauss-törvény

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \varrho_e/\varepsilon, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{8.26}$$

pedig a forrásosság mértékét. Az anyagi paraméterek: μ a közeg mágneses permeabilitása, ϵ dielektromos permittivitása és ϱ_e az elektromos töltéssűrűség. A $\mathbf{j}$ áramsűrűség és a térerősségek kapcsolatát $\mathbf{v}$ sebességű áramlásban az Ohm-törvény adja meg:

$$\mathbf{j} = \varrho_e\mathbf{v} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}), \tag{8.27}$$

ahol σ a vezetőképesség. Itt feltételezzük, hogy a közeg $\mathbf{v}$ sebességgel áramlik. A zárójel második tagjának szemléletes jelentése a Lorentz-erőből adódó térerősség. Pontosabban, (8.27) az elektromos térerősség Lorentz-transzformációjának klasszikus határesetéből következik.[1] Az összefüggés mutatja, hogy a közeg mozgása akkor indukál áramot, $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ akkor tér el nullától, ha az áramvonalak metszik a mágneses erővonalakat, ha $\mathbf{v}$ nem párhuzamos $\mathbf{B}$-vel.

A magnetohidrodinamika legegyszerűbb, nagy vezetőképességű anyagra vonatkozó, nemrelativisztikus változatában a következő közelítések érvényesek:

- Az áramló közeg kívülről *semleges*, az elektronok és ionok össztöltése nulla, így a helyi ϱ_e eredő elektromos töltéssűrűség csak kis fluktuációk következtében jelenhet meg, amelyek a jó vezetőképesség miatt gyorsan kihalnak. Ezért jogos a

  $$\varrho_e \approx 0 \tag{8.28}$$

  közelítés.

- A plazmák általában nem mágnesezhető anyagok, és nem is polarizálhatóak dielektrikumként. Az ϵ_r és μ_r relatív permittivitás, illetve permeabilitás ezekből a folyamatokból adódna. Jogos tehát az $\epsilon_r = \mu_r = 1$ közelítés, vagyis

  $$\epsilon \approx \epsilon_0, \qquad \mu \approx \mu_0. \tag{8.29}$$

  Annak ellenére tehát, hogy közegekről van szó, a *vákuum* permeabilitását és permittivitását használhatjuk.

- A (8.25)-beli gerjesztési törvény második tagjában (8.29) értelmében $\mu_0\varepsilon_0$ jelenik meg. Az elektrodinamika alapösszefüggése szerint ez az együttható a c vákuumbeli *fénysebesség* négyzetének reciproka ($c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$). Mivel a magnetohidrodinamikai áramlások általában sokkal lassabbak a fénysebességnél (a Föld külső magjában pl. $U \approx 1$ mm/s), a második tag gyakorlatilag nincs jelen, az *eltolási áram elhanyagolható*.

[1] Az **E** térerősség Lorentz-transzformáltja a $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó koordináta-rendszerben $\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + (1-\gamma)(\mathbf{E}\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2$, ahol $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. A klasszikus $v \ll c$ határesetben $\gamma \to 1$.

Ezekkel a közelítésekkel az (8.25), (8.26) Maxwell-egyenletek alakja tehát

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{8.30}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{8.31}$$

amit a $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$ Ohm-törvény egészít ki. Az *egyetlen* anyagi paraméter a σ vezetőképesség. Érdemes hangsúlyozni, hogy az eltolási áram elhanyagolása következtében közelítésünk az elektromágneses sugárzás megjelenését *kizárja*.

8.3.2. Az indukciós egyenlet

Az indukciós törvényben jelen levő elektromos térerősséget kiküszöbölhetjük az áramsűrűség alapján, majd a gerjesztési törvényt használva:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{rot}\left[\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right] = \frac{1}{\sigma\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} + \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \tag{8.32}$$

Így olyan egyenlethez jutunk, amely meghatározza a mágneses teret a sebességtér ismeretében. A $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B} - \Delta\mathbf{B}$ azonosság és a mágneses tér forrásmentessége ismeretében ez tovább egyszerűsödik:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + \nu_m\Delta\mathbf{B}, \tag{8.33}$$

ahol $\nu_m = 1/(\mu_0\sigma)$ az ún. *mágneses viszkozitás*. Az elnevezést az motiválja, hogy a $\nu_m\Delta\mathbf{B}$ kifejezés azonos szerkezetű, mint a viszkozitás hatását az (1.28) Navier–Stokes-egyenleteben leíró $\nu\Delta\mathbf{v}$ tag. Fizikailag a vezetőben Joule-hő képződik, és az energiaveszteség annál nagyobb, minél kisebb a vezetőképesség. (8.33) az áramlás által keltett mágneses tér alapegyenlete, röviden az indukciós egyenlet.

A szokásos dimenziótlanítás után (a $\mathbf{B}$ teret tetszőleges egységekben mérve, hiszen az kiesik az eljárás során)

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + \frac{1}{Rm}\Delta\mathbf{B}, \tag{8.34}$$

ahol megjelent az

$$\boxed{Rm = \frac{UL}{\nu_m} = \mu_0\sigma UL = \frac{U^2/L}{\nu_m U/L^2} = \frac{\text{hidrodinamikai gyorsulás}}{\text{mágneses viszkozitásból adódó gyorsulás}}} \tag{8.35}$$

mágneses Reynolds-szám. A hagyományos Reynolds-számhoz hasonlóan a viszkozitás, az elektromos ellenállásból adódó fékeződés fontosságát méri az áramlásban. Ideális vezetőben $\sigma = \infty$, és $Rm = \infty$.

A számértékeket tekintve $\mu_0 = 1{,}3\cdot 10^{-6}$ kg m/(A^{2}s), amit becslésekben vehetünk 10^{-6}-nak SI egységekben, és a Föld külső magjára $\sigma = 5\cdot 10^5$ 1/(Ohm m) $= 5\cdot 10^5$ A^{2}s^3/$\left(\text{kg m}^3\right)$ vezetőképesség jellemző (7.3. táblázat). Ebből a mágneses viszkozitás $\nu_m \approx 2$ m^2/s, mintegy hat nagyságrenddel nagyobb, mint a felszíni közegek kinematikai viszkozitása. A mágneses Reynolds-szám meghatározásához szükség van az $U = 1$ mm/s tipikus sebességen kívül az L lineáris méretre. Becslésünkben tekintsük ezt $L = 2000$ km-nek, ami a külső és belső mag sugarai közötti különbségnek felel meg nagyságrendileg. Ezzel $Rm \approx 10^3$-t kapunk, vagyis 1-nél sokkal nagyobb mágneses Reynolds-számot. Hasonló adatok érvényesek a többi folyékony magú bolygóra, ezért a továbbiakban a $\Delta\mathbf{B}$ tagot elhanyagoljuk az indukciós egyenletben.

Érdemes felismerni a (8.33) indukciós egyenlet és az $\boldsymbol{\omega}$ örvényesség vagy $\boldsymbol{\omega}_T$ teljes örvényesség (8.5) egyenlete közötti hasonlóságot. Mivel matematikai szerkezetük azonos, úgy, ahogyan ideális folyadékban következik a teljes cirkuláció (8.23) megmaradása, ami $\boldsymbol{\omega}_T$ felületi integrálja, éppúgy következik most a $\mathbf{B}$ térerősség felületi integráljának, vagyis a $\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{A}$ mágneses fluxusnak a megmaradása ideális vezető közegben:

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 0.} \tag{8.36}$$

Ez azt jelenti, hogy a *mágneses fluxus a folyadékkal együtt mozog*. Nagyon kis felületeket véve azt mondhatjuk, hogy ha a folyadékelemek egy pillanatban mágneses erővonalakra esnek, akkor áramlás közben végig azon maradnak. Az áramlás „maga előtt tolja", „magával húzza" a mágneses erővonalakat. Ez a *mágneses tér befagyása* ideális vezető áramlásában.

8.3.3. A hidrodinamikai mozgásegyenlet

A töltött részecskék áramlását elektromágneses tér jelenlétében befolyásoló Lorentz-erő megjelenik a Navier–Stokes-egyenletben mint új, $\mathbf{f}$ külső tömegerő. Egyetlen, $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó, q töltésű részecskére ennek jól ismert alakja

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{8.37}$$

Az eredő erő egységnyi térfogatban a $\sum q = \varrho_e$ eredő töltéssűrűséget és a $\sum q\mathbf{v}$ áramsűrűséget tartalmazza, vagyis a Lorentz-erő $\mathbf{f}$ térfogati sűrűsége

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \tag{8.38}$$

ahol használtuk, hogy $\varrho_e \approx 0$.

A forgatott közeget leíró (1.28) egyenlet jobb oldalához $\mathbf{f}/\varrho_0$-t, az egységnyi tömegre ható erőt hozzáadva, ahol ϱ_0 a tömegsűrűség,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\Omega\mathbf{v} \times \mathbf{n} + \frac{1}{\varrho_0}\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad} p', \tag{8.39}$$

és p' a hidrosztatikai nyomástól való eltérést megadó dinamikai nyomás. A viszkozitásból adódó tagot nem írtuk ki, hiszen a kinematikai viszkozitás a külső magban is kicsi ($\nu = 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, nagyságrendileg akkora, mint levegőben és vízben). Az összenyomhatatlanság miatt természetesen továbbra is $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. A (8.39) a magnetohidrodinamika alapegyenlete, amelyet a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \tag{8.40}$$

indukciós egyenlet egészít ki (elhanyagolható veszteségek esetén), az áramsűrűség

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{B} \tag{8.41}$$

kifejezéseivel, és a terek (8.31) divergenciamentességi feltételeivel.

Érdemes a (8.39) mozgásegyenletet is dimenziótlanítani. A szokásos hidrodinamikai dimenziótlanítást kiegészítjük azzal, hogy a mágneses térerősséget a jellegzetes B_0 érték egységeiben mérjük és használjuk, hogy az áramsűrűség egysége (8.27) szerint $\sigma U B_0$. A dimenziótlan

egyenlet

$$Ro\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \pm\mathbf{v}\times\mathbf{n} - \operatorname{grad} p' + El\mathbf{j}\times\mathbf{B}, \tag{8.42}$$

ahol Ro az (1.1) Rossby-szám, El pedig egy új dimenziótlan kombináció, az

$$\boxed{El = \frac{\sigma B_0^2}{|2\Omega|\varrho_0} = \frac{\text{Lorentz-erőből adódó gyorsulás}}{\text{Coriolis-gyorsulás}}} \tag{8.43}$$

Elsasser-szám (W. Elsasser (1904–1991), amerikai fizikus, a földmágnesség eredetének vezető kutatója.) Ez a szám a Lorentz-erő fontosságát méri a Coriolis-erőhöz képest. 1-nél nagyobb értéke utal arra, hogy a Lorentz-erő dominál. (Az indukciós egyenlet és a divergenciamentességi feltételek dimenziótlanításából nem adódnak további arányszámok.)

8.3.4. Geosztrofikus áramlás a magban

A Föld külső magjában uralkodó térerősséget $B_0 = 4\cdot 10^{-4}$ Teslának tekintve a 7.3. táblázat adataival, és 2Ω-t 10^{-4} 1/s-ként becsülve, $El = 0{,}08$. A mágneses hatás tehát gyengébb, mint a forgásból származó. Ugyanakkor a Rossby-szám $L = 2000$ km-rel számolva $Ro = 10^{-3}/(10^{-4}\,2\cdot 10^6) = 5\cdot 10^{-6}$, kisebb, mint a Föld felszínén zajló áramlásokra.

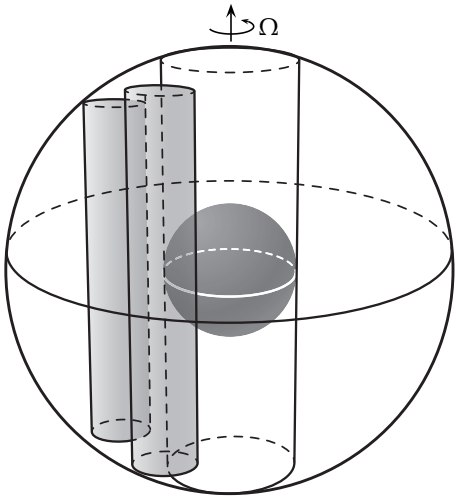
Első közelítésben tehát azt mondhatjuk, hogy mind a Rossby-szám, mind az Elsasser-szám elhanyagolhatóan kicsi. A (8.42) egyenletben tehát csak a jobb oldalon álló első két tag marad meg: a Coriolis-erőt a nyomási erő kompenzálja. Érvényes tehát az (1.56) egyenlet, azaz első közelítésben a lassú áramlások a *külső magban geosztrofikusak, a mágneses tértől függetlenül*.

A geosztrofikus áramlásokra érvényesek az 1.7.1., 1.7.2. fejezetek állításai: a külső magban a forgástengellyel párhuzamos (észak–déli irányítottságú) Taylor-oszlopok jelenhetnek meg, és ha van ezeken belül áramlás, akkor az (1.53) szerint közel állandó sebességű, legalábbis a peremektől távol. A sematikus 8.1. ábra két Taylor-oszlopot mutat, amelyek a külső magban hosszan elnyúlnak a forgástengely irányába a belső magot körülvevő érintőhengeren kívül. A geosztrofikusság egyik általános megszorítása, hogy az érintőhengeren kívüli anyag nem áramolhat be a henger belsejébe.

Perturbációként több hatás is jelen van, amelyek közül a hőmérséklet-különbség (a külső mag alján kb. 6000 K, a tetején pedig 4000 K a hőmérséklet) következtében kialakuló konvekció a legjelentősebb. Ez beindít áramlást, amely helyenként a forgástengellyel párhuzamos Taylor-oszlopokba rendeződik. Az egyenlítői síktól távolodva ezekben csökken a hőmérséklet, ezért lassú áramlás jöhet létre a Taylor-oszlopokon belül az egyenlítői sík felett északi, alatta déli irányban. Ezzel párhuzamosan az ilyen oszlopokban az egyenlítői síkban beáramlás történik az oszlopba, a mag felső határán pedig kiáramlás.

Anélkül, hogy részletekbe mennénk, említjük, hogy a legegyszerűbb elképzelés szerint a mágneses erővonalakat az áramlás a mágneses tér befagyási tulajdonsága (8.3.2. fejezet) szerint maga előtt tolja, a tengely irányában megnyújtja, és a hengerekben halmozza fel. Végül is a forgástengellyel párhuzamos Taylor-oszlopokban történő áramlás hozzájárul ahhoz, hogy a bolygók mágneses tere kialakul, és jó közelítéssel a forgástengellyel párhuzamos irányítottságú. (Ez az egyszerű kép nem ad magyarázatot sok fontos részletre, pl. arra, hogy a Föld esetén a mágneses pólus nem pontosan az Északi-Sarkon van, és hogy a mágneses tér időnként hirtelen – természetesen a geológiai időskálán – átfordul.)

A környezeti áramlások szempontjából fontos tudatosítani, hogy a Föld külső magja is gyorsan forgó folyadék, amelynek geosztrofikus áramlása befolyásolja az élet létrejötte és fennmaradása szempontjából alapvetően fontos mágneses tér szerkezetét is. Bevilágító szemléletes kap-



8.1. ábra. A külső magban zajló áramlás két Taylor-oszlop berajzolásával illusztrált sematikus képe. A fekete gömb a belső magot jelzi, körülötte az érintő henger, a külső gömb a mag és a köpeny elválasztó felülete.

csolat adódik a (8.43) Elsasser-szám alakjából, ha azt B_0-ra rendezzük közel egységnyi *El* értékkel:

$$B_0 \sim \sqrt{\frac{|2\Omega|\varrho_0}{\sigma}}. \tag{8.44}$$

Mágneses tér csakis forgó bolygókon alakulhat ki, és nagysága annál nagyobb, minél gyorsabb a forgás. Mindehhez a közegnek véges vezetőképességűnek kell lennie ($\sigma \neq \infty$).

8.3.5. Tehetetlenségi mágneses hullámok

Ahogy a természetes közegekben, a külső magban és mindenfajta forgatott plazmában kialakulhatnak hullámok gyorsan változó külső hatás, a mag esetében pl. földrengés következtében, amelyek már nem geosztrofikusak. Konkrét leírásukhoz érdemes kiküszöbölni a mágneses térrel kapcsolatos vektoriális szorzatokat a (8.39), (8.40) egyenletekből.

A hidrodinamikai mozgásegyenletben a $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{B}/\mu_0$ alakot és a $\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B} = (\mathbf{B}\operatorname{grad})\mathbf{B} - \operatorname{grad}\mathbf{B}^2/2$ azonosságot használva

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\Omega\mathbf{v}\times\mathbf{n} + \frac{1}{\varrho_0\mu_0}(\mathbf{B}\operatorname{grad})\mathbf{B} - \frac{1}{\varrho_0}\operatorname{grad}p'', \tag{8.45}$$

ahol az új p'' dinamikai nyomásba beolvasztottuk a $\mathbf{B}^2/(2\mu_0)$ tagot, ami valóban nyomás mértékegységű. Az indukciós egyenletben használjuk, hogy $\operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] = \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{v} + (\mathbf{B}\operatorname{grad})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{B}$, ami a divergenciamentességek miatt a

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B}\operatorname{grad})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{B} \tag{8.46}$$

alakra vezet. A (8.45), (8.46) egyenletek a (8.31) feltételekkel meghatározzák a csatolt $(\mathbf{v},\mathbf{B})$ tereket. Ezekben az egyenletekben nem jelenik meg a vezetőképesség, tehát leírható velük a ideális vezető ($\sigma\to\infty$) esete. A továbbiakban mechanikai és elektromos veszteségektől mentes

közeg mozgását tanulmányozzuk. A (8.27) áramsűrűség ekkor csak úgy lehet véges, ha

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{8.47}$$

vagyis az elektromos térerősség megkapható a $(\mathbf{v}, \mathbf{B})$ terek ismeretében, és mindig merőleges lesz a sebesség és a mágneses tér közös síkjára.

A hullám konkrét jellegét illetően tegyük fel, hogy a forgatott rendszerben adott egy $\mathbf{B}_0$ konstans mágneses tér, és az alapállapot áramlásmentes. Azt vizsgáljuk, milyen hullám jöhet létre a $(\mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B_0})$ alapállapotban a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{v}$ terek kis megváltoztatására. Ennek érdekében linearizáljuk a (8.45), (8.46) egyenleteket, amelyekben $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, ahol $\mathbf{B}'$ kicsi, és a $\mathbf{v}$ sebességvektor nagysága is kicsi. A másodrendűen kicsi mennyiségeket elhagyva a linearizált alak

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 2\Omega \mathbf{v} \times \mathbf{n} - \frac{1}{\varrho_0} \operatorname{grad} p'' + \frac{1}{\varrho_0 \mu_0} (\mathbf{B}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{B}', \tag{8.48}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{v}. \tag{8.49}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel azt is, hogy a $\mathbf{B}_0$ vektor *párhuzamos* a z irányú forgástengellyel, vagyis $\mathbf{n}$-nel. Ezért a $\mathbf{B}_0$ grad művelet mindenütt $B_0 \partial / \partial z$-t jelent. Az 1.9. fejezet tárgyalásához hasonlóan, itt is az (x, z) síkban terjedő síkhullámokat $(k_y = 0)$ feltételezve írhatjuk, hogy

$$\left(\mathbf{v}, \frac{p''}{\varrho_0}, \mathbf{B}' \right) = \left(u_0, v_0, w_0, P_0, B_{x0}, B_{y0}, B_{z0} \right) e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)}, \tag{8.50}$$

amelynek alapján a tereknek lehet y komponense is. Ezt behelyettesítve

$$-i\omega_0 u_0 = 2\Omega v_0 - i k_x P_0 + \frac{B_0}{\varrho_0 \mu_0} i k_z B'_{x0}, \tag{8.51}$$

$$-i\omega_0 v_0 = -2\Omega u_0 + \frac{B_0}{\varrho_0 \mu_0} i k_z B'_{y0}, \tag{8.52}$$

$$-i\omega_0 w_0 = -i k_z P_0 + \frac{B_0}{\varrho_0 \mu_0} i k_z B'_{z0}, \tag{8.53}$$

$$-i\omega_0 B'_{x0} = B_0 i k_z u_0, \qquad -i\omega_0 B'_{y0} = B_0 i k_z v_0, \qquad -i\omega_0 B'_{z0} = B_0 i k_z w_0. \tag{8.54}$$

Természetesen érvényesek a divergenciamentességből adódó

$$k_x u_0 + k_z w_0 = 0, \qquad k_x B'_{x0} + k_z B'_{z0} = 0 \tag{8.55}$$

feltételek is. A (8.51)–(8.55) egyenletek az (1.79)–(1.82) polarizációs egyenletek általánosításai mágneses tér jelenlétében.

Néhány általános tulajdonság már most leolvasható. (8.54) vektoriális alakban azt jelenti, hogy

$$\mathbf{B}'_0 = -\frac{B_0 k_z}{\omega_0} \mathbf{v}_0, \tag{8.56}$$

vagyis a hullámban a sebesség és a mágneses tér perturbációi azonos egyenes mentén rezegnek, egymással ellentétesen. (8.55) szerint a sebességvektor és a mágneses perturbáció is merőlegesek a $\mathbf{k}$ vektorra, a hullám terjedési irányára: a hullám transzverzális.

A diszperziós reláció meghatározása érdekében helyettesítsük be a (8.54) egyenletekből kapott tereket a (8.51)–(8.53) egyenletek jobb oldalára. Átrendezés után kapjuk, hogy

$$i\left[-\omega_0+\frac{(B_0k_z)^2}{\varrho_0\mu_0}\frac{1}{\omega_0}\right]u_0=2\Omega v_0-ik_xP_0, \tag{8.57}$$

$$i\left[-\omega_0+\frac{(B_0k_z)^2}{\varrho_0\mu_0}\frac{1}{\omega_0}\right]v_0=-2\Omega u_0, \tag{8.58}$$

$$i\left[-\omega_0+\frac{(B_0k_z)^2}{\varrho_0\mu_0}\frac{1}{\omega_0}\right]\frac{k_x^2}{k_z^2}u_0=ik_xP_0, \tag{8.59}$$

ahol az utolsó egyenletben használtuk, hogy (8.55) szerint $w_0=-(k_x/k_z)u_0$. A (8.59) egyenletből ik_xP_0-t (8.57)-be helyettesítve a jobb oldal összevonható a bal oldallal:

$$i\left[-\omega_0+\frac{(B_0k_z)^2}{\varrho_0\mu_0}\frac{1}{\omega_0}\right]\frac{k^2}{k_z^2}u_0=2\Omega v_0, \tag{8.60}$$

ahol k a hullámszámvektor hossza. Ezt és a (8.58) egyenletet összeszorozva, gyökvonás után kapjuk a diszperziós relációt meghatározó egyenletet:

$$-\omega_0+\frac{(B_0k_z)^2}{\varrho_0\mu_0}\frac{1}{\omega_0}=\pm\frac{2\Omega k_z}{k}. \tag{8.61}$$

A mágneses tér nélküli esetben természetesen visszakapjuk a tehetetlenségi hullámok (1.85) diszperziós relációját.

Tekintsük a másik speciális esetet, amikor a közeg nem forgatott ($\Omega=0$), de van mágneses tér. Ekkor

$$\omega_0=\pm\frac{B_0k_z}{\sqrt{\varrho_0\mu_0}}=\pm\frac{B_0k}{\sqrt{\varrho_0\mu_0}}\sin\theta, \tag{8.62}$$

ahol θ a terjedés irányának a vízszintessel bezárt szöge. Az ilyen diszperziójú hullámok az ún. *Alfvén-hullámok*, amelyek szinte minden plazmában előfordulhatnak. (H. O. G. Alfvén (1908–1995) svéd plazmafizikus, az MHD egyik kidolgozója, aki elsőként írta le a nevét viselő hullámokat 1942-ben). Ezekben a hullámokban a rezgés a $(\mathbf{k},\mathbf{B}_0)$ síkra merőlegesen, az y tengely mentén történik. Az Alfvén-hullám terjedési- és csoportsebessége

$$c=\frac{\omega_0(\mathbf{k})}{k}=\pm\frac{B_0}{\sqrt{\varrho_0\mu_0}}\frac{k_z}{k}=\pm\frac{B_0}{\sqrt{\varrho_0\mu_0}}\sin\theta,\qquad \mathbf{c}^*=\operatorname{grad}\omega_0(\mathbf{k})=\pm\frac{B_0}{\sqrt{\varrho_0\mu_0}}\mathbf{n}. \tag{8.63}$$

A sebesség függ a terjedési iránytól, a csoportsebesség z irányú, a hullám diszperzív. Az energia mindig a $\mathbf{B}_0$ tér irányában terjed. A

$$c_A=\frac{B_0}{\sqrt{\varrho_0\mu_0}} \tag{8.64}$$

mennyiség az ún. Alfvén-sebesség, a hullámok jellegzetes sebessége. A Föld külső magjában $B_0=4\cdot10^{-4}$ Tesla-val $c_A=4$ mm/s-nak adódik. A tipikus Alfvén-frekvencia $\omega_{0A}=c_A\,k$, a $\lambda=600$ km jellegzetes hullámhosszal $4\cdot10^{-8}$ 1/s, és ez kb. 5 éves periódust jelent.

Annak érdekében, hogy az általános *tehetetlenségi mágneses hullámok* diszperziós relációját jól áttekinthető formában kapjuk, bevezetjük az ω_{0A} jelölést az Alfvén-hullám diszperziós relációja

abszolút értékére, és ω_{0T}-t a tehetetlenségi hulláméra. A (8.61) így

$$\omega_0^2 \pm \omega_0 \omega_{0T} - \omega_{0A}^2 = 0 \tag{8.65}$$

alakú. Az összefüggés jól mutatja, hogy az általános eset az Alfvén- és a tehetetlenségi hullámok keveréke. A megoldás

$$\omega_0 = \pm \frac{\omega_{0T}}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\omega_{0A}}{\omega_{0T}} \right)^2} \right]. \tag{8.66}$$

Láttuk, hogy a mágneses hatás gyengébb, mint a forgatásé, ami a frekvenciák számértékéből is látszik: $\omega_{0A} \approx 4 \cdot 10^{-8}$ 1/s, $\ll \omega_{0T} \approx 10^{-4}$ 1/s (hiszen (1.85) szerint az ω_{0T} tehetetlenségi frekvencia 2Ω nagyságrendű), ezért elég a gyököt első rendig sorba fejteni. Így

$$\omega_0 = \begin{cases} \pm \frac{\omega_{0A}^2}{\omega_{0T}} = \pm \frac{B_0^2}{2\Omega} \frac{k_z k}{\varrho_0 \mu_0}, \\ \mp \left(\omega_{0T} + \frac{\omega_{0A}^2}{\omega_{0T}} \right) = \mp \left(\frac{2\Omega k_z}{k} + \frac{B_0^2}{2\Omega} \frac{k_z k}{\varrho_0 \mu_0} \right). \end{cases} \tag{8.67}$$

A tehetetlenségi mágneses hullámoknak tehát két fajtája létezik: a felső diszperziós reláció (8.66) szögletes zárójelében a pozitív előjelet véve adódik, és a tehetetlenséginél sokkal lassabb hullámokat ír le. Frekvenciájuk $(4 \cdot 10^{-8})^2 / 10^{-4} = 1{,}6 \cdot 10^{-11}$ 1/s nagyságrendű, ami több mint ezer éves periódusnak felel meg. Az alsó reláció mágneses tér által befolyásolt tehetetlenségi hullámokat ad, de mivel a korrekció éppen akkora, mint amit most megbecsültünk, ez a korrekció elhanyagolhatóan csekély. A mágneses hatás ebben a hullámfajtában nem lényeges, gyakorlatilag tehetetlenségi hullámok.

9. fejezet

A sekélység hatása (folytatás)

9.1. Kvázi-geosztrofikus dinamika a sekélyfolyadék-egyenletekből

A szabad felszínű sekély folyadék (2.14)–(2.15), (2.12), (2.3) egyenletei írhatók mint

$$\frac{du}{dt} = +2\Omega v - g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{9.1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u - g\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{9.2}$$

$$\frac{d}{dt}(\eta - d) = -H \operatorname{div} \mathbf{u} - (\eta - d) \operatorname{div} \mathbf{u}. \tag{9.3}$$

Geosztrofikus egyensúlyban a bal oldalak eltűnnek, stacionárius áramlás alakul ki. Feltesszük, hogy d és η Rossby-szám rendű, és jelenlétükben lassú időfüggő viselkedés figyelhető meg, amelyhez Ro rendű sebességdivergencia tartozik. Ezért az $(\eta - d)$ div $\mathbf{u}$ tag másodrendűen kicsi és elhanyagolható.

A (9.1, 9.2) egyenleteket a sebességre rendezve, majd használva, hogy a sebességek időderiváltjai kicsik, és ezért ezekben a tagokban $\mathbf{u}$ a geosztrofikus (2.28) kifejezés alapján fejezhető ki a felszíni alakkal, kapjuk, hogy

$$u = -\frac{g}{2\Omega}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{(2\Omega)^2}\frac{d}{dt}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{9.4}$$

$$v = \frac{g}{2\Omega}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{(2\Omega)^2}\frac{d}{dt}\frac{\partial \eta}{\partial y}. \tag{9.5}$$

Ezek a sebesség első, nemgeosztrofikus korrekciót is tartalmazó kifejezései, amelyekből

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{g}{(2\Omega)^2}\frac{d}{dt}\Delta\eta \tag{9.6}$$

maga is kis mennyiség. A mélység (9.3) egyenlete így teljes deriváltként áll elő:

$$\frac{d}{dt}\left(\eta - d - R^2\Delta\eta\right) = 0, \tag{9.7}$$

ahol R a (2.49) Rossby-sugár. A zárójelben álló kifejezés minden tagja kicsi, Rossby-szám nagyságrendű, ezért használhatjuk a geosztrofikus határesetben érvényes $\eta = (2\Omega/g)\psi$ kapcsolatot

(2.30), amellyel $2\Omega/H$-val szorzás után

$$\frac{d}{dt}\left(R^{-2}\psi - \Delta\psi - \frac{2\Omega}{H}d\right) = 0. \tag{9.8}$$

A teljes időderiváltban szereplő u, v tényezőket az áramlási függvénnyel kifejezve, a (2.52) kvázi-geosztrofikus egyenletre jutunk. Az tehát a potenciális örvényesség megmaradásának közvetlen felhasználása nélkül is következik a sekélyfolyadék-egyenletekből. A kvázi-geosztrofikus esetben a teljes hidrodinamikai egyenletrendszer és a megmaradási tétel ugyanarra a skalár egyenletre vezet. Hasonló ez ahhoz, ahogy az egydimenziós súrlódásmentes mozgások Newton-egyenlete ekvivalens az energiamegmaradással.

A döntött aljzat $d(y) = \gamma y$ speciális esetében $d\,d(y)/dt = \gamma v = \gamma\partial\psi/\partial x$, és

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta\psi - R^{-2}\psi\right) + \frac{2\Omega\gamma}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \tag{9.9}$$

Ennek az egyenletnek linearizált változata (2.47), amelyet a topografikus Rossby-hullámok leírásakor használtunk.

9.2. Szolitonok és a KdV-egyenlet

A szolitonokat az ún. Korteweg–de Vries-egyenlet, röviden a KdV-egyenlet írja le (melyet D. J. Korteweg és G. de Vries holland matematikusok 1895-ben vezettek le). Ez az $\eta(x,t)$ felszíni alak dinamikáját adja meg H magasságú közeg felszínén

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} \pm c_0\left[\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{3}{2H}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{H^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right] = 0 \tag{9.10}$$

formában, ahol a felső előjel a jobbra haladó hullámhoz tartozik, és $c_0 = \sqrt{gH}$ a lineáris hullámok (2.66) terjedési sebessége. A sebességtér vezető rendben az

$$u(x,t) = \pm\frac{c_0}{H}\eta(x,t) \tag{9.11}$$

összefüggésből kapható. A KdV-egyenlet levezetését a következő fejezetben adjuk meg, itt csak eredményként értelmezzük, és tulajdonságait tárgyaljuk.

Tekintsük először a KdV-egyenlet lineáris változatát, amelyben a zárójel második tagját elhagyjuk. Az $\eta = \eta_0\exp\left(i(k_x x - \omega_0 t)\right)$ helyettesítéssel az

$$\omega_0 = \pm c_0 k_x\left(1 - \frac{1}{6}(k_x H)^2\right) \tag{9.12}$$

diszperziós relációt kapjuk. A zárójelben megjelenő tag mutatja, hogy a KdV-egyenletben az $\varepsilon = H/L$ mélységi arányban (melynek most $\varepsilon = k_x H$ felel meg) nemcsak vezető rendig megyünk el, hanem megtartjuk az első lényeges, ε^2 rendű korrekciót is. A KdV-egyenlet lineáris hullámai tehát *diszperzívek*, amelyekben egy kezdeti hullámcsomag szétfolyik, ahogyan az 1.12. ábra mutatja.

A KdV-egyenlet nemlineáris tagja az advektív gyorsulás $(\mathbf{v}\,\mathrm{grad})\mathbf{v}$ következménye, és azért jelenik meg, mert véges amplitúdójú hullámokat tanulmányozunk, amelyekben a sebesség, il-

letve a felületi alakváltozás nem infinitezimálisan kicsi. Tekintsük most a KdV-egyenletet a diszperziót okozó utolsó tag nélkül:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \pm c_0 \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2H} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 0. \tag{9.13}$$

Nemlineáris hullámban diszperziós reláció nem értelmezhető. Az egyenlet rendelkezik viszont azzal az érdekes tulajdonsággal, hogy az

$$\eta(x,t) = F\left(x \mp c_0 \left[1 + \frac{3\eta(x,t)}{2H} \right] t \right) \tag{9.14}$$

kifejezés bármilyen $F(x)$ függvényalakkal megoldása. A fentiekből látszik, hogy $F(x)$ egyben a kezdeti $\eta(x,0)$ hullámalak. Ez a nemlineáris egyenlet *hullámtörést* ír le, ugyanis a nagyobb felszíni kiemelkedéshez tartozó részek gyorsabban mozognak, és ezért egy kezdeti kidudorodás a haladás irányában való feltorlódáshoz, és azután átcsapáshoz vezet, ahogy a sekély partra kifutó vízhullámokon is megfigyelhető (9.1. ábra).



9.1. ábra. A hullámtörés mechanizmusa: a kezdeti egyszerű felületi kidudorodás aszimmetrikussá válik, és a hullámmaximum egy idő után megelőzi a hullám elejét. Ez az instabil állapot a hullám megtörését eredményezi. Az ábra három egymást követő időpontbeli állapotot mutat jobbra haladó hullámban.

A teljes KdV-egyenletben mind a diszperziót, mind a nemlinearitást kifejező tag jelen van. A nemlinearitásból adódó kompaktságra törekvés és a diszperzió miatti szétfolyási tendencia egymással verseng. A nemlineáris KdV-hullámok létezése tehát annak tulajdonítható, hogy enyhén diszperzív közegben a gyenge nemlinearitás éppen kompenzálhatja a diszperzió hatását. A szoliton mozgás közben megtartja alakját, a (9.10) egyenlet jobbra haladó szolitonmegoldása

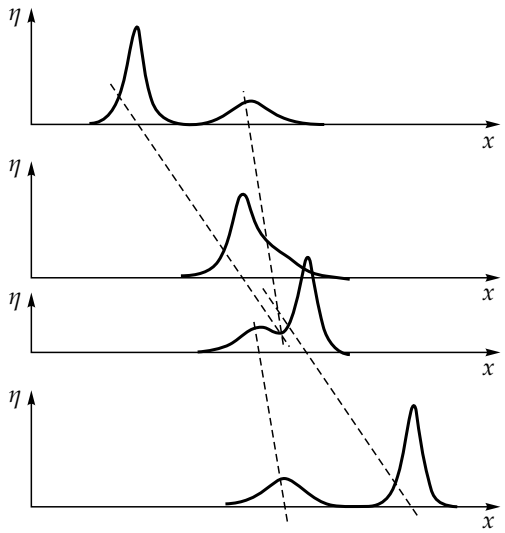
$$\eta(x,t) = \frac{\eta_0}{\mathrm{ch}^2\left[(x-ct)/l\right]}, \tag{9.15}$$

ahol (2.74) és (2.75) a szoliton sebessége és félszélessége (2.16. ábra). A balra haladó szolitonhullámban $-ct$ helyett ct áll.

Az alábbiakban összefoglaljuk a KdV-egyenlet megoldásainak további fontos tulajdonságait.

(A) Két szoliton találkozáskor átfed, kölcsönhat, és egy bonyolult kétszoliton-alakot vesz fel (amely szintén egzakt megoldása a KdV-egyenletnek). Véges idő után azonban különválnak, és miután elegendően eltávolodtak, visszanyerik eredeti alakjukat, és ezért sebességüket is. A kölcsönhatás egyedüli maradványa egy fázistolás: a nagyobb szoliton kissé előre, a kisebb kissé hátra tolódik ahhoz képest, ahol kölcsönhatás nélkül lettek volna (9.2. ábra).

(B) Tetszőleges lokalizált $\eta(x,0)$ kezdeti felszíni kidudorodásból kialakul legalább egy jobbra és balra haladó szoliton. Magasabb kidudorodás esetén több, de mindig véges számú szoliton jön létre. Az eltérő sebességek miatt a több szolitonból álló, adott irányba haladó vonulatok előbb-utóbb nagyság szerint rendeződnek, a legnagyobb vezeti a sort. Ekkor már mindegyik alakja (9.15) típusú, és a maximumok burkolója hosszú idő után egy egyenes mentén fekszik, amint a (2.74) összefüggésből következik. A szolitonvonulatot rendszerint egy kis amplitúdójú hullámvonulat követi. Mivel ennek diszperziós relációja (9.12), csak a leghosszabb ($k_x \approx 0$)



9.2. ábra. Két szoliton kölcsönhatása. Mindkét szoliton jobbra halad az x tengely mentén, ezért a nagyobb utoléri a kisebbet, és kétszoliton-állapotba kerülnek. Ennek felbomlása után elegendő hosszú idővel eredeti alakjuk és sebességük helyreáll. Az egymás alatti ábrák egyre későbbi időpontoknak felelnek meg. A szaggatott vonalak a kezdeti és végállapot sebességének megfelelő elmozdulást mutatják. Az ütközés pillanatában ezek nem esnek egybe, amely mutatja, hogy fáziseltolódás történt.

hullám halad c_0 sebességgel, a többiek ennél is lassabban. A lineáris hullámvonulat tehát egyre jobban lemarad (9.3. ábra).

(C) Kezdeti felszíni behorpadás ($\eta(x,0) < 0$) esetén szolitonok *nem* keletkeznek. Negatív szoliton tehát nem létezik. Ekkor csak a kis amplitúdójú lineáris hullámvonulat alakul ki, amely a c_0 sebességnél nem haladhat gyorsabban (9.4. ábra).

A (B), (C) tulajdonságok megérthetők abból az érdekes kapcsolatból, amely a KdV-egyenlet által leírt nemlineáris folyamat és a kezdeti $\eta(x,0)$ felületalak által definiált kvantummechanikai sajátérték-probléma között fennáll. A szolitonok paraméterei leolvashatók ugyanis a $-\eta(x,0)$ görbe mint potenciálvölgy kötött állapotainak ismeretében, míg a kis amplitúdójú hullámok a szabad állapotoknak felelnek meg. Ennek pontos megfogalmazásához érdemes áttérni az

$$f(r,\tau) = \frac{3}{2H}\eta(x,t) \tag{9.16}$$

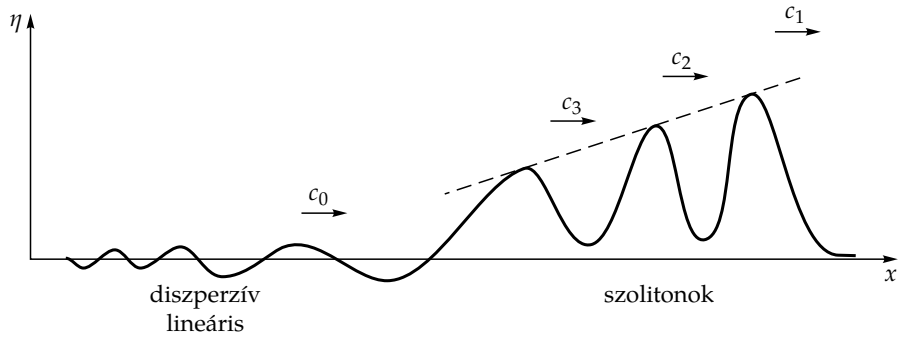
új dimenziótlan felszíni formára, ahol

$$r(x,t) \equiv \frac{x \mp c_0 t}{H}, \qquad \tau(t) \equiv \frac{c_0 t}{6H} \tag{9.17}$$

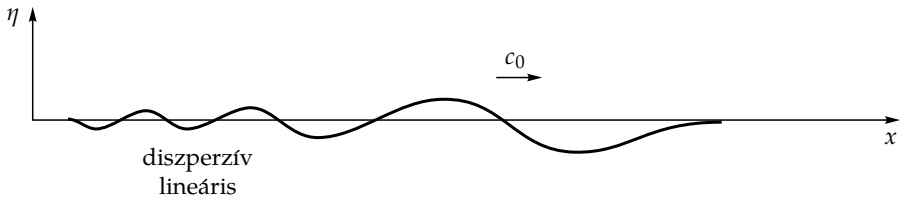
a c_0 sebességgel jobbra vagy balra mozgó koordináta-rendszerbeli egyfajta dimenziótlan távolság, illetve dimenziótlan idő. (A 3/2 és 6-os faktorok használatát csak az eredmény áttekinthetőbb alakja indokolja.) Így a

$$\pm\frac{\partial f}{\partial \tau} + 6f\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} = 0 \tag{9.18}$$

dimenziótlan KdV-egyenletre jutunk. Az ún. *inverz szórási transzformáció* (melynek részleteit itt nem ismertetjük) segítségével megmutatható, hogy az $f(r,0) = 3\eta(Hr,0)/(2H)$ kezdeti alak-



9.3. ábra. Általános kezdeti kidudorodásból kialakuló jobbra haladó hullámvonulat elegendően hosszú idő eltelte után (a függőleges skála torzított). A sort a legnagyobb szoliton vezeti, a többiek (mind más magasságú) nagyságrendben követik, és a kis amplitúdójú hullámvonulat zárja. Ez egyre jobban szétfolyik, és lemarad a szolitonoktól. Az utóbbiak burkolója (szaggatott vonal) mindig egyenes.



9.4. ábra. Általános kezdeti behorpadásból kialakuló hullámvonulat. Szolitont nem tartalmazhat, csak kis amplitúdójú, szétfolyó hullámok jelennek meg, amelyek közül csak a leghosszabb terjed c_0 sebességgel.

hoz tartozó szolitonok számát és adatait a

$$-\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} - f(r,0)\psi(r) = E\psi(r) \tag{9.19}$$

egyenlet kötött állapotai határozzák meg.

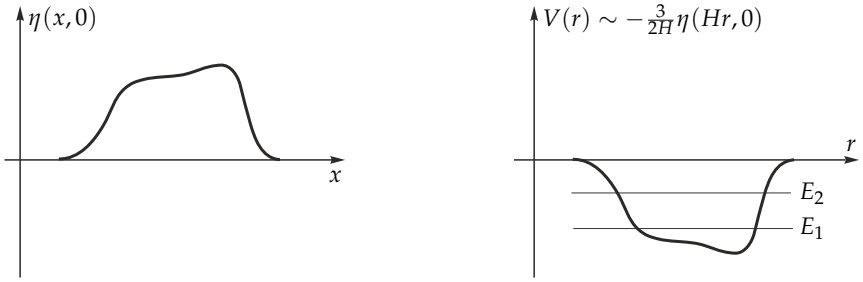
Ez a $V(r) = -f(r,0)$ egydimenziós potenciálvölgyben mozgó részecske dimenziótlan Schrödinger-egyenlete,[1] amelynek sajátenergiája E. A kötött állapotokhoz negatív E_n dimenziótlan sajátértékek tartoznak (9.5. ábra).

A kialakuló jobbra, balra haladó szolitonpárok N száma (ha azok már jól elkülönültek) azonos a kötött állapotok számával. Az n-edik kötött állapot E_n sajátértékével a jobbra/balra haladó (a képlet argumentumában negatív/pozitív előjelű) n-edik szoliton alakja az

$$f_n(r,\tau) = \frac{2|E_n|}{\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{|E_n|}\,(r \mp 4|E_n|\tau)\right)}, \tag{9.20}$$

$n = 1, \ldots N$, dimenziótlan kifejezéssel adható meg. A ch függvény argumentumában felléphet egy tetszőleges fázis is, hiszen a hely- és időmérés kezdetét tetszőlegesen választhatjuk.

[1] A $V(x)$ potenciálban mozgó m tömegű részecske E energiához tartozó $-\hbar^2/(2m)d^2\psi(x)/dx^2 + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$ sajátérték-egyenletében a távolságot a, a potenciált és energiát $\hbar^2/(2ma^2)$ egységekben mérve a $-d^2\psi(x)/dx^2 + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$ alakot kapjuk. (9.19) ennek felel meg, amelyben a dimenziótlan távolságot, potenciált és energiát r, $-f(r,0)$, illetve E jelöli.



9.5. ábra. A H vízmélységhez tartozó kezdeti felszíni alak (bal oldal) és a kvantummechanikai sajátérték-probléma (jobb oldal) kapcsolata. A kezdeti felszínalak ellentettjével arányos potenciálgödör kötött állapotainak sajátenergiái határozzák meg a szolitonok számát és adatait a (9.20)–(9.23) összefüggések szerint.

A dimenziós alakra áttérve azt kapjuk, hogy amikor a szolitonok már jól elkülönülnek, akkor alakjuk

$$\eta_n(x,t) = \frac{4|E_n|H}{3\,\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{|E_n|/H^2}\,(x \mp |c_n|t)\right)}. \tag{9.21}$$

Az n-edik szoliton tehát

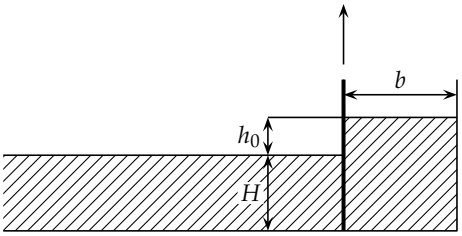
$$|c_n| = c_0\left(1 + \frac{2}{3}|E_n|\right) \tag{9.22}$$

sebességgel halad jobbra vagy balra, amplitúdója és félszélessége

$$\eta_{0n} = \frac{4|E_n|H}{3}, \qquad l_n = \frac{H}{\sqrt{|E_n|}} \tag{9.23}$$

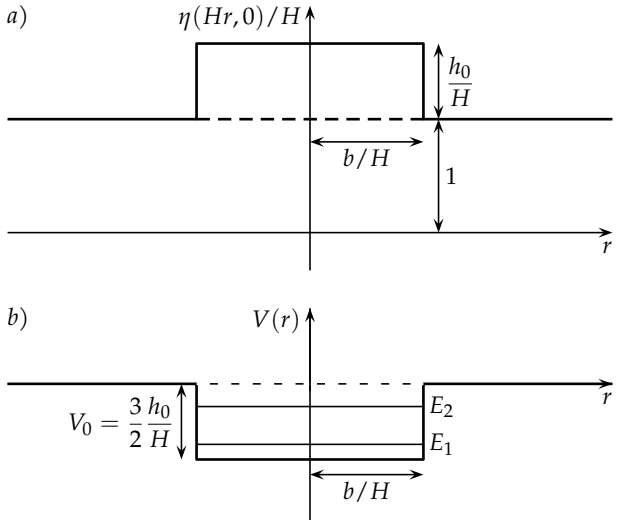
a (2.74), (2.75) összefüggésekkel összhangban. A sajátenergia a szoliton amplitúdóját, sebességét és a félszélességet is meghatározza.

Laboratóriumi körülmények között szolitont gyakran egy, az átlagos vízszintnél magasabbra töltött rekesz falának kihúzásával keltenek egy hosszú kádban, ahogy ez a kísérlet mutatja.



9.6. ábra. A folyadék kezdeti alakjának paraméterei balra haladó szolitonok keltésekor laboratóriumban. A felfelé mutató nyíl a rekesz falának kihúzását jelzi.

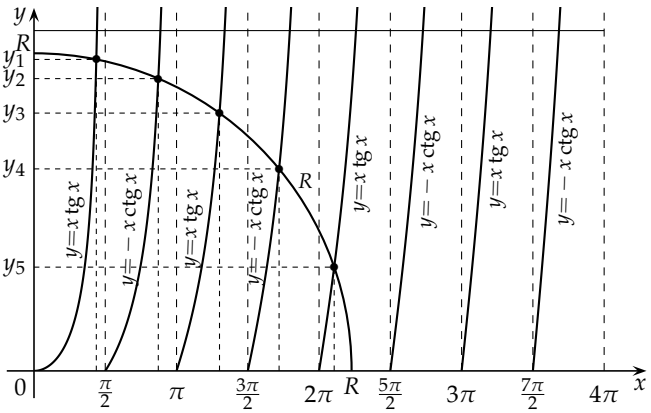
A kezdeti felszínalak ilyenkor a 9.6. ábra szerint vízszintes, ezért a kezdőfeltétel egy *derékszögű potenciálgödröt* definiál. Mivel az inverz szórás elmélete mindkét irányban nagy kiterjedésű közegre vonatkozik, nem a jobb oldali fallal lezárt lépcsőnek megfelelő potenciálgödröt kell tekintenünk, hanem annak tükörszimmetrikussá tett változatát, a $2b$ szélességű gödröt. Ezzel formálisan megkétszerezzük az eredeti vízlépcső bh_0 „térfogatát”, de ebből az elképzelt lépcsőből két irányban szimmetrikusan indulnak szolitonpárok, és a kísérlet ezek balra haladó változatát követi.



9.7. ábra. A kezdeti derékszögű felszíni kiemelkedés dimenziótlan alakja (a) és az azzal kapcsolatos kvantummechanikai probléma dimenziótlan potenciálgödre (b)

A 9.6. ábra kísérlete kapcsán vizsgálandó kezdeti felszíni alakot és potenciálgödröt a 9.7. ábra mutatja. A felső képen a felszíni alakot és a vízszintes koordinátát is H egységekben adtuk meg, és így jól áttekinthetővé válik az alsó képen mutatott potenciállal való kapcsolat. A gödör mélysége $V_0 = 3h_0/(2H)$.

A kvantummechanikából ismert, hogy a $-V_0$ mélységű, a félszélességű potenciálgödörben a kötött állapotok sajátenergiáira olyan transzcendens egyenlet adódik, amely grafikusan egy $R = \sqrt{2ma^2V_0/\hbar^2}$ sugarú kör és $\pi/2$ egész számú többszöröseiben induló, felfelé futó (tangens és kotangens típusú) görbék metszéspontjaiként adja meg a sajátenergiák paramétereit, 9.8. ábra.



9.8. ábra. A V_0 mélységű potenciálgödör sajátenergiáira kapott egyenlet grafikusan ábrázolva. A megoldások a görbék metszéspontjai.

A kötött állapotok száma annyi, ahányszor $\pi/2$ belefér az R sugárba plusz 1, vagyis

$$N = \left[\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}a\frac{2}{\pi}\right] + 1,$$

ahol a szögletes zárójel az egészrészt jelöli. A $+1$ tag azt fejezi ki, hogy az origóból is indul egy

görbe, vagyis egy megoldás még nagyon kis V_0-okra is létezik. A félszélességet tetszőleges a_0 mérettel, a potenciált pedig $\hbar^2/\left(2ma_0^2\right)$-tel dimenziótlanítva, a kvantummechanikai eredmény a dimenziótlan potenciállal és mérettel kifejezve (vagyis a $V_0 \to V_0\hbar^2/\left(2ma_0^2\right)$, $a \to aa_0$ transzformációt alkalmazva),

$$N = \left[\sqrt{V_0}a\frac{2}{\pi}\right] + 1.$$

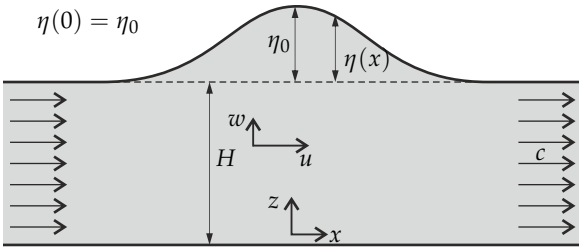
A szolitonproblémában b/H felel meg az a dimenziótlan félszélességnek, $3h_0/(2H)$ a V_0 dimenziótlan gödörmélységnek. A h_0 szintemelkedésű b szélességű zsilip kinyitásakor tehát H mélységű folyadékban

$$N = \left[\sqrt{\frac{h_0}{H}}\frac{b}{H}\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right] + 1 \tag{9.24}$$

balra haladó szoliton fejlődik ki. Ennek értelmében $H = 5$ cm-es folyadékban $h_0 = 0{,}5$ cm-es kezdeti kidudorodással a $b = 60$ cm széles rekeszben $N = \left[1/\sqrt{10}\cdot 12\cdot\sqrt{6}/\pi\right] + 1 = [2{,}96] + 1 = 3$ szoliton keletkezik. Érdemes hangsúlyozni, hogy a KdV-szolitonok η_0 amplitúdójának sokkal kisebbnek kell lennie a H mélységnél, ami csak kis h_0-lal biztosítható. A szemmel jól követhető szolitonokban h_0/H nem kicsi, ezért ilyen laboratóriumi kísérletben a fenti összefüggés csak közelítőleg teljesül.

9.3. A KdV-egyenlet elemi levezetése

A szolitonok esetén az $\epsilon = H/L$ mélységi arányban fellépő első korrekciók is lényegesek. Ahelyett, hogy az Euler-egyenletből kiinduló hosszú sorfejtést követnénk, megadjuk a KdV-egyenlet elemi levezetését. Ez azon a tapasztalaton alapul, hogy a nem forgatott folyadékok áramlásai rendszerint örvénymentesek. A div- és rot-mentesség előírásán kívül csak az ideális folyadék peremfeltételeit, köztük a felületi nyomás állandóságát vesszük figyelembe, utóbbit a Bernoulli-törvény alapján.



9.9. ábra. Balra, c sebességgel haladó szoliton és áramlása a vele együtt mozgó koordináta-rendszerből nézve

Az áramlás div- és rot-mentességét iterációs sémával követjük, és a sebességkomponenseket az $\eta(x)$ felszíni alakkal fejezzük ki, amelyről feltesszük, hogy a végtelenben eltűnik. Az együtt mozgó koordináta-rendszerben (9.9. ábra) az áramlás időtől független.

Kiindulási sebességként pozitív irányú vízszintes áramlást tekintünk, amelynek sebességtere

$$u_0(x) = \frac{cH}{H+\eta(x)} = \frac{c}{1+\eta(x)/H} \approx c\left(1 - \frac{\eta}{H} + \frac{\eta^2}{H^2}\right) \tag{9.25}$$

alakú. A választást az indokolja, hogy ez az alak biztosítja az $\int u(x,z)dz$ vízhozam állandóságát

minden x helyen. Mivel η kicsi a H mélységhez képest, az η/H szerinti sorfejtés első tagjait írjuk csak ki.

Ez az áramlás rotációmentes, mert u_0 nem függ z-től, és függőleges áramlás nem létezik, de nem divergenciamentes. A divergenciamentességet úgy biztosítjuk, hogy az iteráció következő lépéseként figyelembe veszünk egy w_0 függőleges komponenst is, amelyre

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \tag{9.26}$$

vagyis

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{c\eta'}{H}\left(1 - \frac{2\eta}{H}\right), \tag{9.27}$$

ahol az $\eta(x)$ függvény deriváltját vesszővel jelöljük. Ebből

$$w_0(x,z) = \frac{c\eta'(x)}{H}\left(1 - \frac{2\eta(x)}{H}\right)z. \tag{9.28}$$

Itt felléphetne egy x-től függő függvény, de az alsó peremfeltétel, miszerint $w(z=0)=0$, ezt eltűnővé teszi. A zárójelben megjelenő $2\eta/H$ a vezetőnél magasabb korrekciókra vezet, ezért a továbbiakban nem írjuk ki.

Az u_0, w_0 sebességtér nem örvénymentes, ezért a vízszintes komponenshez hozzáadunk egy u_1 korrekciós tagot, amelyre

$$\frac{\partial(u_0+u_1)}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \tag{9.29}$$

azaz

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} = c\frac{\eta''}{H}z. \tag{9.30}$$

Ebből[2]

$$u_1 = c\frac{\eta''}{H}\left(\frac{z^2}{2} + q(x)\right). \tag{9.31}$$

Az ismeretlen q mennyiséget abból határozzuk meg, hogy az extra vízhozamnak el kell tűnnie:

$$\int_0^{H+\eta} u_1 dz \approx \int_0^H u_1 dz = c\frac{\eta''}{H}\left(\frac{H^3}{6} + q(x)H\right) = 0. \tag{9.32}$$

Ebből $q = -H^2/6$, és a most már divergencia- és örvénymentes sebességtér:

$$u = c\left[1 - \frac{\eta}{H} + \frac{\eta^2}{H^2} + \frac{\eta''}{H}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{H^2}{6}\right)\right], \qquad w = \frac{c\eta'}{H}z. \tag{9.33}$$

Ez az eljárás akármeddig folytatható tovább is, de számunkra elég itt megállni, mert az első lényeges korrekciókat megkaptuk.

Erről a kis tagok nagyságrendi becslésével győződhetünk meg. Amint láttuk, a nemlineáris járulék és a diszperzió a szolitonban egyensúlyban vannak. u kifejezésében nemlineáris tag η^2/H^2, diszperzív pedig $\eta'' z^2/H$, amelynek tipikus értéke $\eta'' H$. A hullám jellegzetes vízszintes méretét L-lel jelölve e tagok nagyságrendi becslése a hullám η_0 amplitúdóját használva

$$\frac{\eta_0^2}{H^2}, \qquad \frac{\eta_0 H}{L^2}. \tag{9.34}$$

A kettő egyenlőségből kapjuk, hogy a jellegzetes vízszintes méret $L = H\sqrt{H/\eta_0}$, ami tehát a vízmélységnél sokkal nagyobbnak adódik, hiszen η_0 kicsi. A fent említett két tag tehát összemérhető, az elhagyottak nagyságrendileg kisebbek.

[2] A $2\eta/H$ tag megtartása (9.28)-ban az η''/H tényezőhöz annál η/H-szor kisebb járulékokat adna csak.

Mivel az áramlás örvénymentes, tetszőleges két pont között is érvényes a Bernoulli-törvény. Felírhatjuk tehát a felszínre is, annak távoli és x koordinátájú pontjában. A légköri nyomás mindkét helyen ugyanakkora, az x helyen a szintemelkedésből $\varrho_0 g\eta(x)$ többletnyomás van jelen:

$$\frac{c^2}{2} = \frac{v^2(x, z = H + \eta)}{2} + g\eta(x). \tag{9.35}$$

A $\mathbf{v} = (u, w)$ sebességnek csak a vízszintes komponense számottevő, mivel w-ben η' jelenik meg, aminek nagyságrendje η_0/L, vagyis az u-beli lineáris tagnál is sokkal kisebb. Mivel η kicsi, z-t elég a H szinten kiértékelni, azaz írhatjuk, hogy

$$v^2(x, z = H + \eta) \approx u^2(x, z = H) = c^2 \left[1 - \frac{\eta}{H} + \frac{\eta^2}{H^2} + \frac{\eta'' H}{3}\right]^2. \tag{9.36}$$

A teljes négyzetben a vegyes tagok mellett vezető rendben csak $(-\eta/H)$ négyzete ad járulékot, így a Bernoulli-egyenletből

$$2\left(\frac{gH}{c^2} - 1\right)\frac{\eta}{H} + 3\frac{\eta^2}{H^2} + \frac{2}{3}\eta'' H = 0. \tag{9.37}$$

Figyelemre méltó, hogy a nemlineáris és diszperzív tag elhanyagolásakor a gömbölyű zárójel eltűnéséből visszakapjuk a lineáris sekélyvízi hullámok $c_0 = \sqrt{gH}$ sebességét. Az új tagok megtartásával differenciálegyenletet kapunk a szoliton együtt mozgó rendszerben érvényes $\eta(x)$ alakjára.

Ahhoz, hogy az időfüggő KdV-egyenletet is megkapjuk tetszőleges haladási irány esetén, érdemes használni, hogy c nagysága csak kicsit tér el c_0-tól, és írni, hogy

$$c = \sqrt{gH}(1 + \alpha/2), \tag{9.38}$$

ahol $\alpha \ll 1$. Ezzel vezető rendig érvényes, hogy

$$\left(\frac{gH}{c^2} - 1\right) = \left(\frac{1}{(1 + \alpha/2)^2} - 1\right) \approx -\alpha = 2\left(1 - \frac{c}{c_0}\right). \tag{9.39}$$

Így a (9.37) egyenlet x szerinti deriválás és $H/4$-gyel való szorzás után

$$\eta' - \frac{c}{c_0}\eta' + \frac{3}{2}\frac{\eta\eta'}{H} + \frac{1}{6}\eta''' H^2 = 0 \tag{9.40}$$

alakúvá válik.

Az álló koordináta-rendszerbe visszatérve η az $x \mp ct$ változó függvénye. Parciális deriváltakat használva η' helyett írható $\partial\eta/\partial x$ vagy $\mp(1/c)\partial\eta/\partial t$. A keresett egyenletben nem jelenhet meg a c sebesség expliciten, hiszen az egyenlet többféle hullámot is leírhat, különböző terjedési sebességekkel (9.4. fejezet). Az időderivált bevezetésére így a (9.40) egyenletnek csak a c-vel arányos tagja alkalmas (s ezért volt érdemes a c-vel arányos (9.37) alakot használni). Ezzel

$$\pm\frac{1}{c_0}\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{3}{2H}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{H^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0, \tag{9.41}$$

s visszakaptuk a (9.10) egyenletet. A konkrét hullámalak úgy kapható meg a legegyszerűbben, hogy a (9.37) egyenletet a (9.39)-beli α paraméterrel írjuk fel, majd szorozzuk η'-vel:

$-2\alpha\eta\eta'/H + 3\eta^2\eta'/H^2 + 2\eta'\eta''H/3 = 0$. A bal oldal a

$$-\alpha\frac{\eta^2}{H} + \frac{\eta^3}{H^2} + \frac{1}{3}\eta'^2 H \tag{9.42}$$

mennyiség deriváltja, a (9.42) kifejezésnek ezért konstansnak kell lennie. Mivel azonban η és η' a végtelenben eltűnnek, ez a konstans zérus. Így az

$$\eta' = \pm\sqrt{\frac{3}{H^3}} \tag{9.43}$$

szétválasztható egyenletre jutunk. Ennek megoldása mind az $\eta' > 0$, mind az $\eta' < 0$ tartományban

$$\eta(x) = \frac{\alpha H}{\mathrm{ch}^2(x/l)}, \tag{9.44}$$

ahol

$$l = H\sqrt{\frac{4}{3\alpha}}. \tag{9.45}$$

A (9.44) kifejezés a szoliton alakja a vele együtt mozgó koordináta-rendszerben. A kifejezés számlálója nem más, mint az amplitúdó, vagyis

$$\eta_0 = \alpha H. \tag{9.46}$$

Az $\alpha = \eta_0/H$ mennyiséget (9.38)-ba helyettesítve megkapjuk a szoliton (2.74) haladási sebességét, (9.45)-ből pedig (2.75) félszélességét.

9.4. Cnoidális hullám

A KdV-egyenlet leír periodikus nemlineáris hullámokat is. Ezeket cnoidális hullámoknak nevezzük, mert a cn-nel jelölt Jacobi-féle elliptikus integrál (az elliptikus koszinuszfüggvény) jelenik meg bennük. Az a jellemző vonásuk, hogy a hullámminimumok sokkal szélesebb tartományra terjednek ki, mint a maximumok. Ilyen hullámok megfigyelhetők sekély part menti vizekben, és alakjuk alapján könnyen megkülönböztethetőek a szinuszhullámoktól (9.10. ábra).



9.10. ábra. Cnoidális hullám sematikus rajza. Ezek egész családja létezik, amelynek tagjai között az m paraméter ($0 \le m \le 1$) tesz különbséget. Ehhez a hullámalakhoz az $m \approx 0{,}9$ érték tartozik.

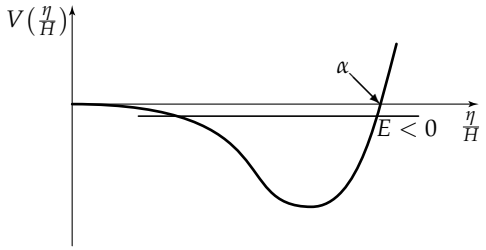
Cnoidális hullámok kelthetők hullámcsatornában, amint ebben a kísérletben látszik, ahol a csatorna végén a hullám megtörik.

Ha térben periodikus hullám létezik, akkor a (9.42) kifejezés nem zérus, hanem véges. A könnyebb értelmezés kedvéért írjuk ezt a következő alakban:

$$\frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{3}{2}\left[-\alpha\frac{\eta^2}{H^2} + \frac{\eta^3}{H^3}\right] = E. \tag{9.47}$$

Ebben a deriváltat időbeli deriválásnak tekintve, az η/H mennyiséget x dimenziótlan helykoordinátának, felismerhetjük, hogy az első tag egy egységnyi tömegű részecske mozgási energiája, E pedig az összenergia megfelelője: egydimenziós potenciálmozgásról van szó, a $V(x) \sim$

$-\alpha x^2 + x^3$, $\alpha \ll 1$ köbös potenciálban. Mivel a lokális potenciálmaximum nulla energiához tartozik, kötött mozgás csak negatív energiákra alakulhat ki. A mozgás a V függvény és az E vízszintes egyenes metszéspontjai, vagyis a mechanikai fordulópontok között jön létre (9.11. ábra). Az m paraméter közelítőleg ennek a szakasznak a hosszával arányos.



9.11. ábra. A cnoidális hullámhoz rendelhető potenciálmozgás képe, ahol $V(x) = 3\left(-\alpha x^2 + x^3\right)/2$. Az ilyen hullámokban $E < 0$.

A szolitonmegoldás az $E = 0$ kritikus energiához tartozó mozgásnak felel meg. Ez nagyon kis η értékeket mutat hosszú „ideig", majd gyorsan eljut az αH maximumig, ahonnét visszafordul, és lassan belesimul az $\eta \to 0$ tartományba. A hullámot jellemző m paraméter 1-hez közeli értékei nullához közeli energiáknak, a 0 körüliek pedig a gödör aljához közeli energiáknak felelnek meg. A tipikus cnoidális hullámalak a potenciálképben úgy jelenik meg, hogy enyhén negatív energiákra a mozgás lassan indul a bal oldalról, sokáig vesz fel kis η értékeket, majd a legtávolabbi pont körül megnő, begyorsul, visszafordul, és véges idő alatt eléri a kiindulási pontot. Az is látszik, hogy a cnoidális hullámok $\eta_{0,m}$ magassága (a minimum és maximum közötti különbség) mindig kisebb $\eta_0 = \alpha H$-nál, azaz a szoliton amplitúdójánál.

A cnoidális hullám alakja, mint minden köbös potenciálban zajló periodikus mozgás kitérés-idő függvénye, a cn Jacobi-féle elliptikus koszinuszfüggvénnyel kapcsolatos.[3]

A szokásos hidrodinamikai jelölésben az m-edrendű cnoidális hullám alakja ($\eta_{0,m}$ a minimális szint feletti kimagasodás)

$$\eta_m(x,t) = \eta_{0,m}\mathrm{cn}_m^2\left((x \mp c_m t)/\lambda'_m\right), \tag{9.48}$$

ahol

$$\lambda'_m = H\sqrt{\frac{4mH}{3\eta_{0,m}}}, \tag{9.49}$$

ami $m = 1$-re a szoliton (9.45) félszélessége. Ismert, hogy a cn függvény periódusa $4K(m)$, ahol $K(m)$ az elsőrendű teljes elliptikus integrál.[4] Mivel a cn^2 függvény periódusa $2K(m)$, a cnoidális hullám hullámhossza (9.48) szerint

$$\lambda_m = 2K(m)\lambda'_m = 2K(m)H\sqrt{\frac{4mH}{3\eta_{0,m}}}. \tag{9.50}$$

Az $m = 1$ határesetben $K(m) \to \infty$ annak megfelelően, hogy a szolitonhullám nem periodikus. A (9.47) mozgásegyenletben fellépő α paraméter most is arányos az amplitúdóval: $\alpha \sim \eta_{m,0}/H$, de a pontos kifejezésben megjelenik egy m-től függő szorzó is. Ez vagy az E energia kapcsolata az m paraméterrel a cn függvény tulajdonságainak részletes ismerete alapján kapható meg.

[3] A cn_m elliptikus koszinuszfüggvényt az $u = \int_0^\phi d\theta/\left(1 - m\sin^2\theta\right)^{1/2}$ integrál $\phi(u)$-val jelölt inverze segítségével mint $cn(u) = \cos\phi$ definiáljuk.

[4] $K(m) = \int_0^{\pi/2} d\theta/\left(1 - m\sin^2\theta\right)^{1/2}$.

A terjedési sebességre az adódik, hogy

$$c_m = c_0 \left[1 + \frac{\eta_{0,m}}{2H} f(m)\right], \tag{9.51}$$

ahol az $f(m)$ függvény az 1 értékről monoton csökken m csökkenésével. Nem túl kicsi m értékekre a sebesség mindig nagyobbb c_0-nál. Az $m \to 0$ határesetben a kifejezés értelmét veszti, ott ugyanis a lineáris hullámokat kapjuk vissza, de azok diszperzívek (9.12), így egyetlen terjedési sebesség nem rendelhető hozzájuk.

Végül megjegyezzük, hogy a KdV-egyenlet a hidrodinamikán túlmutató jelentőségre is szert tett. Példát ad ugyanis arra, hogy léteznek olyan térben is kiterjedt rendszerek, amelyek megoldásai térben és időben is szabályosok, azaz nem kaotikusak vagy turbulensek. Az ilyen rendszerek részecskefizikai jelentőséggel is bírhatnak, vizsgálatuk az integrálható térelméletek témakörébe tartozik.

10. fejezet

A görbület hatása (folytatás)

10.1. Nyomási koordináták az f- és β-síkon

Közegek belsejében a nyomás monoton csökken a magassággal, megtehetjük ezért, hogy a z függőleges koordináta helyett a teljes p nyomást használjuk. Ez azt jelenti, hogy minden térmennyiséget (x, y, z, t) helyett (x, y, p, t) változójának tekintünk, és természetesen a z magasság maga is térmennyiség: $z(x, y, p, t)$.

Erre akkor nyílik egyszerű lehetőség, ha olyan áramlásokat vizsgálunk, amelyek során *a nyomás magasságfüggése mozgás közben is hidrosztatikus* tetszőleges ϱ sűrűség mellett. Láttuk, hogy a geosztrofikus és a kvázi-geosztrofikus esetek ilyenek, és a sekélyfolyadék-dinamika is.

Induljunk ki a forgatott hidrodinamika (1.28) egyenletéből, amelynek ideális folyadékra vonatkozó alakja a Föld érintősíkjában felbontott komponensekben:

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{10.1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{10.2}$$

$$0 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \tag{10.3}$$

ahol $f = f_0 + \beta y$. Az utolsó egyenlet a hidrosztatikus nyomáseloszlás feltétele, amely eltűnő függőleges gyorsulással jár. Ezeket az (1.26) kontinuitási egyenlet egészíti ki. Hangsúlyozzuk, hogy p itt a teljes nyomás (nem a dinamikai), és a sűrűségről nem tettünk fel semmit, a közeg tehát erősen összenyomható is lehet.

A (10.1), (10.2) jobb oldalán a nyomás állandó z magassági koordináta melletti parciális deriváltjai állnak adott pillanatban. Annak érdekében, hogy megtudjuk, ezek mivel helyettesítendők a nyomás állandóan tartása esetén, tekintsük a $p(x, y, z)$ függvény teljes differenciális megváltozását:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) dz. \tag{10.4}$$

Írjuk most elő, hogy a nyomás állandó, és vizsgáljuk az egyszerűség kedvéért az $y =$ állandó esetet, amelyből

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{dz}{dx}. \tag{10.5}$$

Az utolsó tényező állandó nyomás mellett értendő, tehát a $(\partial z/\partial x)_p$ parciális deriválttal azonos. Használva azt is, hogy az előtte álló tényező a hidrosztatikai feltétel miatt $-\varrho g$, a keresett

kapcsolat:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \varrho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p. \tag{10.6}$$

Hasonlóan, ha (10.4)-ben x-et tartjuk állandónak,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \varrho g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p. \tag{10.7}$$

A $z(x, y, p, t)$ magasságot ebben az új összefüggésben *geopotenciális magasságnak* nevezik, ugyanis a $gz(x, y, p, t)$ mennyiségre, amely valóban fajlagos potenciális energia, használatos a geopotenciál kifejezés.

Másik fontos változás az, hogy a teljes deriváltban a w függőleges áramlási sebességet a nyomási szint emelkedési sebessége váltja fel, ezért

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}, \tag{10.8}$$

ahol ω (nem vektor!) a nyomási sebesség, egysége hPa/s.

A kontinuitási egyenlet megfelelőjének megtalálása érdekében tekintsük a $\Delta x\Delta y\Delta z$ elemi téglalapban levő $\varrho\Delta x\Delta y\Delta z$ tömeget. Mivel $\Delta z/\Delta p$ a hidrosztatikai feltétel miatt $-1/(\varrho g)$-vel helyettesíthető, a tömeg a p koordináta használatával a $(-1/g)\Delta x\Delta y\Delta p$ alakot ölti. Ezekben a változókban a sűrűség tehát *konstans* (formálisan $-1/g$), a kontinuitási egyenlet ezért a divergenciamentességre egyszerűsödik:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \tag{10.9}$$

A nyomási koordináták alkalmazásának ez talán a legfőbb előnye: minden hidrosztatikus áramlás *divergenciamentes*.

A (10.1)–(10.3) egyenletek tehát nyomási koordinátákban a következő alakoknak felelnek meg:

$$\frac{du}{dt} = fv - g\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{10.10}$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - g\frac{\partial z}{\partial y}, \tag{10.11}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\varrho g}, \tag{10.12}$$

a $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ kiegészítő feltétellel. Itt természetesen minden művelet, és a változók is, nyomási koordinátákban kifejezve értendők. (A $p =$ állandó feltétel kiírását elhagytuk a $\partial z/\partial x$ jellegű deriváltakból, ezek ugyanis a korábban használt (x, y, z) koordinátákban értelmezve zérust adnának, tehát nem lennének értelmesek.) Ezek az egyenletek a nagyskálájú, lassú mozgásokat írják le, mint pl. Rossby-hullám, de nem alkalmasak a gyors mozgások (pl. tehetetlenségi hullámok) követésére.

Különösen érdemes nyomási koordinátákat használni a geosztrofikus áramlás leírására. A (10.10), (10.11) egyenletekben a gyorsulások elhanyagolásával kapjuk az időfüggetlen geosztrofikus sebességeket az

$$u_g = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad v_g = \frac{g}{f_0}\frac{\partial z}{\partial x} \tag{10.13}$$

f-síkon érvényes alakban, amelyekben nem jelenik meg a sűrűség. Ezek a kifejezések *minden közegben* érvényesek, amelyekben az áramlás során a nyomás hidrosztatikus. A geosztrofikus

sebesség merőleges a geopotenciális magasság gradiensére, vagyis az áramlás ezen *magassági szintvonalak* mentén zajlik. Másképpen fogalmazva, az áramlási függvény p=konstans mellett most

$$\psi(x,y) = \frac{g}{f_0} z(x,y), \tag{10.14}$$

vagyis a magassági kontúrok az $\mathbf{u}_g$ geosztrofikus áramlás áramvonalai *az adott nyomású felületen*. A meteorológiai térképeken nem is a nyomási, hanem a magassági szintvonalakat tüntetik fel, amint a 3.8. ábrán is látható.

Fontos geosztrofikus összefüggéshez jutunk, ha a (10.13) geosztrofikus sebességeket p szerint deriváljuk, majd behelyettesítjük (10.12)-t

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial^2 z}{\partial p \partial y} = \frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\varrho}\right)_p, \qquad \frac{\partial v_g}{\partial p} = \frac{g}{f_0}\frac{\partial^2 z}{\partial p \partial x} = -\frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\varrho}\right)_p. \tag{10.15}$$

A geosztrofikus áramlás tehát változik a „magassággal", p-vel, ha a sűrűség a vízszintes koordinátáktól is függ. Ez a termikus áramlás, amelyet derékszögű koordinátákban a 6.8.1. fejezet ír le, és a fenti egyenlet megfelelője ott (6.48).

A hőmérséklettel való kapcsolatot a meteorológia szempontjából fontos ideális gáz esetével mutatjuk be. A

$$\varrho = \frac{pM}{RT} \tag{10.16}$$

állapotegyenletből, ahol M a levegő móltömege és R az univerzális gázállandó:

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{MR}{f_0 p}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p, \qquad \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{MR}{f_0 p}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p. \tag{10.17}$$

Nyomási szintek között a geosztrofikus szél erősségének változását a hőmérséklet vízszintes síkbeli inhomogenitása okozza. A termikus szél derékszögű koordinátákban érvényes kifejezését (6.51) adja meg (melyben ideális gázra $\alpha = 1/T$).

10.2. Domborzati elemek hatása zonális áramlásra

10.2.1. Geosztrofikus közelítés

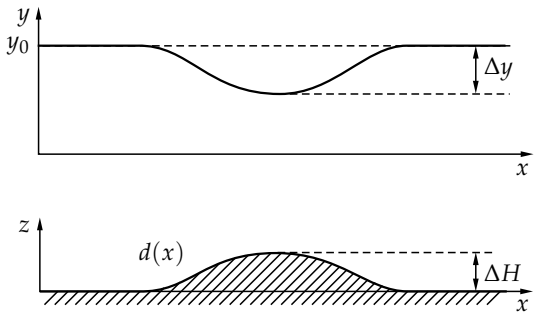
A potenciális örvényesség megmaradása a geosztrofikus határesetben ($\zeta \approx 0$) azt jelenti, hogy a

$$q = \frac{f(y)}{h} H \tag{10.18}$$

hányados állandó az áramvonalak mentén.

A 3.10. fejezet kiegészítéseként megvizsgáljuk, mi történik, ha a vízszintes domborzat feletti $u_0 = U, v_0 = 0$ homogén zonális háttéráramlás egy észak–déli irányban húzódó lokalizált aljzati kidudorodással találkozik (egyetlen hegyvonulat vagy tenger alatti hátság).

A domborzat $d(x)$ alakja független y-tól, magassága ΔH (10.1. ábra). Az ezzel járó η felszíni alakváltozás elhanyagolható. A folyadékmélység tehát az áthaladás során a kezdeti $h = H$ értékről $H - \Delta H$-ra csökken, majd újra H-ra nő. Ha a planetáris örvényesség nem függne a szélességtől, ilyen zonális áramlás nem lenne lehetséges, mert a $h =$ konstans vonalak észak–déli irányúak. A β-síkon azonban kialakulhat ilyen áramlás, de a hegy fölött irányát meg kell változtatnia: h csökkenésének az $f(y)$ planetáris örvényesség csökkenésével kell párosulnia. Az



10.1. ábra. Domborzati kidudorodás (alsó ábra) hatása zonális áramlások vízszintes síkbeli pályájára helyfüggő Coriolis-paraméter esetén (felső ábra) geosztrofikus közelítésben az északi féltekén. A pálya független attól, hogy az áramlás keletről vagy nyugatról érkezik.

áramlásnak tehát az Egyenlítő felé kell kitérnie, annál jobban, minél sekélyebb közegben halad (10.1. ábra).

Az y_0 referenciaszélességtől (melyen a Coriolis-paraméter f_0) számított legnagyobb Δy eltolódást a megmaradási tételből kapjuk, hiszen rá felírhatjuk, hogy

$$\frac{f_0}{H} = \frac{f(y_0 - \Delta y)}{H - \Delta H} = \frac{f_0 - \beta \Delta y}{H - \Delta H}, \tag{10.19}$$

ahol a második egyenlőségben feltettük, hogy a β-közelítés érvényes. Ebből

$$\Delta y = \Delta H \frac{f_0}{\beta H}, \tag{10.20}$$

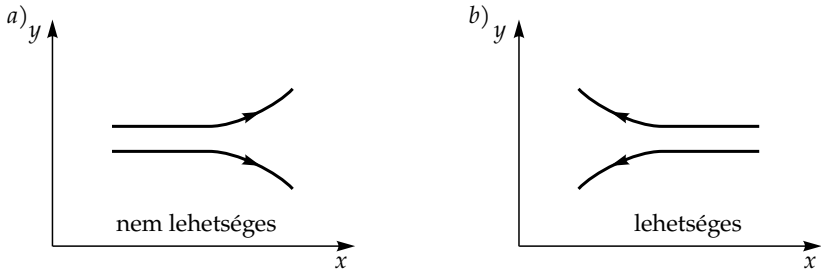
az eltolódás tehát arányos az aljzati kiemelkedés magasságával. A teljes mélység 1 százalékának megfelelő kidudorodás közepes szélességeken $\Delta y = 100$ km nagyságrendű eltolódást okoz.

10.2.2. Kvázi-geosztrofikus eset

A geosztrofikus egyensúlytól való eltérés megszünteti a nyugat–keleti és kelet–nyugati áramlások egyenértékűségét. Ekkor ugyanis a ζ örvényesség már nem hanyagolható el a planetáris örvényesség mellett.

Tekintsünk először egy nyugat–keleti homogén áramlást vízszintes aljzat felett. Amíg az áramvonalak a szélességi körökkel párhuzamosak, a ζ örvényesség zérus. Ha az áramlás az északi féltekén valahol északra kanyarodna, a ζ örvényesség pozitív értékűre nőne. Ezzel együtt nőne azonban az $f(y)$ Coriolis-paraméter, és így a potenciális örvényesség is. A délre kanyarodás a potenciális örvényesség csökkenését eredményezné. Ez ellentmondana a potenciális örvényesség megmaradásának (10.2. ábra) *A nyugat–keleti áramlások vízszintes aljzat felett nem térülhetnek el*. A kelet–nyugati áramlásokban viszont az északra (délre) kanyarodás az északi félgömbön ζ negatívvá (pozitívvá) válását jelenti, amelyet a Coriolis-paraméter helyfüggése kompenzálhat. Ugyanez igaz a déli féltekén is. *A kelet–nyugati áramlások vízszintes aljzat felett tehát elkanyarodhatnak.*

Vizsgáljunk most egy nyugatról érkező áramlást, amely az aljzat egy ΔH magasságú lépcsőjére fut föl (10.3a. ábra). A lépcső elérése pillanatában az örvényességnek zérusról valamely ζ_0



10.2. ábra. A potenciális örvényesség megmaradásával a sík aljzat felett nyugatról keletre történő áramlás eltérülése nincs összhangban (a). A keletről érkező áramlás viszont eltérülhet (b). A jelenség mindkét féltekén érvényes.

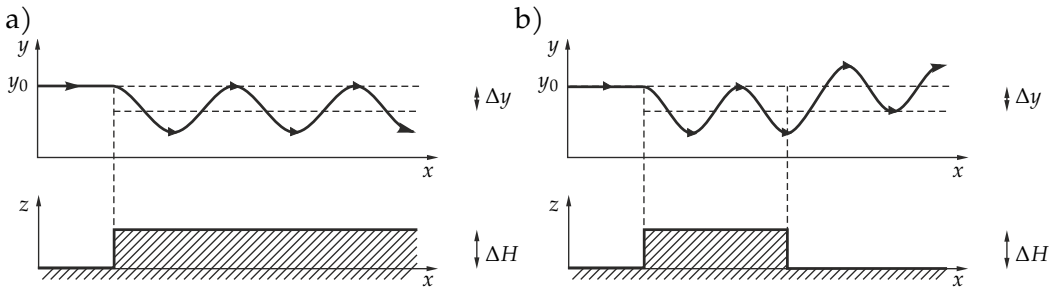
értékre kell ugrania, ahol

$$\frac{f_0}{H} = \frac{f_0 + \zeta_0}{H - \Delta H}, \tag{10.21}$$

melyből

$$\zeta_0 = -f_0 \frac{\Delta H}{H}. \tag{10.22}$$

A ζ_0 örvényesség mindkét féltekén anticiklonális, $\zeta_0/f_0 < 0$, megjelenése az áramlás elkanyarodását jelenti az Egyenlítő felé. A lépcső fölött mindenütt fenn kell állnia annak, hogy $\zeta + f(y) = \zeta_0 + f_0$. Ezért a ζ örvényesség az Egyenlítő felé való mozgás során az északi féltekén nő (a délin csökken), hiszen a planetáris örvényesség az Egyenlítő felé csökken (nő). Így az örvényesség egyszer eléri a zérus értéket, ahol a pályavonal görbülete megszűnik. Ezután a görbület az eredetivel ellentétessé válik, és mire az örvényesség a $-\zeta_0$ értéket veszi föl, a pálya érintője ismét az y_0 szélességi kör lesz. A lépcső fölött hullámzó, *meanderező* mozgás alakul ki (10.3a. ábra). Ennek középvonala az az egyenes, amelyen $\zeta = 0$, és amelynek a referenciaszinttől való Δy eltolódására ugyanaz a (10.20) érvényes, mint a geosztrofikus határesetben. A lépcső fölött a Rossby-szám az (1.6) értelmezés szerint legföljebb $Ro = |\zeta_0/f_0| = \Delta H/H \ll 1$, vagyis csekély mélységváltozás esetén a kvázi-geosztrofikus tartományban vagyunk. A hullám tehát stacionárius Rossby-hullámnak tekinthető, amelyben (3.55) szerint $U = \beta/k^2$, és hullámhossza a (3.57)-tel megadott λ_c.

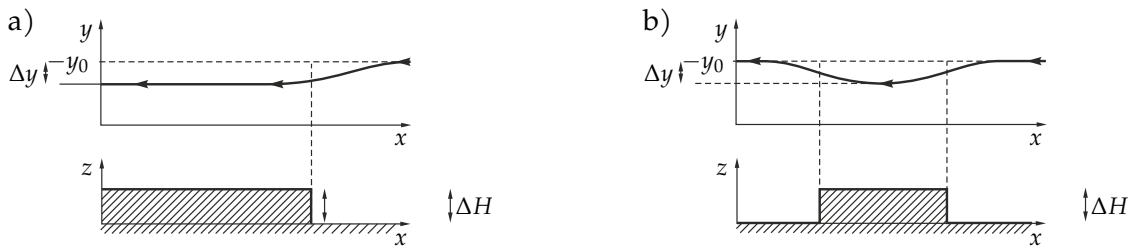


10.3. ábra. A domborzat hatása nyugatról érkező áramlásokra. A rajzok alján a domborzat, felül az áramlás felülnézeti képe látható. a) Lépcső. b) Véges domborzati elem. Ha a domborzat periodikusan ismétlődik, a domborzat hullámhossza is hatással van a kialakuló hullámzásra (3.10. fejezet).

Tekintsünk most egy véges lépcsős domborzati elemet (10.3b. ábra). A mozgás jellege a lépcső felett olyan, mint a hosszú lépcső esetén. Ismét a H mélységű tartományba érkezve a zérus

örvényességű helyzet az eredeti y_0 szélességi körnek felel meg, de a hullámzás nem szűnik meg. Az áramlás örvényessége csak átlagosan lesz zérus: a meanderezés az y_0 szélesség körül folytatódik (10.3b. ábra). A nyugatról jövő áramlást tehát egyetlen domborzati kiemelkedés nemcsak az Egyenlítő felé tolja el, hanem hullámzóvá teszi, és ez a meanderezés a kiemelkedés elhagyása *után* is fennmarad. A hegyvonulatok keleti oldalán jelentős vízszintes síkbeli hullámmozgásra kell számítani (3.10. fejezet).

Az ugyanazon y_0 szélességi kör mentén keletről érkező áramlás másképpen viselkedik. Ha iránya az egész H mélységű tartományban szélességi kör menti volna, akkor a lépcső elérésekor nyert $\zeta_0 < 0$ örvényesség az áramlást mindkét féltekén a sarok felé térítené. Ebben az irányban azonban a planetáris örvényesség abszolútértéke nő, amely megengedné, hogy az örvényesség egyre erősebb legyen, és az áramlás így önmagába visszakanyarodhatna. Ez a sohasem tapasztalt viselkedés úgy zárható ki, hogy feltételezzük, az áramlás már a konstans H mélységű tartományban elkanyarodik az Egyenlítő felé. (A 10.2b. ábra mutatja, hogy a potenciális örvényesség megmaradása ezt egy keletről jövő áramlásban nem zárja ki.) A pályavonalak tehát véges szög alatt futnak rá a lépcsőre. Az ott nyert $\zeta_0 < 0$ örvényesség a sarok felé térít, de a tehetetlenség a közeget még az Egyenlítő felé sodorja. Az áramlás a szélességi körök irányába kanyarodik, amelyet aszimptotikusan elér (10.4a. ábra). Az Egyenlítő felé tolódás mértékét ismét (10.20) adja.



10.4. ábra. A domborzat hatása keletről érkező áramlásokra. a) Lépcső b) Véges domborzati elem

Véges lépcső esetén ennek a folyamatnak a fordítottja játszódik le a lépcső elhagyásakor: az eredeti y_0 szinthez történő sima visszakanyarodás (10.4b. ábra). A keletről érkező áramlások *nem* hoznak létre hullámokat a domborzati akadályok mögött.

10.3. Nyugati peremáramlat ideális folyadékközelítésben

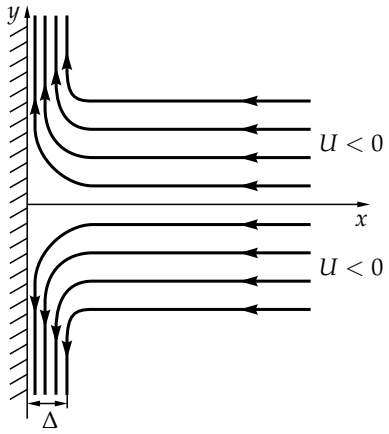
Tekintsük egy nagy óceáni medence nyugati partvonala körüli tartományt. Modellünkben a partvonal legyen az $x = 0$ egyenes, koordináta-rendszerünk y tengelye (10.5. ábra). Vizsgáljunk először egy part felé irányuló kelet–nyugati áramlatot, amelynek sebessége nagy távolságban U, és $U/\beta < 0$. Keressük, hogyan térül el az áramlás észak–déli irányban a parthoz közeledve. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a felszín változásai elhanyagolhatók.

A görbületi hatás lehetővé teszi, hogy a folyadék, amíg csak lehet, az y =konstans vonalak mentén haladjon, és utána egy Δ vastagságú sávban elkanyarodjon (10.2b. ábra). A Δ vastagság egyszerűen becsülhető a megmaradási tétel alapján. Az elkanyarodási pont körüli Δ oldalhosszúságú négyzetben az örvényesség nagyságrendje U/Δ, ezért a potenciális örvényesség tipikus értéke ott $q = U/\Delta + f_0 + \beta\Delta$. Ennek meg kell egyeznie a távoli beáramlásban felvett értékkel, amely $q = f_0$, hiszen a homogén áramlás örvénymentes. Ebből a karakterisztikus vas-

tagság

$$\Delta = \sqrt{\frac{-U}{\beta}}. \tag{10.23}$$

A nyugati partvonal mentén tehát ideális folyadékban is kialakul nyugati peremáramlat egy véges Δ vastagságú rétegben (10.5. ábra), amelyet *tehetetlenségi* (azaz nem viszkózus) határrétegnek is szokás nevezni. Az óceáni körök nyugatra irányuló tipikus $U \approx 0{,}01$ m/s sebességével $\Delta \approx 30$ km adódik.



10.5. ábra. Nyugati óceáni partnak futó U sebességű ideális áramlás által keltett erős peremáramlat az északi féltekén

A részletesebb leíráshoz alkalmazzuk a (3.61) kvázi-geosztrofikus egyenlet stacionárius változatát vízszintes aljzat esetén:

$$U\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right)+\beta\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0, \tag{10.24}$$

ahol ψ' az $u_0 = U, v_0 = 0$ zonális háttéráramlástól való eltérést írja le. A teljes áramlási függvény $\psi = \psi' - Uy$.

Az eltérést leíró ψ'-nek el kell tűnnie $x \to \infty$-re, és a part mentén érvényes $u \equiv 0$ peremfeltétel akkor teljesül (10.5. ábra), ha

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}_{|x=0} = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\partial\psi'}{\partial y}_{|x=0} = U. \tag{10.25}$$

Keressük ezért a megoldást a

$$\psi'(x,y) = Uyg(x) \tag{10.26}$$

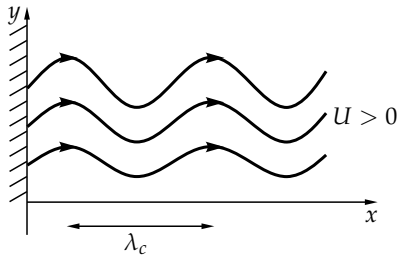
alakban, ahol $g(0) = 1$ és $g(\infty) = 0$. A (10.24)-ből g-re kapott differenciálegyenlet $d^3g/dx^3 = -(\beta/U)dg/dx$. Ennek kívánt megoldása $g(x) = \exp(-x/\Delta)$, ahol Δ a (10.23) karakterisztikus hosszúság, ha $U/\beta < 0$. A teljes áramlási függvény ezért

$$\psi = -Uy(1 - e^{-x/\Delta}), \tag{10.27}$$

melyből a két sebességkomponens

$$u = U(1 - e^{-x/\Delta}), \qquad v = -U\frac{y}{\Delta}e^{-x/\Delta}. \tag{10.28}$$

Az exponenciális lecsengés miatt a háttéráramlástól való eltérés csak a part körüli néhányszor Δ vastagságú rétegben jelentős, ahol észak–déli áramlás alakul ki, amely az $x = y = 0$ torlóponttól távolodva erősödik $|y|$-kel. Ez azonban nem vezet a vastagság szélesedéséhez.



10.6. ábra. Az óceán nyugati partvonalától U átlagsebességgel eltartó áramlás az északi féltekén. A hullámhossz $\lambda_c = 2\pi\sqrt{U/\beta}$.

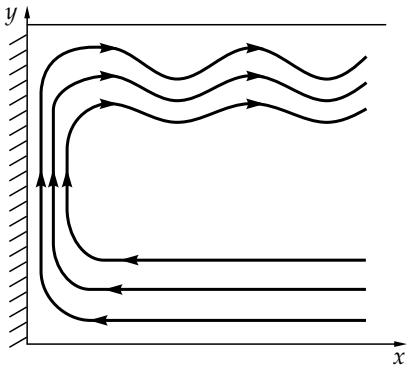
Ha az áramlás a parttól távolodik, azaz $U/\beta > 0$, akkor az x-függés trigonometrikus, és a Δ paraméter helyett a (3.57) kritikus hullámhossz jelenik meg. Az áramlási függvény és a sebességkomponensek:

$$\psi = -Uy\left[1 - \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_c}\right)\right], \tag{10.29}$$

$$u = U\left[1 - \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_c}\right)\right], \qquad v = U\frac{2\pi y}{\lambda_c}\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_c}\right). \tag{10.30}$$

Ez egyfajta stacionárius Rossby-hullám, a nyugati peremre merőleges meanderező áramlás (10.6. ábra), amelynek átlagos zonális sebessége U. Érdekes megfigyelni, hogy a zonálisra merőleges v sebesség y-nal erősödik. Ez kvalitatíven megfelel a Golf-áramlat azon tulajdonságának, hogy északi peremén a meanderezés erősebb, ott könnyebben szakadnak le gyűrűk.

A fentiek alapján felvázolható, hogy milyen az áramlás jellege egy észak–déli irányban zárt medencében, ahol az Egyenlítőhöz közeli peremen az áramlás a nyugati part felé halad. A sarok felé történő áramlás a part melletti Δ vastagságú tartományban történik, erős nyugati peremáramlat alakul ki, amely a sarokhoz közeli perem miatt a parttól elkanyarodik, és ott meanderező mozgásba kezd (10.7. ábra).

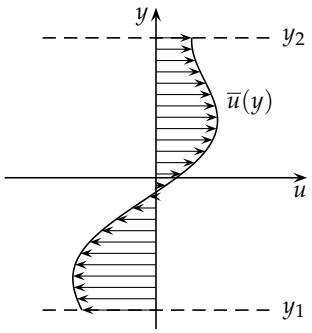


10.7. ábra. Zárt óceáni medencében kialakuló áramlás sematikus rajza a nyugati partvonal körül az északi féltekén

Ideális folyadékban nincs lehetőség a medence keleti oldalán a peremfeltétel kielégítésére. Ez csak a viszkozitás és szélnyírás figyelembevételével válik lehetővé (4.6.2., 11.3. fejezetek), de a β paraméter fontosságát mindkét megközelítés mutatja.

10.4. Kétdimenziós áramlások stabilitása, a barotróp instabilitás

A kelet–nyugati homogén áramlás a β-síkon is stabil, de tetszőleges profilú áramlásra ez nem feltétlenül igaz. Tekintsünk ezért egy állandó sűrűségű, nyugatról keletre történő síkbeli áramlást vízszintes aljzat fölött, vízszintes felszínnel, és vizsgáljuk, hogy tetszőleges $\overline{u}(y)$ profilú kétdimenziós (a z magasságtól független) áramlás stabil-e a forgó Föld érintősíkjában. Erre az alapáramlásra ad példát a 10.8. ábra.



10.8. ábra. Általános kétdimenziós $\overline{u}(y)$ áramlási profil, amelynek stabilitását vizsgáljuk kis perturbációkra kétdimenziós áramlásban.

Látni fogjuk, hogy a vízszintes síkbeli nyírás, $d\overline{u}/dy$, illetve annak változása instabillá teheti az áramlást ideális folyadékban is. Amikor ez megtörténik, *barotróp instabilitásról* beszélünk, hiszen a közeg homogén (a rétegzett közegekben történő baroklin instabilitásról a 6.11. és 13.6., 13.7. fejezetek szólnak). Vegyük észre, hogy a nyírás meghatározza az $\overline{u}$ alapáramlás z irányú örvényességét,

$$\overline{\zeta} = -\frac{d\overline{u}}{dy}. \tag{10.31}$$

Az áramlás összenyomhatatlan, ezért a megzavart áramlás (is) leírható egy $\psi(x,y,t)$ áramlási függvénnyel, amelynek Laplace-operátora adja a helyi örvényességet. A teljes

$$\zeta_T = \Delta\psi + f(y) \tag{10.32}$$

örvényesség megmarad, ami a potenciális örvényesség speciális változata vízszintes aljzat és felszín esetére. Alkalmazhatjuk a potenciális örvényesség megmaradását kifejező (3.65) egyenletet a $d = \eta = 0$ megszorítással, vagyis a

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta\psi + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{10.33}$$

alakban. A stabilitásvizsgálat lényege, hogy az alapáramlást megzavarjuk egy kis hozzáadott mozgással, amelyet a ψ' áramlási függvény ír le, és keressük az így kialakuló hullám diszperziós relációját. Ha annak van képzetes része, akkor az áramlás növekvő amplitúdójúvá válhat, instabil lesz (részletesen ezt az 5.13.1. fejezet tárgyalja).

A teljes áramlási függvényt ezért így írjuk:

$$\psi(x,y,t) = \overline{\psi}(y) + \psi'(x,y,t), \tag{10.34}$$

ahol $\overline{\psi}(y)$ az alapáramlást adja meg, és természetesen $d\overline{\psi}/dy = -\overline{u}(y)$, ψ' pedig kis perturbáció.

Ezzel a (10.33)-ban megjelenő kifejezések:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi'}{\partial x},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-\overline{u}+\frac{\partial\psi'}{\partial y},\qquad \Delta\psi=-\frac{d\overline{u}}{dy}+\Delta\psi'. \tag{10.35}$$

Ezt behelyettesítve, ψ'-re a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\psi'+\frac{\partial\psi'}{\partial x}\left(\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right)=0, \tag{10.36}$$

ahol ψ' deriváltjainak szorzatát nem írtuk ki, hiszen azok másodrendűen kicsik. Ennek a lineáris egyenletnek a megoldását kereshetjük hullámalakban. Mivel a haladás várható iránya az x tengely, csak ebben az irányban tételezünk fel hullámmegoldást k_x valós hullámszámmal és $\omega_0(k_x)$ diszperziós relációval:

$$\psi'(x,y,t)=a(y)e^{i(k_xx-\omega_0t)}, \tag{10.37}$$

ahol $a(y)$ egyelőre ismeretlen amplitúdó.

Felhasználva, hogy

$$\Delta\psi'=\left(\frac{d^2a}{dy^2}-k_x^2a\right)e^{i(k_xx-\omega_0t)}, \tag{10.38}$$

behelyettesítés után:

$$(k_x\overline{u}-\omega_0)\left(\frac{d^2a}{dy^2}-k_x^2a\right)+k_x\left(\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right)a=0. \tag{10.39}$$

Ez az ún. *Rayleigh-egyenlet*, az $\overline{u}$ profil ismeretében egymaga határozza meg az ω_0 diszperziós relációt és az $\overline{a}(y)$ amplitúdófüggvényt, azaz egyfajta *sajátérték-egyenlet*. a-ra nézve másodrendű differenciálegyenlet, amelynek egyértelmű megoldása csak két feltétel teljesülése esetén lehetséges. Ezek abból adódnak, hogy az x tengellyel párhuzamos peremekre merőleges áramlás nem történhet, ezért ott az amplitúdó eltűnik, hiszen az y irányú sebességet (10.37) x szerinti deriváltja adja. A 10.8. ábra jelölését használva

$$a(y=y_1)=a(y=y_2)=0. \tag{10.40}$$

Ha peremek nem léteznek, akkor az amplitúdónak $y\to\pm\infty$-re el kell tűnnie.

10.4.1. A stabilitás feltétele

A feltétel megfogalmazása érdekében rendezzük át a (10.39) egyenletet a

$$\frac{d^2a}{dy^2}-k_x^2a+\frac{\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}}{\overline{u}-c}a=0 \tag{10.41}$$

alakba, ahol az áttekinthetőbb jelölés kedvéért bevezettük a $c(k_x)=\omega_0(k_x)/k_x$ jelölést, ami formálisan a hullám terjedési sebességét jelenti. A problémában ω_0, és ezért c is lehet képzetes, amivel képzetes amplitúdó jár, és éppen ez utal majd az instabilitásra. Ezt nem kizárva, szorozzuk be mindkét oldalt az amplitúdó a^* komplex konjugáltjával, majd integráljunk y szerint. Az első tag

$$\int_{y1}^{y_2}\frac{d^2a}{dy^2}a^*dy=\left[\frac{da}{dy}a^*\right]_{y_1}^{y_2}-\int_{y1}^{y_2}\left|\frac{da}{dy}\right|^2dy, \tag{10.42}$$

melyben a szögletes zárójel nullát ad, hiszen a és a^* eltűnik a peremeken. Az a^*-gal való szorzással (10.41) két első tagja integrálás után valós, az utolsó azonban lehet komplex. A történet

$(\overline{u}-c^*)$-gal bővítve a nevező valóssá válik, imaginárius járulék csak a számlálóban megjelenő c^* imaginárius részével arányosan adódhat, ami

$$\frac{s}{k_x}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}}{|\overline{u}-c|^2}|a|^2dy=0. \tag{10.43}$$

Itt átvettük a diszperziós reláció komplex alakjára az 5.13.1. fejezet (5.95) kifejezése $\omega_0=\omega+is$ jelölését.

Ha a $\beta-d^2\overline{u}/dy^2$ mennyiség nem vált előjelet a vizsgált intervallumban, akkor az integrál nem tűnhet el, megoldás csak akkor létezik, ha $s=0$, vagyis a diszperziós reláció valós. Ilyenkor az áramlás *stabil*.

Ha ez a mennyiség legalább egyszer előjelet vált az intervallumon belül, akkor van lehetőség arra, hogy az integrál eltűnjön, és ezzel s tetszőleges lehessen. Hogy ez bekövetkezik-e, az ebből a gondolatmenetből nem következik, ezért azt mondhatjuk, hogy az *instabilitás szükséges feltétele* az, hogy

$$\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(f_0+\beta y-\frac{d\overline{u}}{da}\right)=\frac{d}{dy}\left(f(y)+\overline{\zeta}\right)=\frac{d}{dy}\overline{\zeta}_T=0 \tag{10.44}$$

valahol az intervallumon belül. Ha ez nem teljesül, az a *stabilitás elégséges* feltételét jelenti.

A két zárójeles kifejezés az alapáramlás teljes örvényessége, és ennek fényében instabilitás akkor léphet fel, ha a teljes $\overline{\zeta}_T$ örvényességnek szélsőértéke van a tartományban. A bal oldali alakból az olvasható ki, hogy az f-síkon (vagy nem forgatott rendszerben) az instabilitás szükséges feltétele, hogy az alapáramlás $\overline{u}$ profiljában jelenjen meg egy inflexiós pont. A β paraméter jelenléte ezt a feltételt módosítja, és véges tartomány esetén akár az instabilitási feltétel teljesülését is megakadályozhatja, vagyis stabilizálhatja az áramlást.

Ennek illusztrálására tekintsük a következő egyszerű alapáramlást

$$\overline{u}(y)=U\left(\frac{y}{Y}+b\left(\frac{y}{Y}\right)^3\right), \tag{10.45}$$

amely az $|y|<Y$ tartományban van értelmezve ($y_1=-Y$, $y_2=Y$), és b, $U>0$. A profil második deriváltja $d^2\overline{u}/dy^2=6bUy/Y^3$. Az origó inflexiós pont, azaz az áramlás az f-síkon *lehet instabil*. A (10.44) feltétel pozitív β esetén az $y=\beta Y^3/(6bU)>0$ pontban teljesül. Ez akkor van a tartományon belül, akkor kisebb, mint Y, ha

$$\frac{\beta Y^2}{6b}<U. \tag{10.46}$$

A β-síkon akkor van tehát lehetőség instabilitásra, ha a sebesség elég nagy. Pontosabban, a

$$\frac{\beta Y}{6b}<\frac{U}{Y} \tag{10.47}$$

átírás szerint, ha a *nyírás erős*, hiszen U/Y arányos az áramlás vízszintes síkbeli nyírásával. Az ellenkező esetben, amikor az egyenlőtlenség fordított irányú, vagyis a nyírás gyenge, az áramlás biztosan stabil. A β-síkon tehát stabilizálódhat olyan áramlás, amely az f-síkon instabil.

10.4.2. Illesztési feltételek

Léteznek olyan profilok, amelyekben $\overline{u}(y)$-ban törések, ugrások lépnek fel, és az analitikusan kezelhető esetek nagy része is ebbe az osztályba tartozik. Érdemes ezért végiggondolni, milyen feltételek érvényesek az $a(y)$ amplitúdóra ilyen esetekben.

A (10.39) egyenlet a c jelölés bevezetése és deriválási azonosságok alapján átírható a

$$\frac{d}{dy}\left((\overline{u}-c)\frac{da}{dy}-\frac{d\overline{u}}{dy}a\right)=\left(k_x^2(\overline{u}-c)-\beta\right)a \tag{10.48}$$

alakba. Ha a törési, ugrási pont, y_0 környékén integráljuk mindkét oldalt egy rövid szakaszon, a bal oldalon a nagy zárójelben levő kifejezés különbsége jelenik meg y_0 fölött és alatt véve, a jobb oldalon pedig (10.48) jobb oldalának integrálja. Mivel a jobb oldal véges, az integrál értéke a szakasz hosszának csökkenésével nullához tart, így az adódik, hogy az

$$(\overline{u}-c)\frac{da}{dy}-\frac{d\overline{u}}{dy}a \tag{10.49}$$

mennyiség folytonos az y_0 pontban. Ez azt jelenti, hogy ott, ahol a profilban törés van, az amplitúdó függvény is törik.

Újabb feltételt kapunk, ha ezt a folytonos mennyiséget elnevezzük $C(y)$-nak, majd az egyenletet osztjuk $(\overline{u}-c)^2$-tel (feltéve, hogy az nem nulla). A bal oldalon egy tört deriváltja jelenik meg:

$$\frac{d}{dy}\frac{a}{\overline{u}-c}=\frac{C}{(\overline{u}-c)^2}. \tag{10.50}$$

A jobb oldal integrálja ismét véges és nullához tart, vagyis az

$$\frac{a}{\overline{u}-c} \tag{10.51}$$

mennyiségnek is folytonosnak kell lennie y_0-ban. Ha az $\overline{u}(y)$ profilban ugrás történik, az amplitúdófüggvényben is ugrás lép felé ugyanott. Ha viszont $\overline{u}(y)$ folytonos, akkor az $a(y)$ amplitúdó is az.

10.4.3. Véges rétegben nyírt áramlás

Gyakoriak az olyan áramlások, amelyekben erős nyírás csak véges tartományra terjed ki. Ezek modelljeként tekintsünk egy olyan esetet, amelyben a nyírás konstans a $2D$ vastagságú rétegben, azon kívül pedig homogén az áramlás, a pozitív tartományban U, a negatívban $-U$ sebességgel. A teljes sebességváltozás $\Delta U=2U$, és a nyírás nagysága U/D. Az ilyen $\overline{u}(y)$ alapáramlás profilját a 10.9. ábra mutatja.

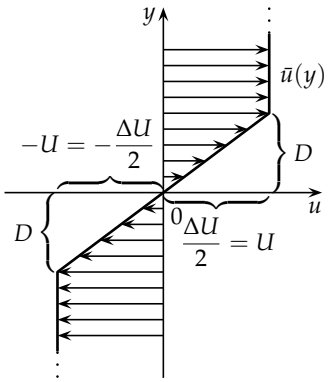
Az áramlást az egyszerűség kedvéért az f-síkon vizsgáljuk, $\beta=0$, és mivel a profil legföljebb lineáris, az amplitúdóra vonatkozó (10.39) egyenlet most

$$(k_x\overline{u}-\omega_0)\left(\frac{d^2a}{dy^2}-k_x^2a\right)=0. \tag{10.52}$$

Tetszőleges pontban csak akkor teljesülhet, ha a nagy zárójel eltűnik, vagyis ha az $a(y)$ függvény exponenciális a $\pm k_x$ kitevővel. A szélső tartományokban csak az egyik előjel lehet érvényes, hiszen az amplitúdónak a végtelenben el kell tűnnie, középen viszont megjelenhet a két exponenciális függvény lineáris kombinációja. A megoldást ezért a következő kényelmes alakban keressük:

$$a(y)=\begin{cases}A\,e^{-k_x(y-D)}, & y\geq D,\\ B_1e^{-k_x(y-D)}+B_2e^{k_x(y+D)}, & |y|<D,\\ Ce^{k_x(y+D)}, & y\leq -D.\end{cases} \tag{10.53}$$

Az A, B_1, B_2, C együtthatók lehetnek komplexek is.



10.9. ábra. Véges vastagságú nyírási réteg két ellenkező irányba mozgó folyadéktömbbe ágyazva, amelyek között a sebességkülönbség ΔU

Az $\overline{u}$ profilban nincs ugrása, a (10.51) feltétel az amplitúdó folytonosságát jelenti az $y_0 = D$, $-D$ helyeken. Ebből

$$A = B_1 + B_2 e^{2k_x D}, \qquad B_1 e^{2k_x D} + B_2 = C. \tag{10.54}$$

A (10.49) folytonossági feltételt az $y_0 = D$ pontra felírva, mivel fölötte $d\overline{u}/dy$ nulla, alatta viszont U/D:

$$(Uk_x - \omega_0)A = (Uk_x - \omega_0)\left(B_1 - B_2 e^{2k_x D}\right) + \frac{U}{D}\left(B_1 + B_2 e^{2k_x D}\right). \tag{10.55}$$

Az $y_0 = -D$ pontban azt kapjuk, hogy

$$(Uk_x + \omega_0)\left(-B_1 e^{2k_x D} + B_2\right) + \frac{U}{D}\left(B_1 e^{2k_x D} + B_2\right) = (Uk_x + \omega_0)C. \tag{10.56}$$

Az A, C együtthatókat (10.54)-ből behelyettesítve, B_1, B_2-re vonatkozó egyenletrendszert kapunk. Ezekben az együtthatókat összevonás után ellenkező oldalra víve

$$B_1\frac{U}{D} = B_2\left[\left(2Uk_x - \frac{U}{D}\right) - 2\omega_0\right]e^{2k_x D}, \qquad B_2\frac{U}{D} = B_1\left[\left(2Uk_x - \frac{U}{D}\right) + 2\omega_0\right]e^{2k_x D}. \tag{10.57}$$

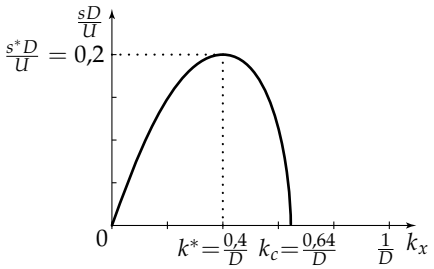
A két egyenletet összeszorozva, átrendezés után

$$\omega_0^2 = \frac{U^2}{4D^2}\left[(1-2k_x D)^2 - e^{-4k_x D}\right]. \tag{10.58}$$

Ez az alapáramlás perturbálására kialakuló kis amplitúdójú hullámok diszperziós relációja. Mivel az $(1-2x)^2 - \exp(-4x)$ függvény pozitív, ha $x > 0{,}63$, a $k_x > k_c = 0{,}64/D$ hullámszámokra ω_0 valós, itt a perturbáció lineáris hullámokra vezet, amelyek nem erősödnek fel. Kis hullámszámokra azonban ω_0^2 *negatív*, vagyis $\omega_0 = \pm is$, ahol s valós pozitív mennyiség. A (10.37)-ben feltételezett időfüggésben a felső előjel $\exp(st)$ szerint felrobbanó megoldásra vezet. Az s instabilitási ráta tehát

$$s(k_x) = \frac{U}{2D}\left[e^{-4k_x D} - (1-2k_x D)^2\right]^{1/2}, \qquad k_x < k_c = \frac{0{,}64}{D}, \tag{10.59}$$

melyről jól látszik, hogy arányos az U/D nyírással.



10.10. ábra. A 10.9. ábra alapáramlásának s instabilitási rátája.

Az $\exp(-4x) - (1-2x)^2$ függvény maximuma $x = 0{,}4$-ben van, és itt a függvény értéke 0,16, a leggyorsabban növekvő hullámhossz tehát $k^* = 0{,}4/D$, és a legnagyobb instabilitási ráta $s^* = 0{,}2U/D$. Az instabilitási ráta hullámszámfüggését a 10.10. ábra mutatja.

Az instabilitás úgy zajlik, hogy a nyírási sáv hullámzóvá válik, leggyorsabban a $\lambda^* = 2\pi D/0{,}4 \approx 16D$ hullámhosszú módus nő. A nemlinearitási tartományba érés után nagy örvények maradnak vissza, amelyek átmérője λ^* nagyságrendű. Mindannyian *azonos irányban*, az óramutató járásának megfelelően forognak, hiszen adott előjelű nyírási tartományból fejlődtek ki. További érdekesség, hogy az instabillá váló hullám *nem haladó* hullám, frekvenciája eltűnik, ω_0-nak $k < k_c$-re nincs valós része.

A barotróp instabilitás mindenütt előfordul jelentősen különböző sebességgel áramló közegek között, így például jetek peremén. Nevezetes példái a Földön a hurrikánok közepén elhelyezkedő ún. szemek (melyeken belül nincs felhőzet, és a szél is gyenge) peremén kialakuló áramlás. Érdekes megnyilvánulása bolygólégkörben a Szaturnusz északi sarkvidéke mentén megfigyelhető közel hatszöges mintázatot mutató felhőzet, a „Szaturnusz hatszöge", amely a belsejében és körülötte futó jetek jelentős szélsebesség-különbségeivel lehet kapcsolatban.

Forgóhengeres kísérletben a barotróp instabilitás tanulmányozható úgy, hogy a lapos aljzat közepén az edénynél gyorsabban forgó korong helyezkedik el. A korong pereme körül az áramlás nagy amplitúdójú hullámzássá válik, amint ebben a kísérletben látható.

Érdemes még megvizsgálni, mi történik a nyírási sáv keskennyé válása, D csökkenése esetén. Ekkor a kritikus hullámszám, k_c nő, az instabilitás egyre kiterjedtebb. A $D \to 0$ esetben *minden hullámszám instabil*. Az $e^{-4k_xD} - (1-2k_xD)^2$ függvényről sorba fejtés után látszik, hogy kis D-re $(2k_xD)^2$-hez tart, vagyis ebben a határesetben

$$s = Uk_x. \tag{10.60}$$

Ezzel visszakapjuk a függőleges síkban zajló Kelvin–Helmholtz-instabilitás homogén közegre vonatkozó határeseteként kapott (5.121) eredményt, amelyben a nehézségi gyorsulás már nem játszik szerepet. Ez az eset felel meg a legerősebb instabilitásnak, hiszen a nyírás erőssége formálisan végtelen nagy, igaz, egy igen keskeny rétegben (nyírási instabilitás).

10.4.4. Nyírási instabilitás a β-síkon

Tekintsük most ezt az áramlást a β síkon amely analitikusan tárgyalható. Az alapáramlás a 10.9. ábra $D \to 0$ határesetének felel meg, de tekinthetjük a Kelvin–Helmholtz-instabilitás 5.14. ábrája megfelelőjének is, persze a vízszintes síkban. A lényeges vonás most az, hogy az $\overline{u}(y)$ alapáramlásban *ugrás* történik $y_0 = 0$-ban, de az áramlás mindenütt másutt homogén.

A stabilitásvizsgálat (10.41) alapegyenlete most írható mint

$$\frac{da^2}{dy^2} = \left(k_x^2 - \frac{\beta}{\overline{u} - c}\right) a. \tag{10.61}$$

Adott k_x-re a gömbölyű zárójel konstans, csak nem azonos értékű a két térfélen. A megoldás exponenciális, és kereshető az

$$a(y) = \begin{cases} A_1 e^{-l_1 y}, & y > 0, \\ A_2 e^{l_2 y}, & y < 0 \end{cases} \tag{10.62}$$

alakban, ahol (10.61) szerint

$$l_1 = \left(k_x^2 - \frac{\beta}{U - c}\right)^{1/2}, \qquad l_2 = \left(k_x^2 + \frac{\beta}{U + c}\right)^{1/2}, \tag{10.63}$$

s használtuk, hogy $a(y)$-nak a távolban el kell tűnnie. Most az A_1, A_2 együtthatók és az l_1, l_2 kitevők is lehetnek komplexek.

A (10.49) illesztési feltételt $y_0 = 0$-ban alkalmazva

$$(U - c) l_1 A_1 = (U + c) l_2 A_2. \tag{10.64}$$

A (10.51) illesztési feltétel további megszorítást ad:

$$-\frac{A_2}{U + c} = \frac{A_1}{U - c}, \tag{10.65}$$

amely mutatja, hogy az a amplitúdónak $y_0 = 0$-ban ugrása van.

A két egyenletet összeszorozva az együtthatók kiesnek

$$l_1 (U - c)^2 = -l_2 (U + c)^2. \tag{10.66}$$

Az l_1, l_2 mennyiségek behelyettesítése és négyzetre emelés után

$$k_x^2 \left[(U + c)^4 - (U - c)^4\right] + \beta \left[(U + c)^3 + (U - c)^3\right] = 0. \tag{10.67}$$

Ebből c-re harmadfokú egyenletet kapunk, amelyet most már az $\omega_0 = c k_x$ diszperziós relációval kifejezve adunk meg:

$$\omega_0^3 + \frac{3\beta}{4k_x}\omega_0^2 + (U k_x)^2 \omega_0 + \frac{\beta}{4k_x}(U k_x)^2 = 0. \tag{10.68}$$

Az f-síkon a diszperziós reláció tisztán képzetes, és az instabilitási rátát az (10.60) összefüggés adja. Tisztán képzetes diszperziós relációt a nagy β határesetben kapunk, ami (10.68) második és negyedik tagjából

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} U k_x. \tag{10.69}$$

Az instabilitási ráta csak kb. 60 százaléka az f-síkon érvényesnek, bármely hullámszámra. Ahogy ez az eredmény sugallja, és részleteiben a harmadfokú egyenlet numerikus megoldása mutatja, az instabilitási ráta semmilyen β értékre nem tűnik el, monoton csökkenve éri el a (10.69) határesetet (ω_0 a köztes β értékekre nem marad tisztán képzetes). A nyírási instabilitás tehát olyan erős, hogy a görbületi hatás *nem képes megszüntetni, csak enyhíteni*. Hasonló enyhítési tendencia figyelhető meg a baroklin instabilitás esetében is (13.7. fejezet).

10.5. Egyenlítői dinamika

10.5.1. Az egyenlítői β-sík és Rossby-sugár

Az Egyenlítőn ($\varphi_0 = 0$, a derékszögű rendszert a címlapkép szemlélteti) az f_0 Coriolis-paraméter (3.24) szerint *eltűnik*, a Coriolis-eltérítés tehát elhanyagolható. Az $f \sim y$ lineáris közelítés a 10 fokos szélességig néhány százalékos hibával azonban érvényes. Azt írhatjuk tehát, hogy az Egyenlítő környékén (az $y_0 = 0$, x_0 tetszőleges origójú koordináta-rendszerben) a Coriolis-paraméter

$$f = \beta_E y, \tag{10.70}$$

ahol

$$\beta_E = \pm\frac{2\Omega_F}{R_F} = \pm 2{,}3 \cdot 10^{-11} 1/(\mathrm{ms}) \tag{10.71}$$

az ún. egyenlítői β paraméter, és az alsó előjel a déli félgömbre vonatkozik. A vízszintes síkbeli sebesség a sekélyfolyadék-egyenletek szerint

$$\frac{du}{dt} = \beta_E y v - g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{10.72}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta_E y u - g\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{10.73}$$

s a (3.22) kontinuitási egyenlet változatlan alakban érvényes. Az egyenlet matematikai struktúrájában új vonás, hogy a térmennyiségekben linearizált változata nem állandó együtthatós.

Egyszerűen megbecsülhető annak a sávnak az R_E távolsága, amelyen kívül az f-sík-közelítés már érvényes lehet, azaz ahol már visszatérhetünk az eddig vizsgált mérsékelt övi hidrodinamikához, és ahol a (3.29) Rossby-sugár már értelmezhető. R_E az a karakterisztikus hossz, amelyre a Rossby-sugár megegyezne az Egyenlítőtől mért távolsággal: $R_E = \sqrt{gH}/(|\beta_E| R_E)$. Ebből

$$\boxed{R_E = \frac{(gH)^{1/4}}{|\beta_E|^{1/2}} = \sqrt{\frac{c_0}{|\beta_E|}},} \tag{10.74}$$

ahol $c_0 = \sqrt{gH}$ a nem forgatott sekély vízi hullámsebesség. Az R_E távolságot szokás egyenlítői Rossby-sugárnak nevezni. Az Egyenlítőhöz R_E-nél közelebb eső szélességeken a sekélyfolyadék-egyenletek (10.72), (10.73) alakja használandó. Az egyenlítői β paraméter értékével R_E nagysága mind a légkörben, mind a mély óceánban 3000 km körüli. (A rétegzettség ezt az értéket csökkenti, g helyett első közelítésben az (5.8) redukált gravitációs gyorsulás, g' írandó: légköri 10 százalékos redukcióval kb. 2000 km, óceáni 1 ezrelékkel 560 km adódik R_E-re, amelyek a 18, ill. 5 foknyi szélességeknek felelnek meg.)

10.5.2. Egyenlítői Kelvin-hullámok

Az egyenlítői sekélyfolyadék-egyenleteknek létezik olyan lineáris hullámmegoldása, amely észak–déli sebességgel nem jár, tehát mintha az Egyenlítő merev falként viselkedne az ilyen mozgások szempontjából. A hullámot x irányban haladó síkhullámnak feltételezve, a megoldást

$$(u, v, \eta) = (u_0(y), 0, \eta_0(y)) e^{i(k_x x - \omega_0 t)} \tag{10.75}$$

alakban keressük, ahol az amplitúdók y-függése egyelőre határozatlan. A vízszintes aljzatú közegben a H átlagos mélység körül linearizált (10.72), (10.73), (3.22) egyenletekbe helyettesítve

az

$$i\omega_0 u_0 = ik_x g\eta_0, \tag{10.76}$$

$$\beta_E y u_0 = -g\frac{d\eta_0}{dy}, \tag{10.77}$$

$$i\omega_0 \eta_0 = ik_x H u_0 \tag{10.78}$$

összefüggéseket kapjuk. Az első és harmadik egyenlet összeszorzásából $\omega_0^2 = gHk_x^2$ adódik, az elsőből $u_0 = k_x g\eta_0/\omega_0$. Ezeket a másodikba helyettesítve $d\eta_0/dy = -(\beta_E k_x/\omega_0)y\eta_0$. Ennek megoldása y^2-ben exponenciális függvény. Fizikailag értelmes, az Egyenlítőtől távolodva lecsengő megoldást csak akkor kaphatunk, ha β_E és ω_0 előjele azonos. Ebből

$$\eta_0(y) \sim e^{-y^2/(2R_E^2)} \sim u_0(y), \qquad \omega_0 = \pm c_0 k_x, \tag{10.79}$$

ahol a negatív előjel a déli féltekére vonatkozik. A hullám tehát a szokásos Kelvin-hullámokhoz hasonlóan lecseng, éppen az R_E egyenlítői Rossby-sugár távolságán, de a lecsengés most négyzetesen függ az y távolságtól. Az ilyen egyenlítői Kelvin-hullám *mindkét féltekén keletre halad*, és mivel nem diszperzív, energiája is ebbe az irányba terjed.

10.5.3. Egyenlítői Poincaré–Rossby-hullámok

Ha nem tesszük fel, hogy az észak–déli sebesség eltűnik, a linearizált (10.72), (10.73), (3.22) egyenletek megoldása kereshető az

$$(u, v, \eta) = (u_0(y), v_0(y), \eta_0(y))\, e^{i(k_x x - \omega_0 t)} \tag{10.80}$$

alakban, ahol az amplitúdók y-függése most is egyelőre határozatlan. A vízszintes aljzatú közegben a H átlagos folyadékvastagság körül linearizálva az

$$-i\omega_0 u_0 - \beta_E y v_0 = -ik_x g\eta_0, \tag{10.81}$$

$$-i\omega_0 v_0 + \beta_E y u_0 = -g\frac{d\eta_0}{dy}, \tag{10.82}$$

$$-i\omega_0 \eta_0 + H\frac{dv_0}{dy} = -ik_x H u_0 \tag{10.83}$$

egyenleteket kapjuk. A harmadikból

$$\eta_0 = \frac{H}{\omega_0}\left(k_x u_0 - i\frac{dv_0}{dy}\right). \tag{10.84}$$

Ezt (10.81)-be helyettesítve

$$u_0 = i\frac{\beta_E \omega_0 y v_0 - c_0^2 k_x dv_0/dy}{\omega_0^2 - c_0^2 k_x^2}. \tag{10.85}$$

Feltételezve, hogy $\omega_0^2 \neq c_0^2 k_x^2$ (vagyis a Kelvin-hullámot kizárva), és ezt (10.84)-be helyettesítve a felszíni alak amplitúdóját is kifejezzük az y irányú sebességgel:

$$\eta_0 = iH\frac{\beta_E k_x y v_0 - \omega_0 dv_0/dy}{\omega_0^2 - c_0^2 k_x^2}. \tag{10.86}$$

Mindez (10.82) alapján a

$$\frac{d^2v_0}{dy^2} - \frac{y^2}{R_E^4}v_0 + \left(\frac{\omega_0^2}{c_0^2} - \frac{\beta_E k_x}{\omega_0} - k_x^2\right) v_0 = 0 \tag{10.87}$$

differenciálegyenletet adja a $v_0(y)$ amplitúdóra. Ha a távolságot R_E egységekben mérjük, és mindkét oldalt osztjuk 2-vel, akkor

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2v_0}{dy^2} + \frac{1}{2}y^2v_0 = \frac{R_E^2}{2}\left(\frac{\omega_0^2}{c_0^2} - \frac{\beta_E k_x}{\omega_0} - k_x^2\right) v_0. \tag{10.88}$$

Ez a harmonikus oszcillátor Schrödinger-egyenlete.[1] A peremfeltétel az, hogy v_0-nak $|y| \to \infty$ esetén el kell tűnnie. Ezzel az analógia teljes: a jobb oldalon a v_0 előtt fellépő konstansnak a harmonikus oszcillátor dimenziótlan sajátenergiájának kell lennie. Ez az n kvantumszámú állapotban $n + 1/2$. Az egyenlítői hullámoknak tehát *teljes spektruma* létezik az $n = 0, 1, \ldots$ természetes számokkal megkülönböztetve. Az n-edik hullám diszperziós relációját az

$$\frac{\omega_0^2}{c_0^2} - \frac{\beta_E k_x}{\omega_0} - k_x^2 = (2n+1)R_E^{-2} \tag{10.89}$$

harmadfokú egyenlet határozza meg. A Rossby-sugár (10.74) kifejezését használva ez írható az

$$\frac{\omega_0^2}{c_0|\beta_E|} \mp \frac{R_E k_x \sqrt{c_0|\beta_E|}}{\omega_0} - (R_E k_x)^2 = 1 + 2n \tag{10.90}$$

alakba is, amelyből látszik, hogy ω_0 természetes egysége a $\sqrt{c_0|\beta_E|}$ egyenlítői frekvencia,[2] és a dimenziótlan diszperziós reláció csak $R_E k_x$-től függ, ahogy a 10.11. ábra mutatja.

Az n indexű hullámhoz tartozó $v_0(y)$ amplitúdó a kvantummechanika alapján

$$v_0(y) \sim e^{-y^2/(2R_E^2)} H_n\left(\frac{y}{R_E}\right), \tag{10.91}$$

ahol $H_n(z)$ az n-edik Hermite-polinom.

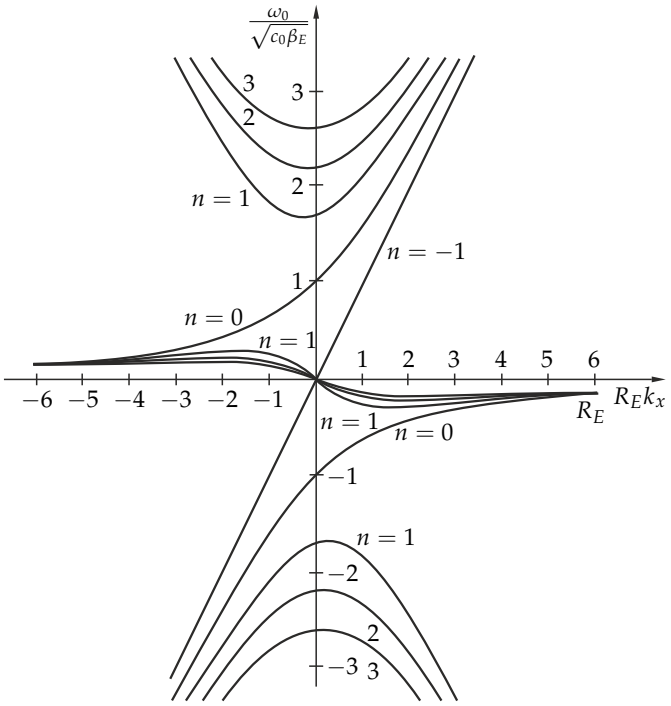
Az $n \geq 1$ indexű hullámok két családra bomlanak. Egyikükben a frekvencia sokkal nagyobb $\sqrt{c_0|\beta_E|}$-nél. Ekkor az $1/\omega_0$-lal arányos tag elhanyagolható, és

$$\omega_{0n}^2 = c_0|\beta_E|(1 + 2n + (R_E k_x)^2). \tag{10.92}$$

Ez ugyanolyan típusú, mint az f-sík Poincaré-hullámaira vonatkozó (3.30), ezért ezt a családot egyenlítői Poincaré-hullámoknak hívják. Érdemes megfigyelni, hogy annak ellenére, hogy f_0 nem létezik, megjelent helyén az $\sqrt{c_0|\beta_E|}$ egyenlítői frekvencia. A növekvő n indexű Poincaré-hullámok diszperziós relációja egyre nagyobb frekvenciáknál kezdődik (10.11. ábra).

[1] A $V = (1/2)m\omega^2y^2$ potenciálban mozgó m tömegű, E energiájú részecske Schrödinger-egyenlete $-\hbar^2/(2m)d^2\psi/dy^2 + (m\omega^2y^2/2)\,\psi = E\,\psi$, az $E = \hbar\omega(n + 1/2)$ energiaspektrummal. Ezt $\sqrt{\hbar/(m\omega)}$-val, a kvantummechanikai probléma természetes távolságegységével dimenziótlanítva $-1/2d^2\psi/dy^2 + y^2/2\psi = (n + 1/2)\psi$, ami ekvivalens (10.88)-cal. Az összehasonlításból látszik, hogy az R_E Rossby-sugár a $\sqrt{\hbar/(m\omega)}$ távolságnak felel meg.

[2] Annak az időnek a reciproka, amely alatt a felszíni hullámok az R_E Rossby-sugárnyi távolságot befutják.



10.11. ábra. Az egyenlítői hullámok (10.90)-nel leírt diszperziós relációja az északi féltekén $n = -1, 0, 1, 2, 3$-ra. A Poincaré- és Rossby-hullámokhoz az $n = 1, 2, \ldots$ indexek tartoznak. (A 2 és 3 indexű Rossby-hullám diszperziós görbéje mellé helyhiány miatt nem írtuk ki az indexet.) Az $n = 0$ módus a kevert hullám. A Kelvin-hullám az $n = -1$ választásnak felel meg.

A másik hullámcsaládban a frekvencia sokkal kisebb, mint $\sqrt{c_0|\beta_E|}$. Ekkor az ω_0^2-es tag hanyagolható el (10.89), (10.90)-ben, és

$$\omega_{0n} = -\beta_E \frac{k_x}{k_x^2 + (2n+1)R_E^{-2}} = \mp\sqrt{c_0|\beta_E|}\,\frac{R_E k_x}{1 + 2n + (R_E k_x)^2}. \tag{10.93}$$

Mivel ez ugyanolyan típusú, mint (3.51), az ilyen hullámokat egyenlítői Rossby- vagy egyenlítői planetáris hullámoknak nevezzük. Ezek az elnevezés ellenére nem kvázi-geosztrofikus hullámok, hiszen a $k_x = R_E^{-1}$ hullámszámmal pl. a $\beta_E R_E/(2n+2)$ nagyságú frekvencia társul, amely kis n-ekre összemérhető az $y = R_E$ szélességhez tartozó $f = \beta_E RE$ Coriolis-paraméterrel.[3] A két hullámcsalád frekvenciája jól szétválik: a Poincaré-hullámok minimális és a Rossby-hullámok $(R_E k_x)^2 = 1 + 2n$-hez tartozó maximális frekvenciájának aránya $2(2n+1)$, legalább 6.

Az $n = 0$ indexű hullám különleges, mert mindkét családhoz tartozik egyszerre. Ekkor (10.89) nullára rendezett alakja írható mint $(\pm\omega_0/c_0 + k_x)(\pm\omega_0/c_0 - \beta_E/\omega_0 - k_x) = 0$. Mivel az első tényező a levezetésben használt feltevés szerint nem lehet nulla, az $n = 0$ módus diszperziós relációját a

$$\pm\frac{\omega_0}{c_0} - \frac{\beta_E}{\omega_0} = k_x \tag{10.94}$$

feltétel adja. Ez nagy frekvenciákra $\omega_0 = \pm c_0 k_x$ alakú, míg kicsikre $\omega_0 = -\beta_E/k_x$. Ez a hullám bizonyos hullámszámokra gravitáció-, másokra pedig Rossby-szerű, ezért *kevert* hullámnak nevezik. Mivel a (10.89) egyenletnek a formális $n = -1$ választással a (10.79) reláció megoldása,

[3] Az Egyenlítő mentén nem beszélhetünk kvázi-geosztrofikus viselkedésről, hiszen az a geosztrofikustól való kis eltérés, az utóbbi azonban nem értelmezhető ebben a tartományban.

a Kelvin-hullámok is beleilleszthetők ebbe az egyesített tárgyalásba. A $v_0(y)$ amplitúdó ismeretében az $u_0(y)$, $\eta_0(y)$ amplitúdók is következnek. A (10.85), (10.86) összefüggésekben megjelenő i tényező mutatja, hogy negyed fázisnyi eltérés van v, illetve u és η között. Ha tehát a v sebesség időfüggése $\sin(k_x x - \omega_0 t)$, akkor a másik két mennyiség $\cos(k_x x - \omega_0 t)$-vel arányos. Az $n > 1$ indexű hullám az y irányban hullámzik, hiszen a Hermite-polinom többször előjelet vált, az n-edik $n-1$-szer. A (10.91)-ban megjelenő négyzetes exponenciális lecsengés miatt a hullámzás az R_E Rossby-sugáron kívül már nem érzékelhető, ezek a hullámok nem jutnak el a mérsékelt égövbe. Páros n-ekre a H_n polinom páros függvénye y-nak. A (10.85), (10.86) összefüggések számlálói szerint azonban $u(y)$ és $\eta(y)$ párossága ellenkező jellegű, mint v-jé. A felszíni hullámzás szempontjából tehát a páratlan n indexű hullámok tükörszimmetrikusak az Egyenlítőre.

A $\sqrt{c_0|\beta_E|}$ egyenlítői frekvencia fontosságát mutatja az is, hogy az ennél kisebb frekvenciájú (kb. 1 napnál hosszabb periódusú) zavarok nem keltenek Poincaré-hullámokat, csak Rossby- és Kelvin-hullámokat, illetve a kevert hullámot gerjeszthetik. Az Egyenlítőre térben szimmetrikus felszíni perturbáció esetén csak a Kelvin-hullám és a páratlan indexű Rossby-hullámok jelenhetnek meg.

A (10.93) diszperziós relációjú Rossby-hullámok csoportsebessége (3.54)-hez hasonlóan

$$c_n^* = \beta_E \frac{k_x^2 - (1+2n)R_E^{-2}}{\left(k_x^2 + (1+2n)R_E^{-2}\right)^2}. \tag{10.95}$$

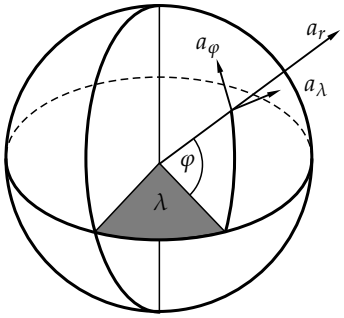
Az energia keletre terjed, ha $k_x > \sqrt{1+2n}R_E^{-1}$. A 3.11. ábra jellegében érvényben marad, csak R^{-1} szerepét az n-edik hullámban $R_E^{-1}\sqrt{1+2n}$ veszi át, és leolvasható az alacsony frekvenciájú egyenlítői hullámok visszaverődési törvénye észak–déli partvonalon. Ezek meghatározó vonása, hogy az Egyenlítő mentén haladó Rossby-hullámok ugyanolyan irányítottságú Kelvin-hullámok formájában is visszaverődhetnek. A mindig kelet felé haladó Kelvin-hullámok a keleti peremen történő visszaverődés után ugyanolyan frekvenciájú hosszú Rossby-hullámokká válnak, amelyek az energiát nyugat felé szállítják. A nyugati peremen történő ütközéskor a Rossby-hullám most nemcsak rövid Rossby-hullámként verődhet vissza, hanem az Egyenlítő mentén haladó hosszú Kelvin-hullámként is. Ez egyben gyengíti a rövidhullámú zavarok felhalmozódását a nyugati perem mentén, vagyis a nyugati peremáramlatot. Ugyanakkor a keleti peremen való ütközéskor az y irányú part mentén a sarok felé haladó Kelvin-hullám is keletkezhet, és így az egyenlítői hullámok összenergiája csökkenhet.[4] Az egyenlítői hullámok, visszaverődésük és egymásba alakulásuk fontos szerepet játszanak a Csendes-óceán medencéjére jellemző ún. El Nino-jelenségkör részletes megértésében.

10.6. Gömbi hidrodinamika

10.6.1. Gyorsulások gömbi koordinátákban

Először elemi gondolatmenettel meghatározzuk, hogyan fejezhető ki egy *nem* forgatott gömbön mozgó test gyorsulása a 3.1. ábrának megfelelő földrajzi (λ, φ, r) koordinátákkal (10.12. ábra), azok időderiváltjaival, majd a gömbi sebességekkel. Utóbbi azért fontos, mert a hidrodinamika egyenletek a sebességtér időderiváltjára építenek.

[4] Ezzel ismét példát látunk arra, hogy áramlási jelenségek megszűnhetnek nemcsak a disszipáció, hanem hullámkeltés révén is. A geosztrofikus turbulenciában a nagy örvények összeolvadási folyamata például Rossby-hullámok kisugárzása miatt szakad meg (7.5.3. fejezet)



10.12. ábra. A gyorsulásvektor komponensei (álló) gömbi rendszerben

A ϕ irányú komponens mindkét féltekén akkor pozitív, ha a közelebbi sarok felé mutat. Mint minden vektormennyiséget, a gyorsulást is kelet–nyugati, észak–déli és sugárirányú komponensekre bontjuk, $\mathbf{a} = (a_\lambda, a_\varphi, a_r)$. A sebesség (3.3), (3.4) alapján

$$\mathbf{v} = (r\cos\varphi\dot{\lambda} = u, \pm r\dot{\varphi} = v, \dot{r} = w). \tag{10.96}$$

A $\lambda(t), \phi(t), r(t)$ pályán mozgó test gyorsulását keressük gömbi koordinátákban.

A gondolatmenet azon alapul, hogy használjuk a gyorsulás kifejezésének álló és gyorsuló-forgó koordináta-rendszerek közötti jól ismert kapcsolatát:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' - \mathbf{a}_{cf} - \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_0. \tag{10.97}$$

Itt $\mathbf{a}$ az inercia-rendszerbeli gyorsulás, $\mathbf{a}'$ a test gyorsulása a mozgó rendszerben, $\mathbf{a}_{cf}$, $\mathbf{a}_C$ az egyenletes szögsebességű forgás miatt fellépő centrifugális és Coriolis-gyorsulás, és $\mathbf{a}_0$ a mozgó rendszer origójának gyorsulása.[5]

A mozgást gondolatban felbontjuk három független komponensre:

(i) egy észak–déli tengely körüli, $\dot{\lambda}$ pillanatnyi (állandó) szögsebességű forgásra,

(ii) az Egyenlítő síkjában fekvő tengely körüli, $\dot{\varphi}$ pillanatnyi (állandó) szögsebességű forgásra,

(iii) és egy $\dot{r}$ sebességű, forgás nélküli radiális mozgásra.

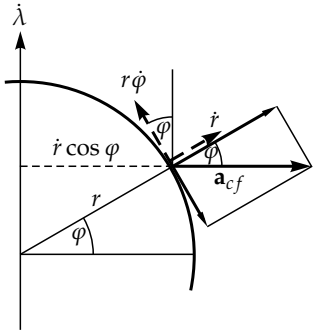
Mindegyik mozgáskomponens esetén alkalmazzuk a (10.97) összefüggést. Mivel minden felmerülő koordináta-rendszer origója választható a gömb középpontjának, $\mathbf{a}_0 = 0$.

(i) Az észak–déli tengely körül $\dot{\lambda}$ szögsebességgel mozgó testre $r\cos\varphi\dot{\lambda}^2$ centrifugális gyorsulás hat, amelynek r- és φ komponensei (10.13. ábra) $r\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2$, illetve $\mp r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\lambda}^2$, a felső előjel vonatkozik a felső félgömbre. Az ábráról leolvasható az is, hogy a $\dot{\lambda}$ szögsebességű pillanatnyi forgásból származó Coriolis-gyorsulásnak csak λ komponense van: az $\dot{r}$ sebességkomponensből $-2\dot{\lambda}\dot{r}\cos\varphi$ adódik, az $r\dot{\varphi}$ komponensből $2\dot{\lambda}r\dot{\varphi}\sin\varphi$. A test λ irányú gyorsulása, a'_λ az éppen $\dot{\lambda}$ sebességgel forgó rendszerben $r\cos\varphi\ddot{\lambda}$ nagyságú. Az álló rendszerbeli $\mathbf{a}$ gyorsuláshoz adódó járulék tehát

$$\left(r\cos\varphi\ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi), \pm r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\lambda}^2, -r\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2\right). \tag{10.98}$$

(ii) Az Egyenlítő síkjában fekvő, $\dot{\varphi}$ szögsebességgel forgó rendszerben $r\dot{\varphi}^2$ nagyságú, sugár irányú centrifugális gyorsulás hat a testre (10.14. ábra). A test relatív sebessége ebben a rendszerben az r irányban $\dot{r}$, a λ irányban $r\cos\varphi\dot{\lambda}$. A Coriolis-gyorsuláshoz az utóbbi nem ad

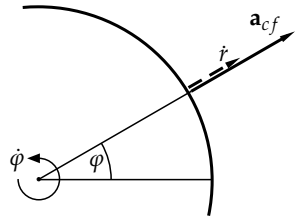
[5] Ha forgó rendszer szögsebességét nem tekintjük konstansnak, hanem a testtel együtt gyorsulva forgónak, akkor $\mathbf{a}' = 0$ lenne, de megjelenne a szöggyorsulásból adódó (Euler-)gyorsulás ellentettje, ami éppen az általunk figyelembe vett $\mathbf{a}'$.



10.13. ábra. Az álló gömbön az észak–déli tengelyű, $\dot\lambda$ pillanatnyi szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben fellépő centrifugális gyorsulás és komponensei. A szaggatott vektorok a sebességkomponenseket jelölik.

járulékot, az előbbiből azt kapjuk, hogy φ irányban $\mp 2\dot r\dot\varphi$. A mozgó test φ irányú a'_φ gyorsulása $r\ddot\varphi$ nagyságú (az északi félgömbön pozitív). A járulék az **a** gyorsuláshoz most

$$\left(0, \pm(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi), -r\dot\varphi^2\right). \tag{10.99}$$



10.14. ábra. Az egyenlítői síkban fekvő, $\dot\varphi$ szögsebességű koordináta-rendszerben fellépő centrifugális gyorsulás. A szaggatott vektor az ebben a forgó rendszerben észlelt sebességnek a rajz síkjába eső komponensét mutatja.

(iii) Az $\dot r$ sebességű radiális mozgás követésekor forgásból származó tehetetlenségi erők nem lépnek fel, az a'_r gyorsulás $\ddot r$, és a járulék

$$(0, 0, \ddot r). \tag{10.100}$$

Az (i)–(iii) járulékokat figyelembe véve kapjuk, hogy inerciarendszerben az **a** gyorsulás komponenseinek kifejezése a földrajzi koordinátákkal és azok deriváltjaival

$$a_\lambda = r\cos\varphi\ddot\lambda + 2\dot\lambda(\dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi), \tag{10.101}$$

$$a_\varphi = \pm(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi\dot\lambda^2), \tag{10.102}$$

$$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 - r\cos^2\varphi\dot\lambda^2. \tag{10.103}$$

A második deriváltak mellett megjelennek az első deriváltak szorzatait tartalmazó tagok is.

A (10.96) sebességvektor időderiváltjai

$$\frac{du}{dt} = r\cos\varphi\ddot\lambda + \dot r\cos\varphi\dot\lambda - r\sin\varphi\dot\lambda\dot\varphi = r\cos\varphi\ddot\lambda + \frac{uw}{r} \mp \frac{uv}{r}\operatorname{tg}\varphi, \tag{10.104}$$

$$\frac{dv}{dt} = \pm(r\ddot\varphi + \dot r\dot\varphi) = \pm r\ddot\varphi + \frac{vw}{r}, \qquad \frac{dw}{dt} = \ddot r, \tag{10.105}$$

ahol a második egyenlőségekben az első deriváltakat a sebességekkel helyettesítettük. A gyor-

sulások földrajzi koordinátákban tehát az

$$a_\lambda = \frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r}\,\mathrm{tg}\,|\varphi|, \tag{10.106}$$

$$a_\varphi = \frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r}\,\mathrm{tg}\,|\varphi|, \tag{10.107}$$

$$a_r = \frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{r} \tag{10.108}$$

összefüggésben állnak a sebességek időderiváltjával. A köztük fellépő különbség a sebességek szorzatait tartalmazó ún. *metrikus gyorsulás*, amely a koordináta-rendszer görbültségének következménye. Ezek az egyenletek (a gondolatmenetben segítségként használt dinamikai megfontolások ellenére) kinematikai jellegűek, a gömbi geometria jellemzői. Használhatók ezért forgó gömbön is az abban a rendszerben érvényes sebességekkel. Ezt használtuk a (3.9) egyenletben.

Mozgó test esetén a Newton-egyenlet azt fejezi ki, hogy ezek a gyorsulások a gömbön érvényes szabad és tehetetlenségi erőkből adódó gyorsulások összegei. Kizárólag a Coriolis-gyorsulás hatását vizsgálva, ennek gömbhéjra ($w = 0, r = R$) érvényes változata a (3.12) egyenlet.

10.6.2. Hidrodinamika forgó gömbön

Rátérünk a forgó gömbön (Földön) zajló áramlásokra. Az Euler-egyenletben a gyorsulások sebességderiváltakkal megadott fenti alakját használjuk: a d/dt mennyiség természetesen a teljes deriváltat jelöli. A külső erőként figyelembe vesszük a súlyt, a nyomási erőt, és a folyadékelemre ható Coriolis-erőt. Az egyenlet összenyomhatatlan folyadékra tehát

$$\frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r}\,\mathrm{tg}\,|\varphi| = fv - 2\Omega_y w - \frac{1}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}_\lambda\, p, \tag{10.109}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r}\,\mathrm{tg}\,|\varphi| = -fu - \frac{1}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}_\varphi\, p, \tag{10.110}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{r} = 2\Omega_y u - g - \frac{1}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}_r\, p, \tag{10.111}$$

ahol használtuk a Coriolis-gyorsulás általános (3.7) kifejezését (f a (3.20) Coriolis-paraméter, Ω_y a Föld forgási szögsebességének (3.6) észak–déli komponense), és megjelentek a nyomásgradiens gömbi komponensei. Az egyenlet azt mutatja, hogy a teljes Földre kiterjedő hidrodinamikai mozgások leírásában a metrikus gyorsulások lényegesek. A (10.111) alakban szigorúan véve a g gravitációs gyorsulás jelenik meg, hiszen az radiális irányítottságú. Nem követünk el azonban nagy hibát, ha ide a nehézségi gyorsulás nagyságát írjuk (s közben megtartjuk a gömbi szemléletet).

Vizsgáljuk most meg, mikor lehet az Ω_y-nal arányos tagokat elhanyagolni. Ehhez dimenziótlanítjuk az egyenleteket, amelyeket a p' dinamikai nyomással írunk fel. A vízszintes koordinátákat L, a függőlegest H egységekben mérjük, a karakterisztikus vízszintes sebességet U-nak, a függőlegest UH/L-nek, a jellegzetes dinamikai nyomást $\varrho_0|f_0|UL$-nek tekintjük, és az időt L/U egységekben mérjük. A felszíni közegek korlátos mélységét kihasználjuk abban, hogy a metrikus gyorsulásokban szereplő r távolságot a Föld R_F sugarával közelítjük. Az egyszerűség kedvéért csak a közepes szélességekre vonatkozó alakot vizsgáljuk. A dimenziótlan egyenlet

így

$$Ro\frac{du}{dt} + Ro\frac{L}{R_F}\left(\varepsilon uw - uv\,\mathrm{tg}\,|\varphi|\right) = \frac{f}{|f_0|}v - \frac{2\Omega_y}{|f_0|}\varepsilon w - \mathrm{grad}_\lambda\, p', \tag{10.112}$$

$$Ro\frac{dv}{dt} + Ro\frac{L}{R_F}\left(\varepsilon vw + u^2\,\mathrm{tg}\,|\varphi|\right) = -\frac{f}{|f_0|}u - \mathrm{grad}_\varphi\, p', \tag{10.113}$$

$$Ro\varepsilon^2\frac{dw}{dt} - Ro\frac{L}{R_F}\varepsilon\left(u^2 + v^2\right) = -\frac{2\Omega_y}{|f_0|}\varepsilon u - \mathrm{grad}_r\, p', \tag{10.114}$$

ahol ε a H/L mélységi arányt jelöli.

Ha most figyelembe vesszük azt is, hogy a folyadék *sekély*: $\varepsilon \ll 1$, sok tag elhanyagolhatóvá válik. Az utolsó és a (10.111) egyenlet a hidrosztatikai közelítésbe megy át, és Ω_y eltűnik a vízszintes sebességkomponensek egyenletéből. Releváns paraméterként megmarad viszont az L/R_F hányados, a lineáris kiterjedés viszonya a Föld sugarához. Ha ez nagyon kicsi, akkor visszakapjuk a 3.4. fejezetben tárgyalt f-sík-közelítést.

A $\mathrm{tg}\,|\varphi|$-kel arányos tagok akkor is elhanyagolhatók, ha L/R_F véges, pl. 0,1 körüli, de a Rossby-szám kicsi, hiszen az együtthatója ekkor két kis szám szorzata. Ugyanekkor jogos viszont megtartani az $f/|f_0| = \pm(1 + Bey)$ alakban az y-nal arányos tagot, hiszen Be „egyszeresen" kicsi, ami (3.37)-nek felel meg. A *kvázi-geosztrofikus* közelítés tehát konzisztens a 3.5. fejezetben bevezetett β-sík-közelítéssel, azaz ilyenkor a Föld görbületéből adódó legfontosabb járulék valóban a Coriolis-paraméter lineáris helyfüggése. A metrikus gyorsulások mind elhanyagolhatók, használhatjuk a lokális derékszögű koordináta-rendszert és az abban képzett gradienst.

11. fejezet

A viszkozitás hatása (folytatás)

11.1. Ekman-transzport az alsó határrétegben

Érdemes megvizsgálni, hogy a viszkozitás következtében milyen mértékű az izobárokra merőleges, tehát a geosztrofikustól eltérő anyagmozgás az alsó határrétegben. Definiáljuk ezért (4.40)-hez hasonlóan az alsó rétegben az

$$\mathbf{S} = \int_0^\infty (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) dz \tag{11.1}$$

Ekman-transzportot. Az Ekman-transzport és a határréteg D vastagságának hányadosa a határrétegbeli átlagos sebesség. A (4.14) egyenletet integrálva a (11.1) definíció alapján kapjuk, hogy

$$f_0 \mathbf{S} \times \mathbf{n} = \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}_{|z=0}. \tag{11.2}$$

Kihasználtuk, hogy a felső határon a sebesség belesimul a geosztrofikusba, amely független a magasságtól, és így csak az alsó határ a lényeges. A sebesség z szerinti deriváltja az alaplapon (4.27) szerint ismert, és ezzel

$$f_0 \mathbf{S} \times \mathbf{n} = \frac{\nu}{\delta} \left(\mathbf{u}_g \mp \mathbf{u}_g \times \mathbf{n} \right). \tag{11.3}$$

Mivel minden $\mathbf{n}$-re merőleges $\mathbf{r}$ vektorra $\mathbf{n} \times \mathbf{r} \times \mathbf{n} = \mathbf{r}$, az egyenletet $\mathbf{n}$-nel vektoriálisan beszorozva azt kapjuk az Ekman-transzportra, hogy

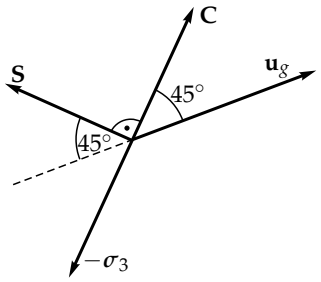
$$\mathbf{S} = \frac{\nu}{f_0 \delta} \left(\mathbf{n} \times \mathbf{u}_g \mp \mathbf{u}_g \right) = \left(-u_g \mp v_g, -v_g \pm u_g \right) \frac{\delta}{2}, \tag{11.4}$$

hiszen (4.17) alapján $\nu / f_0 = \pm \delta^2 / 2$. A felső előjel ismét az északi féltekének felel meg. Az eredmény azt mutatja, hogy az Ekman-transzport mindig *135 fokos szöget* zár be a geosztrofikus áramlás irányával, és az északi (déli) féltekén attól balra (jobbra) mutat (11.1. ábra). Az a tulajdonság, hogy az Ekman-transzport szöge éppen 45 fok a negatív geosztrofikus sebességhez képest, érthetővé válik, ha észrevesszük, hogy a (11.2) egyenlet jobb oldalán (4.23) szerint σ_3 / ϱ_0 áll, ahol σ_3 a folyadék által az aljzatra vízszintesen ható nyírási feszültség. Ezzel

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\varrho_0 f_0} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\sigma}_3 = \frac{1}{\varrho_0 f_0} (-\sigma_{3,y}, \sigma_{3,x}). \tag{11.5}$$

Az Ekman-transzport tehát éppen merőleges a nyírási vektorra. Ez érthető, hiszen a teljes határrétegben a sebességeltéréssel kapcsolatos Coriolis-erőnek kompenzálnia kell a viszkozitásból

adódó eredő erőt. Az utóbbi nem más, mint a folyadékra alul ható erő, azaz az aljzatra ható nyíróerő ellentettje, $-\sigma_3$ (11.1. ábra). A $\partial\mathbf{u}/\partial z$-vel arányos nyírás viszont (4.27) szerint 45 fokot zár be a geosztrofikus sebességgel, $-\sigma_3$ pedig 135 fokot.

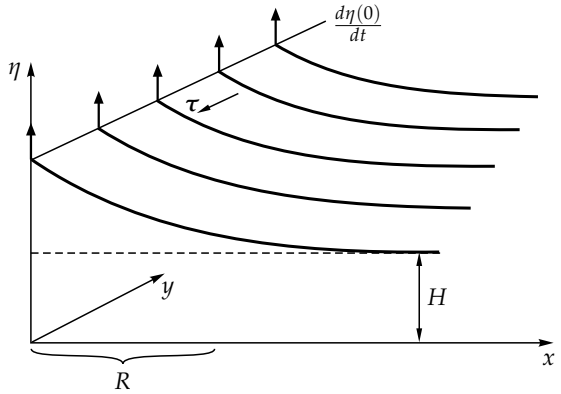


11.1. ábra. A **S** Ekman-transzport az alsó határrétegben 45 fokos szöget zár be az $\mathbf{u}_g$ geosztrofikus sebesség ellentettjével. A **C** Coriolis-erő és az aljzat által a folyadékra ható $-\sigma_3$ nyíróerő eredője nulla az (x, y) síkban. A **C** vektor az Ekman-transzportnak megfelelő átlagos sebességnövekményre ható Coriolis-erőt jelöli, amely merőleges magára az Ekman-transzportra. Az ábra az északi féltekére jellemző irányítottságot mutatja.

Ez az eredmény azonos a felső hatérrétegbeli Ekman-transzportot a szélnyírás erősségével megadó (4.42) alakkal, ha azt is a folyadékban fellépő nyírással, tehát $-\boldsymbol{\tau}$-val fejezzük ki. Az óceáni felső és alsó határrétegben az Ekman-transzport viszonya tehát $|\boldsymbol{\tau}|/|\sigma_3|$, és mivel $|\sigma_3|$ általában kisebb, mint a szélnyírás, az alsó határrétegben az Ekman-transzport rendszerint gyengébb, mint a felsőben.

11.2. Viharhullámok

A (4.49) szélnyírással kiegészített sekélyfolyadék-egyenlet lehetővé teszi az ún. viharhullámok viselkedésének leírását. Állandó, erős szelekkel járó viharok jelentős, közel állandó erősségű nyírást fejtenek ki a tengerek felszínére. Ha a szél valamely partvonal mentén fúj, amely tőle az északi féltekén jobbra, a délin balra esik, akkor a Coriolis-erő következtében kialakuló anyagtranszport a part felé irányul. Időben egyre növekvő mennyiségű víz torlódik fel a part mentén (11.2. ábra), viharhullám (storm surge) alakul ki, amely komoly károkat okozhat.



11.2. ábra. A viharhullám a part felé irányuló áramlás miatt kialakuló vízszintemelkedés, amely a parttal párhuzamosan fújó szél nyíróereje ($\boldsymbol{\tau}$) és a Coriolis-hatás következtében alakul ki. Az északi féltekén a viharhullámoknak kitett partok a szél haladási irányának jobb oldalára esnek. A viharhullám hatása a part Rossby-sugár nagyságú környezetére korlátozódik.

Tegyük fel, hogy a nyugati partvonal észak–déli irányú, a szél északról fúj, és konstans $\tau_y = -\tau_0 < 0$ nyírási feszültséget fejt ki a vízfelszínre. Az áramlási sebességek olyan kicsik, hogy a nemlineáris tagok elhanyagolhatók. Mivel a vízszintemelkedés rendszerint nem túl nagy kiterjedésű, jogosan használjuk az f-sík-közelítést. A linearizált sekélyfolyadék-egyenletek az északi féltekén ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_0 v - g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -f_0 u - g\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\tau_0}{\varrho_0 H}, \tag{11.6}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{11.7}$$

A nyírás állandó, ezért a probléma eltolásinvariáns az y tengely mentén. Feltehetjük tehát, hogy minden változó csak a kelet–nyugati x koordinátától függ: $\eta = \eta(x,t)$, $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$. A hidrodinamikai gyorsulás a parttal párhuzamos y irányban nem lehet nulla, mert ott állandó erő hat, arra merőlegesen viszont lehet. Az u komponens időbeni állandóságát feltételezve: $u = u(x)$, a kontinuitási egyenletből azt kapjuk, hogy η időben lineárisan változik, az u komponens egyenletéből pedig azt, hogy v is. A nyírás tehát egyenletesen erősíti a parttal párhuzamos áramlást, és egyben időben *állandó* szintemelkedést okoz. A lineáris időfüggés leválasztásával közönséges differenciál-egyenletrendszert kapunk, amely az $u(x = 0) = 0$ peremfeltétellel megoldható. A teljes megoldás:

$$u = -\frac{\tau_0}{f_0 \varrho_0 H}\left(1 - e^{-x/R}\right), \qquad v = -\frac{\tau_0 t}{\varrho_0 H} e^{-x/R}, \tag{11.8}$$

és

$$\eta = \frac{\tau_0 t}{R f_0 \varrho_0} e^{-x/R}. \tag{11.9}$$

Itt megjelent az $R = \sqrt{gH}/f_0$ Rossby-sugár, és ez határozza meg a partra merőleges térbeli lecsengést (11.2. ábra). A kelet–nyugati sebességkomponens amplitudóját a τ_0 nyíráserősség, az észak–déliét és a szintemelkedését viszont a $\tau_0 t$ nyírási impulzus szabályozza. A szintemelkedés sekély folyadékban a leggyorsabb, hiszen ott a Rossby-sugár kicsi. Viharos szélben $\tau_0 = 2\,\mathrm{N/m^2}$, amellyel $H = 50$ m-es vízmélységben a part menti szintemelkedés $d\eta(x=0)/dt = 8\,\mathrm{m/nap}$(!), összhangban a megfigyelt sebességekkel. Természetesen a szelek erőssége változik, és a feltételek ezért csak néhány óráig állandóak, de még ezalatt is több méteres szintemelkedés történhet. Ha a szélerősségben térbeli periodicitás is megfigyelhető a part mentén, akkor a szélnyírás Kelvin-hullámokat gerjeszt, amelyek amplitúdója időben nőhet.

11.3. Nyugati peremáramlat súrlódó folyadékban, a Stommel-modell

H. M. Stommel amerikai oceanográfus (1920–1992, a Golf-áramlat első részletes elméletének kidolgozója, a modern oceanográfia egyik megalapozója) nevéhez fűződik az a felismerés, hogy a nyugati peremáramlatok véges méretének kialakulásában alapvető szerepe van az alsó határrétegnek is. Az ott kialakuló feláramlás w_+ erőssége ugyanis függ a geosztrofikus örvényességtől. Mivel az áramvonalak elkanyarodása miatt a medence nyugati peremén a feláramlás jelentős lehet, az alsó határréteg itt nem hanyagolható el. Ha a feláramlási sebesség magasság szerinti deriváltját a $\partial w/\partial z = (w_+ - w_-)/H$ alakban írjuk, akkor látszik, hogy elegendően nagy ciklonális örvényesség esetén a w_- olyan nagy negatív szám, hogy a derivált előjelet vált a csak a felső határréteg hatását figyelembe vevő leíráshoz képest (4.6.2. fejezet). Ekkor a Sverdrup-transzport is előjelet vált, és észak felé történő áramlást ír le. Ez történik a nyugati peremáramlat kialakulási helyén. Mivel most w_- nem zérus, a peremáramlat vastagsága is véges értéknek adódik.

A (4.53) egyenlet általánosítása tehát

$$\boxed{v_g\beta = f_0\frac{w_+ - w_-}{H} = \frac{\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}}{\varrho_0 H} - \frac{1}{t_0}\zeta_g,} \tag{11.10}$$

ahol használtuk (4.33) jobb oldalát és a t_0 felpörgetési idő (4.34) alakját.

A fenti egyenletet érdemes a (4.58)-cal definiált mélységi áramlási függvénnyel felírni. A nyugati perem közelében lényegesek a kelet–nyugati irányú változások, míg az észak–déliek mindenütt gyengék. Azt várjuk, hogy az x szerinti deriváltak dominálnak, és ezért a Laplace-operátor az x szerinti második deriválttal helyettesíthető:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{1}{t_0\beta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}}{\beta\varrho_0}. \tag{11.11}$$

Ez az egyszerű óceánmodellként használt (4.61) egyenlet általánosítása. Itt is csak y-tól függő nyírási profilt használva a jobb oldal $-d\tau_x/dy$-nal arányos. A megoldást a $\Psi = -g(x)d\tau_x/dy/(\beta\varrho_0)$ alakban keresve a $dg/dx + d^2g/dx^2/(t_0\beta) = 1$ egyenlet adódik. Ennek az a megoldása, amelyre a peremeken $uH = -\partial\Psi/\partial y$ eltűnik, vagyis, $g(0) = g(L_x) = 0$, a 4.13. ábra medencéjét tekintve

$$g(x) = x - L_x\frac{\left(1 - e^{-t_0\beta x}\right)}{\left(1 - e^{-t_0\beta L_x}\right)}. \tag{11.12}$$

Az áramlási függvény

$$\Psi(x,y) = \frac{d\tau_x}{dy}\frac{1}{\beta\varrho_0}\left[L_x\frac{\left(1 - e^{-t_0\beta x}\right)}{\left(1 - e^{-t_0\beta L_x}\right)} - x\right], \tag{11.13}$$

amiből

$$v(x,y) = \frac{d\tau_x}{dy}\frac{1}{\beta\varrho_0 H}\left[L_x t_0\beta\frac{e^{-t_0\beta x}}{\left(1 - e^{-t_0\beta L_x}\right)} - 1\right]. \tag{11.14}$$

A kifejezés mindkét féltekén érvényes, az x-függés jellege azonban egészen más különböző előjelű β-kra. Mivel β számértéke kicsi, azt várjuk, hogy $1/(t_0|\beta|) \ll L_x$. Pozitív β-ra ezért az exponenciális kifejezés gyorsan csökken x-ben, míg negatívra erősen növekszik. A szögletes zárójel jó közelítéssel helyettesíthető mint:

$$L_x t_0\beta\frac{e^{-t_0\beta x}}{\left(1 - e^{-t_0\beta L_x}\right)} - 1 = \begin{cases} L_x t_0\beta e^{-t_0\beta x} - 1, & \beta > 0, \\ L_x t_0|\beta| e^{-t_0|\beta|(L_x - x)} - 1, & \beta < 0. \end{cases} \tag{11.15}$$

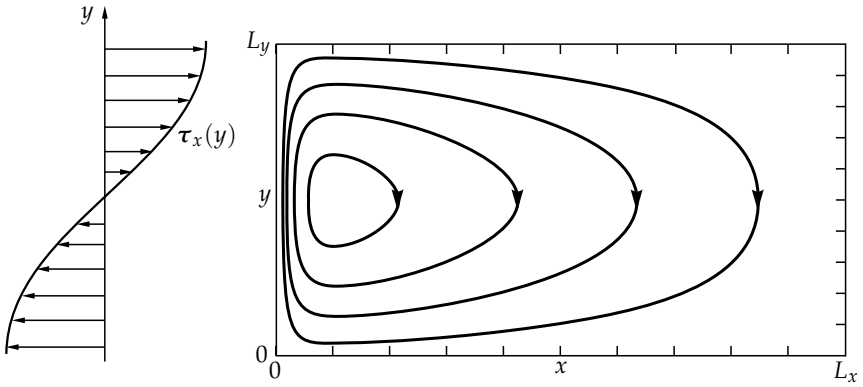
A felső kifejezés azt mutatja, hogy bal oldali perem mentén, $x \approx 0$-ra, az észak–déli sebesség egy keskeny sávban előjelet vált és megerősödik, nyugati peremáramlat jelenik meg. Az alsó kifejezés szerint a déli féltekén ez az $x \approx L_x$ tartományban történik, de a földrajzi koordináták megválasztása szerint ez éppen a déli óceáni medence *nyugati* oldala, vagyis a peremáramlat ott is a nyugati partvonal mentén fut, a sarok irányába.[1]

[1] A déli medencét hasonló szélességekre helyezve, mint az északit, a τ_x nyírási profil előjelet vált, vagyis τ_0/β előjele azonos mindkét féltekén.

A nyugati peremáramlatok karakterisztikus szélessége

$$\Delta = \frac{1}{t_0|\beta|} = \frac{|f_0/2|\delta}{H|\beta|} = \frac{\sqrt{|f_0/2|\nu}}{H|\beta|} = \frac{|f_0|}{|\beta|}\sqrt{\frac{Ek}{2}}, \tag{11.16}$$

amire tehát a Stommel-modellben véges érték adódik. (Az ekvivalens alakokban használtuk (4.34)-et.) A (11.15) összefüggésben megjelenő lecsengés az exponenciális függvény tulajdonsága szerint kb. az $x < 5\Delta$ tartományban lényeges. Adatainkkal (SI egységekben: $t_0 = 5 \cdot 10^6$, $|\beta| = 1.6 \cdot 10^{-11}$, $f_0 = 10^{-4}$, $\nu = \nu_{turb} = 10^{-2}$, és $Ek = 6 \cdot 10^{-6}$) $\Delta \approx 10$ km adódik, azaz az áramlat szélessége kb. 50 km, jó egyezésben a megfigyelésekkel. A peremáramlat szélessége *nem függ* a szélnyírástól, az áramlási sebességek azonban természetesen függnek.



11.3. ábra. A Stommel-modell áramlási képe a 4.13. ábrához is használt nyíráseloszlással

Az északi féltekére szorítkozva és használva τ_x (4.60) alakját, valamint a $t_0\beta L_x \gg 1$ tulajdonságot, az áramlás sebességkomponensei (11.3. ábra):

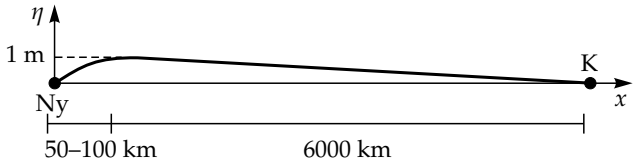
$$u = -\frac{\tau_0\pi^2}{\beta\varrho_0 L_y^2 H}\left(L_x\left(1 - e^{-x/\Delta}\right) - x\right)\cdot\cos\frac{\pi y}{L_y},$$

$$v = \frac{\tau_0\pi}{\beta\varrho_0 L_y H}\left(\frac{L_x}{\Delta}e^{-x/\Delta} - 1\right)\cdot\sin\frac{\pi y}{L_y}. \tag{11.17}$$

A nyugati peremtől távol a Ψ függvény és a sebességek gyakorlatilag megegyeznek a 4.6.2. fejezet egyszerű modelljéből kapottakkal. A leglényegesebb eltérés az $x \approx 0$ tartományban jelentkezik. Itt a v sebességkomponens első tagja L_x/Δ-szor, azaz mintegy 600- szor nagyobb a másodiknál. A part mentén ezért közel m/s nagyságrendű sebességek lépnek fel a peremáramlatban. A megoldás leírja azt a tapasztalati tényt is, hogy a peremáramlatok erőssége kialakulásuk után a haladási irányban nő (a színuszfüggvény növekvő) a medence közepéig.

Annak fényében, hogy geosztrofikus egyensúlyban az áramlási függvény arányos a felszín η alakjával, a következő kvalitatív képet alakíthatjuk ki. Egy óceáni medence kelet–nyugati hosszmetszetében a nyugati perem mellett viszonylag gyors átlagos felszínemelkedés történik, amely azután nagyon lassan csökken le a keleti peremen felvett értékre (11.4. ábra). A gyors szintemelkedés nyugati peremáramlat megjelenésével jár együtt, a 2.4. ábra tehát a nyugati perem körüli lokális viselkedésnek felel meg. Érdemes hangsúlyozni, hogy 11.4. ábra aszimmetriája eltűnne a β-hatás eltűnésével: az áramlás a medence középpontjára (a maximális felszín-kiemelkedésű helyre) pontszimmetrikussá válna.[2]

[2] A (11.11) egyenlet megoldása a $\beta = 0$ határesetben $\Psi = x(L_x - x)t_0/(2\varrho_0)d\tau_x/dy$.



11.4. ábra. Egy óceáni medence átlagos felszíni alakjának kelet–nyugati keresztmetszete a közepes szélességeken (sematikus rajz). A vízfelszín a nyugati peremáramlat vastagságában emelkedik, utána igen lassan csökken. Az anticiklonális áramlásokra jellemző felszíni kidudorodás tehát a görbületi hatás (β) és a súrlódás miatt erősen aszimmetrikusan helyezkedik el.

11.4. Az enyhén viszkózus folyadék kvázi-geosztrofikus egyenlete, a Rossby-hullám csillapodása

Az alsó határrétegbeli Ekman-pumpálás (4.3.2., 4.3.3. fejezet) mindig az örvényesség időbeli csökkenését eredményezi, a felszíni nyírási örvényesség pedig előjelének megfelelő örvényességet kelt (4.4.3. fejezet). Ezek a hatások a potenciális örvényesség időbeli fejlődését is meghatározzák. Amennyiben a teljes h mélység csak keveset tér el a H átlagos mélységtől, amint azt a kvázi-geosztrofikus közelítés amúgyis megköveteli, a potenciális örvényesség (4.52) változásában a szélnyírással kapcsolatos tag $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}/\varrho_0 H$, ami kiegészül a felpörgetési időből adódó lecsengéssel:

$$\frac{\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}}{\varrho_0 H} - \frac{\zeta_g}{t_0}. \tag{11.18}$$

A $q = (\zeta + f)H/h$ potenciális örvényességet a 3.11. fejezetben látottak szerint közelítve és a ψ geosztrofikus áramlási függvénnyel kifejezve a

$$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\Delta\psi - R^2\psi + \beta y + \frac{f_0 d}{H}\right) = \frac{\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}}{\varrho_0 H} - \frac{\Delta\psi}{t_0}} \tag{11.19}$$

alakot kapjuk, ahol R a (2.49) a Rossby-sugár, d pedig a domborzati alak. Ez a (3.65) egyenlet általánosítása viszkózus esetre.[3] Egyszerű óceánmodellünk, illetve a Stommel-modell ennek az egyenletnek a stacionárius és linearizált változatai a $t_0 = \infty$, illetve $t_0 =$ véges közelítésben.

A dimenziótlanítás után a (3.68) kvázi-geosztrofikus egyenlet jobb oldalán zérus helyett

$$\frac{Sh}{Ro}\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} - \frac{\sqrt{Ek/2}}{Ro}\Delta\psi \tag{11.20}$$

áll, ahol Be a (3.2) β paraméter, és Sh a (4.2) nyírási paraméter.

A felülről nem nyírt folyadékban kialakuló kis amplitúdójú planetáris Rossby-hullámok

[3] Ha az oldalsó peremfeltételek kielégítése érdekében megtartjuk a sekélyfolyadék-közelítésben amúgy elhanyagolható viszkozitási tagot, akkor a jobb oldalon megjelenik a $\nu\Delta^2\psi$ kifejezés is. A nyírásmentes, nem forgatott esetben így visszakapjuk a kétdimenziós folyadék (8.11) örvényességi dinamikáját.

egyenlete (11.9) szerint

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{t_0}\Delta\psi, \tag{11.21}$$

ahol az egyszerűség kedvéért a szabad felszín és a domborzat hatását elhanyagoltuk. Ennek

$$\psi = \psi_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega_0 t)} \tag{11.22}$$

alakú megoldására azt találjuk, hogy a hullám ω_0 frekvenciája komplex,

$$\omega_0 = -\frac{\beta k_x}{k^2} - i\Gamma, \tag{11.23}$$

ahol a csillapítási tényező

$$\Gamma = \frac{1}{t_0}. \tag{11.24}$$

A Rossby-hullámok élettartama tehát hullámhosszuktól függetlenül a felpörgetési idő. A 4.3.3. fejezetben láttuk, hogy ez a légkörben több nap, az óceánban néhány hónap. A légköri élettartam jól megfelel az időjárás átlagos változási idejének a mérsékelt égövben.

A hegységrendszerekkel való kölcsönhatás kapcsán a (3.58) domborzati alak által gerjesztett kis amplitúdójú csillapított Rossby-hullámokat az $u_0 = U$, $v_0 = 0$ háttéráramlás körül linearizált kvázi-geosztrofikus

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} + U\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x} + \frac{1}{t_0}\Delta\psi' + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} = -\frac{Uf_0}{H}\frac{d}{dx}d(x) \tag{11.25}$$

egyenlet írja le. A csak x koordinátától függő stacionárius áramlást az

$$U\frac{d^3\psi'}{dx^3} + \frac{1}{t_0}\frac{d^2\psi'}{dx^2} + \beta\frac{d\psi'}{dx} = -\frac{Uf_0}{H}\frac{d}{dx}d(x) \tag{11.26}$$

egyenlet határozza meg. A megoldást a $\psi' = \psi_0 \exp(ik_x x)$ komplex alakban keresve a $d = A\exp(ik_x x)$ domborzati függvénnyel azt kapjuk, hogy

$$\psi_0 = \frac{f_0 A/H}{k_x^2 - k_c^2 - ik_x/(t_0 U)}, \tag{11.27}$$

ahol $k_c = \sqrt{\beta/U}$. Az amplitúdó abszolútértéke

$$|\psi_0| = \frac{f_0 A/H}{\sqrt{(k_x^2 - k_c^2)^2 + k_x^2/(t_0 U)^2}}, \tag{11.28}$$

tehát még a k_c rezonancia hullámszámnál is véges a viszkozitás következtében (szaggatott görbe a 3.15. ábrán).

Ez analóg a gerjesztett oszcillátor esetével, hiszen a (11.26) egyenlet ekvivalens a gerjesztett, lineárisan *csillapított* harmonikus oszcillátor egyenletével, amelyben $1/(t_0 U)$ játssza a súrlódási együttható szerepét.

12. fejezet

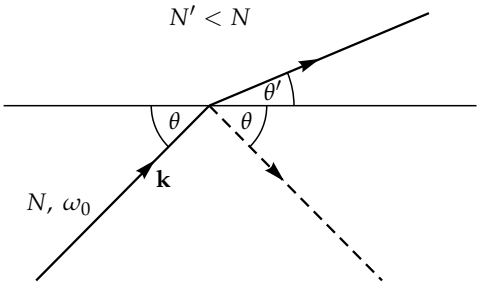
Rétegzett közegek áramlása (folytatás)

12.1. Belső hullámok törése, elhajlása, inverzió

A belső hullámok különböző Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegek vízszintes síkkal elválasztott határán megtörnek. A törési törvény abból a megszorításból adódik, hogy a hullámok frekvenciája új közegbe érve sohasem változik. Ha az N Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegben a síkhullám a vízszintessel θ szöget zár be, akkor az N' Brunt–Väisälä-frekvenciájú szomszédos közegbe történő áthaladás után (5.32) szerint az új θ' szögre (12.1. ábra) igaz, hogy

$$\boxed{N\cos\theta = N'\cos\theta'.} \tag{12.1}$$

A kisebb Brunt–Väisälä-frekvenciájú közegben tehát a szög koszinusza nagyobb, a gyengébben rétegzett ($N' < N$) közegbe lépve a hullámszámvektor a vízszintes felé törik.

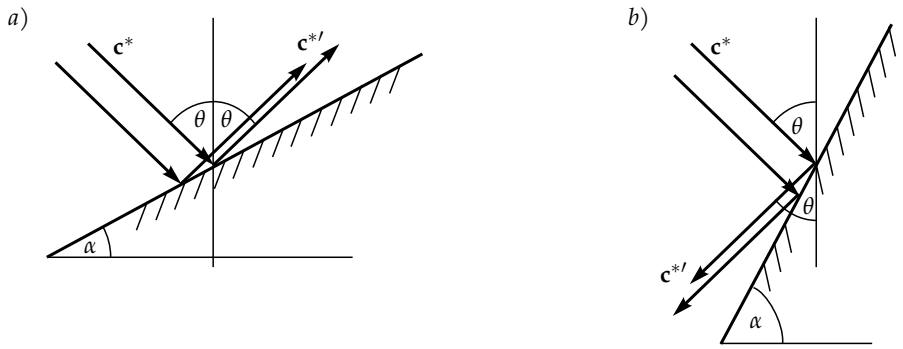


12.1. ábra. A belső hullám terjedési iránya (hullámszámvektorának iránya) megváltozik két különböző Brunt–Väisälä-frekvenciájú közeg határán. A gyengébb rétegzettségű közegben a hullám a vízszintes felé törik. A szaggatott vonal a visszavert hullám terjedési irányát mutatja. A csoportsebesség-vektorok $\pi/2-\theta$, $\pi/2-\theta'$ szöget zárnak be a vízszintessel.

Ennek érdekes következménye a teljes visszaverődés jelensége. Amennyiben ugyanis N' kisebb a hullám frekvenciájánál, $N' < |\omega_0|$, a frekvencia túl nagy ahhoz, hogy az új közegben belső hullám kialakulhasson. Ilyenkor az adott ω_0 frekvenciájú hullám az eredeti közegben marad. Közel homogén folyadékrétegről minden belső hullám visszaverődik, hiszen homogén közegben belső hullámok nem létezhetnek.

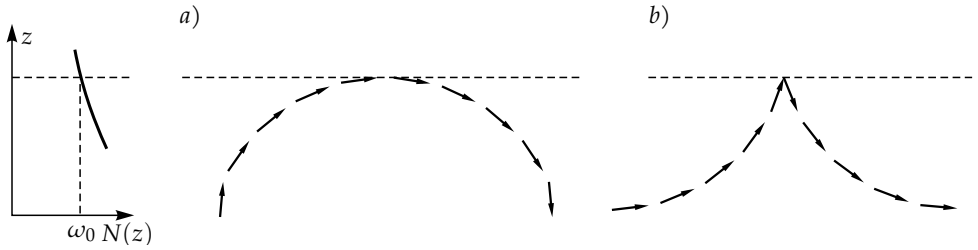
A belső hullámok terjedésének anizotrópiája merev lapról történő visszaverődés esetén is megmarad. A csoportsebességnek irányt kell váltania, de a függőlegessel bezárt szög nagyságának a visszavert hullámban is θ-nak kell maradnia. Az α szögű lejtőn történő visszaverődés

jellege függ attól, hogy α mekkora a kritikus $\alpha_c = \pi/2 - \theta$ szöghöz képest. Ha az α dőlésszög kicsi, akkor $\mathbf{c}^*$ vízszintes komponense nem változik (12.2a. ábra), ha viszont nagyobb a kritikusnál, akkor előjelet vált (12.2b. ábra). Vegyük észre, hogy egyik esetben sem igaz, hogy a beesési és a visszaverődési szög azonos lenne. Ez is a belső hullámok egy különleges tulajdonsága. A tengeri belső hullámok meredek partvonalról visszaverődnek. Lapos partvonal esetén erre nincs módjuk, a belső hullámok ezért megtörnek, energiájuk turbulens mozgássá alakul.



12.2. ábra. Belső hullám visszaverődése a vízszintessel α szöget bezáró síklapon. A vonalak a csoportsebesség-vektor irányát mutatják. a) Lapos akadály a) Meredek akadály

A fentiek alapján kvalitatív képet alkothatunk arról is, hogy mi történik, ha a Brunt–Väisälä-frekvencia térben folytonosan változik. Abban az esetben, ha a Brunt–Väisälä-frekvencia fölfelé gyengül, az erre induló belső hullám *elhajlik*: iránya egyre közelebb kerül a vízszinteshez. Arról a rétegről, amelynek Brunt–Väisälä-frekvenciája éppen a hullám ω_0 frekvenciája, a hullám lefelé hajlik, visszaverődik (12.3. ábra).

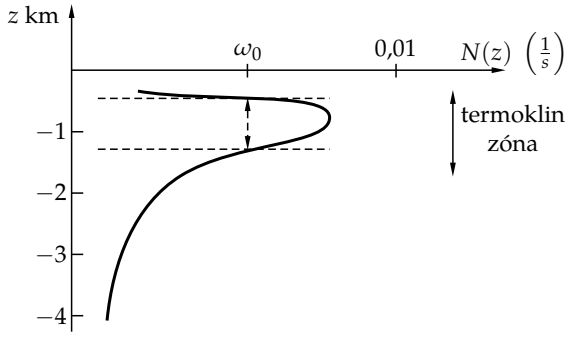


12.3. ábra. ω_0 frekvenciájú belső hullám terjedési irányának változása felfelé gyengülő rétegzettség esetén. a) A hullámszámvektorok változása haladás közben. b) A csoportsebesség-vektorok változása haladás közben. Az $N = \omega_0$ szinten (szaggatott vonal) teljes visszaverődés történik.

Általánosan, az ω_0 frekvenciájú belső hullám csak abban a tartományban mozoghat, ahol $|\omega_0| \leq N(z)$. Mivel a termoklin zónában a Brunt–Väisälä-frekvenciának lokális maximuma van, az ott keletkezett viszonylag gyors belső hullámok se a felszíni, se a mélytengeri vizekbe nem juthatnak el (12.4. ábra).

A légkörben a különleges rétegzettségű tartományokat szokatlan hőmérséklet-eloszlásuk jelzi. Ilyenek az ún. *inverziós helyzetek*, amelyeket az jellemez, hogy a hőmérséklet *nő* a magassággal a szokásos csökkenés helyett. A magassággal ekkor nagyon gyorsan csökken a sűrűség, és ezért az inverzió mindig erős rétegzettségnek felel meg.

Az inverzió egyik fajtája akkor jön létre, ha szélcsendes időben a talaj lehűlése miatt a hideg éjszakai légtömegek a talaj közelében maradnak, és föléjük melegebb levegő kerül (12.5a. ábra). Különösen gyakori ez télen és zárt völgyekben. A talajközeli levegőben ekkor nagy a Brunt–

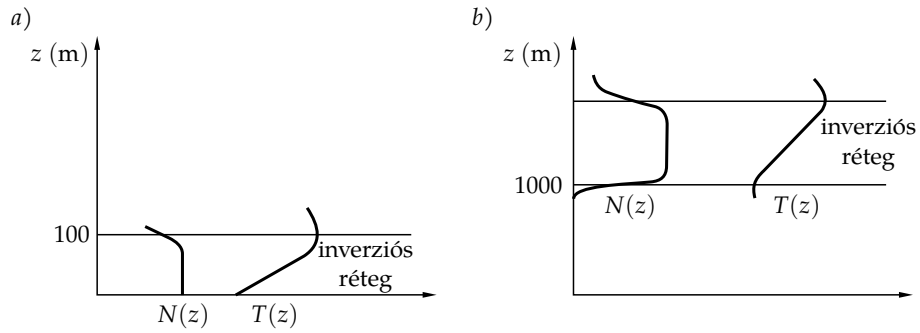


12.4. ábra. A Brunt–Väisälä-frekvencia tipikus mélységfüggése tengerekben. A legnagyobb frekvenciák a termoklin zónába esnek. Adott ω_0 frekvenciájú, viszonylag gyors belső hullámok csak a termoklin zóna azon alrétegében alakulhatnak ki, ahol $|\omega_0| \leq N(z)$ (szaggatott vonallal jelölt sáv).

Väisälä-frekvencia, és alig változik. Az ilyen rétegek nem túl vastagok (50–100 m) és viszonylag gyorsan feloldódnak.

Az inverzió néhány napig is fennállni képes formája során leszálló, viszonylag meleg légtömegek (anticiklon) kerülnek szinte az egész planetáris határréteg fölé (12.5b. ábra). Ha az alsó rétegből hideg légcsomagok kerülnek a melegbe, akkor azok környezetüknél jóval nehezebbek, és gyorsan elhagyják az inverziós réteget.

Mindkét inverziós réteg úgy hat, mintha egy merev vízszintes zárólap lenne. Az áramlások bennük a vízszintes síkban zajlanak, a szennyezések tehát mintegy csapdába záródnak, nem tudnak más légrétegekbe jutni. A talajközeli inverzió ezért jár gyakran erős légszennyeződéssel, szmog képződésével.



12.5. ábra. a) Talajközeli inverzió. A Brunt–Väisälä-frekvencia nagy, ezért az áramlások közel kétdimenziósak. Az energiacsere gyenge az egymás fölötti vízszintes rétegek között. b) Leáramlási inverzió. A planetáris határréteg jól kevert, benne a Brunt–Väisälä-frekvencia nincs értelmezve, az inverziós rétegben viszont hirtelen nagy a Brunt–Väisälä-frekvencia. A két réteg között energiacsere és anyagkicserélődés alig van.

A légkör legalsó rétege, a troposzféra fölött a 10–12 km magasságban kezdődő sztratoszféra is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy benne a hőmérséklet nő a magassággal (kb. az 50 km-es szintig). Ez tehát egy hatalmas, állandó elhelyezkedésű inverziós rétegnek is tekinthető, amely igen stabilan sztratifikált (innét ered elnevezése, és ezért biztosít sima haladást a repülőgépeknek). A sztratoszféra és a troposzféra közötti átmeneti réteg, a *tropopauza* ezért zárórétegként helyezkedik el a troposzféra felett. A két réteg között anyagkicserélődés néhány igen erős feláramlással járó folyamat (pl. nagy viharfelhők, vulkánkitörés, atom- vagy

hidrogémbomba-robbantás) kivételével nem megy végbe. Ezért tekinthetjük a légkör alsó rétegét a felette elhelyezkedőktől függetlennek, és ezért szorítkozunk a troposzféra légköri jelenségeinek vizsgálatára, amely amúgyis a légkör tömegének 80 százalékát tartalmazza.

12.2. Állóhullámok, tólengések

Állandó szél hatására a fellépő nyírás miatt a belső elválasztó és külső vízfelszín is valamelyest megdől (5.11. ábra). A szél megszűnése után hosszú tavakban, öblökben vagy fjordokban belső hullámok (és ezek külső változatai) alakulnak ki. Az ilyen mozgásokat tólengésnek (seiche) nevezzük. Az általános áramlás normálmódusai *állóhullámok*. (A felszíni tólengéseket Cholnoky Jenő magyar földrajztudós (1870–1950) tanulmányozta a világon is az elsők között a XIX. század végén. A Balaton esetében a tó hossztengelyének irányában történő hullámzásban több deciméter amplitúdójú és félnapos periódusú lengést is megfigyelt.)

A jelenség jól leírható a kétrétegű sekélyfolyadék-dinamika (5.10. fejezet) keretein belül. Ezek a lengések a legegyszerűbb esetben a k_x és $-k_x$ hullámszámú, x irányban haladó hullámok szuperpozíciói. Mivel a linearizált (5.67), (5.69) egyenletekben a sebességek időderiváltjai a felületek x szerinti deriváltjaival arányosak, és fordítva, a hidrodinamikai változók írhatók a következő alakban

$$\begin{aligned}(\eta(x,t),\chi(x,t)) &= (\eta_0,\chi_0)\cos k_x x\cdot\sin\omega_0 t,\\ \big(u_1(x,t),u_2(x,t)\big) &= (u_{10},u_{20})\sin k_x x\cdot\cos\omega_0 t,\end{aligned}\tag{12.2}$$

ahol a frekvencia továbbra is valamelyik lehetséges terjedési sebesség és a k_x hullámszám szorzata. A medence véges L lineáris kiterjedése azonban megszabja a lehetséges hullámhosszakat és a k_x értékeket, és ezzel a lehetséges frekvenciákat is.

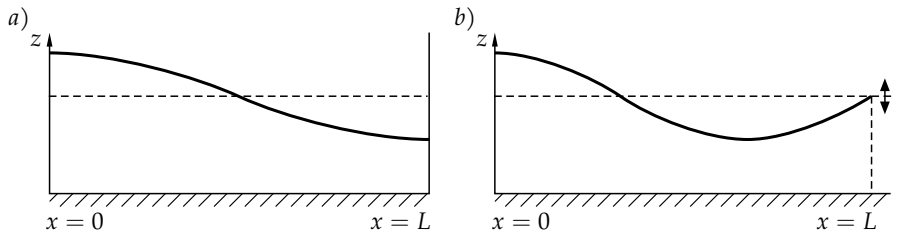
Zárt medence (tó) esetén a teljes sebességnek mindkét végen el kell tűnnie, a felszíni kitérésnek viszont duzzadóhelye van. Ez egy egyszerű sajátérték-probléma, s csak úgy teljesülhet, ha a medence hossza a félhullámhossz egész számú többszöröse: $k_x L = j\pi$, $j = 1,2,\ldots$. A feltétel ugyanaz, mint egy zárt csőbeli hanghullámok esetén. Ebből a lehetséges állóhullám frekvenciák $c_n\pi j/L$, ahol az n index 1 vagy 0, attól függően, hogy belső vagy külső hullámról van szó.[1] A lehetséges periódusidők ezért

$$T_j^{(n)} = \frac{2L}{c_n j},\qquad j = 1,2,\ldots,n = 0,1.\tag{12.3}$$

A leghosszabb periódusú ($j = 1$) állóhullám tehát olyan haladó hullámokból áll össze, amelyek a medencét oda-vissza éppen egy periódus alatt járják be (12.6a. ábra). Egy 10 km hosszú tóban a leghosszabb állóhullám periódusideje $T_1^{(n)} = 2\cdot 10^4/c_n$ másodperc, ha a sebességet m/s-ban adjuk meg. Két egyforma, 10 m mély rétegből álló, $g' = 2\cdot 10^{-2}$ m/s^2 redukált gravitációs gyorsulással jellemzett tóban (5.80) szerint $c_1 = 0{,}3$ m/s, míg $c_0 = 14$ m/s. A periódusidők ezért $T_1^{(0)} = 24$ perc, illetve $T_1^{(1)} = 19$ óra. A belső állóhullám több mint két nagyságrenddel lassabb a külsőnél (s a belső amplitúdó sokkal nagyobb).

Ha a medence félig nyitott, amely pl. sekély torkolati öblöknek felel meg, akkor a teljes sebességnek csak az egyik végen kell eltűnnie, a másik végen lehet maximális. Ez azt jelenti, hogy a negyed hullámhossz vagy ennek páratlan többszörösei férhetnek csak rá a medence hosszára,

[1] Folytonos rétegzettség esetén n más értékeket is felvehet, hiszen tetszőleges számú normálmódus létezik.



12.6. ábra. Állóhullámok (seichek) medencékben. a) Zárt medence, a leghosszabb állóhullám ($j = 1$). b) Nyitott medence peremén ható gerjesztés hatására kialakuló állóhullám ($j \approx 2$). Az ábrák felületalakot mutatnak, amely lehet akár a belső elválasztó felületé, akár a külső felszíné.

$k_x L = (2j-1)\pi/2$, $j = 1, 2, \ldots$, ahogy a 12.6b. ábra rajza példázza (mint a félig nyitott csövekben kialakuló hanghullámok esetén). A lehetséges frekvenciák ezért ekkor

$$T_j^{(n)} = \frac{2L}{c_n(j-1/2)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n = 0, 1. \tag{12.4}$$

Az állóhullámokat külső periodikus hatás gerjesztheti is. Ez legtöbbször az árapály, amely periodikus felszíningadozást határoz meg a nyílt peremen. Legyen a nyitott vég az $x = L$ helyen, ekkor tehát az ω frekvenciájú külső gerjesztés azt jelenti, hogy a peremen

$$(\eta(L,t), \chi(L,t)) = (\eta_L, \chi_L) \sin \omega t \tag{12.5}$$

adott valamilyen véges η_L, χ_L amplitúdókkal. A (12.2) megoldással ez csak akkor fér össze, ha a frekvencia és a hullámszám között fennáll a sekély folyadékra jellemző $\omega = c_n k_x$ összefüggés, és ha

$$(\eta_0, \chi_0) = (\eta_L, \chi_L) \frac{1}{\cos k_x L}. \tag{12.6}$$

Ez mutatja, hogy az η_0, χ_0 amplitúdó formálisan végtelenné válhat, ha $k_x L = (j-1/2)\pi$, vagyis ha a gerjesztés ω periódusa megegyezik a lehetséges $2\pi/T_j^{(n)}$ tólengési frekvenciák valamelyikével. A rezonanciahossz tehát

$$L_j^{(n)} = \frac{c_n(j-1/2)\pi}{\omega}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n = 0, 1. \tag{12.7}$$

A 12.6b. ábra rajzán a medence hossza közel esik a $j = 2$ rezonanciahosszhoz.

Az árapály félnapos periódusidejével, $\omega = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/s-mal számolva a legkisebb ($j = 1$) rezonanciahossz méterben mérve $L_1^{(n)} \approx 10^4 c_n$. A feljebb használt medenceadatokkal a külső és a belső rezonanciahossz $L_1^{(0)} = 140$ km, és $L_1^{(1)} = 3$ km-nek adódik.

Fokozott árapályhullámzás több torkolati öbölben is megfigyelhető. Ismert példa a Fundy-öböl, ahol az árapály ingadozása a 15 m-t is elérheti, míg a földi átlag 1 m körüli.

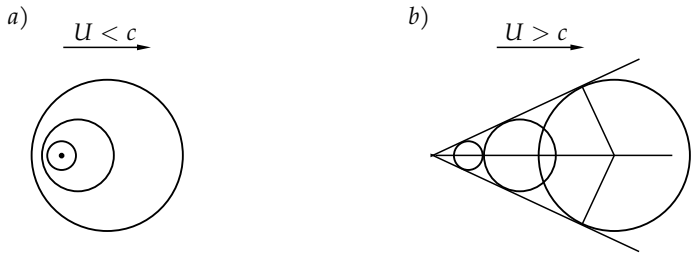
Laboratóriumban a rezonanciaközeli állapot elérhető a gerjesztési frekvencia alkalmas megválasztásával. Ebben a felszíni hullámokat mutató kísérletben négy teljes hullámhossz fér bele a medencébe. A stacionárius állapot fenntartása után a medence távolabbi végén történő gerjesztő mozgás fázisának megváltoztatásával a tólengés lassan kihal.

A tólengés vagy a periodikus árapály különösen érdekes belső hullámzást alakíthat ki, ha az alsó rétegben jelentős akadály (pl. sziklafal) található. Ennek környékén a belső hullámzás nemlineárissá válhat, a belső hullám megtörhet, miközben a külső felszín harmonikusan rezeg. Ebben a nemkeveredő folyadékrétegeket és hegyes akadályt használó kísérletben jól megfigyelhető a belső hullámtörés is.

12.3. Szuperkritikus áramlások

A sekély folyadékrétegekben kialakuló véges amplitúdójú, nemlineáris hullámok rendszerint jelentős tömegáramlással járnak, méghozzá gyorsabbal, mint a lineáris belső hullámok terjedési sebessége. Az olyan áramlásokat, amelyek U átlagsebessége nagyobb a lineáris belső hullámok sebességénél, *szuperkritikusnak* nevezzük. Az ilyen áramlások (5.1) Fr' belső Froude-száma tehát 1-nél *nagyobb*. Az $Fr' < 1$ feltételt kielégítő áramlások szubkritikusak.

Egy kétdimenziós szuperkritikus áramlás alapvető tulajdonsága, hogy a benne kialakuló lineáris hullámok nem terjedhetnek az áramlással szemben. Így a pontszerű forrásból kiinduló belső hullámok $Fr' > 1$ esetén csak a forrás mögötti arcsin $(1/Fr')$ félnyílásszögű tartományba juthatnak el (12.7. ábra).[2]



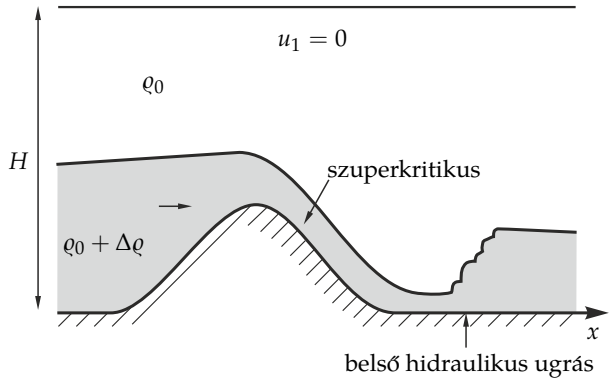
12.7. ábra. A vízszintes síkban pontszerű forrásból terjedő belső hullámok által elérhető tartomány U sebességű áramlásban. a) Szubkritikus, b) szuperkritikus áramlás. Az ábrán a c paraméter a belső lineáris hullámok terjedési sebessége.

Egy másik tipikus szuperkritikus áramlással járó jelenség a következő. Meredek akadály előtt a sűrű folyadék lelassul, feltorlódik, ezért az áramlás szubkritikus. A legmagasabb ponton áthaladva azonban a folyadék a lejtőn történő lefutás következtében felgyorsul, és az áramlás szuperkritikussá válhat (12.8. ábra). Az ilyen szuperkritikus áramlások instabilak. A bennük felhalmozódott kinetikus energia egy része turbulens keveredésre fordítódik. A folyadék átlagos mozgása hirtelen lelassul, és egy lépcsőszerű vastagodás áll be a sűrű folyadékrétegben, a belső hidraulikus ugrás. A behatoló légköri hideg légtömegek hegyek mögött erős lecsapó áramlatokat, bukó szeleket (főn, chinook) okoznak. A hegy mögötti síkságon a belső hidraulikus ugrás időnként kirajzolódik a felhőképekben. A jelenségek lényege megérthető az 5.11. fejezetben tárgyalt redukált sekélyfolyadék-modell egydimenziós változata alapján.

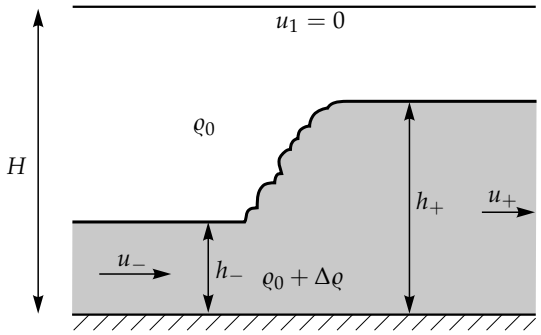
12.3.1. Hidraulikus ugrás és torlóhullám (bore)

Az időfüggetlen áramlással járó hidraulikus ugrás nagysága vízszintes síkon való áramlás esetén megkapható, ha figyelembe vesszük, hogy a kontinuitási egyenlet érvényes, de az ugrás közben kialakuló erős turbulencia miatt a Bernoulli-tétel nem alkalmazható. Az ugrás belsejében sem a laminaritás, sem az időfüggetlenség nem teljesül. Az ugrás előtti (u_- sebességű, h_- vastagságú) és utáni (u_+ sebességű, h_+ vastagságú) lamináris tartományban (12.9. ábra) azonban elképzelhetünk két függőleges, síkot és a köztük levő tartományra felírhatjuk, hogy a síkokra ható erők eredőjének stacionárius ugrás esetén az időegységre eső teljes impulzusváltozással kell megegyeznie. Az egységnyi vízszintes szélességű sávon időegység alatt $(\varrho_0 + \Delta\varrho)uh$ tömeg halad át. A teljes impulzusváltozás ezért a $(\varrho_0 + \Delta\varrho)uh \cdot u$ mennyiség különbsége a két oldalon, tehát $(\varrho_0 + \Delta\varrho)Q(u_+ - u_-) = (\varrho_0 + \Delta\varrho)Q^2(1/h_+ - 1/h_-)$, ahol felhasználtuk

[2]Mindez hasonló a szuperszonikus áramlásbeli hangterjedéshez, ahol Fr' szerepét az $Ma = U/c$ Mach-szám játssza, amelyben c a hangsebesség.



12.8. ábra. A meredek domborzati lejtőn lezúduló folyadék szuperkritikussá gyorsul, és a sík felszínre való kifutás után belső hidraulikus ugrás képződik.



12.9. ábra. Stacionárius belső hidraulikus ugrás és jellemzői a redukált sekélyfolyadék-modellben. A vízlépcső helye nem változik, miközben az alsó közeg áramlik!

az (5.88) kontinuitási feltételt. Az erő mindkét oldalon az átlagos $(\varrho_0 + \Delta\varrho)g'h/2$ nyomásnövekmény és a h magasság szorzata. Mivel az erő a két oldalon különböző előjelű, az eredő $(\varrho_0 + \Delta\varrho)g'\left(h_-^2 - h_+^2\right)/2 < 0$. A két mennyiség egyenlőségéből a keresett összefüggés

$$g'(h_- + h_+) = 2\frac{Q^2}{h_- h_+} = 2u_-^2\frac{h_-}{h_+} = 2u_+^2\frac{h_+}{h_-}. \tag{12.8}$$

A beáramlási adatokat általában ismerjük, ezért az érdekes mennyiség az ugrás mértéke, vagyis a h_+ magasság.

A beáramlási sebesség és szintmagasság, illetve a belőlük alkotott $Fr'_- = u_-/\sqrt{g'h_-} \equiv Q/\sqrt{g'h_-^3}$ belső Froude-szám ismeretében a kifolyási h_+ szintmagasság

$$h_+ = h_-\frac{\sqrt{1 + 8Q^2/(g'h_-^3)} - 1}{2} = h_-\frac{\sqrt{1 + 8{Fr'_-}^2} - 1}{2}. \tag{12.9}$$

Ez nagyobb h_--nál, amennyiben a beáramlás szuperkritikus, tehát $Fr'_- > 1$. Az ugrás utáni folyadékszint a belső Froude-szám $\sqrt{3}$ értékénél lesz kétszer olyan magas, mint a befolyási. A megfelelő kifolyási sebesség

$$u_+ = u_-\frac{h_-}{h_+} \tag{12.10}$$

természetesen már szubkritikus: $Fr'_+ = u_+/\sqrt{g'h_+} < 1$ (ugyanis (12.8)-ből $Fr'^2_+ =$

$u_+^2/(g'h_+) = (1+h_-/h_+)(h_-/h_+)/2$, de $h_-/h_+ < 1$). Az (5.89) Bernoulli-konstans nem azonos a hidraulikus ugrás két oldalán. A

$$B_- - B_+ = \frac{1}{2}\left(u_-^2 - u_+^2\right) + g'(h_- - h_+) = g'\frac{(h_+ - h_-)^3}{4h_-h_+} \tag{12.11}$$

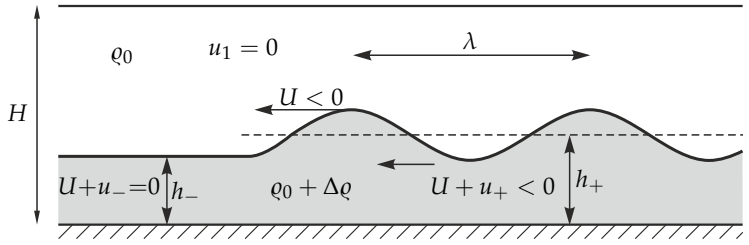
különbség (melynek utolsó egyenlőségéhez (12.8) jobb oldali kifejezéseit érdemes használni) méri azt az energiaveszteséget, amely turbulencia keltésére fordítódott. A hidraulikus ugrás, $h_+ > h_-$ energiaveszteséggel jár.

A folyadék–levegő határfelületen is kialakuló külső hidraulikus ugrásra eredményeink a $g' \to g$ helyettesítéssel érvényesek, és ez egyszerűen demonstrálható vízzel telt kádban zsilipek és akadályok jelenlétében.

Egy szorosan kapcsolódó jelenség a híg és sűrű folyadék határfelületén lépcsőszerű magasságváltozással kísért belső torlóhullám vagy belső bore. A vízlépcső közel állandó U sebességgel halad, és ez hatol be az álló rétegbe (12.10. ábra). A vízlépcsővel együtt mozgó koordinátarendszerben a folyamat ugyanúgy írható le, mint a hidraulikus ugrás. Az álló folyadékban U sebességgel balra haladó felszíni alakhoz a sekélyebb rétegben 0 áramlási sebesség tartozik, az együtt mozgó koordináta-rendszerben viszont $-U$. Ennek a nagysága feleltethető meg a hidraulikus ugrás u_- sebességének. Ezért a (12.8) egyenlet jobb oldala most a torlóhullám sebességének kifejezésére használható az előtte és mögötte kialakuló rétegvastagságok függvényében[3]:

$$U^2 = g'h_+\frac{1}{2}\left(1+\frac{h_+}{h_-}\right). \tag{12.12}$$

Ez az U *nagyobb* mind a bal oldali h_-, mind a jobb oldali $h_+ > h_-$ magasságú alsó folyadékréteg felületén kialakuló lineáris belső hullámok $\sqrt{g'h_-}$, illetve $\sqrt{g'h_+}$ sebességénél. Négyszeres mélységi arány, $h_+/h_- = 4$ esetén pl. $U = \sqrt{10}\sqrt{g'h_-}$. Ezerszeres redukció és 10 m-es keskenyebb rétegvastagság mellett az ilyen belső bore sebessége $U = 1$ m/s.



12.10. ábra. A belső torlóhullám mozgó hidraulikus ugrás. Az ábra álló koordináta-rendszerben mutat hullámzó (unduláris) belső torlóhullámot. Az alsó közeg, amelybe a vízlépcső behatol, nyugalomban van, a vízlépcső alatt a közeg balra áramlik $U + u_+ < 0$ sebességgel (a sebességek különbsége az energiaveszteség következménye). A szaggatott vonal a nem hullámzó bore magasságára utal.

A nagy mélységi arányú erős torlóhullámok mindig turbulens vízlépcső megjelenésével járnak. A gyenge bore-okban azonban, amelyeket egy kritikusnál kisebb h_+/h_- magassági arány jellemez (amely belső bore esetén[4] a tapasztalat szerint 3 körüli), a hidraulikus ugrásban felszabaduló energiát véges amplitúdójú hullámvonulat szállítja el. Az ilyen hullámzó bore esetén a magas folyadékszinten hullámvonulat jelenik meg, amely egyetlen hullámhosszal jellemezhető

[3] A $g' \to g$ helyettesítéssel a homogén sekély folyadék felszíni torlóhullámának sebességet kapjuk.
[4] A szabad felszíniekre ez az arány kb. 1,3.

(12.10. ábra). A h_+ mennyiség átlagos magasságként értelmezendő, és a hullámok amplitúdója $h_+ - h_-$ nagyságrendű. A λ hullámhossz a h_+ bore-mélység mintegy tízszerese.

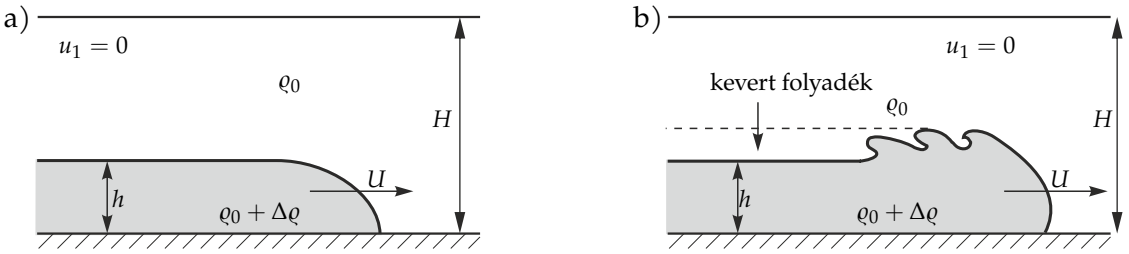
Ezek a nemlineáris hullámok laboratóriumban tanulmányozhatók: nagy folyadéktömegek vízszintes mozgását az előttük levő folyadék feltorlaszolja, bore-t hoz létre, amely rendszerint a gyengébb, hullámzó típusú. Vízzel telt kádban mozgó felszíni hullámzó bore-t mutat ez a rövid kísérlet.

Torlóhullámok mind tengerekben, mind folyótorkolatokban gyakoriak. Hullámzó bore-t alakíthat ki a sós dagályhullám megérkezése a part menti édesvízrétegekbe a belső elválasztó felületen és a külső felszínen is. Nevezetes például az angliai Severn folyón a felfelé mozgó dagály által keltett bore (tidal bore), amelynek hullámai szörfözésre is lehetőséget adnak.

12.3.2. Gravitációs áramlatok, frontok nem forgatott rendszerben

Ha sűrű folyadékréteg csak véges vízszintes tartományra terjed ki, kiegyenlítődés kezdődik, és a termikus egyensúly beállása felé vezető folyamat anyagtranszportot jelentő áramlással jár, amelynek hajtóereje a gravitáció. Az ilyen mozgásokat ezért gravitációs áramlatoknak nevezzük. A gravitációs áramlat határvonalának áthaladása a perem egy rögzített pontján hirtelen sűrűségváltozással jár. Ezért az áramlat elejét jelző sűrűségugrási felületet *frontvonal*nak, magát az áramlatot pedig mozgó *front*nak is tekinthetjük.

Laboratóriumban gravitációs áramlat egy eleinte rekeszben elkülönített sűrű folyadék falának elmozdításával hozható létre, mint ebben a kísérletben. A sűrű közeg közel egyenletes mozgással terül el az alsó felületen (szemben a forgatott esettel, amikor Rossby-sugárnyi elmozdulás után megáll, 6.7. fejezet).



12.11. ábra. Gravitációs áramlat sematikus képe. a) Keveredésmentes, ideális eset keskeny sűrű réteggel. b) A Kelvin–Helmholtz-instabilitás (5.13. fejezet) fej kialakulására vezet, amely mögött jól kevert folyadékréteg marad vissza. A fej előredudorodása a viszkozitás következménye.

A redukált sekélyfolyadék-közelítésben (5.11. fejezet) a gravitációs áramlat $u(x) = U$ haladási sebessége megbecsülhető a keskeny réteg pillanatnyi h vastagságának függvényében (12.11a. ábra). Az U sebességű áramlás egységnyi térfogatra eső $(\varrho_0 + \Delta\varrho)U^2/2 \approx \varrho_0 U^2/2$ kinetikus energiája ugyanis megegyezik azzal a fajlagos helyzetienergia-különbséggel, amely a frontvonal és a mögötte húzódó h vastagságú réteg belseje között kialakul. A $\varrho g h$ hidrosztatikai nyomás a folyadékoszlop egységnyi térfogatra eső helyzeti energiájának is tekinthető. A frontvonal helyén ez $\varrho_0 g H$, ahol H a teljes folyadékvastagság, a h vastagságú réteg alján pedig $\varrho_0 g(H-h) + (\varrho_0 + \Delta\varrho)gh$. A különbség $g\Delta\varrho h$, ebből

$$U^2 = 2g'h. \tag{12.13}$$

Ez tehát a front pillanatnyi sebessége és vastagsága közötti kapcsolat. A front terjedési sebessége nagyobb az ugyanolyan átlagos mélységű réteg határán terjedő belső hullámok $\sqrt{g'h}$ sebességénél, belső Froude-száma $Fr' = \sqrt{2}$.

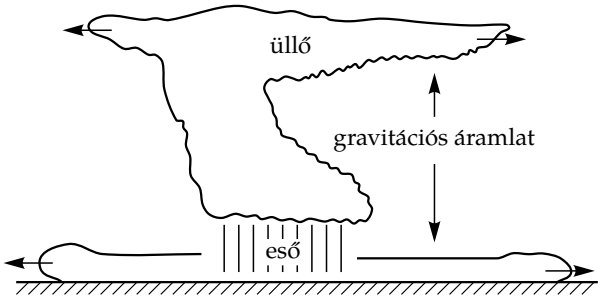
Eddig feltételeztük, hogy a két különböző sűrűségű közeget elválasztó felület a mozgás során élesen definiált marad. A gravitációs áramlások elején a hátsó h rétegvastagságnál valamivel magasabb 'fej' alakul ki (12.11b. ábra). Az áramló folyadékrétegek között fellépő Kelvin–Helmholtz-instabilitás (5.13. fejezet) miatt a fej elválasztó felülete begyűrődik, benne jellegzetes örvények alakulnak ki, és erős keveredés történik. Az egész folyamat tehát bonyolultabb annál, hogy a redukált sekélyfolyadék-modell minden részletében helyesen írhassa le. A keveredés és a véges H teljes folyadékmélység figyelembevételével a h vastagságú gravitációs áramlat sebessége elhanyagolható viszkozitás esetén írható mint

$$U = \sqrt{g'h} f\left(\frac{h}{H}\right), \tag{12.14}$$

ahol f csak a h/H mélységi arány függvénye, és értéke kis mélységi arányra közel van $\sqrt{2}$-höz.

A gravitációs áramlatokkal kapcsolatos jelenségek sora igen hosszú, itt csak néhány példát említünk.

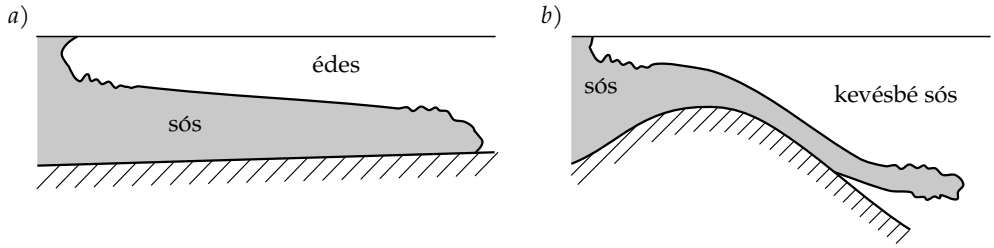
A légkörben minden helyi lehűlés hideg áramlatokat okoz. A jól ismert parti szeleken kívül ilyen a nagy zivatarok előszele, a kifutó szél. A zivatarfelhőben (kumulonimbusz) kialakuló eső hideg levegő leáramlását okozza, amely a Föld felszínére kerülve gravitációs áramlat formájában terül szét (12.12. ábra). Mivel a 6 fokos hőmérséklet-különbség a hőtágulás miatt (7.1. táblázat) mintegy 2 százalékos sűrűségkülönbségnek felel meg, és az ilyen kifutó áramlás vastagsága kb. 1 km, a front (12.13) sebessége $U = \sqrt{2g'h} = \sqrt{400}\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$ (több, mint 70 km/h). Ugyanakkor a zivatarfelhőben feláramló meleg levegő a troposzféra felső határát alkotó tropopauzába ütközik, és annak mentén folyik szét. Mivel itt már kicsapódás történik, ez a gravitációs áramlat jól látható a viharfelhő mozgó üllőjeként.



12.12. ábra. A zivatar előszele és a felhő üllőjének mozgása is gravitációs áramlat.

A folyótorkolatok előtti sekély vizekben a dagállyal érkező sós tengervíz hoz létre alul sós gravitációs áramlatot, amellyel a felszínen kiáramló édesvizű front társul (12.13a. ábra). A sós tengerek vize is gravitációs áramlatokon keresztül jut el a hígabb óceánokba. Így pl. a Földközi-tenger vize gravitációs áramlatot alkotva jut a Gibraltári-szoroson át az Atlanti-óceán közepes vízrétegeibe (12.13b. ábra), míg a felszínen az óceáni víz áramlik a tenger felé. A tengerekben kialakuló gravitációs áramlatok sebessége m/s is lehet.

A belső torlóhullámban és a gravitációs áramlatban az anyagtranszport jelentős távolságokig eljut. A csak enyhén nemlineáris belső szoliton (5.12. fejezet) által okozott transzport viszont a szoliton $2l$ méretére korlátozódik. A vizsgált nemlineáris jelenségek egymáshoz is kapcsolódhatnak. Ha a nemlineáris effektusok lényegesebbek a diszperzióból adódóknál, akkor gravitációs áramlat vagy bore alakul ki. A gravitációs áramlat maga is létrehozhat belső bore-t abban a közegben, amelybe behatol. Ha bármelyikük akadálynak ütközik, energiájuk csökken, és a nemlineáris és diszperziós hatás összemérhetővé válhat. Ha így van, a visszaverődött hullám belső szoliton alakjában mozog a két eltérő sűrűségű közeg határán.



12.13. ábra. Gravitációs áramlatok tengerben. a) A dagály érkezésekor sós víz áramlik a torkolati területek alsó rétegeiben, és ez felső édesvizű gravitációs áramlatot is indít. b) A különböző sókoncentrációjú tengerek vízcseréje is gravitációs áramlatok formájában zajlik szorosokon keresztül. A felszínen könnyebb tengervíz folytonosan rétegzett, ezért a gravitációs áramlat csak saját sűrűségének eléréséig süllyed.

Ebben a kísérletben meleg gravitációs áramlat halad a felszín alatt, majd visszaverődve a kék réteg alján egy vízlépcső mozog az ellenkező irányba, ami a második visszaverődés után több belső szolitonná válik szét.

12.4. Felületi feszültség hatása instabilitásokra

Közismert, hogy a felületi feszültség tompítja a felszíni mozgásokat. Az R görbületi sugarú felületen a görbületi nyomás $p_{\text{görb}} = \sigma/R$ nagyságú, ahol σ a felületi feszültség együtthatója, mértékegysége N/m. A görbületi sugár reciproka mérsékelt hullámzás esetén jó közelítéssel a felszíni alak második deriváltja. Az 5.13.3. fejezet gondolatmenetének folytatásaként használjuk, hogy η csak az x koordinátától függ, ezért írhatjuk, hogy $p_{\text{görb}} = \sigma\partial^2\chi/\partial x^2$. Ez a hatás kizárólag az elválasztó felszínen érvényes, csak a nyomással kapcsolatos határfeltételt kell módosítanunk. A felületi feszültség főleg a gáz–folyadék elválasztó felületeken lényeges, ezért ebben az összefüggésben a sűrűségkülönbség rendszerint nagy. A felületi feszültség hatásának vizsgálata azért is érdekes, mert a KH-instabilitás ezzel a módosítással válik jellegében hasonlóvá a termikus (5.14. fejezet) és a β-síkon történő baroklin (13.7. fejezet) instabilitásokhoz, amelyekben egy külső paraméter kritikus értéke felett válik csak instabillá az alapáramlás.

Az (5.114) határfeltétel a nyomás x irányú negatív deriváltja folytonosságából adódott, ezért annak jobb oldalához $-\sigma\partial^3\chi/\partial x^3$-t adunk hozzá. Így teljesül, hogy a nyomás alul $\sigma\partial^2\chi/\partial x^2$-tel nagyobb, vagyis negatív második derivált esetén a felületi feszültségből adódó erő lefelé mutat. A módosított (5.114) utolsó tagja tehát $\partial/\partial x(\Delta\varrho g - \sigma\partial^2/\partial x^2)\chi$. Az (5.112) exponenciális feltevést használva ez azt jelenti, hogy a felületi feszültséggel érvényes eredmény a

$$\Delta\varrho g \to \Delta\varrho g + \sigma k_x^2 \tag{12.15}$$

helyettesítéssel adódik. Az új diszperziós reláció tehát

$$\omega_0(k_x) = -\frac{\Delta U\Delta\varrho}{2(\varrho_1+\varrho_2)}k_x \pm \sqrt{\frac{g\Delta\varrho}{\varrho_1+\varrho_2}k_x - \frac{\varrho_1\varrho_2\Delta U^2}{(\varrho_1+\varrho_2)^2}k_x^2 + \frac{\sigma}{\varrho_1+\varrho_2}k_x^3}. \tag{12.16}$$

Amikor mindkét közeg együtt mozog vagy nyugalomban van, azaz $\Delta U = 0$, a frekvencia valós. A gáz–folyadék felület speciális esetében, amikor $\varrho_1 \approx 0$, $\omega_0 = \pm\sqrt{gk_x + \sigma/\varrho_2 k_x^3}$ a diszperziós reláció.[5]

[5]Ez a mély folyadékréteg tetején kialakuló kapilláris hullámok diszperziós relációja. Terjedési sebességük $c_x = \sqrt{g/k_x + (\sigma/\varrho_2)k_x}$, aminek minimuma van a $k_x = \sqrt{g\varrho_2/\sigma}$ hullámszámra. Minden kapilláris hullám ennél a $c_{min} = (4g\sigma/\varrho_2)^{1/4}$ sebességnél csak gyorsabban terjedhet. A víz–levegő felületen $c_{min} \approx 0{,}2$ m/s.

A négyzetgyök alatt most csak bizonyos feltétel mellett áll negatív szám. Ennek megtalálásához tekintsük a gyök alatti kifejezés ellentettjét, és jelöljük azt s^2-tel. Ez csak akkor felel meg instabilitási rátának, ha s^2 pozitív. Mivel

$$s^2 = \frac{\sigma}{\varrho_1+\varrho_2}k_x\left[-\frac{g\Delta\varrho}{\sigma}+\frac{\varrho_1\varrho_2\Delta U^2}{(\varrho_1+\varrho_2)\sigma}k_x-k_x^2\right], \tag{12.17}$$

a szögletes zárójelben álló kifejezés $k_\pm$ gyökei, amennyiben léteznek, megadják azt az intervallumot, amelyben instabil a rendszer. A kifejezést teljes négyzetté alakítva látjuk, hogy akkor pozitív, ha $\Delta U > U_c$, ahol

$$U_c^2 = \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1\varrho_2}\sqrt{4\sigma\Delta\varrho g}. \tag{12.18}$$

Ennél a kritikus sebességnél k_+ és k_- egybeesik, és ekkor a kritikus hullámszám

$$k_c = \frac{1}{2\sigma}\frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}U_c^2 = \sqrt{\frac{\Delta\varrho g}{\sigma}}. \tag{12.19}$$

A $k_\pm$ értékek kifejezhetők mint

$$k_\pm = k_c\left[\left(\frac{\Delta U}{U_c}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U_c}\right)^4-1}\right]. \tag{12.20}$$

A paraméterfüggés olyan jellegű, mint az 5.17. ábrán látható, csak most a fent definiált s^2-et érdemes ábrázolni és a ΔU sebességkülönbség játssza az Ra Rayleigh-szám szerepét.

Az instabilitási ráta s^2 pozitív gyöke:

$$s(k_x) = \Delta U k_c\sqrt{\frac{\varrho_1\varrho_2}{2(\varrho_1+\varrho_2)^2}}\sqrt{\frac{k_x}{k_c}}\sqrt{2\frac{k_x}{k_c}-\left(\frac{U_c}{\Delta U}\right)^2\left(1+\left(\frac{k_x}{k_c}\right)^2\right)}, \tag{12.21}$$

$$\Delta U \geq U_c, \qquad k_- \leq k_x \leq k_+.$$

Azt látjuk tehát, hogy a felületi feszültség stabilizálja a felületet annyira, hogy kis áramlási sebességekre nem következik be instabilitás. A kritikusnál nagyobb sebesség esetén a nagy hullámszámok stabilak maradnak, szemben az 5.15. ábra által jelzett kiterjedt instabilitással.[6] Az instabilitási ráta a sebességkülönbséggel arányos, de csak $\Delta U > U_c$-re instabil az alapáramlás.

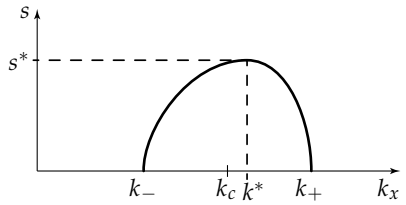
A leggyorsabban növekvő hullámszám az a $k_x = k^*$ érték, amely $s(k_x)$ maximumához, s^*-hoz tartozik. (12.21)-ből az adódik, hogy

$$k^* = \frac{2}{3}k_c\left[\left(\frac{\Delta U}{U_c}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U_c}\right)^4-\frac{3}{4}}\right]. \tag{12.22}$$

Az inflációs ráta tipikus k_x függését mutatja a 12.14. ábra.

A fentiek természetes alkalmazása a levegő és a víz határán kialakuló instabilitás. Ez nem más, mint a szél hatására bekövetkező felszíni *hullámtörés* jelensége. A $\sigma = 0{,}07$ N/m felületi feszültséggel és a $\varrho_1 = 1{,}2$ kg/m^3, $\varrho_2 = 1000$ kg/m^3 sűrűségekkel, $U_c = 6{,}6$ m/s, $\lambda_c = 1{,}7$ cm adódik. Ha tehát kora reggel valaki egy nagy tó, pl. a Balaton felületét tükörsimának látja, ami egyszer csak fodrozódni kezd, tudhatja, hogy a parti szél erőssége elérte a kb. 20 km/h-t.

[6] Az 5.15. ábra k_c paramétere a mostani jelölésben k_--nak felel meg.

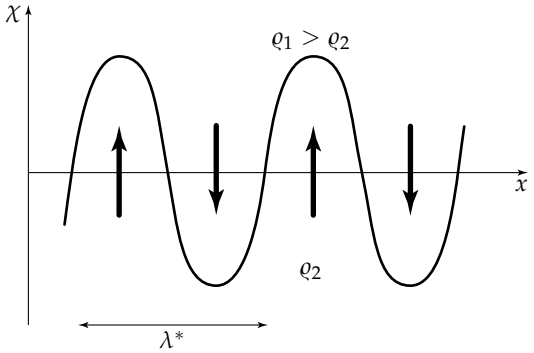


12.14. ábra. Sematikus ábra az instabilitási ráta függésére a k_x hullámszámtól adott $\Delta U > U_c$ áramlási sebességre. A $k < k_-$ tartományban a sűrűségkülönbség, $k > k_+$-ra a felületi feszültség stabilizál.

A felületi feszültség a Rayleigh–Taylor-instabilitás jellegét is módosítja: létezik leggyorsabban növekvő hullámhossz.[7] (12.17) szerint ugyanis $\Delta U = 0$-ra és $\varrho_1 > \varrho_2$-re:

$$s(k_x) = \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)gk_x - \sigma k_x^3}{\varrho_1 + \varrho_2}}, \tag{12.23}$$

ami a $(0, k_+)$ intervallumon definiált, ahol $k_+ = \sqrt{g(\varrho_1 - \varrho_2)/\sigma}$. Az $s(k_x)$ függvény alakja hasonló a 12.14. ábrán láthatóhoz, csak $k_- = 0$ (és k_c most nincs értelmezve). Amint látjuk, a felületi feszültség a rövid hullámhosszú perturbációkat stabilizálja. A leggyorsabban növekvő hullámszámra most $k^* = k_+/\sqrt{3}$ adódik, amelyhez a $\lambda^* = 2\pi/k^*$ hullámhossz tartozik. Közvetlenül az instabilitás beindulása után az elválasztó felület λ^* hullámhosszú szinuszfüggvény növekvő amplitúdóval, és leáramlás csak minden második félhullámban (azaz nem kiterjedt tömbben) történik (12.15. ábra) a turbulens keveredés kialakulása előtt.



12.15. ábra. Sematikus ábra a Rayleigh–Taylor-instabilitás kezdeti jellegéről. Az idő múlásával az ujjak szabálytalanná válnak, és turbulens keveredés alakul ki. A végeredmény az, hogy a nehéz folyadék kerül alulra.

Rayleigh–Taylor-instabilitás szappanhártyával úgy valósítható meg, hogy két, ferde síkban kifeszített hártyát egyetlen függőleges síkú hártyához illesztenek. A függőleges hártya alsó peremének meghúzásával nemcsak a hártya vékonyodik, hanem beáramlás történik a két ferde hártyáról is. Azok összefolyva, az alsónál vastagabb réteget hoznak létre, amely gyakorlatilag nem keveredik a másikkal. Ez a vastag, nehezebb hártya szétterül a vékony felett, de az elválasztó felület instabillá válik. Közel periodikus ismétlődéssel le- és feláramlások indulnak meg, ahogy ebben a kísérletben látható.

Víz–levegő határfelület esetén a λ^* hullámhosszra 2,9 cm adódik. Véges méretű edényben érdekes következmény, hogy ha az edény olyan keskeny, hogy L szélességére még a legrövidebb

[7] Hasonlóan módosítja a nyírási instabilitást is, amelyben $s(k_x) = \sqrt{(Uk_x)^2 - \sigma k_x^3/(2\varrho)}$.

instabil hullámhossz, $2\pi/k_+$ fele sem fér rá (egyetlen ujj sem alakulhat ki), a felületi feszültség képes *megakadályozni* a nehezebb folyadék kifolyását. Ennek feltétele $L < \pi/k_+$, számértékkel $L < 0{,}8$ cm. Ezen a tényen alapul a szemcseppentő és pipetta működése, és az a tény, hogy az utolsó vízcsepp rajta marad az elzárt vízcsapon.



A jelenséget két nem keveredő folyadékkal mutatja be ez a kísérlet. A kémcsőből nem folyik ki a nehezebb folyadék.

12.5. Kettős diffúziós instabilitás

12.5.1. Szemléletes kép

A folyadék sűrűsége nemcsak a hőmérsékletnek lehet függvénye, hanem valamilyen oldott anyag koncentrációjának is. A nagyobb koncentráció általában sűrűbbé teszi a közeget, tehát ellenkező hatással van a sűrűségre, mint a hőmérséklet. Kettős diffúziós konvekcióról beszélünk, ha az áramlás két különbözőképpen diffundáló fizikai mennyiség térbeli változásának hatására indul be, és e két mennyiség ellenkező módon befolyásolja a sűrűséget. Az alapvetően új jelenség az, hogy az egyes komponensek eltérő diffúziós sebessége miatt felfelé *csökkenő* sűrűségeloszlás is lehet *instabil*, amikor a Rayleigh–Taylor-instabilitás nem fordulhat elő. Ez meglepően hangzik, hiszen az egyszerű konvekcióban egyetlen komponens (a hő) diffúziója még a felfelé sűrűsödő közeg stabilizálására is képes viszkozitás jelenlétében.

A két komponens lehet két különböző anyag (pl. cukor és só) koncentrációja, de a környezeti áramlások szempontjából legfontosabb alkalmazás a tengervízé, amelyre a hőmérséklet és a sótartalom van ellenkező hatással. Ebben a speciális esetben *termohalin* (hőmérséklet és sótartalom által hajtott) konvekcióról beszélünk. Noha jelölésünkkel ehhez az esethez igazodunk, fontos hangsúlyozni, hogy az alapjelenségek minden kettős diffúziós folyamatra hasonlóak. A légkörben például a vízpáratartalom lehet a hőmérséklethez társuló másik komponens.

Az új térmennyiség az S sókoncentráció vagy szalinitás. Ez a változó ezrelékben adja meg, hogy egy kg sós vízben hány kg só van feloldva. Légköri nyomáson a tengervíz átlagos sótartalma 35 g/kg, vagyis a szalinitás $S = 35$ (ezrelék). A felszínhez közel $S = 36$, és legnagyobb értékét a keveredési tartomány alsó határán veszi fel, ahol 36,5 körüli. A sós víz állapotegyenlete jó közelítéssel

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 - \alpha(T - T_0) + \gamma(S - S_0)\right). \tag{12.24}$$

Itt γ a hőtágulási együttható analogonja, és azt adja meg, hogy mennyit nő a sűrűség az $S_0 = 35$ referenciaértéktől vett egységnyi szalinitásnövekmény hatására. Értéke tengervízre $\gamma = 7 \cdot 10^{-4}$. Tíz egységnyi szalinitásváltozás 7 ezreléknyi sűrűségváltozásra vezet. Természetesen a sókoncentráció maga is aktív változó, hiszen az S szalinitás tér- és időfüggő, és kielégíti a

$$\frac{dS}{dt} = D\nabla^2 S \tag{12.25}$$

diffúziós egyenletet, ahol D a só vízre vonatkozó diffúziós állandója

Megjegyezzük, hogy a tengervíz (12.24) állapotegyenlete alapján magyarázható a sótartalom- és hőmérséklet-különbségek által hajtott mélyóceáni áramlás, a termohalin vízkörzés kialakulása is. Az egész Atlanti-óceánban erősebb a párolgás, mint a többi medencében,[8] ezért a víz sótartalma itt a legnagyobb. Amikor ez az amúgy is sós víz az Északi-sark környékére érve a felszínen lehűl, sűrűsége már meghaladja a mélyebb szinteken levőét, és ezért lassan süllyed.

[8] Ennek oka az, hogy az amerikai kontinens felől érkező levegő a Sziklás-hegységen és más hegyvonulatokon átkelve nedvességének jelentős részét elveszti, és ugyanakkor az Afrika felől érkező levegő is igen száraz.

Ez a hatás mozgatja az ún. nagy óceáni szállítószalagot, amely a mélyre került vizet először a Déli-sark, majd onnét az Egyenlítő környékére sodorja, miközben egy része lassan feláramlik. Az áramlás nagyon lassú, a felszínre kerülésig ezer év is eltelhet, de olyan nagy mennyiségű vizet mozgat, hogy alapvetően meghatározza a Föld hőháztartását, és ezzel éghajlatát. Az, hogy a lesüllyedés hol történik, függ a párolgás erősségétől és az Észak-atlanti medence sótartalmától, amit az óceánba pl. Grönlandról beolvadó jég befolyásol. A légkör átlaghőmérséklete így hatással lehet a szállítószalag működésére.

A legérdekesebb kettős diffúziós esetek akkor adódnak, amikor mind a hőmérséklet-, mind a koncentrációeloszlás azonos tendenciát mutat a magasság függvényében, mert ilyenkor gyengítik egymás hatását. Természetesen a (12.25) mellett az (5.124) hődiffúziós egyenlet is érvényben van, a két komponens diffúziója tehát verseng egymással, és az instabilitás kialakulását elősegíti, hogy a só D molekuláris diffúziója sokkal lassabb a víz κ hődiffúziójánál:

$$D \ll \kappa. \tag{12.26}$$

A 7.1. táblázat adatai szerint a hődiffúzió mintegy százszor gyorsabb.

Az edény alja és teteje közötti jellegzetes ΔS sótartalom-különbséghez is hozzárendelhető egy dimenziótlan szám, az

$$\boxed{Rs = \frac{g\gamma \Delta S H^3}{\nu D}} \tag{12.27}$$

szalinitási Rayleigh-szám. Jelentése

$$Rs = \frac{\text{szalinitásból származó felhajtóerő}}{\text{viszkózus erő}}. \tag{12.28}$$

A konvekció ΔT hőmérséklet-különbségére használt konvenciót követve a ΔS szalintáskülönbséget (és Rs-t) akkor tekintjük pozitívnak, ha alul sósabb a folyadék. (Az (5.126) Rayleigh-szám most csak a hőmérséklet-különbségből adódó felhajtóerőt tartalmazza.)

A konvekciós folyamat függ attól, hogy melyik komponens a destabilizáló. Vizsgáljuk először, mi történik, ha meleg és sós folyadék kerül fölülre, ΔT, $\Delta S < 0$ úgy, hogy $\alpha \Delta T - \gamma \Delta S < 0$, vagyis a sűrűség fölfelé csökken, ahogy a 12.16. ábra mutatja. A hőmérséklet által okozott $\varrho_0 \Delta T$ sűrűségváltozás szempontjából ez stabil eloszlás, tehát a só a destabilizáló tényező. Mivel a sódiffúzió nagyon lassú, egy folyadékelem úgy tekinthető, mintha vékony hártyával lenne körülvéve, amely sócserét nem, csak hőcserét enged meg. Az instabilitásra való hajlam abból következik, hogy a kissé felfelé mozdított folyadékelem melegszik, de sótartalma nem változik, ezért a $\overline{\varrho}(z)$ profilnak megfelelő környezeténél könnyebb lesz, és tovább emelkedik: a profil a sótartalombeli inhomogenitás miatt válik instabillá.

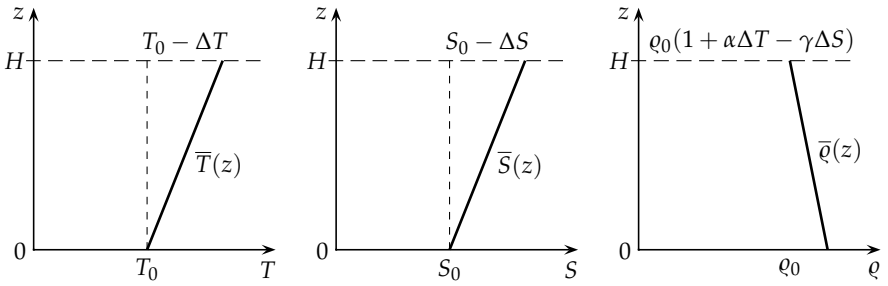
12.5.2. Stabilitásvizsgálat

A (12.25) diffúziós egyenlet szerint az alapállapotban a sókoncentráció lineárisan változik: a 12.16. ábra peremfeltételével

$$\overline{S}(z) = S_0 - \frac{\Delta S}{H} z, \qquad \Delta S < 0. \tag{12.29}$$

Az 5.14.2. fejezetben látottakhoz hasonlóan vegyük észre, hogy a (12.24) állapotegyenlet miatt

$$\varrho(\mathbf{r}, t) - \overline{\varrho}(z) = -\alpha \varrho_0 \left(T(\mathbf{r}, t) - \overline{T}(z) \right) + \gamma \varrho_0 \left(S(\mathbf{r}, t) - \overline{S}(z) \right), \tag{12.30}$$



12.16. ábra. Az alapállapoti hőmérséklet-, sótartalom- és sűrűségprofil (felül meleg és sós közeg, de lefelé növekvő sűrűség), amely áramlással nem társul. Az előjel-konvenció szerint $\Delta T, \Delta S < 0$. Ez az állapot instabillá válik egy kritikus pontban, ahol beindul az áramlás.

ezért az (5.19)-ben szereplő $-g\varrho'/\varrho_0$ helyett írható $g\,(\alpha T' - \gamma S')$, ahol T' és S' az alapállapoti profiloktól való eltérés. Az (5.134) Navier–Stokes-egyenlet Boussinesq-közelítésben most

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{1}{\varrho_0}\,\mathrm{grad}\,p' + g\left(\alpha T' - \gamma S'\right)\mathbf{n} + \nu\nabla^2\mathbf{v}'. \tag{12.31}$$

A két diffúziós egyenlet az eltérésekre felírva

$$\frac{dT'}{dt} = w'\frac{\Delta T}{H} + \kappa\nabla^2 T', \qquad \frac{dS'}{dt} = w'\frac{\Delta S}{H}, + D\nabla^2 S', \tag{12.32}$$

ahol a jobb oldali első tagok a stacionárius profilokra alkalmazott advektív deriváltakból adódnak, ahogy (5.133)-ban láttuk.

A további lépéseket az 5.14.2. fejezetben látottakkal analóg módon végezzük. A $\psi'(x,z)$ áramlási függvénnyel az egyenletek, rögtön kis eltéréseket feltételezve:

$$\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial t} = g\left(\alpha\frac{\partial T'}{\partial x} - \gamma\frac{\partial S'}{\partial x}\right) + \nu\nabla^4\psi', \tag{12.33}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial\psi'}{\partial x} + \kappa\nabla^2 T', \qquad \frac{\partial S'}{\partial t} = \frac{\Delta S}{H}\frac{\partial\psi'}{\partial x} + D\nabla^2 S'. \tag{12.34}$$

A dimenziótlanítás hasonlóan történik, mint a konvekció esetén, de a hőmérséklet és sókoncentráció egysége most $-\Delta T$, illetve $-\Delta S$, hiszen az egységeknek pozitívnak kell lenniük. A dimenziótlan alakok:

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial t} = -Ra\frac{\partial T'}{\partial x} + Rs\frac{D}{\kappa}\frac{\partial S'}{\partial x} + \nabla^4\psi', \tag{12.35}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -\frac{\partial\psi'}{\partial x} + \nabla^2 T', \qquad \frac{\partial S'}{\partial t} = -\frac{\partial\psi'}{\partial x} + \frac{D}{\kappa}\nabla^2 S', \tag{12.36}$$

ahol Ra és Rs az (5.126)-ban, illetve (12.27)-ben megadott Rayleigh-számok, amelyekben a ΔT, ΔS eltérések negatívak (s ennek következménye az Ra-val arányos tag (5.138)-hoz képest ellentett előjele).

Az egyenletrendszer megoldása kereshető a

$$\psi' = \psi'_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)}, \qquad T' = T'_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)}, \qquad S' = S'_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)} \tag{12.37}$$

alakban. Ezeket a (12.35), (12.36) egyenletekbe helyettesítve az amplitúdókra

$$\frac{1}{Pr} i\omega_0 \left(k_x^2 + k_z^2\right) \psi'_0 = -ik_x \left(RaT'_0 - Rs \frac{D}{\kappa} S'_0 \right) + \left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 \psi'_0, \tag{12.38}$$

$$-i\omega_0 T'_0 = -ik_x \psi'_0 - \left(k_x^2 + k_z^2\right) T'_0, \qquad -i\omega_0 S'_0 = -ik_x \psi'_0 - \left(k_x^2 + k_z^2\right) \frac{D}{\kappa} S'_0 \tag{12.39}$$

adódik, amelyekből ω_0-ra harmadfokú egyenlet következik.

Az instabilitás feltételét közvetlenül megkapjuk, ha használjuk, hogy ebben a pontban $\omega_0 = 0$, hiszen egy áramlásmentes állapot válik instabillá, amiből

$$ik_x \left(RaT'_0 - Rs \frac{D}{\kappa} S'_0 \right) = \left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 \psi'_0, \tag{12.40}$$

$$ik_x \psi'_0 = -\left(k_x^2 + k_z^2\right) T'_0, \qquad ik_x \psi'_0 = -\left(k_x^2 + k_z^2\right) \frac{D}{\kappa} S'_0. \tag{12.41}$$

Az utóbbi egyenletből az következik, hogy T'_0 és S'_0 egymással arányosak, $D/\kappa S'_0 = T'_0$. Ezzel az első egyenlet szerint

$$Ra - Rs = \frac{\left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 \psi'_0}{ik_x T'_0} = \frac{\left(k_x^2 + k_z^2\right)^3}{k_x^2}. \tag{12.42}$$

A jobb oldal pontosan ugyanaz a kifejezés, mint (5.146), csak a bal oldalon most nem Ra, hanem $Ra - Rs$ áll. Ezért az instabilitás feltétele az utóbbi mennyiségre ugyanaz, mint a konvekció esetében Ra-ra! Vagyis

$$(Ra - Rs)_c = Ra_c, \tag{12.43}$$

ahol a jobb oldal a konvekcióra jellemző kritikus Rayleigh-szám pozitív értéke, szabad-szabad peremfeltétel esetén 657. Kettős diffúziós instabilitás esetén tehát a két *előjeles* Rayleigh-szám *különbségének kell egy kritikus értéket felvennie*, vagyis külön-külön nincs éles instabilitási értékük.[9]

A kettős diffúzió 12.16. ábrának megfelelő esetében mindkét Rayleigh-szám negatív. Az instabilitás feltétele

$$\frac{gH^3}{\nu} \left[\frac{\gamma |\Delta S|}{D} - \frac{\alpha |\Delta T|}{\nu} \right] > Ra_c. \tag{12.44}$$

Vegyük észre, hogy ha a szögletes zárójelben nem lennének a nevezők, akkor a felső és alsó határok közötti $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbség és ϱ_0 hányadosát kapnánk. Mivel $\Delta\varrho$ a 12.16. ábra szerint negatív, ez mutatja, hogy az instabilitást a diffúziós állandók különbsége teszi lehetővé. Még ha a közeg fent nagyon meleg is, egy kis sókoncentráció-gradiens már instabilitást okozhat, hiszen ΔS a nagyon kicsi diffúziós állandóval van osztva. (Ebből az is következik, hogy turbulens közegben, amikor $\kappa_{turb} \approx D_{turb}$, nem történhet kettős diffúziós konvekció.)

A másik fontos eset, amikor a közeg alul meleg és sós: ΔT, $\Delta S > 0$, a hőmérséklet és a szalinitás is csökken felfelé, de a koncentrációcsökkenésből adódó sűrűségváltozás jelentősebb: $\alpha\Delta T - \gamma\Delta S < 0$, vagyis a sűrűség csökken a magassággal. Az instabilitás (12.43) feltétele ekkor

$$\frac{gH^3}{\nu} \left[\frac{\alpha\Delta T}{\nu} - \frac{\gamma\Delta S}{D} \right] > Ra_c \tag{12.45}$$

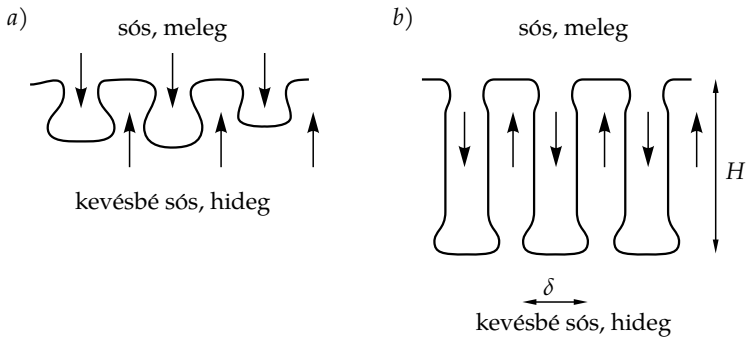
alakú. Ilyenkor a sótartalom „hátráltatja" a hőmérséklet által kiváltandó instabilitást.

[9] $\Delta S = 0$, ΔT, $Ra > 0$ esetén visszakapjuk a konvekció instabilitási feltételét. Amikor nincs hőmérséklet-különbség: $\Delta T = 0$ és ΔS, $Rs < 0$, konvekció indul be *kizárólag a felszíni magas koncentráció miatt*, amelynek feltétele $|Rs| = Ra_c$.

12.5.3. Konvekció jóval az első instabilitás után

Közvetlenül az instabilitási pont közelében az áramlás cellás szerkezetű, hiszen a konvekció kapcsán elvégzett vizsgálat és (5.151) is érvényes. A gyakorlatban előforduló esetekben mindkét Rayleigh-szám értéke nagyon nagy, és az áramlás nem hasonlít a kritikus ponthoz közelire. Két, lényegesen különböző viselkedés lehetséges.

Ujjasodás (ΔT, $\Delta S < 0$): A konvekció ún. *só-ujjak* megjelenésével jár, amelyek lassan lefelé nyúló keskeny sós nyalábok, és közöttük a kevésbé sós víz áramlik felfelé (12.17. ábra). A só-ujjak kialakulása lassú folyamat, amely gyakorlatilag nyugvó vagy egyenletesen mozgó közegben mehet csak végbe.



12.17. ábra. Ujjasodás a) A só-ujjak képződésének kezdeti fázisa b) Kifejlett állapot

Annak ellenére, hogy az ujjasodás rajzolata hasonlít a Rayleigh–Taylor-instabilitáshoz (12.15. ábra), a fizikai háttér lényegesen különbözik. Az nem keveredő, ideálisnak tekinthető folyadékra jellemző, most viszont viszkózus és diffúzióra képes közegről van szó, amelyben az alapállapot sűrűsége stabilan rétegzett. A kettős diffúziós instabilitás ezért csak a jellemző paraméterek kritikus értéke fölött figyelhető meg.

Egyszerű becslés adható a $|\Delta S|$ szalinitáskülönbség hatására H mélységű közegben kialakuló sós ujjak δ vastagságára. A közel stacionárius áramlásban az (5.124) hődiffúziós egyenlet advektív deriváltja, amelyben a függőleges áramlással kapcsolatos járulék a jelentős, azonos nagyságrendű a diffúziós taggal: $W/H \approx \kappa/\delta^2$, ahol W a só-ujjak átlagos süllyedési sebessége. A becslésében felhasználtuk, hogy az ujjak δ vastagsága lényegesen kisebb H hosszuknál. Az ujjak és a mellettük levő föláramló tartomány hőmérséklete közel azonos, ezért a felhajtóerő elsősorban a ΔS szalinitás-különbségből adódik, $g\gamma|\Delta S|$-kel arányos. Ezt kell kompenzálnia a viszkózus erőnek, amely elsősorban a függőleges irányú sebesség által a δ vízszintes skálán okozott $\nu W/\delta^2$ nyírással kapcsolatos: $g\gamma|\Delta S| \approx \nu W/\delta^2$. Mindkét feltételt összevetve

$$W \approx \frac{\kappa H}{\delta^2} \approx \frac{g\gamma|\Delta S|}{\nu}\delta^2. \tag{12.46}$$

Ebből

$$\frac{\delta}{H} \approx \left(\frac{\kappa\nu}{g\gamma|\Delta S|H^3}\right)^{1/4} = \left(|Rs|\frac{D}{\kappa}\right)^{-1/4}. \tag{12.47}$$

Jóval az első instabilitás fölött Rs olyan nagy, hogy $|Rs|D/\kappa$ is nagy, az ujjak szélessége tehát $\delta \ll H$. Ha az ujjak hossza $H = 10$ cm és 1 ezreléknyi a sótartalom-különbség, akkor a 7.1. táblázat szerint $Rs \approx 10 \cdot 7 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}/10^{-15} \approx 10^{10}$, és δ milliméter nagyságrendűnek adódik.

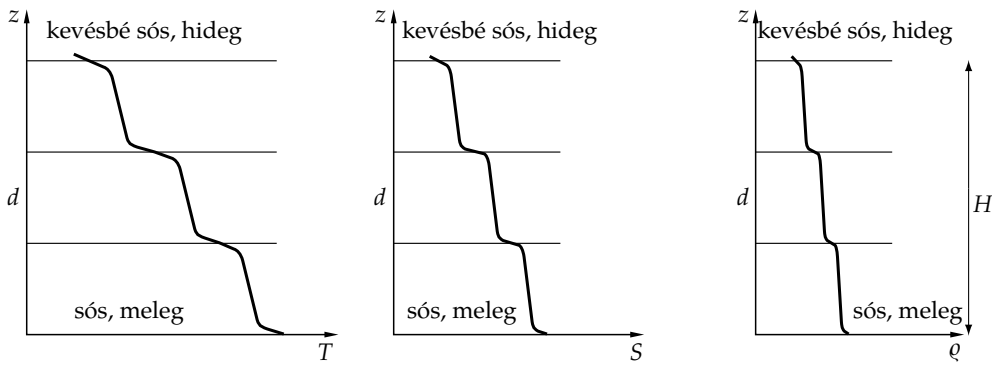
Laboratóriumi kísérletben úgy kelthetünk só-ujjakat, hogy hideg vízre enyhén sós és megfestett meleg vizet rétegzünk. Amíg a felső közeg jelentősen melegebb, a két réteg élesen elválik. A felső réteg lassan hűlni kezd és egy idő után előáll az a helyzet, hogy még mindig melegebb,

mint az alatta levő, de a kettős diffúziós instabilitás feltétele már teljesül. Néhány mm vastag só-ujjak képződnek, összhangban a fenti becsléssel, amelyek egyre hosszabbak, és lassan elérik a H magasságú edény alját, ahogy ebben a kísérletben látható.

A tengerekben a napsugárzás hatására a felső vízréteg a trópusokon erősen felmelegszik, de a párolgás miatt sótartalma is feldúsul. A megfigyelések szerint a tengeri só-ujjak vastagsága néhány cm, hosszuk 30 cm és 1 m között van. Az ujjak jelentős só- és hőáramot biztosítanak a fölöttük és alattuk elhelyezkedő folyadékrétegek között. A só-ujj-képződés kezdeti szakaszához hasonló folyamatok zajlanak le az ún. mammatusz felhőkben, amelyekben az átlagos felhőszint alá nyúló bugyrok kialakulása figyelhető meg.

Rétegképződés (ΔT, $\Delta S > 0$): A másik eset az, amikor a meleg és sós folyadék kerül alulra, Ra, $Rs > 0$, de a teljes sűrűség továbbra is felfelé csökken. Ilyenkor nyilván a hőmérséklet a destabilizáló tényező. A kísérleti tapasztalat szerint a végállapot az, hogy a folyadékban *rétegek* alakulnak ki, a hőmérséklet-, sótartalom- és sűrűségeloszlás lépcsőzetes (12.18. ábra). Mindhárom eloszlás a rétegek belsejében közel állandó, köztük pedig erős gradienssel rendelkezik. Egy-egy rétegben termikus konvekció zajlik (a rendezetlen, turbulens változatban), és teszi itt közel homogénné az egyes eloszlásokat. Más szóval az alulról történő fűtés beindítja a termikus konvekciót, de a stabilizáló sótartalom-eloszlás megakadályozza, hogy az az egész folyadékrétegre kiterjedjen, és többé-kevésbé független rétegekre korlátozza.

Ebben a kísérletben egyetlen réteg kialakulása látszik: az eleinte elkülönülten felszálló turbulens termikek később sűrűbbé válnak, de az átlagos magasság végig korlátos marad.



12.18. ábra. Rétegképződés: Az eredetileg felfelé egyenletesen csökkenő hőmérséklet és sótartalom hatására a kettős diffúziós instabilitás miatt közel homogén vízszintes rétegek alakulnak ki, amelyekben turbulens termikus konvekció zajlik.

Kapcsolódó jelenség a jégtömb olvadása a nála ΔT-vel magasabb hőmérsékletű, ΔS sótartalom-különbség által stabilan rétegzett folyadékba. Ez a folyamat zajlik a jéghegyek olvadásakor (melyek édesvízi jégből képződnek). A felolvadt édesvíz szabályosan elhelyezkedő vízszintes rétegekben terjed szét (melyek között a meleg sós víz a jégtömb felé áramlik), ahogy ebben a kísérletben látszik, ahol a jégtömböt lilára színezték.

A rétegződési folyamatban létezik egy természetes távolságskála, az a távolság, amellyel a ΔT hőmérséklet-többletű víz feljebb emelkedne az adott só-rétegzettségű folyadékban. A sós folyadék hőmérsékletére melegedett víz relatív sűrűsége $\alpha\Delta T$-vel csökken, és ez a sűrűség a $\Delta S/H$ szalinitásgradiensű folyadékban d elmozdulással feljebb található. Tehát $\alpha\Delta T = \gamma\Delta S d/H$, amelyből $d = \alpha\Delta T H/(\gamma\Delta S)$. A megfigyelt d rétegvastagságok ezzel a hosszúsággal arányosak, tehát

$$\frac{d}{H} \approx \frac{\alpha\Delta T}{\gamma\Delta S}. \tag{12.48}$$

Laboratóriumi kísérletben 20 fokos hőmérséklet-különbség és 40 ezrelékes szalinitáskülönbség esetén a jobb oldali arány 1/7, azaz 20 cm vastag folyadékban a rétegtávolság mintegy 3 cm.

A lépcsőzetes hőmérséklet-eloszlást tengeri megfigyelések is bizonyítják. Egy 50 méter vastagságú tengerrétegben, amelyben a hőmérséklet-csökkenés 0,1°C, a szalinitáskülönbség 0,2 ezrelék, az arány szintén 1/7, amiből kb. 7 méteres rétegvastagság adódik.

12.6. Az összenyomhatóság jellemzése: potenciális sűrűség és potenciális hőmérséklet

Jelentős mélység- vagy magasságkülönbségeket vizsgálva mind a nyugvó levegő, mind a nyugvó víz sűrűsége függ a függőleges koordinátától. A lehetséges egyensúlyi rétegzettségek között kitüntetett szerepet játszik a $\varrho_a(z)$ *adiabatikus sűrűségprofil* (12.19. ábra). (Ideális folyadékban hőátadás nem történhet mozgás közben sem, a folyadékelemek *entrópiája* állandó.) Ebben a termodinamikai értelemben globális egyensúlyi állapotban két folyadékelem felcserélése nem vezet semmilyen makroszkopikus mozgáshoz. Ha egy térfogatelemet hőközlés nélkül felfelé mozdítunk gravitációs térben, annak sűrűsége a $\varrho_a(z)$ profil szerint változik (szemben az összenyomhatatlan közelítéssel, amiben a sűrűség állandó).

Az adiabatikus profil a $dp = -\varrho g dz$ hidrosztatikai egyenletből kapható meg, felhasználva, hogy nyomás- és sűrűségváltozások között az adiabatikus állapotegyenlet teremt kapcsolatot. A dp nyomásváltozást az ennek megfelelő sűrűségváltozással helyettesítve: $dp = (\partial p/\partial \varrho)_a d\varrho$, azt kapjuk, hogy az adiabatikus sűrűséggradiens azon a szinten, ahol a sűrűség értéke ϱ,

$$\frac{d\varrho_a(z)}{dz} = -\varrho g \left(\frac{\partial \varrho}{\partial p}\right)_a . \tag{12.49}$$

A termodinamikából tudjuk, hogy a nyomás sűrűség szerinti adiabatikus deriváltja a közeg hangsebességével kapcsolatos:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_a = c_{hang}^2 . \tag{12.50}$$

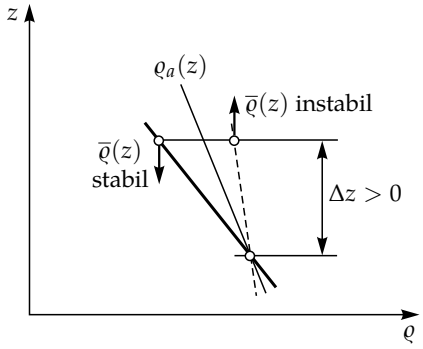
Ezzel

$$\frac{d\varrho_a(z)}{dz} = -\frac{\varrho g}{c_{hang}^2} . \tag{12.51}$$

Tetszőleges közeg relatív sűrűségváltozása g/c_{hang}^2 ütemben változik a magassággal adiabatikus esetben. Ez kis szám, hiszen a hangsebesség nagy. A hangsebességek mért értékét (7.1. táblázat) használva az óceánban ez a gradiens kb. 5 ezrelék kilométerenként, a légkörben 10 százalék kilométerenként.

Hidrodinamikai folyamatok következtében természetesen az adiabatikustól eltérő $\overline{\varrho}(z)$ rétegzett eloszlás is kialakulhat. Ennek stabilitása egyszerűen meghatározható a $\varrho_a(z)$-vel történő összehasonlításból. Ha a $\overline{\varrho}(z)$ profil gorsabban csökken (12.19. ábra vastag vonal), akkor a rétegzettség stabil, hiszen adott pontból a folyadékelemet felfelé mozdítva annak sűrűsége $\varrho_a(z)$ lesz, nagyobb környezete $\overline{\varrho}(z)$ sűrűségénél. Elengedés után a folyadékelem visszaindul eredeti helyzete felé (erre utal a kis nyíl). A $\overline{\varrho}_a(z)$-nél kevésbé meredek eloszlás esetén fordított a helyzet (12.19. ábra szaggatott vonal), az ilyen rétegzettség instabil.

A stabilitás erőssége most is a Brunt–Väisälä-frekvencia segítségével adható meg, a konkrét alak azonban eltér (5.6)-tól. Az 5.1. fejezetben alkalmazott gondolatmenetet megismételve, a $\overline{\varrho}(z)$ rétegzettség esetén a z szinten egyensúlyban levő $\overline{\varrho}(z) = \varrho_a(z)$ sűrűségű folyadékelemet



12.19. ábra. A $\overline{\varrho}(z)$ sűrűségprofil stabilitásának feltétele összenyomható közegben: a sűrűségnek felfelé haladva az adiabatikus profilnál (vékony vonal) gyorsabban kell csökkennie (vastag vonal). A szaggatott vonal instabil rétegzettséghez tartozik.

a $z + \Delta z$ szintre juttatva a folyadékelemre felfelé ható felhajtóerő a környezet $\overline{\varrho}(z + \Delta z)$ sűrűségéből adódik. Ezzel csökken az új szinten a $\varrho_a(z + \Delta z)$ sűrűségből származó súly. Az eredő erő egységnyi térfogatban

$$g\left(\overline{\varrho}(z + \Delta z) - \varrho_a(z + \Delta z)\right) \approx g\left(\frac{d\overline{\varrho}(z)}{dz} - \frac{d\varrho_a(z)}{dz}\right)\Delta z. \tag{12.52}$$

A $\overline{\varrho}(z)$ sűrűségű folyadékelem mozgásegyenlete

$$\ddot{\Delta z} = g\frac{1}{\overline{\varrho}(z)}\left(\frac{d\overline{\varrho}(z)}{dz} - \frac{d\varrho_a(z)}{dz}\right)\Delta z. \tag{12.53}$$

Ha a sűrűség felfelé gyorsabban csökken, mint az adiabatikus, akkor akármilyen irányú is a Δz kitérés, a gyorsulás mindig vele ellentétes. Így kis kitérésekre harmonikus rezgés alakul ki az $N(z)$ Brunt–Väisälä-frekvenciával, ahol

$$N^2(z) = -\frac{g}{\overline{\varrho}(z)}\left(\frac{d\overline{\varrho}(z)}{dz} - \frac{d\varrho_a(z)}{dz}\right) = -\frac{g}{\overline{\varrho}(z)}\left(\frac{d\overline{\varrho}(z)}{dz} + \frac{\overline{\varrho}g}{c^2}\right). \tag{12.54}$$

Az 5.1. fejezetben kapott (5.6) kifejezés tehát a teljesen inkompresszibilis (végtelen hangsebességű) határesetnek felel meg, amely nem túl nagy magasságkülönbségek esetén mindig jó közelítés. A közeg összenyomhatósága miatt a Brunt–Väisälä-frekvencia valamivel kisebb annál, amit teljes összenyomhatatlanságot feltételezve kapnánk.

Minden közegben létezik egy, *potenciális sűrűségnek* nevezett mennyiség, amellyel a Brunt–Väisälä-frekvencia ugyanúgy fejezhető ki, mint az összenyomhatatlan esetben a szokásos sűrűséggel. Konkrét példaként tekintsük az ideális gáz esetét, amely a száraz légkör igen jó leírásának bizonyul. Az adiabatikus állapotegyenlet

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\kappa} \tag{12.55}$$

alakú, ahol $\kappa = C_p/C_v$ a két mólhő hányadosa, p_0 a felszíni nyomás, ϱ_0 pedig a felszíni sűrűség. Az ideális gáz hangsebességének négyzetéről tudjuk, hogy

$$c_{hang}^2 = \kappa\frac{RT}{M}, \tag{12.56}$$

ahol $R = C_p - C_V$ az univerzális gázállandó, M a levegő móltömege ($M = 29$ g). A (12.51)

egyenlet segítségével a (10.16) állapotegyenletből a hőmérséklet kiküszöbölésével

$$\frac{d\varrho_a}{dz} = -\frac{\varrho^2 g}{\kappa p}. \tag{12.57}$$

Ideális gázra a

$$\sigma = \varrho \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-1/\kappa} \tag{12.58}$$

mennyiség a potenciális sűrűség: közvetlen behelyettesítéssel és a $dp/dz = -\varrho g$ hidrosztatikus összefüggést használva látszik, hogy a (12.54) Brunt–Väisälä-frekvencia adott $\overline{\sigma}(z)$ profil esetén kifejezhető mint

$$N^2(z) = -\frac{g}{\overline{\sigma}(z)} \frac{d\overline{\sigma}(z)}{dz}. \tag{12.59}$$

A (12.55) állapotegyenletből σ éppen a ϱ_0 referenciasűrűség. A potenciális sűrűség tehát az a sűrűség, amelyet akkor kapunk, ha az adott p nyomású, ϱ sűrűségű gázt *adiabatikusan* a p_0 referencianyomású állapotba hozzuk. A rétegzettség akkor stabil, ha a stacionárius potenciális sűrűség csökken a magassággal, és akkor marginális, ha a potenciális sűrűség állandó.

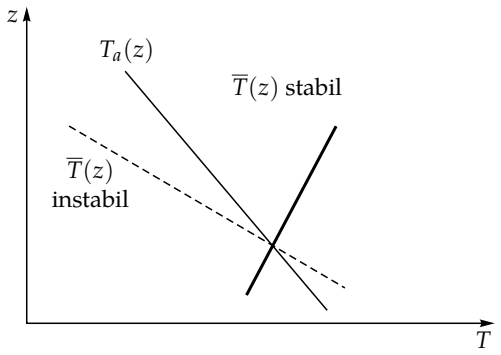
Mivel a hőmérséklet könnyebben mérhető mennyiség, mint a sűrűség, érdemes átírni a fenti összefüggéseket a hőmérsékletre. Az adiabatikus állapotegyenlet a hőmérséklettel

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\kappa-1} \tag{12.60}$$

alakú, amiből a dT/dz deriváltat $d\varrho/dz$-vel kifejezve, (12.57), a $C_p - C_V = R$ összefüggés és az állapotegyenlet alapján

$$\frac{dT_a}{dz} = -\frac{gM}{C_p} = -\frac{g}{c_p}. \tag{12.61}$$

A 7.1. táblázat szerint dT_a/dz számértéke a légkör ismert kilométerenkénti 10 fokos adiabatikus hőmérséklet-gradiensét adja. A rétegzés akkor stabil, ha a hőmérséklet-gradiens ennél kevésbé negatív, $d\overline{T}/dz > -gM/C_p$ (12.20. ábra vastag vonal): ekkor ugyanis a felfelé mozdított légcsomag hidegebb és ezért sűrűbb lesz, mint környezete, és ezért magától lefelé mozdul. Vegyük észre, hogy az izoterm atmoszféra is stabil. A felfelé melegedő levegőoszlop (inverziós réteg) még stabilabb.



12.20. ábra. A $\overline{T}(z)$ hőmérsékletprofil stabilitásának feltétele ideális gázban. A hőmérsékletnek az adiabatikus profilénál (vékony vonal) lassabban kell csökkennie (vastag vonal), és növekedhet is a magassággal. A szaggatott vonal instabil rétegzettséghez tartozik.

A potenciális sűrűséghez hasonlóan definiáljuk a

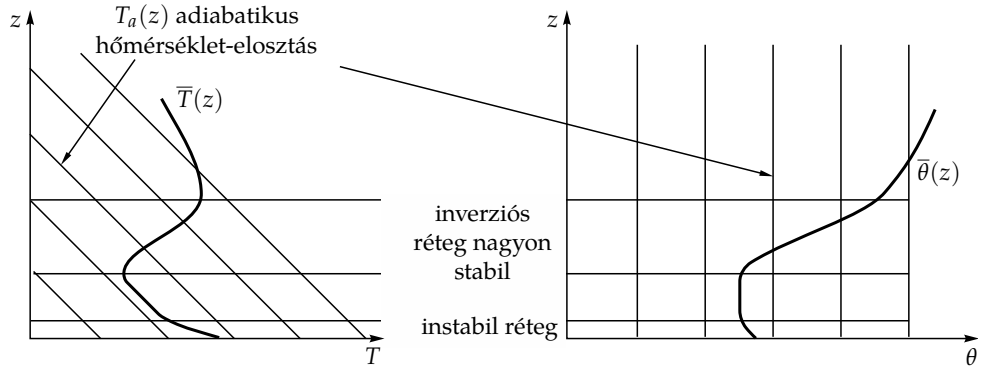
$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\kappa-1} \tag{12.62}$$

potenciális hőmérsékletet. Ez az a hőmérséklet, amelyet akkor kapunk, ha az adott p nyomású, T hőmérsékletű gázt *adiabatikusan* a p_0 referencianyomásra hozzuk. Vegyük észre, hogy a potenciális sűrűség és potenciális hőmérséklet szorzata (12.58) és (12.62) szerint $\sigma\theta = Mp_0/R =$ állandó. Ebből következik, hogy

$$N^2(z) = \frac{g}{\overline{\theta}(z)}\frac{d\overline{\theta}(z)}{dz}. \tag{12.63}$$

A rétegzettség akkor stabil, ha a közeg potenciális hőmérséklete *nő* a magassággal, és marginális, ha a potenciális hőmérséklet helyfüggetlen.

Mind a potenciális sűrűség, mind a potenciális hőmérséklet bevezetése olyan új állapotjelzők, amelyek adiabatikus változásokban állandók. A (T, z) síkon ez olyan transzformációt jelent, amely az adiabatikus görbéket függőleges egyenesekbe viszi át. Különösen áttekinthető képre jutunk a hőmérséklet-inverzió esetében (12.21. ábra)



12.21. ábra. Az ideális gáz θ potenciális hőmérsékletére történő áttérés a T, z sík olyan transzformációja, amely az adiabatákat függőleges egyenesekbe viszi át. Az inverziós réteget mindkét ábrázolásban jelöltük.

Megjegyezzük, hogy az ideális gáz közismert

$$S = \frac{m}{M}\left(C_p \ln T - R \ln p + \text{konst}\right) \tag{12.64}$$

entrópiafüggvénye alapján egyszerű kapcsolat található az $s = S/m$ fajlagos entrópia és a potenciális hőmérséklet között:

$$s = \frac{C_p}{M}\ln\left(Tp^{-R/C_p}\right) + \text{konst}' = \frac{C_p}{M}\ln\left(Tp^{1/\kappa-1}\right) + \text{konst}'. \tag{12.65}$$

(12.62) alapján a potenciális hőmérséklettel kifejezve

$$s = \frac{C_p}{M}\ln\theta + k = -\frac{C_p}{M}\ln\sigma + k', \tag{12.66}$$

ahol használtuk, hogy $\theta\sigma =$ állandó, és k, k' konstansok. A potenciális hőmérséklet és sűrűség *a fajlagos entrópiával* kapcsolatos: az utóbbi nem változik, ha θ vagy σ konstans.

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a potenciális mennyiségek függnek a közegben elosztott anyagok koncentrációjától is, mint pl. a légkörben a vízgőztartalomtól vagy a tengervízben a sótartalomtól. Jelenlétük fontossága érzékelhető abból, hogy a telített vízgőzt tartalmazó levegő hőmérsékletének adiabatikus csökkenési üteme nem 10 fok, hanem csak 5–6 fok kilométerenként, az emelkedő levegőben a kicsapódás során felszabaduló hő miatt.

A potenciális termodinamikai mennyiségekre való áttérés sokszor hasznos a rendszer *dinamikája* szempontjából is. Az ideális áramlás során ugyanis hőátadás nem történik, és ezért az entrópia állandó. Az áramló közeg bármely folyadékelemének potenciális sűrűsége vagy potenciális hőmérséklete ezért a mozgás során állandó, σ vagy θ, tehát hidrodinamikai *mozgásállandók* mindaddig, amíg fázisátalakulás, pl. csapadékképződés nem következik be. A nagyskálájú mozgások az állandó entrópiájú (állandó potenciális sűrűségű, illetve potenciális hőmérsékletű) felületek mentén történnek. Ezek a felületek természetesen nem mindig esnek egybe a lokális vízszintes felülettel, de térben lassan változnak.

A potenciális mennyiségek alapján definiálható a *potenciális örvényesség*, és kimutatható megmaradása tetszőleges forgatott folyadékban. Tekintsünk a potenciális hőmérséklet két közeli értékéhez tartozó felületet. Ezek nem feltétlenül vannak egymástól állandó távolságra. A két felület közötti hengeres folyadékoszlop úgy mozog időben, hogy alaplapjaik végig a két kijelölt felületen maradnak, hiszen a potenciális hőmérséklet mozgásállandó. A helyzetet a 2.2., 2.3. ábrák elrendezése jellemzi, csak most a felső és alsó felületre úgy kell tekintenünk, hogy azok a potenciális hőmérséklet két közeli értékéhez tartoznak. Ha a folyadékoszlop olyan irányba mozog, ahol a felületek távolodnak egymástól, akkor a henger megnyúlik és gyorsabban forog, vagyis teljes örvényessége növekszik.

13. fejezet

A forgatás és rétegzés együttes hatása sekély folyadékra (folytatás)

13.1. Az örvényvektor egyenlete és a cirkuláció változása

A forgatott ideális folyadék mozgásegyenlete az f-síkon nehézségi erőtérben

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -f_0\mathbf{n}\times\mathbf{v} - \frac{\operatorname{grad} p}{\varrho} - \operatorname{grad}(gz). \tag{13.1}$$

A $(\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{v} \equiv \operatorname{grad} v^2/2 + \operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}$ azonosság felhasználásával a

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -(\boldsymbol{\omega}+f_0\mathbf{n})\times\mathbf{v} - \frac{\operatorname{grad} p}{\varrho} - \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2}+gz\right) \tag{13.2}$$

alakot ölti. Az állandó sűrűségű eset (8.2) egyenletéhez képest most a nyomással kapcsolatos tag már nem gradiens alakú. Az egyenlet rotációját véve:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\left[(\boldsymbol{\omega}+f_0\mathbf{n})\times\mathbf{v} + \frac{\operatorname{grad} p}{\varrho}\right]. \tag{13.3}$$

Tekintsük az utolsó tagot. Mivel $\operatorname{rot}(\Phi\mathbf{a}) = \operatorname{grad}\Phi\times\mathbf{a} + \Phi\operatorname{rot}\mathbf{a}$,

$$-\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{grad} p}{\varrho}\right) = \frac{\operatorname{grad}\varrho\times\operatorname{grad} p}{\varrho^2} = \boldsymbol{\mathcal{B}}. \tag{13.4}$$

A jobb oldalon megjelent mennyiség a *baroklin vektor*, amely a nyomási és sűrűségi inhomogenitások hatását összegzi. Állandó sűrűségű esetben természetesen eltűnik, de azokban a kivételes esetekben is, amikor a nyomás minden pillanatban *csakis* a sűrűség függvénye: $p = p(\varrho)$. Az ilyen közeget *barotrópnak* hívjuk. *Baroklin* a közeg vagy az áramlás, ha a baroklin vektor nullától különböző, vagyis amikor a nyomás és a sűrűség szintvonalai nem esnek egybe.

A $\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$ azonosságot és a divergenciamentességet használva (mint (8.6)-ban):

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}\operatorname{grad})\mathbf{v} + f_0(\mathbf{n}\operatorname{grad})\mathbf{v} + \boldsymbol{\mathcal{B}}. \tag{13.5}$$

Változó sűrűségű folyadékban tehát a baroklin vektor is hozzájárul az örvényesség változásához.

Érdemes megjegyezni, hogy a gyors forgatásnak megfelelő határesetben $\boldsymbol{\omega}$ kicsi a többi taghoz képest, és a két utolsó tag dominál. Ekkor

$$f_0(\mathbf{n}\,\mathrm{grad})\mathbf{v} = -\boldsymbol{\mathcal{B}} = -\frac{\mathrm{grad}\,\varrho \times \mathrm{grad}\,p}{\varrho^2}. \tag{13.6}$$

Mivel $\mathbf{n}$ a függőleges irány, $\mathbf{n}\,\mathrm{grad} = \partial/\partial z$, az összefüggés a sebesség z szerinti deriváltját adja:

$$f_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{\mathrm{grad}\,\varrho \times \mathrm{grad}\,p}{\varrho^2}. \tag{13.7}$$

Ez a termikus áramlás legáltalánosabb alakja. Tekintsük ugyanis a kifejezés x komponensét:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{f_0\varrho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right). \tag{13.8}$$

Csak y irányban változó sűrűséget feltételezve és a geosztrofikus egyensúlyban érvényes $\partial p/\partial z = -\varrho g$ hidrosztatikai összefüggést használva, u helyett u_g-t írva és jelölve, hogy a sűrűség az időfüggetlen állapot $\overline{\varrho}$ sűrűsége,

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{f_0\varrho}\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial y}, \tag{13.9}$$

ami nem más, mint a (6.48) termikus áramlás x komponense. A termikus áramlás tehát az örvénydinamika következménye, olyan egyensúly, amelyben a Coriolis-erőből és a sűrűség inhomogenitásából, a baroklin vektorból adódó örvényességek kompenzálják egymást.

Az örvényegyenlet $\boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\omega} + f_0\mathbf{n}$ teljes örvényességre vonatkozó formája, (13.5) szerint:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_T\,\mathrm{grad})\mathbf{v} + \boldsymbol{\mathcal{B}}. \tag{13.10}$$

Az örvényvektor mozgásegyenlete ismeretében a Γ cirkuláció változását a (8.21) összefüggés alapján kaphatjuk meg legkönyebben. A (13.5) egyenletet behelyettesítve és (8.15), (8.16) jobb oldalait összevetve

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = -f_0\frac{dA}{dt} + \int \boldsymbol{\mathcal{B}}\,d\mathbf{A},} \tag{13.11}$$

ahol A a cirkuláció számításához használt kontúr vízszintes síkra vett vetületének területe. Ideális folyadékban a cirkuláció a Coriolis-hatás és a baroklin vektor miatt változhat csak.

Az (13.10) egyenletből a teljes cirkulációra azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\frac{d\Gamma_T}{dt} = \int \boldsymbol{\mathcal{B}}\,d\mathbf{A},} \tag{13.12}$$

a teljes cirkulációt csakis a baroklin vektor változtatja.

13.2. Óceáni áramlatok gyűrűinek geosztrofikus áramlása

A meanderező óceáni áramlatokról, így a Golf-áramlatról is jobbra vagy balra forgó nagy örvények, gyűrűk válnak le. Ezek jellegzetes mérete a 6.7. fejezetben látottak szerint az óceáni belső Rossby-sugár, és ezek az örvények a ciklonok és anticiklonok óceáni megfelelői.

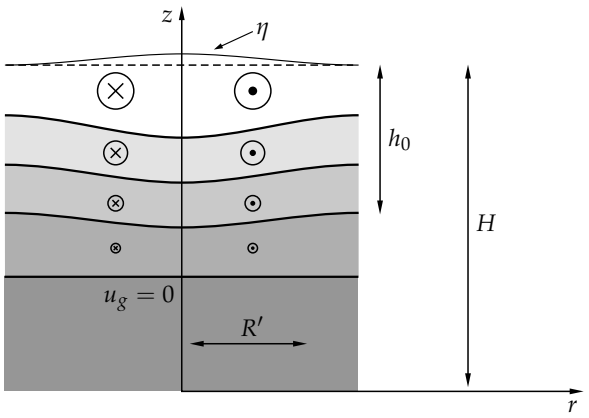
A gyűrűk leszakadásuk után még sokáig azonosíthatóak, közel forgásszimmetrikusak, a síkbeli koordinátáktól csak a tengelyüktől mért r távolságon keresztül függnek. Bennük a sűrűségeloszlás nem állandó, közelítő alakként a

$$\overline{\varrho}(z,r) = \Delta\varrho e^{-r^2/R'^2+(z-H)/h_0} + \overline{\varrho}(z) \tag{13.13}$$

sűrűségeloszlást választhatjuk. Ez tekinthető úgy is, mint valamely $\overline{\varrho}(z)$ tetszőleges függőleges rétegzettségnek az r-függésen keresztül módosított változata. Itt $h_0 = 100 - 500$ m a gyűrű mélységi kiterjedése, $\Delta\varrho$ pedig a gyűrű középpontjában és attól távol mért felszíni sűrűségek különbsége. A meleg gyűrűkben $\Delta\varrho$ negatív, a hidegekben pozitív. Mivel $h_0 \ll H$, ahol H a teljes vízmélység, a radiális koordinátától függő járulék a néhányszor h_0 mélységben már elhanyagolható. A gyűrű $R' \approx 50$ km sugara jó közelítéssel a belső Rossby-sugár. Geosztrofikus állapotot feltételezve a (6.47) egyenlet szerint a kialakuló radiális sebesség

$$|\mathbf{u}_g|(z,r) = \frac{g}{\varrho_0 f_0}\frac{\partial}{\partial r}\int_{z_0}^{z}\overline{\varrho}(z',r)dz' = \frac{2g}{|f_0|}\frac{|\Delta\varrho|}{\varrho_0}\frac{h_0}{R'}\frac{r}{R'}e^{-r^2/R'^2+(z-H)/h_0}. \tag{13.14}$$

Az eredmény nem függ attól, hogy a z_0 referenciaszintet hogyan választjuk, ha az sokkal mélyebben van, mint a gyűrűk alja ($z_0 \ll H - h_0$), hiszen a levágás exponenciális: $\exp\left((z_0 - H)/h_0\right) \ll 1$. A sebesség lefelé csökken; minden mélységi szinten a tengelyen eltűnik, onnét kifelé haladva először lineárisan nő, majd az R' távolságon túl exponenciálisan lecseng.



13.1. ábra. Óceáni áramlat közel geosztrofikus meleg gyűrűinek sematikus (a z tengely körül forgásszimmetrikus) sűrűség- és sebességeloszlása, $f_0 > 0$. A gyűrű vízszintes mérete belső Rossby-sugár nagyságrendű. Kétrétegű közegben ennek a 6.5b. ábra felel meg.

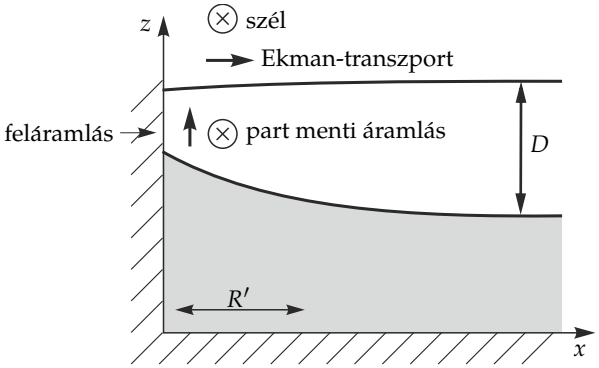
A felszíni alak ugyanakkor (6.46)-ból:

$$\eta(r) = -\frac{1}{\varrho_0}\int_{z_0}^{H}\overline{\varrho}(z',r)dz' = -\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0}h_0 e^{-r^2/R'^2}. \tag{13.15}$$

A meleg gyűrűk ($\Delta\varrho < 0$) tehát kidudorodnak, és anticiklonális forgásúak (13.1. ábra). Az állandó sűrűségű belső felületek behorpadnak a gyűrű tengelye körül, az tehát nagynyomású tartománynak felel meg. Ezzel egyben megkaptuk az anticiklonális áramlások tipikus alakját folytonos rétegzettség esetén. A ciklonálisakhoz felszíni behorpadás és az állandó sűrűségű felületek tengely körüli kidudorodása tartozik.

13.3. Part menti feláramlások

Ahogy a 4.4.2. fejezetben tárgyaltuk, ha a partvonal mentén olyan szél fúj, amelynek következtében az Ekman-transzport a partvonalra merőlegesen kifelé mutat (a partvonal a széltől balra esik az északi féltekén (4.9b. ábra), akkor feláramlás indul meg. Kétrétegű közegben ennek hatása sokkal nagyobb a belső felszín elmozdulására, mint a külső felszínére. Elegendően erős vagy elegendően hosszan tartó szél esetén a belső felszín eléri a külsőt, és az eredetileg mély és hideg víz, a benne levő tápanyagokkal együtt, feljut a felszínre. Ezt nevezzük part menti feláramlásnak (upwelling).



13.2. ábra. Part menti feláramlás a parttal párhuzamosan fújó szél esetén az északi féltekén. A redukált sekélyfolyadék-egyenlet szellemében az alsó réteg olyan vastag, hogy abban az áramlás sebessége elhanyagolható.

A dinamika lényege megérthető a (6.6) redukált sekélyfolyadék-egyenlettel, ha azt a D átlagos vastagságú felső Ekman-rétegre alkalmazzuk vízszintes külső felszínnel, és figyelembe vesszük a szélnyírást is. Az egyszerűség kedvéért (az y tengely menti) függőleges partot, csak az x koordinátától függő áramlást és felszíni alakokat tételezünk fel (13.2. ábra). A szélnyírás az y irányba mutat, amelyet térben és időben is állandónak tekintünk: $\tau_y \equiv \tau_0$. A 4.5. fejezetben látottak szerint ez a $\tau_0/(\varrho_0 D)$ gyorsulás megjelenésére vezet a felső réteg v sebességkomponensének egyenletében.

A szélnyírással kiegészített (6.6) egyenlet két komponense az f-síkon

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = f_0 v - g'\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} = -f_0 u + \frac{\tau_0}{\varrho_0 D}, \tag{13.16}$$

a felső réteg aktuális h vastagságára vonatkozó (2.12) kontinuitási egyenlet pedig

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{13.17}$$

Feltéve, hogy az áramlás lassú, az időderiváltakban az advektív tag elhagyható, $\partial u/\partial x$ előtt (13.17)-ben $h \approx D$ írható, a linearizált egyenletek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_0 v - g'\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -f_0 u + \frac{\tau_0}{\varrho_0 D}, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} + D\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{13.18}$$

Ezek az összefüggések a $g' \to g$, $h - D \to \eta$, $D \to H$, $\tau_0 \to -\tau_0$ helyettesítéssel a viharhullámok (11.6), (11.7) egyenleteibe mennek át y-tól független térmennyiségek esetén. Így az

ottani megoldás alapján a feláramlási problémában

$$u = \frac{\tau_0}{f_0 \varrho_0 D}\left(1 - e^{-x/R'}\right), \qquad v = \frac{\tau_0 t}{\varrho_0 D} e^{-x/R'}, \tag{13.19}$$

$$h = D - \frac{\tau_0 t}{R' f_0 \varrho_0} e^{-x/R'}. \tag{13.20}$$

Itt $R' = \sqrt{g'D}/f_0$ a redukált sekély folyadékra jellemző belső Rossby-sugár, amely a térbeli lecsengést határozza meg. A partra merőleges u sebességkomponens amplitúdóját a nyírás, a parttal párhuzamosét és a szintemelkedését pedig a $\tau_0 t$ nyírási impulzus határozza meg. $\tau_0 = 0{,}2\ \mathrm{N/m^2}$ nyírási erősség, $g' = 0{,}02\ \mathrm{m/s^2}$ redukált gyorsulás és $D = 50$ m esetén a feláramlás dh/dt erőssége a part mentén kb. 17 m naponként.

A déli féltekén Peru partjai mentén tipikusan felszálló áramlás figyelhető meg. A déli szél gyengülése miatt a hideg víz feláramlási erőssége csökkenhet. Az ezzel járó felmelegedés tekinthető az El Nino-jelenség kialakulásában az első lépésnek.

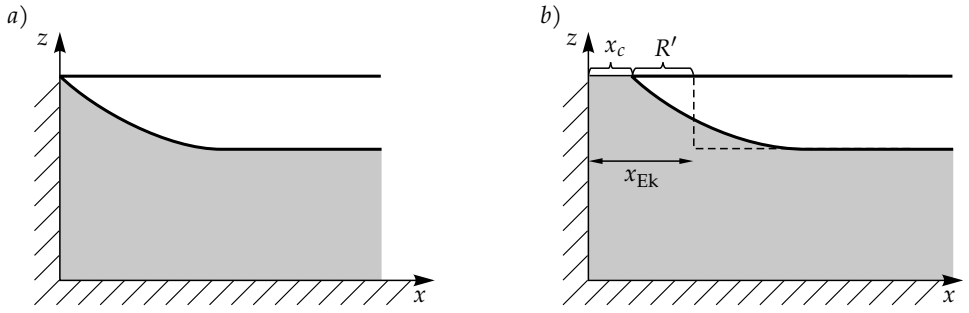
Annak ellenére, hogy az eredmény a lineáris közelítés keretén belül érvényes, érdemes első tájékozódásként hosszabb időkre is alkalmazni, amikor az eredeti állapottól való eltérés már nem kicsi. Ez azzal indokolható, hogy a (13.16), (13.17) egyenletekben szinte minden nemlineáris tag u-val arányos, amelyről tudjuk, hogy eltűnik a partvonalon. A parthoz közel, $x \ll R'$ esetén tehát a fenti megoldások jó közelítések lehetnek. Az elválasztó felület időfüggése (13.20) alapján a part mentén közelítőleg

$$h(x,t) = D - \frac{\tau_0 t}{R' f_0 \varrho_0}(1 - x/R'). \tag{13.21}$$

A felső meleg réteg $h(0,t)$ part menti vastagsága állandóan csökken, míg

$$t_0 = \frac{R' D f_0 \varrho_0}{\tau_0} \tag{13.22}$$

idő (példánkban kb. 3 nap) után nullává válik, $h(0,t_0) = 0$, az alsó hideg víz ekkor eléri a felszínt (13.3a. ábra). Ezután a hideg közeg a part mellett teljesen felszínre kerül, és a parttól valamilyen távolságban *megjelenik egy front* (13.3b. ábra). A frontvonal helyét jelöljük x_c-vel, az x_c távolság eléréséig eltelt időt t_c-vel.



13.3. ábra. Part menti feláramlás fázisai hosszú idő óta egyenletesen fújó szél esetén. Az elválasztó felület a t_0 pillanatban eléri a felszínt a partvonal mentén (a), a frontvonal az x_c távolságig a t_c pillanatban jut el (b).

Ekkorra $h(x,t)$ a partvonal mellett formálisan negatív, és x_c-t az a feltétel határozza meg, hogy $h(x_c,t_c) = 0$. Mivel $x_c/R' \ll 1$, a front 0-tól x_c-ig való eljutásának $t_c - t_0$ ideje is kicsi,

írható, hogy $t_c = t_0(1 + (t_c - t_0)/t_0)$. Használva, hogy $(t_c - t_0)/t_0$ és x_c/R' is kicsi, a $h(x_c, t_c) = 0$ feltétel azt jelenti, hogy

$$D = \frac{\tau_0 t_0}{R' f_0 \varrho_0} \left(1 + \frac{t_c - t_0}{t_0}\right) \left(1 - \frac{x_c}{R'}\right) \approx D \left(1 + \frac{t_c - t_0}{t_0} - \frac{x_c}{R'}\right). \tag{13.23}$$

Ebből a frontvonal helye a t_c pillanatban

$$x_c = R' \frac{t_c - t_0}{t_0}. \tag{13.24}$$

A front tehát $R'/t_0 = \tau_0/(\varrho_0 f_0 D)$ sebességgel halad. A (13.16) egyenlet szerint ez a mennyiség a probléma x irányú geosztrofikus sebessége, amelyet Ekman-sebességnek neveznek, jele u_{Ek}. Ennek szellemében az $u_{Ek} t_c$ távolságot x_{Ek} Ekman-elmozdulásnak nevezve,

$$x_c = x_{Ek} - R'. \tag{13.25}$$

Az eredmény arra utal, hogy a feláramlással kapcsolatos front úgy alakul ki, mintha először a felső határréteg part menti függőleges választófelülete az x_{Ek} Ekman-elmozdulással odébb tolódna, és utána következne be a 6.7. fejezetben vizsgált geosztrofikus kiegyenlítődés (amikor a front belső Rossby-sugárnyit mozdul a part felé). A frontvonaltól jobbra a meleg víz a szél irányába áramlik, a hideg víz modellünkben áll, a valóságban a széllel szemben is mozoghat. A partvonal mentén erős nyírás alakul ki a vízben.

Amennyiben a szél időben periodikus, de térben állandó, a feláramlás erőssége is periodikusan változik. Ha a szél térbeli periodicitást is mutat, akkor a feláramlás gerjesztett belső hullámok formájában jelenik meg a part belső Rossby-sugárnyi környezetében. A feláramlási frontok mentén termikus áramlás történik, amely perturbációk hatására általában instabillá válik. Az Ekman-réteg belsejében a baroklin, a felszínen a barotróp instabilitás játszik szerepet, ezért a feláramlási mintázat (amit pl. a planktonkoncentráció rajzol ki) kétdimenziós turbulenciát jelez.

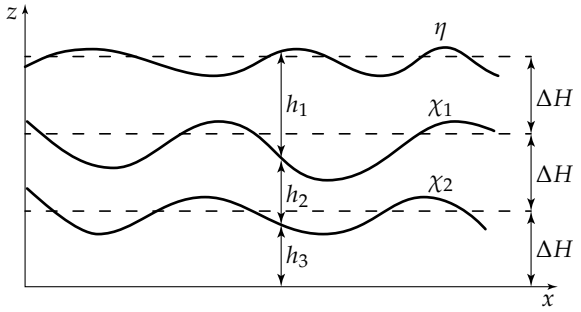
13.4. A kvázi-geosztrofikus egyenlet folytonos rétegzettségű sekély folyadékban

A folytonos függőleges rétegzettségű folyadék felfogható sok egymás fölötti keskeny réteg határeseteként. Egy tipikus közbenső réteget két alig különböző sűrűségű réteg vesz körül. Mivel a kétrétegű közelítésben ez egyik rétegre sem teljesül, ahhoz, hogy a folytonos eset szempontjából jellemző elrendezést kapjunk, legalább három réteget kell vizsgálnunk. Látni fogjuk, ez már elegendő ahhoz, hogy a határesetre pontosan következtethessünk.

Tekintsünk három, az egyszerűség kedvéért egyforma ΔH nyugalmi vastagságú folyadékréteget, amelyek közül a legfelső ($i = 1$) ϱ_0, a középső ($i = 2$) $\varrho_0 + \Delta\varrho$, az alsó ($i = 3$) pedig $\varrho_0 + \Delta\varrho + \Delta\varrho'$ sűrűségű, 13.4. ábra. Az egyes rétegek vastagságát a hely és idő függvényében jelölje $h_i(x, y, t)$. Ezek mellett használhatjuk az η külső és χ_1, χ_2 belső elválasztó felületi alakokat. Mivel a teljes nyugalmi rétegvastagság $3\Delta H$,

$$\eta = h_1 + h_2 + h_3 - 3\Delta H, \qquad \chi_1 = h_2 + h_3 - 2\Delta H, \qquad \chi_2 = h_3 - \Delta H. \tag{13.26}$$

A sekélység miatt hidrosztatikai nyomáseloszlást használva az egyes rétegekben a külső



13.4. ábra. A folytonos rétegzettség dinamikájának megértéséhez használt háromrétegű közelítés geometriája. A 2. réteg tekinthető egy sokrétegű közelítés tipikus rétegének.

nyomáshoz adódó nyomások

$$p_1 = \varrho_0 g(h_1 + h_2 + h_3 - z) = \varrho_0 g(\eta + 3\Delta H - z), \qquad \text{ha} \qquad z > h_2 + h_3, \tag{13.27}$$

$$\begin{gathered} p_2 = \varrho_0 g h_1 + (\varrho_0 + \Delta\varrho) g(h_2 + h_3 - z) = \\ \varrho_0 g(\eta - \chi_1 + \Delta H) + (\varrho_0 + \Delta\varrho) g(\chi_1 + 2\Delta H - z), \quad \text{ha} \quad h_2 + h_3 > z > h_3, \end{gathered} \tag{13.28}$$

$$\begin{gathered} p_3 = \varrho_0 g h_1 + (\varrho_0 + \Delta\varrho) g h_2 + (\varrho_0 + \Delta\varrho + \Delta\varrho') g(h_3 - z) = \\ = \varrho_0 g(\eta - \chi_1 + \Delta H) + (\varrho_0 + \Delta\varrho) g(\chi_1 - \chi_2 + \Delta H) + (\varrho_0 + \Delta\varrho + \Delta\varrho') g(\chi_2 + \Delta H - z), \\ \text{ha} \quad z < h_3. \end{gathered} \tag{13.29}$$

A teljes nyomást a nyugalmi hidrosztatikai nyomásra (melyet szögletes zárójelbe írva jelölünk) és a dinamikai nyomásra bontva az egyes tartományokban:

$$p_1 = \varrho_0 g\eta + \left[\varrho_0 g(3\Delta H - z)\right], \tag{13.30}$$

$$p_2 = \varrho_0 g\eta + \Delta\varrho g\chi_1 + \left[\varrho_0 g\Delta H + (\varrho_0 + \Delta\varrho) g(2\Delta H - z)\right], \tag{13.31}$$

$$p_3 = \varrho_0 g\eta + \Delta\varrho g\chi_1 + \Delta\varrho' g\chi_2 + \left[(2\varrho_0 + \Delta\varrho) g\Delta H + \left(\varrho_0 + \Delta\varrho + \Delta\varrho'\right)(\Delta H - z)\right]. \tag{13.32}$$

Mivel a p' dinamikai nyomással képzett $p'/(\varrho_0 f_0)$ kifejezés adja a geosztrofikus eset áramlási függvényét (amely a kvázi-geosztrofikus dinamikában is alkalmazhatónak bizonyul majd), az egyes rétegek p'_i dinamikai nyomásai (a szögletes zárójel előtti kifejezések) a $\psi_i = {p'}_i/\varrho_0 f_0$, áramlási függvényekre vezetnek, azaz

$$\psi_1 = \frac{g}{f_0}\eta, \tag{13.33}$$

$$\psi_2 = \frac{g}{f_0}\eta + \frac{\Delta\varrho g}{\varrho_0 f_0}\chi_1 = \psi_1 + \frac{\Delta\varrho g}{\varrho_0 f_0}\chi_1, \tag{13.34}$$

és

$$\psi_3 = \frac{g}{f_0}\eta + \frac{\Delta\varrho g}{\varrho_0 f_0}\chi_1 + \frac{\Delta\varrho' g}{\varrho_0 f_0}\chi_2 = \psi_2 + \frac{\Delta\varrho' g}{\varrho_0 f_0}\chi_2. \tag{13.35}$$

A belső elválasztófelületek áramlási függvénnyel kifejezett alakjai ebből:

$$\chi_1 = \frac{f_0\varrho_0}{\Delta\varrho g}(\psi_2 - \psi_1), \qquad \chi_2 = \frac{f_0\varrho_0}{\Delta\varrho' g}(\psi_3 - \psi_2). \tag{13.36}$$

A tipikus, középső réteg pillanatnyi vastagsága

$$\chi_1 - \chi_2 = -f_0\left(\frac{\varrho_0\Delta H}{\Delta\varrho g}\frac{\psi_1 - \psi_2}{\Delta H} - \frac{\varrho_0\Delta H}{\Delta\varrho' g}\frac{\psi_2 - \psi_3}{\Delta H}\right) = h_2 - \Delta H. \tag{13.37}$$

A ΔH tényezőkkel bővített alakban megjelentek az áramlási függvény magasság szerinti diszk-

rét deriváltjai, az előttük álló tényezők pedig az egyes rétegek Brunt–Väisälä frekvenciái (5.7)-tel kifejezett négyzetének reciprokait tartalmazzák.

A kvázi-geosztrofikus egyenlet mindig a potenciális örvényesség megmaradását fejezi ki. A középső szint (3.39) potenciális örvényessége

$$q_2 = \frac{f+\zeta_2}{h_2}\Delta H = \frac{f_0+\beta y+\zeta_2}{\Delta H + h_2 - \Delta H}\Delta H \approx f_0 + \beta y + \zeta_2 - \frac{f_0}{\Delta H}(h_2 - \Delta H), \tag{13.38}$$

ahol a második relációban használtuk, hogy $h_2 - \Delta H \ll \Delta H$, $\zeta_2 \ll f$. Mivel a $h_2 - \Delta H$ szintingadozás (13.37) szerint már két diszkrét derivált különbsége, és ez (13.38)-ban újabb rétegvastagsággal osztódik, a végeredményben kétszeres z szerinti derivált szerepel.

Folytonos rétegzettség $\Delta H \to 0$ határesetében a $\psi_i(x,y,t)$ áramlási függvények együttese az egyetlen $\psi(x,y,z,t)$ *magasságfüggő* áramlási függvénybe megy át:

$$\psi_i(x,y,t) \to \psi(x,y,z,t), \tag{13.39}$$

az i index szerepét a magasság z koordinátája veszi át. (13.38) alapján a z magasságtól is függő potenciális örvényesség az áramlási függvénnyel a

$$q(x,y,z,t) = f_0 + \Delta\psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \tag{13.40}$$

kapcsolatban áll. A Laplace-operátor az örvényesség ζ függőleges komponensét adja, ezért csak a vízszintes koordinátákra hat. Az f_0 után álló tagok mind kicsik, ezért jogos bennük a geosztrofikus áramlási függvény kifejezésének használata.

Mivel bármelyik szinten a potenciális örvényesség mozgásállandó, $dq_i/dt = 0$, a magasságfüggő alakban a megmaradást a

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\Delta\psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2(z)}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] = 0} \tag{13.41}$$

összefüggés, a folytonosan rétegzett közeg kvázi-geosztrofikus egyenlete írja le. A potenciális örvényesség kifejezésében a konstans f_0-át nem írtuk ki. Az első zárójel második két tagja most is az advektív deriváltból adódik (a függőleges sebességgel kapcsolatos tag a sekélység miatt nem jelenik meg). A magasságfüggő ψ áramlási függvény ismerete a teljes hidrodinamikai probléma megoldását jelenti, minden lényeges hidrodinamikai mennyiség megkapható ψ-ből. A vízszintes sebességkomponensek természetesen (1.58) szerint adódnak. A gondolatmenetből következik, hogy az áramlási függvény a z szinthez tartozó dinamikai nyomással arányos:

$$\boxed{p' = \varrho_0 f_0 \psi,} \tag{13.42}$$

éppúgy, mint a homogén esetben, de most a nyomás magasságfüggést is mutat.

A hidrosztatikai összefüggés szerint a p'-höz tartozó ϱ' sűrűségeltérés:

$$\boxed{\varrho' = -\frac{\varrho_0 f_0}{g}\frac{\partial\psi}{\partial z}.} \tag{13.43}$$

A (13.36) egyenletből látszik, hogy a középső szint tetején χ_1 az ottani áramlási függvény magasság szerinti parciális deriváltjával kapcsolatos, a $w = d\chi_1/dt$ sebesség ennek idő szerinti

teljes deriváltja. A függőleges sebesség tehát

$$\boxed{w = -\frac{f_0}{N^2(z)}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{f_0}{N^2(z)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}.} \tag{13.44}$$

A (13.43) megfeleltetéssel ez a kifejezés egyenértékű az (5.20) sűrűségegyenlet w-ra rendezett alakjával.

Az esetleges alsó domborzat *peremfeltételként* vehető figyelembe. A $z = 0$ szint körüli $d(x, y)$ domborzat mentén mozgó folyadékelem Δx, Δy síkbeli elmozdulás esetén $\Delta d = \Delta x \partial d/\partial x + \Delta y \partial d/\partial y$ emelkedést érez. Δt idő alatt a sebesség függőleges komponense $w = \Delta d/\Delta t$, vagyis a peremfeltétel[1]

$$w = (\mathbf{u}\,\mathrm{grad})d, \qquad z = 0. \tag{13.45}$$

Szemléletesen, a perem menti függőleges sebesség ideális folyadékban a domborzatot követő folyadékelem emelkedési sebessége.

Vizsgáljuk meg a kvázi-geosztrofikus közelítés feltételeit! A potenciális örvényesség (13.38) kvázi-geosztrofikus alakjában kifejezésre jut az a feltevés, hogy az elválasztó felületek $(h_i - \Delta H)/\Delta H$ relatív vastagságingadozása kicsi (Rossby-szám rendű). A középső, $i = 2$ szinten ez a mennyiség a magasságfüggő áramlási függvény z szerinti második deriváltjával arányos, ezért állandó Brunt–Väisälä-frekvencia mellett érvényesnek kell lennie az

$$\frac{|f_0|}{N^2}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right| \ll 1 \tag{13.46}$$

megszorításnak. A (13.43) egyenlet szerint ez ekvivalens a

$$\frac{g}{N^2\varrho_0}\left|\frac{\partial\varrho'}{\partial z}\right| \ll 1 \tag{13.47}$$

feltétellel, és a Brunt–Väisälä-frekvencia (5.6) definícióját használva:

$$\left|\frac{\partial\varrho'}{\partial z}\right| \ll \left|\frac{d\overline{\varrho}}{dz}\right|. \tag{13.48}$$

Ez azt jelenti, hogy a dinamikai sűrűség magasság szerinti változásai sokkal kisebbek a $\overline{\varrho}(z)$ profil változásainál: az állandó sűrűségű felületek csak keveset térhetnek el a vízszintes síktól.

Érdemes a (13.41) kvázi-geosztrofikus egyenlet dimenziótlan alakját is megadni állandó N mellett. A vízszintes és függőleges távolságokat L, illetve H egységben, az időt L/U egységben mérve és használva, hogy az áramlási függvény dimenziója UL, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\left[\Delta\psi + \frac{Be}{Ro}y + \frac{1}{Bu}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 z}\right] = 0, \tag{13.49}$$

melyben megjelentek az ismert dimenziótlan számok. A már korábban (6. fejezet) is megfogalmazott feltétel szerint $Bu \approx 1$. Mivel $Be = \beta L/|f_0|$ a dimenziótlan β paraméter, amelyről már a 3.11. fejezetben láttuk, hogy Rossby-szám nagyságrendű, a (13.49) egyenlet minden tagja egységnyi. A kvázi-geosztrofikus egyenlet továbbra is a leglassúbb mozgásokat írja le (melyek karakterisztikus ideje legalább néhány nap), tehát kiszűri például a belső Poincaré-, illetve Kelvin-hullámokat.

[1] Összhangban a mozgó felületre kapott (5.105) peremfeltétellel.

13.5. Rossby-hullám folytonos rétegzettség esetén

A kis amplitúdójú Rossby-hullámok állandó Brunt–Väisälä-frekvencia esetén megoldásai a (13.41) kvázi-geosztrofikus egyenlet linearizált változatának, azaz rájuk

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\psi + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \tag{13.50}$$

13.5.1. Rossby-hullám zárt rétegben

Tekintsünk felül merev lappal lezárt H magasságú folyadékot. A w függőleges sebességnek ekkor a $z = 0$ és a $z = H$ szinten is el kell tűnnie, ami a (13.44) egyenlet szerint csak akkor lehetséges, ha az áramlási függvény z szerinti deriváltja eltűnik mindkét peremen. Ez teljesül, ha a függőleges hullámszámvektor lehetséges $k_z^{(n)}$ értékeit (6.21) határozza meg, és az áramlási függvény magasságfüggését a $\cos(k_z^{(n)}z)$ tényező adja, ahol $n = 1, 2$, stb. Az x irányban haladó síkhullámot keresve, a teljes áramlási függvény ezért a

$$\psi = \psi_0 \cos\frac{n\pi z}{H} e^{i(k_x x - \omega_{0n}t)} \tag{13.51}$$

alakban írható, ahol n az egyes normálmódusokat különbözteti meg. Ezt (13.50)-be helyettesítve a

$$-i\omega_{0n}\left(-k_x^2 - \frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\right) + i\beta k_x = 0 \tag{13.52}$$

feltételt kapjuk, amelyből a diszperziós reláció

$$\omega_{0n}(k_x) = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + \left(f_0\pi n/(NH)\right)^2}. \tag{13.53}$$

Vegyük észre, hogy a nevezőben éppen a (6.22) belső Rossby-sugarak spektruma jelenik meg, azaz

$$\boxed{\omega_{0n}(k_x) = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + {R'_n}^{-2}}.} \tag{13.54}$$

Mindegyik hullámmódus sebessége negatív, és ez nyugatra haladásnak felel meg nyugvó közegben. A hosszú hullámok ($k_x \to 0$) a leggyorsabbak, terjedési sebességük $-\beta {R'_n}^2$. Minél nagyobb n, annál több különböző sebességű vízszintes rétegre bomlik a hullám, és annál *kisebb* maximális sebessége. A legaktívabb módusok tehát a legalacsonyabb indexűek.

Érdemes felírni az egyes mennyiségek hely- és időfüggését az $n = 1$ módusban. Az áramlási függvény valós részének

$$\psi_0 \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\cos(k_x x - \omega_{01}t) \tag{13.55}$$

alakjából, a sebességek (1.58) és a dinamikai nyomás (13.42) kifejezéséből

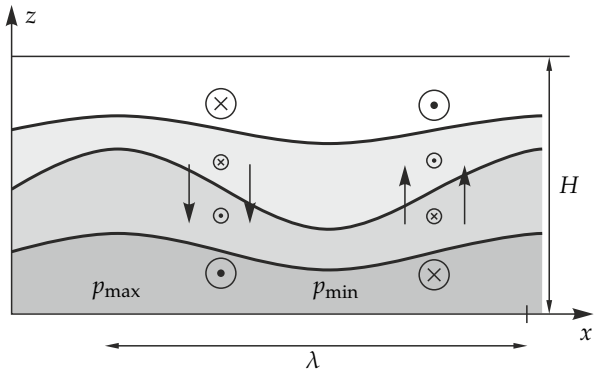
$$u = 0, \qquad v = -k_x\psi_0\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\sin(k_x x - \omega_{01}t), \qquad p' = \varrho_0 f_0\psi_0\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)\cos(k_x x - \omega_{01}t), \tag{13.56}$$

az áramlás tehát minden szinten a vízszintes síkban történik. A sűrűségeltérés és a feláramlási

sebesség (13.43) és (13.44) alapján

$$\varrho' = \frac{\varrho_0 f_0}{g}\frac{\pi}{H}\psi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)\cos(k_x x - \omega_{01} t), \qquad w = \frac{f_0\omega_{01}}{N^2}\frac{\pi}{H}\psi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)\sin(k_x x - \omega_{01} t). \tag{13.57}$$

Ezekből látszik, hogy az y irányú sebesség és a nyomás szélsőértékei az x tengely mentén negyed hullámhosszal eltolva követik egymást, a nyomás és a sűrűség fázisban vannak. A függőleges áramlás azoknál az x értékeknél a legerősebb, ahol v, de míg az utóbbi a felső, illetve alsó peremek körül a legnagyobb, addig a feláramlás a középszinten. Negyed hullámhosszal a nyomásmaximumtól keletre leáramlás történik, hiszen (13.57)-ben $\omega_{01} < 0$. Az $n = 1$ módus (13.5. ábra) hasonló a kétrétegű folyadék 6.12. ábrán mutatott belső Rossby-hullámjához, csak benne a sűrűség folytonosan csökken felfelé.



13.5. ábra. A $\lambda = 2\pi/k_x$, $k_x > 0$ hullámhosszú belső Rossby-hullám szerkezete folytonos rétegzettségű közegben ($n = 1$ módus). A vonalak állandó sűrűségű felületeket jelölnek, a körök nagysága az y irányú sebesség abszolútértékével arányos, a bennük levő jelek az irányra utalnak. A nyilak a függőleges áramlás irányát mutatják abban a tartományban, ahol az a legerősebb.

13.5.2. Hegységrendszer által gerjesztett Rossby-hullám

Érdemes megvizsgálni, mi történik, ha a Rossby-hullámzás nem korlátozódik egy H vastagságú rétegre, hanem z irányban is *haladó* hullámként jelenik meg. A légkör esetében az ilyen hullámok a troposzférából behatolnak a sztratoszférába. Ekkor nincs felső peremfeltétel előírva, haladó hullámokat keresünk a

$$\psi = \psi_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)} \tag{13.58}$$

alakban, ahol k_z tetszőleges, folytonos változó. A (13.50) egyenletből a diszperziós reláció

$$\boxed{\omega_0(k_x, k_z) = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_z^2 f_0^2/N^2}.} \tag{13.59}$$

A csoportsebesség komponensei:

$$c_x^* = \beta\frac{k_x^2 - k_z^2 f_0^2/N^2}{(k_x^2 + k_z^2 f_0^2/N^2)^2}, \qquad c_z^* = \beta\frac{2k_x k_z f_0^2/N^2}{(k_x^2 + k_z^2 f_0^2/N^2)^2}. \tag{13.60}$$

Mivel k_x, $k_z > 0$-ra $c_z^* > 0$, az ilyen Rossby-hullámban az energia áramolhat felfelé. Tipikus helyzetként $k_x = 10^{-6}$, $k_z = 10^{-4}$ 1/m-rel számolva $c_z^* \approx 5$ cm/s, azaz a sebesség kb. 5 km/nap (ezekkel a paraméterekkel $c_x^* \approx 0$).

A felfelé terjedő hullámok alapvető forrásai a domborzati egyenetlenségek, *hegységrendszer által keltett* Rossby-hullámokról lesz szó a 3.10. fejezet homogén közegével szemben most folytonos rétegzettség esetén. A jelenség hasonlóságot mutat az 5.8. fejezetben tárgyalt hegy mögötti (lee) hullámmal is.

Mivel a Rossby-hullámok a közeghez képest nyugatra mozognak, a háttéráramlásnak keletre haladónak kell lennie (pl. nyugati szélnek) ahhoz, hogy az eredő áramlás stacionárius lehessen. További feltétel, hogy az $\omega = 2\pi U/\lambda$ frekvencia, amelyet az U sebességű háttér-áramlásnak a λ hullámhosszú, (3.58) alakú domborzaton történő áthaladása definiál, egyezzen meg abszolútértékben a $k_x = 2\pi/\lambda$ hullámhosszú Rossby-hullám (13.59) frekvenciájával:

$$Uk_x = \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_z^2 f_0^2/N^2}. \tag{13.61}$$

A hegységrendszerhez rögzített koordináta-rendszerben a hullám frekvenciája eltűnik. Látszik, hogy a gerjesztett stacionárius Rossby-hullám függőleges hullámszámkomponensének ki kell elégítenie a

$$k_z^2 \frac{f_0^2}{N^2} = \frac{\beta}{U} - k_x^2 = k_c^2 - k_x^2 \tag{13.62}$$

egyenletet, ahol k_c a (3.56)-tal definiált kritikus hullámszám. Ez az összefüggés adja meg, hogy a (13.58)–(13.60) egyenletekben fellépő k_z függőleges hullámszám hogyan függ k_x-től, ha a hullám áll a domborzathoz képest.

Felfelé terjedő hullám csak valós k_z-hez tartozhat, vagyis csak $k_x < k_c$, azaz nagyon hosszú periodicitású hegységrendszer esetén valósulhat meg. Ez az északi féltekén adott k_x-re csak

$$\boxed{0 < U \le U_c = \frac{\beta}{k_x^2} = \beta \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2},} \tag{13.63}$$

azaz elegendően *lassú* háttéráramlásokban lehetséges. Ugyanez az eredmény azt jelenti, hogy a domborzat hullámhosszának adott U mellett elegendően nagynak kell lennie, ki kell elégítenie a

$$\lambda \ge \lambda_c \equiv 2\pi\sqrt{\frac{U}{\beta}} = \frac{2\pi}{k_c} \tag{13.64}$$

feltételt. (13.62) szerint k_z nagyságrendje $k_x N/|f_0|$, az $N/|f_0| = Fn$ arány nagy értéke miatt a felfelé energiát szállító Rossby-hullám tipikus függőleges hullámhossza sokkal rövidebb a vízszintesnél, néhányszor 10 km.

A stacionárius Rossby-hullám csoportsebesség-vektora (13.60) és (13.62) alapján a közeghez rögzített koordináta-rendszerben

$$c_x^* = \frac{U^2}{\beta}\left(2k_x^2 - \frac{\beta}{U}\right), \qquad c_z^* = 2\frac{U^2}{\beta} k_x k_z \frac{f_0^2}{N^2}. \tag{13.65}$$

A hegységrendszerhez rögzített rendszerben c_x^*-hoz hozzáadódik a háttéráramlás U sebessége, és $U + c_x^* = 2U^2 k_x^2/\beta$ mindig pozitív. Ebben a rendszerben a csoportsebesség iránytangense

$$\frac{c_z^*}{U + c_x^*} = \frac{k_z}{k_x}\frac{f_0^2}{N^2} = \frac{k_z}{k_x}\frac{1}{Fn^2}. \tag{13.66}$$

A csoportsebesség keletre és felfelé mutat, jóval laposabb szögben, mint a hullámszámvektor. Az áramlás hasonló a hegy mögötti hullámokra jellemző 5.5b ábrán látotthoz, csak a hegyekhez rögzített rendszerben a csoportsebesség nem $\mathbf{k}$ irányú.

A felfelé energiát szállító hullám amplitúdóját a domborzaton érvényes (13.45) peremfeltétel határozza meg. A kvázi-geosztrofikus közelítés értelmében a (3.58) domborzat A amplitúdója kicsi, ezért az $(\mathbf{u}\,\mathrm{grad})d$ alakban csak az $u \approx U$ komponens ad járulékot, tehát a peremfeltétel jobb oldalán

$$U\frac{d}{dx}d(x) = -UA\,k_x \sin(k_x x) \tag{13.67}$$

jelenik meg. A feláramlási sebességet a háttéráramlástól való eltérést megadó ψ' áramlási függvénnyel[2] felírva és a másodrendűen kicsi tagokat elhagyva (13.44)-ből

$$w = -\frac{f_0}{N^2}U\frac{\partial^2\psi'}{\partial x \partial z}. \tag{13.68}$$

Ehhez a $k_x < k_c$ tartományban (13.58) stacionárius ($\omega_0 = 0$) esetére vonatkozó valós

$$\psi'(x,z) = \psi_0 \sin(k_x x + k_z z) \tag{13.69}$$

alakját illesztjük. Ezzel a (13.45) peremfeltétel

$$w = -\frac{f_0}{N^2}U\frac{\partial^2\psi'}{\partial x \partial z} = \frac{f_0}{N^2}Uk_x k_z \psi_0 \sin(k_x x + k_z z)|_{z=0} = -UA\,k_x \sin(k_x x). \tag{13.70}$$

Ebből

$$\psi_0 = -\frac{A\,N^2}{f_0 k_z} = -\frac{A\,N}{\sqrt{k_c^2 - k_x^2}}, \qquad k_x < k_c, \tag{13.71}$$

ahol használtuk a (13.62) kapcsolatot. A hullám amplitúdója arányos a domborzatéval. A hullámzás egyre erősebb, ahogy k_x alulról tart k_c-hez, *rezonancia* következik be, ugyanannál a k_c hullámszámnál, mint homogén közegben (3.10. fejezet).

Az áramlási függvény a fenti ψ_0-lal

$$\psi'(x,z) = \psi_0 \sin(k_x x + k_z z), \tag{13.72}$$

amiből a térmennyiségek a hegységrendszerhez kötött stacionárius hullámban:

$$u = U, \qquad v = k_x \psi_0 \cos(k_x x + k_z z), \qquad p' = \varrho_0 f_0 \psi_0 \sin(k_x x + k_z z), \tag{13.73}$$

$$\varrho' = -\frac{\varrho_0 f_0 k_z}{g}\psi_0 \cos(k_x x + k_z z), \qquad w = \frac{f_0 U k_x k_z}{N^2}\psi_0 \sin(k_x x + k_z z). \tag{13.74}$$

A hullám kétváltozós jellege jelentősen megváltoztatja a térmennyiségek viszonyát, a v sebesség most például azonos fázisban van a sűrűségeltéréssel.

A k_c-nél nagyobb hullámszámok vagy negatív U esetén (amikor k_c^2 formálisan negatív) (13.62) imaginárius k_z-t ad: $k_z = \pm i/\delta$, ahol

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{N^2}{f_0^2}(k_x^2 - k_c^2). \tag{13.75}$$

Mivel csak felfelé lecsengő megoldás jöhet szóba, az $\exp(-z/\delta)$ faktort tartjuk meg, és a meg-

[2] A teljes ψ áramlási függvény $\psi(x,y,z) = -Uy + \psi'(x,z)$.

oldást a

$$\psi'(x,z) = \psi_0 e^{-z/\delta}\cos(k_x x) \tag{13.76}$$

alakban keressük. A peremfeltétel most azt adja, hogy

$$\psi_0 = \frac{A\,N^2\delta}{f_0} = \frac{A\,N}{\sqrt{k_x^2 - k_c^2}}, \qquad k_x > k_c, \tag{13.77}$$

s az áramlási függvény

$$\psi'(x,z) = \frac{A\,N}{\sqrt{k_x^2 - k_x^2}} e^{-z/\delta}\cos(k_x x). \tag{13.78}$$

Ebben a tartományban haladó hullám nem létezik, lecsengő hullámzás alakul ki, amely a δ távolság néhányszorosa után teljesen elhal. A k_c kritikus hullámszám környékén ez a távolság igen nagy.

A jelenség annyiban hasonló a homogén közegekben hegységrendszer által keltett Rossby-hullámokhoz (3.10. fejezet, (3.63) összefüggés), hogy rezonanciával társul. Annyiban különbözik, hogy hullám a k_c hullámszámnak csak egyik (a hosszú hullámú) oldalán alakul ki. A másik oldalon ($\lambda < \lambda_c$) a viselkedés hasonló viszont a hegy mögött felfelé lecsengő erősségű hullámzáshoz, amit az 5.5a. ábra mutat. A Rossby-hullámok esetén alapvető *aszimmetria*, hogy csak nyugatról érkező áramlások gerjeszthetnek felfelé energiát szállító hullámokat.

Az energiaszállítási folyamatnak fontos következményei vannak a felső légkörben. A hegységrendszerek által keltett Rossby-hullámok a troposzféra felső határát is mozgásba hozzák, amely a fölötte elhelyezkedő sztratoszféra szempontjából tekinthető gerjesztésnek. Ahhoz, hogy az energia tovább is terjedhessen Rossby-hullám formájában felfelé, a sztratoszférán belül is nyugati szélre van szükség. Ha ez jelen van, akkor a sztratoszférában is fennmaradhat Rossby-hullám. Ennek tipikus példája az ún. *sarki örvény* (polar vortex), amely a sarok fölötti tartományt a közepes szélességeken 20–30 km magasságban körülfogó gyors áramlással járó jet-szerű nemlineáris Rossby-hullám. A sarki örvény mindig a téli sarok fölött jön csak létre, mert a sztratoszféra a nyári sarok fölött a legmelegebb, így a termikus áramlás csak a téli sztratoszférában vezet nyugati szélre. Ennek megfelelően a sarki örvény a kora nyári időszakban megszűnik, és csak a tél kezdetén jelenik meg újra az adott féltekén. Az ózonlyuk, a magaslégköri ózontartalom jelentős csökkenése a tél folyamán a sarki örvényben alakul ki. Az ózonhiányos levegő csak az örvény megszűnése után keveredhet el a teljes légkörben, mert a Rossby-hullámból adódó jet nehézzé teszi az anyagkicserélődést az örvény külseje és belseje között, amíg az örvény létezik.

13.6. Baroklin instabilitás folytonos rétegzettségű közegben

Az alapáramlás az x irányú (6.49)-cel megadott $u_g(z)$ termikus áramlás, $\overline{u}(z) = u_g(z)$, amelynek sűrűség- és sebességeloszlását a 6.11. ábra mutatja. A ferdén dőlő sűrűségfelületek mellett létezik természetesen függőleges rétegződés is, amelyet a Brunt–Väisälä-frekvencia jellemez. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy N mindenütt ugyanaz. Célszerű olyan koordinátarendszerben dolgoznunk, amely a középső folyadékszint $U/2$ sebességével mozog. A rendszer szimmetriáját úgy vehetjük legjobban figyelembe, ha kivételesen a $z = 0$ értéket is ehhez a szinthez rögzítjük, azaz az aljzat a $z = -H/2$, a folyadékréteg teteje pedig a $z = H/2$ szinthez tartozik.

A termikus áramláshoz a ψ' áramlási függvénnyel leírt kvázi-geosztrofikus perturbációt adunk. A teljes áramlási függvény tehát $\psi = -\overline{u}(z)y + \psi'$, ahol $\overline{u}(z) = Uz/H$ a termikus áramlás sebessége. A (6.49) összefüggés formálisan érvényes, hiszen a sebességgradiens állandó, és

a sebesség most is a $z = 0$ szinten tűnik el (csak ez a középszint). Mivel láttuk, hogy az instabilitás legalapvetőbb vonásai a görbületi hatás nélkül is megérthetők, a folytonos leírásban az egyszerűség kedvéért az f-sík-közelítést használjuk és az északi féltekére szorítkozunk.

A perturbáló hullámfüggvényben a termikus áramlás körül linearizált (13.41) kvázigeosztrofikus egyenlet ekkor

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}(z)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\Delta\psi' + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}\right] = 0. \tag{13.79}$$

A merevlap-közelítést választva a peremfeltétel az, hogy a függőleges sebesség eltűnik mindkét határon, azaz

$$w = 0, \qquad \text{ha} \qquad z = \pm H/2. \tag{13.80}$$

A függőleges sebesség (13.44) egyenletét a $\psi = -\overline{u}(z)y + \psi'$, $\partial\psi/\partial z = -U/Hy + \partial\psi'/\partial z$ kifejezésre alkalmazva és a perturbáló ψ' áramlási függvényben csak a vezető rendű tagokat megtartva a linearizált változat

$$w = -\frac{f_0}{N^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}(z)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial z} - \frac{U}{H}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right]. \tag{13.81}$$

A termikus áramlás körüli síkhullámmegoldást

$$\psi' = \psi_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega_0 t)} \tag{13.82}$$

alakban keresve pozitív k_z-vel, a (13.79) egyenletből

$$\left(\omega_0 - k_x\overline{u}(z)\right)\left(-k_x^2 - \frac{f_0^2}{N^2}k_z^2\right) = 0. \tag{13.83}$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha a második zárójel eltűnik, amelyből k_z imaginárius,

$$k_z = \pm i\delta, \qquad \delta = k_x\frac{N}{f_0}. \tag{13.84}$$

Az áramlási függvény magasságfüggésére tehát valós exponenciális megoldásokat kapunk a δ paraméterrel. A két független exponenciális megoldás kombinációját érdemes hiperbolikus függvényekkel megadni:

$$\psi' = \big(A\,\mathrm{sh}(\delta z) + B\,\mathrm{ch}(\delta z)\big)e^{i(k_x x - \omega_0 t)}. \tag{13.85}$$

Az A, B amplitúdókat és a diszperziós relációt a $w = 0$ peremfeltételek határozzák meg

(13.81) alapján. Az aljzaton ($z = -H/2$)

$$-i\left(\omega_0 + \frac{Uk_x}{2}\right)\delta\left(A\ \mathrm{ch}\left(\frac{\delta H}{2}\right) - B\,\mathrm{sh}\left(\frac{\delta H}{2}\right)\right) - i\frac{Uk_x}{H}\left(-A\ \mathrm{sh}\left(\frac{\delta H}{2}\right) + B\,\mathrm{ch}\left(\frac{\delta H}{2}\right)\right) = 0. \tag{13.86}$$

A felső szinten

$$-i\left(\omega_0 - \frac{Uk_x}{2}\right)\delta\left(A\ \mathrm{ch}\left(\frac{\delta H}{2}\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\frac{\delta H}{2}\right)\right) - i\frac{Uk_x}{H}\left(A\ \mathrm{sh}\left(\frac{\delta H}{2}\right) + B\,\mathrm{ch}\left(\frac{\delta H}{2}\right)\right) = 0. \tag{13.87}$$

A két egyenlet összeadva, illetve kivonva:

$$\omega_0 A = \frac{Uk_x}{2}\left[\mathrm{th}\left(\frac{\delta H}{2}\right) - \frac{2}{\delta H}\right]B, \tag{13.88}$$

$$\omega_0 B = \frac{Uk_x}{2}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\delta H}{2}\right) - \frac{2}{\delta H}\right]A. \tag{13.89}$$

Összeszorzás után kapjuk a diszperziós relációt

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \left(\frac{Uk_x}{2}\right)^2\left[\mathrm{th}\left(\frac{\delta H}{2}\right) - \frac{2}{\delta H}\right]\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\delta H}{2}\right) - \frac{2}{\delta H}\right] \\ &= \left(\frac{Uk_x}{\delta H}\right)^2\left[\frac{\delta H}{2} - \mathrm{cth}\left(\frac{\delta H}{2}\right)\right]\left[\frac{\delta H}{2} - \mathrm{th}\left(\frac{\delta H}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{13.90}$$

Használva, hogy a δH dimenziótlan paraméter kifejezhető a (6.23) belső Rossby-sugár és a k_x hullámszám szorzataként:

$$\delta H \equiv k_x R' \equiv \frac{k_x N H}{f_0}, \tag{13.91}$$

a diszperziós reláció:

$$\omega_0 = \pm\frac{U}{R'}\sqrt{\left[\frac{k_x R'}{2} - \mathrm{cth}\left(\frac{k_x R'}{2}\right)\right]\left[\frac{k_x R'}{2} - \mathrm{th}\left(\frac{k_x R'}{2}\right)\right]}. \tag{13.92}$$

A frekvencia az U termikus áramlási sebesség és a belső Rossby-sugár hányadosával arányos, és csak a $k_x R'/2$ kombinációtól függ. Mivel a th függvény értéke mindig kisebb, mint az argumentuma (ha az pozitív), a második zárójel mindig pozitív. Az első azonban elegendően kis hullámszámokra negatív lesz.

A frekvencia akkor imaginárius, ha $k_x R'/2 < \mathrm{cth}(k_x R'/2)$, azaz ha $\delta H = k_x R' < 2{,}40$. Az instabilitás feltétele tehát $k_x < k_c$, ahol

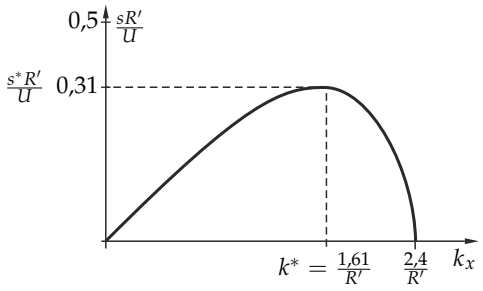
$$k_c = 2{,}4 R'^{-1} \tag{13.93}$$

a kritikus hullámszám. A rendszer minden olyan perturbációra instabil, amelynek hullámhossza

$$\lambda > \lambda_c = 2{,}62 R' = 2{,}62\frac{NH}{f_0}, \tag{13.94}$$

vagyis a belső Rossby-sugár 2,62-szeresénél nagyobb. Az időben exponenciálisan növekvő megoldás (13.92) felső előjeléhez tartozik, ezért az instabilitási ráta (13.6. ábra)

$$s(k_x) = \frac{U}{R'}\sqrt{\left(\mathrm{cth}\left(\frac{k_x R'}{2}\right) - \frac{k_x R'}{2}\right)\left(\frac{k_x R'}{2} - \mathrm{th}\left(\frac{k_x R'}{2}\right)\right)}. \tag{13.95}$$



13.6. ábra. Az instabilitási ráta folytonos rétegzettségű közegben az f-sík-közelítésben. Az instabilitási tartomány és a leggyorsabban növekvő hullám k^* hullámszáma nem függ a termikus áramlás U sebességétől, a ráta azonban arányos vele.

Ez a függvény a

$$k^*R' = \delta^*H = 1,61 \tag{13.96}$$

értéknél a legnagyobb,[3] és a hozzá tartozó $\lambda^* = 2\pi/k^*$ hullámhossz

$$\lambda^* = 3,91R'. \tag{13.97}$$

A leggyorsabban növekvő pertubáció hullámhossza tehát a belső Rossby-sugár mintegy négyszerese, azaz a légkörben kb. 4000 km, az óceánban 200 km. Az instabilitási exponens maximális, k^*-hoz tartozó értéke

$$s^* = 0,31\frac{U}{R'} = 0,31Fr'f_0 = 0,31\frac{f_0}{\sqrt{Ri}}, \tag{13.98}$$

ahol használtuk a belső Froude-szám (5.2) alakját, illetve a Richardson-szám (7.3) kifejezését a $d\overline{u}(z)/dz = U/H$ helyettesítéssel. Az utóbbi eredmény az

$$s^* = 0,31\frac{f_0}{N}\frac{d\overline{u}}{dz} \tag{13.99}$$

alakra is hozható, amely alapján az instabilitás maximális erőssége a frekvenciaarányon kívül a termikus szél függőleges nyírásával arányos. Az instabilitási ráta legnagyobb (13.98) értékéhez tartozó e-szerződési idő a légkörben 4 nap, az óceánban 100 nap nagyságrendű.

Az, hogy az instabil hullámok diszperziós relációjában a frekvencia tisztán képzetes (s valós), azt jelenti, ezek a hullámok koordináta-rendszerünkben állnak. A Földhöz képest nyugvó rendszerben viszont a termikus áramlás középszinten vett $U/2$ sebességével haladnak keletre.

A jellegzetes hullámszámok és instabilitási ráták azonos nagyságrendűek a kétrétegű közelítésben kapottakkal ((6.80)–(6.83)), és az inflációs ráta grafikonja is olyan jellegű, mint a 6.17. ábra, de az instabilitási tartomány $1/R'$ egységekben mérve most szélesebb. A folytonos rétegzettség szempontjából azonban lehet másképpen is értelmezni a kétrétegű leírásban kapott eredményeket. A $\Delta U = 2U$ sebesség a két réteg középvonalában érvényes, ha azonban az egész H tartományban $2U/H$ sebességnyírást tételezünk fel, akkor az aljzat és felszín közötti sebességkülönbség $4U$. Az eredményt érdemes a folytonos kép szerint $U_f = 4U$ sebességgel megadni. Hasonlóan az aljzat és a felszín közötti sűrűségkülönbség a folytonos interpretációban $2\Delta\varrho$, és az ennek a megfelelő belső Rossby-sugár $R'_f = \sqrt{2}\sqrt{g'H}/f_0$. Ez $\sqrt{8}$-szorosa a (6.71) kétrétegű belső Rossby-sugárnak. A 6.11.2. fejezet eredményei az új jelölésben $k_c = \sqrt{8}/R'_f = 2,83{R'_f}^{-1}$,

[3] Mely az s^2 deriváltjából kapott $\operatorname{th} x^* + \operatorname{cth} x^* = x^*\left(\operatorname{th}^2 x^* + \operatorname{cth}^2 x^*\right)$ egyenlet megoldásából adódik az $x^* \equiv k^*R'/2$ mennyiségre.

$k^* = 1{,}80{R'_f}^{-1}$ és $s^* = 0{,}29U_f/R'_f$, amelyek közel esnek a fent kapott eredményekhez. A lényeges új vonás folytonos rétegzettség esetén, hogy a teljes *térbeli* viselkedést is fel lehet deríteni.

A stabilitásvizsgálatból az instabil baroklin hullámok áramlási függvénye is meghatározható (az eredmény természetesen csak abban a kezdeti időszakban érvényes, amíg az amplitúdó kicsi, később nemlineáris hatások módosítják az eredményt). A (13.88), (13.89) egyenletekből

$$\frac{B}{A} = \pm i\sqrt{\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\delta H}{2}\right) - \frac{2}{\delta H}}{\frac{2}{\delta H} - \operatorname{th}\left(\frac{\delta H}{2}\right)}} = \pm i\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{\delta H}{2}\right)}\sqrt{\frac{\frac{\delta H}{2} - \operatorname{th}\left(\frac{\delta H}{2}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\delta H}{2}\right) - \frac{\delta H}{2}}}. \tag{13.100}$$

Az (13.88) vagy (13.89) egyenletbe helyettesítve az alsó előjel bizonyul helyesnek. A leggyorsabban növekvő amplitúdójú, (13.96) hullámszámú hullámra az első gyökös kifejezés éppen $\operatorname{th}(k^*R'/2)$-nek adódik,[4] azaz

$$B = -iA\ \operatorname{th}\left(\frac{\delta^* H}{2}\right) = -iA\ \cdot 0{,}67. \tag{13.101}$$

Ezzel a leginstabilabb mozgást leíró áramlási függvény:

$$\psi'(x,z,t) = A\, e^{s^* t}\left(\operatorname{sh}(\delta^* z) - i\operatorname{th}\left(\frac{\delta^* H}{2}\right)\operatorname{ch}(\delta^* z)\right) e^{ik^* x}. \tag{13.102}$$

A továbbiakhoz érdemes a (13.102) áramlási függvény valós részét venni (amit továbbra is ψ-vel jelölünk, és benne A-t valósnak tekintjük):

$$\psi' = A\, e^{s^* t}\left[\cos(k^* x)\operatorname{sh}(\delta^* z) + \sin(k^* x)\operatorname{th}(\delta^* H/2)\operatorname{ch}(\delta^* z)\right]. \tag{13.103}$$

Az y irányú sebesség

$$v = \frac{\partial \psi'}{\partial x} = A\, e^{s^* t} k^*\left[-\sin(k^* x)\operatorname{sh}(\delta^* z) + \cos(k^* x)\operatorname{th}(\delta^* H/2)\operatorname{ch}(\delta^* z)\right] \tag{13.104}$$

csak kivételes helyeken tűnik el, vagyis a nyugati szél instabillá válása növekvő sebességeltérésekkel jár az észak–déli irányban. Ugyanez igaz a w függőleges sebességre is, amelynek konkrét alakjához a (13.81)-ben szereplő vegyes deriváltak meghatározása is szükséges.

Ezek alapján több lényeges, csak az instabil baroklin hullámokra érvényes tulajdonságra tudunk következtetni.

Tipikus elmozdulás: A sebességeltérés vektorának irányát a w/v arány adja meg. A középszinten (azaz $z = 0$-ra) különösen áttekinthető az eredmény, hiszen itt $\overline{u}(z) = 0$, $\operatorname{sh}(\delta^* z) = 0$. Mindkét sebességkomponens x-függése $\cos k^* x$ típusúnak adódik,[5] arányuk ezért független az x koordinátától, és értéke

$$\frac{w}{v} = \frac{f_0 U}{N^2 H}\left(1 - \frac{s^* R'}{U}\operatorname{cth}\frac{\delta^* H}{2}\right). \tag{13.105}$$

Az első tényező éppen az állandó sűrűségű felületek γ meredeksége (6.54). Mivel a zárójel egynél kisebb, azt látjuk, hogy az erősödő sebességtér valóban a döntött felületek és a vízszintes sík által bezárt szögtartományba mutat, ami az instabilitás feltétele a 6.13. ábra szerint. A (13.98) és (13.101) eredmények alapján a (13.105) kifejezésben a zárójel értéke $(1 - 0{,}31 \cdot 1{,}5) = 0{,}54$. A leginstabilabb mozgásban a középszinti elmozdulások tehát körülbelül a γ szög felezője irányába mutatnak.

[4] Az előző lábjegyzetben szereplő összefüggésből érdemes x^*-ot kifejezni.

[5] A $z = 0$ szinten $w = A\exp(s^* t)\,(f_0/N^2)\,[(U/H)k^*\operatorname{th}(\delta^* H/2) - s^*\delta^*]\cos(k^* x)$.

Izobárok döntöttsége: Fontos újabb összefüggést kapunk, ha felhasználjuk, hogy a perturbáló áramlási függvény arányos a p' dinamikai nyomással (13.42). A felső ($z = H/2$) szinten (13.103)-ből

$$p'(z = H/2) \sim A\, e^{s^* t}\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(\delta^* H/2)\sin(k^* x + \pi/4), \tag{13.106}$$

az alsón pedig

$$p'(z = -H/2) \sim A\, e^{s^* t}\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(\delta^* H/2)\sin(k^* x - \pi/4). \tag{13.107}$$

A felső szinten a nyomás *negyed hullámhossznyi késésben* van a lentihez képest nyugat felé. Az izobárok tehát a termikus áramlás irányával *ellentétes* irányba dőlnek. Ez a magasságfüggés az instabil baroklin hullámok egyedi vonása. A ciklonok közepes (5 km) magassági szinten mért nyomásminimuma a tapasztalat szerint valóban általában néhány száz km-rel nyugatabbra fekszik a felszíni alacsony nyomású középponttól. Az azonos fázisokat összekötő egyenes iránytangense a vízszinteshez képest

$$\frac{H}{\lambda^*/4} = \frac{4H}{3{,}91R'} \approx \frac{H}{R'} = \frac{f_0}{N} = \frac{1}{Fn}, \tag{13.108}$$

ahol Fn a (6.1) frekvenciaarány.

Hőáram: A sűrűségeltérés arányos a hőmérséklet-eltéréssel, $\varrho' = -\varrho_0 \alpha T'$, így (13.43) alapján

$$T' = \frac{f_0}{\alpha g}\frac{\partial \psi'}{\partial z} = \frac{f_0 A\,\delta^*}{\alpha g} e^{s^* t}\left[\cos(k^* x)\,\mathrm{ch}(\delta^* z) + \sin(k^* x)\,\mathrm{th}(\delta^* H/2)\,\mathrm{sh}(\delta^* z)\right]. \tag{13.109}$$

A délről északra mutató hőáram vT'-vel arányos. A fenti egyenletet és (13.104)-et összeszorozva megjelennek $\sin(k^* x)\cos(k^* x)$ típusú tagok, de ezek x szerinti átlaga eltűnik. A $\sin^2(k^* x)$, $\cos^2(k^* x)$-szel arányos tagok átlaga 1/2, így az átlagos hőáram

$$\overline{vT'} = \frac{A^2 f_0 k^* \delta^*}{2\alpha g} e^{2s^* t}\,\mathrm{th}\left(\frac{\delta^* H}{2}\right)\left[\mathrm{ch}^2(\delta^* z) - \mathrm{sh}^2(\delta^* z)\right] = \frac{A^2 k^{*2} N}{2\alpha g} e^{2s^* t}\,\mathrm{th}\left(\frac{\delta^* H}{2}\right). \tag{13.110}$$

Az eredmény *független* a magasságtól, *pozitív*, és időben exponenciálisan növekvő. A hőáram tehát a sarok felé irányul, amely a pozitív hőmérséklet-eltérés északra történő transzportjából ($v > 0$, $T' > 0$) éppúgy adódik, mint a negatív anomália délre szállításából ($v < 0$, $T' < 0$). Ezt a viselkedést jól illusztrálja a 6.20. ábra alatti jelenségbemutatókísérletben a zöld és piros színű festékek áramlása.

Megjegyzés: Érdemes a Rossby-hullámok hőáramát is meghatározni. A vízszintes síkban terjedő Rossby-hullámban (13.56), (13.57) alapján az átlagos hőáram zérus ($v\varrho'$ arányos $\sin(k_x x)\cos(k_x x)$-szel, és ennek átlaga 0). Az ilyen Rossby-hullámok tehát *nem szállítanak hőt* észak–déli irányban. A felfelé terjedő Rossby-hullámban más a helyzet: (13.73), (13.74) szerint v és ϱ' fázisban vannak, és ezért $\overline{v\varrho'}$ nem nulla. A sűrűség helyett a T' hőmérséklet-eltérést használva $\overline{vT'} = k_x k_z f_0 \psi_0^2/(2\alpha g)$, ami keletre és felfelé terjedő ($k_x < k_c$, $k_z > 0$) hullámban pozitív, északra irányul. A ψ_0 amplitúdóra és a függőleges hullámszámra vonatkozó (13.71), illetve (13.62) összefüggések alapján $\overline{vT'} \sim 1/\sqrt{k_c^2 - k_x^2}$, tehát rezonancia közelében a hőáram is nagy. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az energia az x, z síkban terjed (a csoportsebesség irányába), a sűrűségeltéréseken alapuló hőtranszport azonban erre a síkra merőleges. A felfelé terjedő Rossby-hullámok hőárama nem erősödik időben, mégis jelentős hőátadást biztosít a sztratoszférában a sarkok irányába, ahogy arra az előző fejezet végén utaltunk.

13.7. Baroklin instabilitás a β-síkon

A görbület hatásának bemutatása a kétrétegű közelítésben a legegyszerűbb. Amikor a β paramétert nem hanyagoljuk el a (6.78) másodfokú egyenletben, a diszperziós relációra azt kapjuk, hogy

$$\omega_0 = -\beta \frac{2k_x^2 R'^2 + 1}{2k_x \left(k_x^2 R'^2 + 1\right)} \pm k_x \frac{\sqrt{\beta^2 R'^4/4 + U^2 k_x^4 R'^4 \left(k_x^4 R'^4 - 1\right)}}{k_x^2 R'^2 \left(k_x^2 R'^2 + 1\right)}. \tag{13.111}$$

Megjegyezzük, hogy termikus áramlás hiányában ($U = 0$-ra) visszakapjuk a Rossby-hullámok (6.66), (6.67) diszperziós relációit. Az $U \neq 0$ eset tehát úgy is tekinthető, mint a Rossby-hullámok vizsgálata termikus áramlás jelenlétében. A baroklin instabilitás ekkor a *Rossby-hullámok instabillá válása*.

Kis U sebességekre (13.111) valós, a hullám stabil. A gyökjel alatti kifejezés minimumát a

$$k_c = 2^{-1/4} R'^{-1} = 0{,}84 R'^{-1} \tag{13.112}$$

U-tól független kritikus hullámszámnál veszi fel, ahol értéke

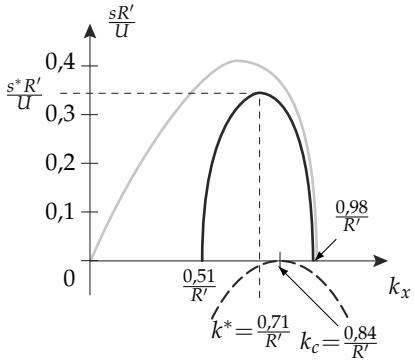
$$\left(R'^4 \beta^2 - U^2\right)/4. \tag{13.113}$$

Ez akkor lehet negatív, ha az U sebesség abszolútértéke nagyobb a $\beta R'^2$ kritikus értéknél:

$$U > U_c \equiv \beta R'^2. \tag{13.114}$$

A 12.4. fejezet mintájára definiált s^2 mennyiség most is az 5.17. ábrán látotthoz hasonlóan függ a lényeges paramétertől (Ra szerepét most az U sebesség veszi át), és csak $U > U_c$-re válik pozitívvá. Az instabilitás csak elegendően erős termikus szélben következik be.

A kritikus sebességre a $\beta = 10^{-11}$ 1/(ms) értékkel levegőben a kétrétegű közegre a 6.3. fejezetben kapott $R' = 500$ km becsléssel $U_c = 2{,}5$ m/s-ot kapunk. A (13.112)-ből adódó kritikus hullámhossz levegőben $\lambda_c = 3800$ km. Vízben az $R' = 30$ km-rel számolt U_c 1 cm/s körüli, a kritikus hullámhossz néhány száz km.



13.7. ábra. A baroklin instabilitás s instabilitási rátája kétrétegű közegben β-sík-közelítésben. A szaggatott vonal a kritikus sebességhez tartozó $is(k_x)$ függvényt mutatja, amely ekkor még valós, és a k_c hullámszámnál éri el a zérus értéket. Növekvő sebességekre egyre szélesebb az instabilitási tartomány, és egyre nagyobb a ráta értéke. A fekete görbe $U = 2U_c$-hez tartozik, az s^* maximális növekedési ráta numerikusan határozható meg. A szürke görbe az f-sík-közelítésben kapott instabilitási ráta (a 6.17 ábra fekete görbéje).

Ha a sebesség nagysága U_c-t meghaladja, akkor egyre nagyobb hullámszámtartomány válik instabillá. Az instabil intervallum $k_- < k_x < k_+$, amelynek határai $U > U_c$ esetén

$$k_\pm^4 = k_c^4 \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{U_c}{U} \right)^2} \right], \tag{13.115}$$

ahol használtuk (13.112)-t. Az instabilitási ráta $U > U_c$-re a (13.111) kifejezés második tagja pozitív előjellel véve. Az U_c/U és k_x/k_c arányokkal kifejezve

$$s(k_x) = \frac{U}{R'} \frac{\sqrt{1 - (U_c/U)^2 - \left((k_x/k_c)^4 - 1\right)^2}}{2^{3/4}(k_x/k_c)\left((k_x/k_c)^2/\sqrt{2} + 1\right)}, \tag{13.116}$$

a grafikonját a 13.7. ábra mutatja.

A megrajzolt görbe az $U = 2U_c$ esetet mutatja, amelyhez $k_- = 0{,}61k_c = 0{,}51/R'$, $k_+ = 1{,}17k_c = 0{,}98/R'$ tartozik. Az s^* maximális növekedési ráta numerikusan határozható meg: $k^* = 0{,}84k_c = 0{,}71/R'$ és $s^* = 0{,}34U/R'$. Érdemes észrevenni, hogy az inflációs ráta görbéje a 6.17. ábra görbéje (vékony szürke vonal) belsejébe esik, vagyis az instabilitás intervalluma rövidebb, s^* maximális erőssége gyengébb az f-síkon kialakulónál. Így van ez minden $U > U_c$-re. A kritikusnál sokkal nagyobb termikus sebességek: $U \gg U_c$ esetén a β-hatás elhanyagolhatóvá válik, az sR'/U görbe tart a 6.17. ábra görbéjéhez.

A β paraméter jelenlétének tehát stabilizáló hatása van, hiszen a lassú áramlások minden hullámszámmal stabilnak bizonyulnak, és az instabilak is kevésbe instabilak, mint β nélkül. Ennek oka az, hogy a felszabaduló energia most Rossby-hullámok keltésére is fordítódhat. Ugyanakkor azonban a kritikus U_c sebesség (2,5 m/s, 1 cm/s) a Földön zajló környezeti áramlásokban szokásos sebességeknél kisebb, ezért a baroklin instabilitás kialakulása a β-sík-közelítésben is gyakorlatilag elkerülhetetlen.

14. fejezet

Turbulencia (folytatás)

14.1. Lokális turbulencia: könnyű közegek turbulens áramlása

A turbulencia kifejlődéséhez nemcsak erős sebességnyírás, hanem jelentős felhajtóerő is vezethet. Tipikusan ez a helyzet az alulról erősen fűtött folyadékban. A környezeti áramlásokban tipikus adatokkal láttuk, hogy a *Ra* Rayleigh-szám igen nagy (10^{16} körüli), a rendszerek messze túl vannak az első konvekciós instabilitáson, amely még szabályos áramlásokra vezetne. Ilyenkor a konvekció szabálytalan, turbulens feláramlásokkal társul. Ezek jellegzetes formája a *termik* (angolul thermal) (5.22. ábra), amely kezdetben kis kiterjedésű, és a környezeténél könnyebb folyadékelem (pl. melegebb levegőcsomag). Miután hirtelen elválik a kiindulási szintről, a termik emelkedése olyan gyors, hogy mozgása során peremén nagy örvények keletkeznek. Ezek a környező sűrűbb közeg egy részét beáramoltatják a termik belsejébe, a nagy örvények belül kisebbeket hoznak létre, és így az egész termik jól kevertté válik. Ez az állandó *besodródás* (entrainment) arra vezet, hogy a termik egyre nagyobb és egyre sűrűbb lesz, vagyis feláramlási sebessége lassul. A mozgás alapvető energiaforrása a sűrűségkülönbségből adódó felhajtóerő.

A termikekkel rokon jelenség a vulkánból felszálló füst, illetve a gejzírekből vagy a kéményekből kiáramló meleg levegő mozgása. Összefoglaló néven ezeket *turbulens csóvának* (plume) nevezzük. Ezek a termikekhez hasonlóan mozgásuk kezdetén igen kis kiterjedésűek, forrásuk pontszerűnek tekinthető, de azokkal ellentétben itt a könnyű anyag utánpótlása állandóan biztosított. A besodródás itt is alapvető szerepet játszik, és ezért minden csóva felfelé szélesedik és ezzel párhuzamosan közege egyre sűrűbbé válik.

A termikek és a csóvák mozgásának megértésében meglepően hatékonyak az egyszerű dimenziós megfontolások, amelyeket a két esetre külön-külön mutatunk be.

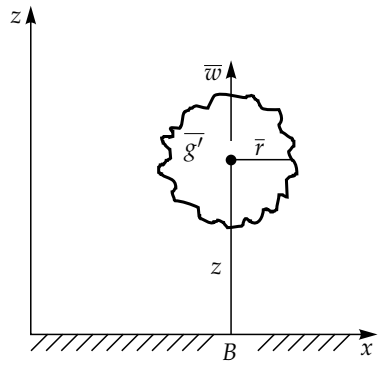
14.1.1. Termikek

A termik mozgásának alapvető paramétere a kezdeti állapotban érvényesülő felhajtóerő. Kezdetben a ϱ_0 környezeti sűrűségnél $\Delta\varrho_0$ sűrűséggel hígabb r_0 kiindulási sugarú folyadékgömbre ható felhajtóerő és ϱ_0 hányadosa:

$$B = g'_0 r_0^3, \tag{14.1}$$

ahol a g'_0 a kezdeti $g\Delta\varrho_0/\varrho_0$ redukált gyorsulás. A 0 indexet arra használjuk, hogy megkülönböztessük a kezdeti (a $z \approx 0$ szinten érvényes) értéket a mozgás során felvettől. A B mennyiségnek (melynek jele az angol buoyancy szóból ered) nem adunk 0 indexet, mert látni fogjuk, hogy ez a mennyiség állandó a mozgás során. Először feltesszük, hogy a környezet sűrűsége állandó, a külső közeg nem rétegzett.

Első közelítésben a termiket állandó sűrűségű gömbnek tekintjük, amelynek helyzetét középpontja z magasságával jellemezzük. Keressük, hogy a termik átlagos $\overline{r}$ sugara, $\overline{w}$ feláramlási sebessége, és közegének $\overline{g}'$ redukált gyorsulása (vagyis a pillanatnyi sűrűség) hogyan változik a mozgás során (14.1. ábra).



14.1. ábra. Az emelkedő termik legfontosabb átlagos paraméterei. Az emelkedési sebesség csökken, mert felszállás közben egyre több sűrű anyag kerül a termikbe turbulens besodródás révén.

Ezek a mennyiségek a z magasságon kívül csak az egyetlen releváns paramétertől, a B fajlagos felhajtóerőtől függhetnek. (A teljes felhajtóerő, $\varrho_0 B$ azért nem jelenhet meg bennük, mert a meghatározandó mennyiségek egyike sem hordoz tömegmértékegységet.) A dimenzióanalízis szellemében feltételezzük, hogy a keresett mennyiség a B és a z hatványait tartalmazza, tehát $B^a z^b$ típusú. Mivel B mértékegysége $\mathrm{m}^4/\mathrm{s}^2$, a szorzat mértékegysége $\mathrm{m}^{(4a+b)}\mathrm{s}^{-2a}$. Az $\overline{r}$ átlagos sugár méter egységű, amely csak úgy lehetséges, ha $a = 0$, $b = 1$, vagyis a pillanatnyi sugár arányos a termik középpontjának a magasságával:

$$\overline{r} \sim z. \tag{14.2}$$

Ez és a következő z-függő relációk $z > r_0$-ra érvényesek. Hasonlóan kapjuk, hogy a redukált gyorsulás

$$\overline{g}' \sim \frac{B}{z^3} \sim \frac{B}{\overline{r}^3}. \tag{14.3}$$

A fentiekből következik, hogy a $B = \overline{g}'\overline{r}^3$ fajlagos felhajtóerő állandó. A $\Delta\varrho$ sűrűségkülönbség is (14.3)-nak megfelelő ütemben csökken a magassággal. A w emelkedési sebesség m/s egységű, amelynek $a = 1/2$, $b = -1$ felel meg, azaz

$$\boxed{\overline{w} \sim \frac{B^{1/2}}{z}.} \tag{14.4}$$

Az eredmény azt fejezi ki, amit a besodródás jelensége alapján vártunk: a termik sugara emelkedése során nő, de közben sűrűsége is nő, és ezért egyre nehézkesebben emelkedik.

Vegyük észre, hogy a pillanatnyi magassággal számolt (7.38) globális Richardson-szám, amelyben a vízszintes sebességeltérés nagyságrendjét $\overline{w}$-gal becsüljük, azaz

$$Ri_0 = \frac{\overline{g}' z}{\overline{w}^2}, \tag{14.5}$$

független a magasságtól. Ez azt jelenti, hogy ha a Richardson-szám kezdetben a kritikus érték alatt volt, akkor az is marad, azaz a turbulencia feltétele az emelkedés során végig teljesül.

A fenti eredményekből az időfüggés is következik. Mivel a z magasságban levő folyadékelem w emelkedési sebessége egyben a z időderiváltja, $dz/dt \sim 1/z$, (14.4) alapján

$$z \sim \bar{r} \sim B^{1/4} t^{1/2}, \qquad \overline{w} \sim B^{1/4} t^{-1/2}. \tag{14.6}$$

Az emelkedési magasság az idő négyzetgyökével nő.

A termikek dinamikája a jóidő-felhők(gomolyfelhő, kumulusz) képződésének alapja. Eredményünk szerint tetszőlegesen magasra emelkedhetnének, de emögött az a feltevés áll, hogy a külső közeg sűrűsége állandó.

Rétegzett közegben a termik addig emelkedik, amíg $\Delta\varrho(z)$ belső sűrűségkülönbsége megegyezik a $\overline{\varrho}(z)$ rétegzési profilból adódó $\Delta\overline{\varrho}(z)$ sűrűségcsökkenéssel (a kiindulási ϱ_0 sűrűséghez képest). Utóbbi írható mint $d\overline{\varrho}/dzz$. Ennek nagyságát az állandónak feltételezett (5.6) Brunt–Väisälä-frekvenciával kifejezve, $\Delta\varrho(z)$-t pedig (14.3)-ból

$$\Delta\varrho(z) \sim \frac{\varrho_0 B}{g z^3}, \qquad \Delta\overline{\varrho}(z) = \frac{\varrho_0 N^2 z}{g}. \tag{14.7}$$

Az emelkedési magasság az a $z = h$ érték, ahol ez a két mennyiség megegyezik, azaz

$$\boxed{h \sim \frac{B^{1/4}}{N^{1/2}}.} \tag{14.8}$$

Nagyobb Brunt–Väisälä-frekvencia természetesen alacsonyabb emelkedést tesz csak lehetővé. Példaként tekintsünk egy $r_0 = 20$ m lineáris méretű, a környezeténél 10 fokkal melegebb légtömeget, amelyre $g_0' \approx 0{,}3$ m/s^2, és ezzel $B \approx 2 \cdot 10^3$ m^4/s^2. A planetáris határrétegen belüli emelkedésre gondolva, amelyben a Brunt–Väisälä-frekvencia igen kicsi, válasszuk N-et 10^{-4} 1/s nak, amely $h \approx 670$ m emelkedésre vezet.[1]

14.1.2. Turbulens csóvák

Az alulról történő állandó w_0 sebességű beáramlás miatt a releváns paraméter most az *időegységre* (és sűrűségegységre) eső felhajtóerő, vagyis a

$$F \equiv g_0' w_0 r_0^2 \tag{14.9}$$

felhajtóerő-fluxus, ahol $w_0 r_0^2$ a forrásból időegységenként felfelé kiáramló könnyű folyadék térfogatával arányos. A külső közeg sűrűségét először ismét térben állandónak gondoljuk.

A forrásból kiáramló folyadék folytonos csóvát alkot, amelynek $\bar{r}$ átlagos sugara a z magassággal változik. Az $\bar{r}$ sugarú korongon belül feltesszük, hogy a $\overline{w}$ átlagos feláramlási sebesség és a sűrűség is állandó. Az utóbbiból képezzük a $\overline{g}'$ lokális redukált gyorsulást (14.2. ábra).

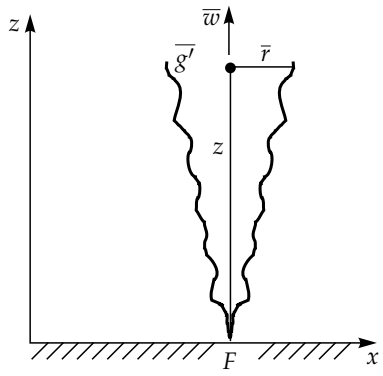
Ezek a mennyiségek a z magasságon kívül csak az F felhajtóerő-fluxus függvényei. Mivel F mértékegysége m^4/s^3, a dimenzióanalízis azt adja, hogy $z > r_0$-ra

$$\bar{r} \sim z, \qquad \overline{g}' \sim \frac{F^{2/3}}{z^{5/3}} \sim \frac{F^{2/3}}{\bar{r}^{5/3}}, \tag{14.10}$$

$$\boxed{\overline{w} \sim \frac{F^{1/3}}{z^{1/3}} \sim \frac{F^{1/3}}{\bar{r}^{1/3}}.} \tag{14.11}$$

Innét látszik, hogy az $F = \overline{g}'\overline{w}\overline{r}^2$ fluxus végig állandó. A besodródás miatt a csóvák vastagsága is nő a magassággal, sebességük és redukált gyorsulásuk csökken, de a termikekénél lassabban.

[1] Ebből a nagyon egyszerű képből hiányzik a vízpára kicsapódása, a felhőképződés mechanizmusa stb.



14.2. ábra. A kis méretű forrásból felszálló turbulens csóva legfontosabb paraméterei. A turbulens besodródás miatt a csóva felfelé vastagodik, a benne mozgó folyadékelemek lassulnak és sűrűsödnek.

A $Q = \overline{w}\,\overline{r}^2$ térfogati fluxus viszont a besodródás miatt $z^{5/3}$ szerint nő. Behelyettesítéssel látszik, hogy a (14.5) globális Richardson-szám a csóvában állandó.

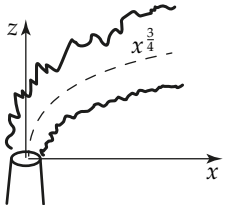
A (14.11) összefüggés az egyes változók időfüggésére most azt adja, hogy adott folyadékelem magassága és emelkedési sebessége a

$$z \sim \overline{r} \sim F^{1/4} t^{3/4}, \qquad \overline{w} \sim F^{1/4} t^{-1/4} \tag{14.12}$$

összefüggés szerint függ az időtől. Az emelkedés gyorsabb, mint a termikeké.

Abból, hogy a folyadékelemek emelkedési magassága az eltelt idő háromnegyedik hatványával arányos, megkapjuk a csóva alakját egyenletes U erősségű vízszintes áramlásban. Használva (14.12)-t, és hogy a folyadékelem x koordinátája Ut, majd az időt kiküszöbölve kapjuk, hogy (14.3. ábra)

$$z \sim \left(\frac{F}{U^3}\right)^{1/4} x^{3/4}. \tag{14.13}$$



14.3. ábra. A turbulens csóva tipikus alakja állandó erősségű szélben $x^{3/4}$ alakú fekvő parabola, amely gyakran megfigyelhető a kéményekből kiáramló füst formájában. Erősebb szélben a parabola laposabb.

Rétegzettség jelenlétében a külső közeg sűrűsége csökken a magassággal, és ezért a besodródás miatt sűrűsödő csóva egyszer csak eljut abba a magasságba, ahol sűrűsége megegyezik a környezetével, azaz ahol emelkedése *megáll*. Ez magyarázza azt, hogy a felszálló füst vagy a vulkáni hamu megáll, és adott (sokszor meglehetősen alacsony) szinten terjed szét a légkörben. Mindez meglepő annak fényében, hogy nemcsak hígabb közeg beáramlásáról van szó, hanem az kezdeti sebességgel és állandó utánpótlással érkezik. A jelenség a csóva turbulenssé való áramlásának következménye.

Állandó rétegzettség esetén a h maximális emelkedési magasság megbecsülhető abból, hogy ez a mennyiség az F fluxuson kívül az N Brunt–Väisälä-frekvenciától is függ, és a dimenzióanalízis szerint

$$\boxed{h \sim \frac{F^{1/4}}{N^{3/4}}.} \tag{14.14}$$

Figyelemre méltó, hogy az emelkedési magasság igen gyengén függ a fluxustól. Kétszeres magasság eléréséhez az F mennyiséget, vagyis a w_0 kezdeti feláramlási sebességet 16-szorosára kell növelni! Egy $r_0 = 1$ km sugarú kráterből $w_0 = 10$ m/s sebességgel feláramló, környezeténél 100 fokkal melegebb gáz ($g_0' \approx 3$ m/s^2) esetén $F \approx 3 \cdot 10^7$ m^4/s^3. A tipikus $N = 10^{-2}$ 1/s Brunt–Väisälä-frekvenciával számolva $h \approx 2{,}3$ km.

A jelenség jól megfigyelhető, ha alulról könnyű folyadékot áramoltatunk állandó rétegzettségű, álló folyadékot tartalmazó edénybe. A könnyű közeg felfelé indul, és turbulens csóva alakul ki, mint ebben a kísérletben. Először olyan esetet látunk víz beáramoltatásával, amelyben a csóva kezdettől erősen turbulens, és az emelkedés az edény félmagassága előtt megáll. A második esetben a könnyű közeg cseppeket alkot, a csóva turbulenciája csak feljebb alakul ki, és a feláramlás közel jut az edény felszínéhez.

14.2. A logaritmikus sebességprofil rétegzett közegben

A rétegzettség új karakterisztikus hossz megjelenésével jár a határrétegek fal menti rétegében. A ΔU sebességkülönbség hatására a turbulencia a (7.39) becslés szerint a $\varrho_0(\Delta U)^2/(g\Delta\varrho)$ vastagságú rétegre terjed ki. A határrétegben ΔU jellegzetes értéke a (7.26) súrlódási sebesség, de a függőleges irányú jellegzetes sebesség is u^* rendű: $w' \approx u^*$. Az $u^*\Delta\varrho$ mennyiség értelmezhető a turbulens sűrűségfluktuációk $\overline{w'\varrho'}$ függőleges áramaként. A határrétegben a keveredési vastagság (7.39) szellemében arányos a

$$\frac{\varrho_0 u^{*3}}{g\overline{w'\varrho'}} \tag{14.15}$$

mennyiséggel. E vastagság jellegzetes értéke az

$$\boxed{L_M \equiv \frac{\varrho_0 u^{*3}}{Kg\overline{w'\varrho'}}} \tag{14.16}$$

Monyin–Obukhov-hossz (melynek fontosságát A. S. Monyin (1921–2007) és A. M. Obukhov (1918–1989) orosz geofizikusok mutatták ki 1954-ben). Itt a K Kármán-féle konstans történeti okokból jelenik meg.

Amennyiben a sűrűségfluktuáció a hőmérséklet-változás következménye, $\overline{w'\varrho'} = -\alpha\varrho_0\overline{w'T'}$ (α a hőtágulási együttható), a Monyin–Obukhov-hossz úgy is írható, mint

$$L_M \equiv -\frac{u^{*3}}{Kg\alpha\overline{w'T'}} = -\frac{\varrho_0 c_p u^{*3}}{Kg\alpha Q} = -\frac{\tau_0^{3/2} c_p}{KgQ\alpha\varrho_0^{1/2}}, \tag{14.17}$$

ahol $Q = \varrho_0 c_p \overline{w'T'}$ a függőleges turbulens hőáram, c_p az állandó nyomás melletti fajhő (a kétféle fajhő megkülönböztetése csak gázban lényeges). Instabil, azaz felfelé növekvő sűrűségű vagy csökkenő hőmérsékletű közegben a hőáram pozitív. A Monyin–Obukhov-hossz tehát instabil rétegzettség mellett negatív, egyébként pozitív előjelű. L_M (éppúgy, mint Ri) negatív értékei tehát konvektív eredetű turbulenciára utalhatnak.

A planetáris határrétegben és az óceáni keveredési rétegben a $c_p/(\sqrt{\varrho_0}\alpha)$ paraméterkombináció közel azonos (7.1. táblázat), és a tapasztalat szerint τ_0 és Q is, a Monyin–Obukhov-hossz tehát mind az óceáni, mind a légköri határrétegben azonos nagyságrendű. Tipikus értékük néhányszor tíz méter.

A rétegzettség miatt a fal menti rétegben az $\overline{u}(z)$ turbulens sebességprofil valamelyest eltér a logaritmikustól. Az átlagos $\overline{u}$ sebesség deriváltja ekkor ugyanis (7.29) helyett a

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = \frac{u^*}{z}\phi\left(\frac{z}{L_M}\right) \tag{14.18}$$

alakban írható, ahol megjelent a probléma z/L_M új dimenziótlan paramétere (ϕ ennek megfelelően dimenziótlan függvény). Amennyiben $z/|L_M|$ kicsi, közel vagyunk az alsó felszínhez, a ϕ függvény sorba fejthető, és vezető rendben $\phi = (1 + a_1 z/L_M)/K$, ahol a_1 konstans. Integrálás után

$$\overline{u}(z) = \frac{u^*}{K}\left(\ln\frac{z}{z^*} + a_1\frac{z}{L_M}\right). \tag{14.19}$$

Ez a nem homogén fal menti rétegekre jellemző ún. *log-lineáris sebességprofil*. (A K állandó megjelenése biztosítja, hogy eltűnő a_1-re visszakapjuk a logaritmikus profilt.) A rétegzettségből adódó korrekció ellenkező előjelű stabil és instabil rétegzettség esetén. A tapasztalat szerint (14.19) jó közelítéssel teljesül, és a_1 pozitív. Ez azt jelenti, hogy instabil rétegzettség $L_M < 0$ esetén a sebesség lassabban változik a logaritmikusnál, mert a függőleges keveredés erősebb, mint a semleges ($a_1 = 0$) esetben. Ez a tendencia jól megfigyelhető a planetáris határrétegben. A (14.19) profil mérése alapján tehát a légkör helyi stabilitására is lehet következtetni.

14.3. Keveredési rétegek vastagságának változása

14.3.1. Nyírt turbulens határréteg

A (14.16) Monyin–Obukhov-hossz segítségével meghatározhatjuk, hogyan változik a nyírt határréteg időben. Először az óceáni *keveredési réteget* tekintjük, és feltesszük, hogy a forgatás szerepe ebben a folyamatban elhanyagolható a nyírási hatás mellett. A folyadék kezdetben stabilan rétegzett, és az N Brunt–Väisälä-frekvencia jellemzi, a ϱ_0 referenciasűrűségtől való eltérés nagysága (14.7) jobb oldali egyenlete szerint függ z-től. Kezdetben a lineáris függés a $z = 0$ felszínig érvényes, de az idő múlásával a szélnyírás miatt egyre nagyobb h vastagságú réteg válik jól kevertté, azaz közel homogén sűrűségűvé (14.4. ábra).

A (14.16) Monyin–Obukhov-hosszban w' becsülhető a réteg $dh/dt \equiv \dot{h}$ növekedési sebességével, a h mélységhez tartozó ϱ' sűrűségfluktuáció pedig mint $\varrho' = \varrho_0 N^2 h/g$. Ezzel (14.16) szerint

$$L_M \approx \frac{\varrho_0 u^{*3}}{\varrho_0 N^2 h\dot{h}}. \tag{14.20}$$

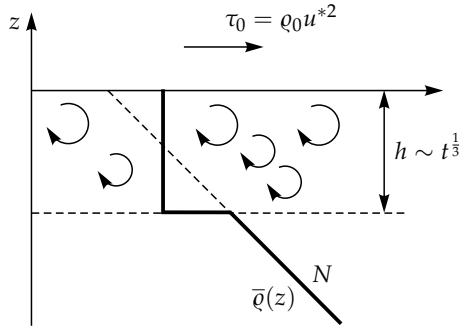
Használva, hogy az L_M hossz a turbulensen kevert réteg tipikus vastagsága,

$$h \sim \frac{u^{*3}}{N^2 h\dot{h}}, \tag{14.21}$$

melyből $\dot{h} \sim h^{-2}$. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása az idő köbgyökével arányos, azaz

$$\boxed{h \sim \frac{u^*}{N^{2/3}}t^{1/3}.} \tag{14.22}$$

A keveredési réteg vastagsága az idő egyharmadik hatványával nő, annál gyorsabban, minél



14.4. ábra. Az óceáni keveredési réteg h vastagsága a szélnyírás hatására nő, mert a turbulens örvények által okozott besodródás révén egyre mélyebb szintekig homogenizálódik a közeg. A szaggatott vonal arra utal, hogy kezdetben az egész folyadék egyenletesen rétegzett. Később az N Brunt–Väisälä-frekvencia csak a határrétegen kívüli tartományt jellemzi.

nagyobb a súrlódási sebesség, és minél kisebb a Brunt–Väisälä-frekvencia. A vastagodás addig marad ilyen ütemű, amíg a szél erőssége állandó.

Az Egyenlítőtől távol jelen van az Ekman-réteg is. Ennek (7.27) vastagságával kifejezve

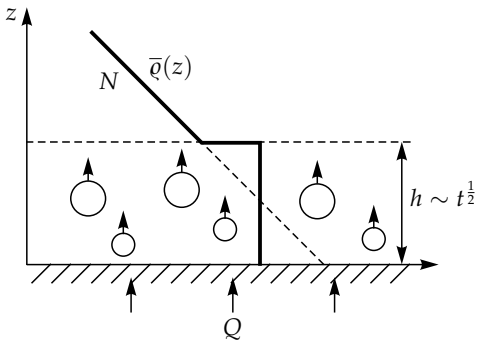
$$\frac{h}{D} \sim \frac{|f_0|}{N}(Nt)^{1/3}. \tag{14.23}$$

Mivel a (6.1) $N/|f_0|$ frekvenciaarány nagy, a jobb oldal még az 1 napos időskálán is kicsi, a keveredési réteg általában keskenyebb az Ekman-rétegnél.

A légköri határrétegben az L_M (itt h) tipikus vastagságú fal menti rétegen kívül általában a turbulens konvekciónak van jelentős szerepe.

14.3.2. Fűtött turbulens határréteg

Mivel a Rayleigh-szám nagy, ez az a tartomány, amelyet a termikek jellemeznek (5.22, 14.1. ábra). A légköri keveredési réteg a *planetáris határréteg*, amelynek teljes h vastagsága a konvekció miatt más módon változik, mint az óceáni keveredési rétegé (14.5. ábra). A folyadék kezdetben most is stabilan rétegzett, és feltesszük, hogy az N Brunt–Väisälä-frekvencia állandó.



14.5. ábra. A földfelszín gyors nappali felmelegedése következtében a planetáris határréteg alulról fűtött közegnek tekinthető, amelyben a konvekció dominál. A felszálló termikek hatására egyre magasabb szintekig homogenizálódik az eredetileg közel egyenletesen rétegzett közeg. A planetáris határréteg h vastagsága ezért nő időben.

A vastagság időfüggését abból becsülhetjük meg, hogy a közel állandó Q hőárammal fűtött egységnyi alapterületű közeg t idő alatt Qt hőt vesz fel, amely kifejezhető az ennek követ-

keztében kialakuló $\Delta T(t)$ hőmérséklet-változással is: $Qt \sim \varrho_0 c_p h(t)\Delta T(t)$. A ΔT hőmérséklet-különbség $\Delta\varrho = \alpha\varrho_0|\Delta T|$ sűrűségkülönbségnek felel meg. Mivel az N Brunt–Väisälä-frekvencia adott, (5.7) alapján a $h(t)$ vastagságú rétegben az a $\Delta T(t)$ hőmérséklet-eltérés tipikus, amelyre $N^2 \sim g\alpha\Delta T(t)/h(t)$, vagyis $\Delta T(t) \approx N^2 h(t)/(\alpha g)$. Ebből látjuk, hogy a $\Gamma = \Delta T/h$ hőmérséklet-gradiens is állandó. A $Q' = Q/(\varrho_0 c_p)$ redukált hőáramot használva ezzel

$$Q't \sim \frac{h^2(t)N^2}{\alpha g} = h^2(t)\Gamma, \tag{14.24}$$

amiből

$$\boxed{h \sim \left(\frac{\alpha g Q'}{N^2}\right)^{1/2} \qquad t^{1/2} = \left(\frac{Q'}{\Gamma}\right)^{1/2}, \qquad t^{1/2} = \left(\frac{\overline{w'T'}}{\Gamma}\right)^{1/2} t^{1/2}.} \tag{14.25}$$

A harmadik egyenlőségben azt használtuk fel, hogy a turbulens hőáram általános alakja $Q = \varrho_0 c_p \overline{w'T'}$.

Az időfüggés ugyanolyan típusú, mint a homogén közegben emelkedő izolált termikeké (14.6). A változási sebesség egyenesen arányos a turbulens hőáram négyzetgyökével, és fordítottan a Brunt–Väisälä-frekvenciával vagy a hőmérséklet-gradiens gyökével.

A $\Delta T = \Gamma h$ relációból

$$\Delta T = (\Gamma Q')^{1/2} t^{1/2} = \left(\Gamma\overline{w'T'}\right)^{1/2} t^{1/2}. \tag{14.26}$$

A planetáris határréteg tehát melegszik, az idő négyzetgyökével arányosan.

Egyszerű számpéldaként tekintsünk egy $Q = 300\ \mathrm{W/m^2}$ nagyságú hőáramot, kilométerenként felfelé 10 foknyit hűlő közegben. Mivel levegőre $\varrho_0 c_p = 1{,}2 \cdot 10^3$ SI egység (7.1. táblázat), $Q' = 0{,}25\ \mathrm{K\,m/s}$, az ismert $\Gamma = 10^{-2}\ \mathrm{K/m}$-mel $Q'/\Gamma = 25\ \mathrm{m^2/s}$ adódik. Így $h = 5\ \mathrm{m\,s^{-1/2}}\, t^{1/2}$. Tíz óra elteltével $h \approx 950$ m, amihez $\Delta T \approx 9{,}5$ fok tartozik.

A h-ra kapott számérték mutatja, hogy a planetáris határréteg magassága legnagyobb kiterjedése esetén elérheti az Ekman-rétegét. A két réteget azért érdemes első közelítésben külön tárgyalni, mert a rétegek mögötti fizikai mechanizmus eltérő.

Laboratóriumban úgy vizsgálhatunk konvektív turbulens határréteget, hogy nem forgó edényben felfelé közel egyenletesen csökkenő sűrűségű közeget hozunk létre, pl. egyre melegebb víz rárétegzésével, miközben alulról egyenletesen fűtjük, jelentős hőáramot biztosítva. Eleinte csak egy nagyon keskeny rétegben alakul ki feláramlás, de a turbulens réteg állandóan vastagodik. Ennek kiterjedése megfelelő festéssel mutatható ki, ahogy ebben a kísérletben látszik. Az edény falára berajzolt vízszintes vonalakra és a megadott időpontokra figyelve még a közel négyzetgyökös időfüggésről is meggyőződhetünk.

A planetáris határréteg változása addig ilyen típusú, amíg a hőáram állandó. Ez még napközben is csak egy ideig jó közelítés. Éjszaka a fűtés megszűnik, és a határréteg összeesik. Hosszabb ideig figyelve a planetáris határréteg vastagsága időben közel periodikusan változik, egy napnyi periódussal, de évszakos változást is mutat.

Utószó a második részhez

A második rész az első folytatása annyiban is, hogy a fő fejezetcímek azonosak. Az adott téma kiegészítésnek tekinthető, de még általános érdeklődésre számot tartó kérdései kerülnek bemutatásra. Ezek alkalmasak lehetnek a mesteri vagy a PhD képzésben való feldolgozásra.

Mindkét rész tankönyvi felépítésű, az anyagot nem kívántuk megtörni irodalmi hivatkozásokkal. A környezeti áramlások területe mára önálló diszciplína, hatalmas szakirodalmi háttérrel. Ebbe kíván betekintést nyújtani, a teljesség igénye nélkül az „Irodalom" fejezet. Ezen belül a könyveket néhány nagy kategóriába soroltuk, amelyek néhol egymással átfednek.

A geofizikai folyadékdinamika témaköréről érdemes külön is szólni. A megközelítés, amelynek lényege a légköri és óceáni folyamatok közös szemléletű tárgyalása, mint említettük, a 1960-as években vált elfogadottá. Pedlosky és Gill könyvei a terület megalapozó fontosságú művei, amelyekhez a 2000-es években – kicsit tágabb témaválasztással – Vallis könyve társult. Ezek 700 oldalas monográfiák, amelyek feldolgozása nem könnyű olvasmány.

Didaktikai igényességük kapcsán Cushman-Roisin és Marshall és Plumb könyvét érdemes említeni. Előbbi inkább alkalmazott matematika hátterű, utóbbi inkább földtudományi érdeklődésű olvasóknak szól. Szemléletüket az egyszerűen követhető tárgyalásmód jellemzi. Mindkét kötetben igyekeztem ennek átvételére, számos helyen – oktatási tapasztalatomon alapulva – saját gondolatmeneteket bemutatva.

A két említett könyv közös vonása, hogy kísérleti hátteret is megjelenít. Cushman-Roisin csak megadja az általa elvégzésre javasolt kísérletekhez szükséges feltételeket, és utal a várható jelenségekre, Marshall és Plumb viszont leírja az MIT egyetemen elvégzett kísérleteket, az eredményeket a könyvben fotókon mutatja be, és a videófelvételeket az interneten szabadon elérhetővé teszi. Célunk ebben a vonatkozásban a kísérleti témakörök jelentős bővítése volt hasonlóan nyilvánossá tett videók bevonásával (az MIT gyűjteményét is felhasználva).

A tudományterületen az elmélet és kísérlet kapcsolatának fontossága feltehetően az 50-es évek forgókádas kísérleteinek szemléletformáló hatására vezethető vissza, és nemcsak könyvekben, hanem ilyen témájú rendezvényekben is megmutatkozik. Ezek között említendő a Cambridge University geofizikai folyadékdinamika témájú nyári iskoláinak sora. A 90-es évek közepén Szabó K. Gábor kollégánktól szereztünk tudomást róluk. Ebben az oktatási formában az elmélet és a kísérlet egysége mutatkozik meg, és ez a szemlélet is vezérelt bennünket a Kármán Laboratórium megalapításakor.

Az Irodalomjegyzék másik fele az egyes fejezetekhez szakcikkeket ad meg, olyankor, amikor erősen támaszkodtunk a publikáció gondolatmenetére, vagy kísérletek esetében, amelyekben a cikk hasznos kiegészítő anyagot tartalmaz. Ebben a részben a témák áttekintése hasznos motiváció lehet azok számára, akik ezen a területen kívánnának dolgozni, és egyben betekintést is nyújt a Kármán Laboratóriumban és a világ más hasonló kísérleti csoportjaiban folyó munka tudományos eredményeibe.

Irodalom

Könyvek

Általános hidrodinamika

P. K. Kundu, I. M. Cohen, *Fluid Mechanics* (Academic Press, Amsterdam, 2008) [14. fejezete (74. oldal) Geofizikai folyadékdinamika]

L. D. Landau, E. M. Lifsic, *Hidrodinamika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1980)

Budó Á., *Mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1965)

Nagy K., *Elméleti mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1985)

Lajos T., *Az áramlástan alapjai* (Budapest, 2008)

M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981)

D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics* (Clarendon Press, Oxford 1988)

P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons, An Introduction* (Cambridge U. Press, 1989)

T. E. Faber, *Fluid Dynamics For Physicists* (Cambridge U. Press, 1995)

P. G. Drazin, W. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1995)

E. Langa, *Fluid Mechanics: A very short introduction* (Oxford, U. Press, 2022)

Turbulencia

U. Frisch, *Turbulence, A tribute to A. N. Kolmogorov* (Cambridge U. Press, 1998)

S. B. Pope, *Turbulent Flows* (Cambridge U. Press, 2000)

M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi (eds.), *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (North-Holland, Amsterdam, 1985)

W. Feller, *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978)

P. Moin, W. H. R. Chan, *Fundamentals of Turbulent Flows* (Cambridge U. Press, 2025)

Geofizikai folyadékdinamika

J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics* (Springer, New York, 1979)

A. E. Gill, *Atmosphere-Ocean Dynamics* (Academic Press, San Diego, 1982)

G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006)

B. Cushman-Roisin, *Introducton to Geophysical Fluid Dynamics* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994)

J. Marshall, R. A. Plumb, *Atmosphere, Ocean, and Climate Dynamics* (Elsevier Academic Press, San Diego, 2008)

Jánosi I., Tél T., *Bevezetés a környezeti áramlások fizikájába: Légköri, óceáni folyamatok és éghajlati hatásaik* (e-könyv, Typotex Kiadó, Budapest, 2012)

Kiss Á., Tasnádi P., *Környezetfizika*, 5. fejezet (e-könyv, Typotex Kiadó, Budapest, 2012)

M. Ghil, S. Childress, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics* (Springer, New York, 1987)

R. Salmon, *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics* (Oxford U. Press, 1998)

J. S. Turner, *Buoyancy Effects in Fluids* (Cambridge U. Press, 1973)

J. E. Simpson, *Gravity Currents* (Cambridge U. Press, 1997)

V. Zeitlin, *Geophysical Fluid Dynamics: Understanding (almost) everything with rotating shallow water models* (Oxford U. Press, 2018)

Dinamikus meteorológia

J. R. Holton, *An Introduction to Dynamic Meteorology* (Academic Press, San Diego, 1992)

Czelnai R., Götz G., Iványi Zs., *Bevezetés a meteorológiába II, A mozgó légkör és óceán* (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996)

Bérczi Sz., Hargitai H., Illés E., Kereszturi Á., Opitz A., Sik A., Weidinger T., *Bolygólégkörök atlasza* (Uniconstant, Budapest, 2002)

T. Foken, M. Mauder, *Micrometeorology* (Springer, New York, 2024)

Fizikai oceanográfia

G. L. Mellor, *Introduction to Physical Oceanography* (American Inst. of Physics Press, New York, 1996)

Czelnai R., *A világóceán* (Vince Kiadó, Budapest, 1999)

J. A. Knauss, *Introduction to Physical Oceanography* (Prentice Hall, New Jersey, 1997)

Y. D. Afanasyev, *Physical Oceanography, A short course for beginners* (Smithville Crescent, St. John's, 2024)

Geofizika

P. Melchior, *The Physics of the Earth's Core* (Pergamon Press, Oxford, 1986)

Cserepes L., Petrovay K., *Kozmikus fizika, fizikus- és csillagászhallgatók számára*, egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 2001

M. Le Bars and D. Lecoanet (eds.), *Fluid Mechanics of Planets and Stars*, CISM International Centre for Mechanical Sciences 595, 2020, Chapter 5: R. Deguen and M. Lasbleis, *Fluid Dynamics of Earth's Core: Geodynamo, Inner Core Dynamics, Core Formation*

D. A. Clarke, *A First Course in Magnetohydrodynamics* (Cambridge U. Press, Cambridge, 2025)

Klímadinamika

R. T. Pierrehumbert, *Principles of Planetary Climate*, (Cambridge U. Press, 2010)

J. D. Neelin, *Climate Change and Climate Modeling* (Cambridge U. Press, 2011)

H. A. Dijkstra, *Nonlinear Climate Dynamics* (Cambridge U. Press, 2013)

H. Goosse, *Climate System Dynamics and Modelling* (Cambridge U. Press, 2015)

E. Tziperman, *Global Warming Science* (Princeton U. Press, 2022)

Szakcikkek egyes fejezetekhez

1.7.1. Oszlopos áramlás, a Taylor–Proudman-tétel

S. Martin, R. Drucker, The effect of possible Taylor columns on the summer ice retreat in the Chukchi Sea, J. Geophys. Res. 102, 10 473–10 482, (1997)

2.5. Kvázi-geosztrofikus mozgás: a topografikus Rossby-hullám

T. H. Solomon, W.J. Holloway, H. L Swinney, Shear flow instabilities and Rossby waves in barotropic flow in a rotating annulus, Physics of Fluids A 5, 1971–1982 (1993)

3.2. Szabad mozgás forgó gömbön

N. Paldor, P. D. Killworth, Inertial Trajectories on a Rotating Earth, J. Atmos. Sci. 45, 4013–4019 (1988)

N. Paldor, E. Boss, Chaotic Trajectories of Tidally Perturbed Inertial Oscillations, J. Atmos. Sci. 49, 2306–2318 (1992)

4.4.3. Ekman-pumpálás nyírás következtében

M. Vincze et al,: Evidence for wind-induced Ekman layer resonance based on rotating tank experiments, Europhysics Letters 125, 44011 (2019)

5.8. Hegy mögötti hullám

B. Gyüre, I. M. Jánosi, Stratified flow over asymmetric and double bell-shaped obstacles, Dynamics of Atmospheres and Oceans 37, 155–170 (2003)

Y. Dossmann et al.: Experiments with mixing in stratified flow over a topographic ridge, Journal of Geophysical Research: Oceans 121, 6961–6977 (2016)

5.10.2. Belső hullám két közeg határán

K. Medjdoub, I. M. Jánosi, M. Vincze: Laboratory investigations on the resonant feature of "dead water" phenomenon, Experiments in Fluids, 61:6 (2020)

5.12. Belső szolitonok

A. R. OSBORNE, T. L. BURCH, Internal solitons in the Andaman Sea, Science 208, 451–460 (1980)

5.14 Termikus konvekció

SASVÁRI L., A Rayleigh–Bénárd-instabilitás, Fizikai Szemle 35, 58–69 (1985)

6.11.3. A baroklin instabilitás kísérleti kimutatása

M. VINCZE and I.M. JÁNOSI, Laboratory experiments on large-scale geophysical flows, in: *The Fluid Dynamics of Climate*, ed.: A. Provenzale et al., Springer, New York, pp. 61–94, 2016

U. HARLANDER, M. V. KURGANSKY, K. SPEER, M. VINCZE, Baroclinic instability from an experimental perspective, Comptes Rendus. Physique, Online first (2024), pp. 1–48

6.12. Nem kvázi-geosztrofikus frontok és jetek

C. RODDA, U. HARLANDER, and M. VINCZE, Jet stream variability in a polar warming scenario – a laboratory perspective, Weather Clim. Dynam., 3, 937–950 (2022)

7.5.1. Háromdimenziós turbulencia

T. MATSUZAWA et al.: Creation of an isolated turbulent blob fed by vortex rings. Nat. Phys. 19, 1193–1200 (2023)

7.5.2. Kétdimenziós turbulencia

P. TABELING, Two-dimensional turbulence: a physicist approach, Phys. Rep. 362, 1–62 (2002)

M. G. WELLS, H. J. H. CLERCX and G.J. F. VANHEIST, Vortices in oscillating spin-up, J. Fluid Mech., 573, 339–369 (2007)

7.6. Szennyezések terjedése

M. ZSUGYEL et al.: Numerical investigation of chaotic advection past a groyne based on laboratory flow experiments, Advances in Water Research 71, 81-91 (2014)

T. HASZPRA and T. TÉL, Individual particle based description of atmospheric dispersion: A dynamical systems approach, in: *The Fluid Dynamics of Climate*, ed.: A. Provenzale et al., Springer, New York, pp. 95–119, 2016

H. AREF et al.: Frontiers of chaotic advetion, Rev. Mod. Phys. 89, 025007 (2017)

8.3.4. Geosztrofikus áramlás a magban

J. M. AURNOU et al.: Rotating convective turbulence in Earth and planetary cores, Physics of the Earth and Planetary Interiors 246, 52–71 (2015)

A. POTHÉRAT, K. AUJOGUE, F. DEBRAY, Magnetic Taylor–Proudman Constraint Explains Flows into the Tangent Cylinder, Phys. Rev. Lett. 133, 184101 (2024)

9.2. Szolitonok és a KdV-egyenlet

J. L. Hammack, H. Segur, The Korteweg–de Vries equation and water waves; Journal of Fluid Mechanics 65, 289–314 (1974)

F. Constantinescu, E. Magyari, *Kvantummechanika feladatok* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1972), 44–49. old.

9.3. A KdV-egyenlet elemi levezetése

G. B. Halász, Higher order corrections for shallow-water solitary waves: elementary derivation and experiments, Eur. J. Phys. 30, 1311–1323 (2009)

9.4. Cnoidális hullám

J. Boschan et al: Nonlinear resonance in barotropic-baroclinic transfer generated by bottom sills, Phys. Fluids 24, 046601 (2012)

10.4. Kétdimenziós áramlások stabilitása: a barotróp instabilitás

Á. Kadlecsik et al.: A simple approximation for the drift rates of rotating polygons on a free fluid surface, The European Physical Journal Special Topics 232, 453–459 (2023)

12.2. Állóhullámok, tólengések

Vincze M., Kozma P.: Tólengések a Balatonon, a fjordokban és a laboratóriumban, Természet Világa, 2007 december, 547–550

M. Vincze et al: Amplified internal pulsations on a stratified exchange flow excited by interaction between a thin sill and external seiche, Physics of Fluids 19, 108108 (2007)

K. Medjdoub, I. M. Jánosi, M. Vincze: Laboratory experiments on the influence of stratification and a bottom sill on seiche damping, Ocean Sci., 17, 997–1009 (2021)

12.3.2. Gravitációs áramlatok, frontok nem forgatott rendszerekben

I.M. Jánosi, D. Jan, K.G. Szabó, T. Tél, Turbulent drag reduction in dam-break flows, Experiments in Fluids, 37, 219–229 (2004)

M. Vincze et al.: Experiments on thermally driven internal water waves and their detectability with infrared surface thermography, Discover Applied Sciences 7, 1–13 (2025)

12.4. Felületi feszültség hatása instabilitásokra

E. Shabalina et al.: Rayleigh–Taylor-like instability in a foam film, Phys. Rev. Fluids 4, 124001 (2019)

A jelenségbemutató kísérletek listája

baroklin instabilitás I, 177
baroklin instabilitás II, 178
baroklin instabilitás III, 178
barotróp instabilitás, 252
belső hullám, 121
belső tólengés, 275

cnoidális hullám, 235

Ekman-pumpálás, 97
Ekman-pumpálás nyírással, 103

front kialakulása, 164
fűtött turbulens határréteg, 324

geosztrofikus turbulencia, 200
gravitációs áramlat, 279
gravitációs áramlat, belső szoliton, 281

háromdimenziós turbulencia I, 192
háromdimenziós turbulencia II, 193
hegy mögötti hullám, 122
hidraulikus ugrás, 278
holt víz, 131
hullámzó bore, 279

jéghegy olvadása, 289

Kelvin–Helmholtz-instabilitás I, 136
Kelvin–Helmholtz-instabilitás II, 137
Kelvin-hullám, 65
kétdimenziós turbulencia I, 195
kétdimenziós turbulencia II, 195
kettős diffúziós réteg, 289
konvekció I, 147
konvekció II, 147

nyugati peremáramlat, 108

összefoglaló, 205

Rayleigh–Taylor-instabilitás I, 141
Rayleigh–Taylor-instabilitás II, 283
Rayleigh–Taylor-instabilitás III, 284
Rossby-hullám I, 58
Rossby-hullám II, 59

só-ujjak, 288
szennyezésterjedés, 202, 203
szoliton I, 65
szoliton II, 66
szoliton III, 230

Taylor-függöny, 33
Taylor-oszlop, 34
tehetetlenségi hullám I, 43
tehetetlenségi hullám II, 44
termikus áramlás, 167
tólengés, 275
turbulens csóva, 321

Név- és tárgymutató

adiabatikus sűrűségprofil, 290
Adriai-tenger, 75
advekciós diffúziós egyenlet, 200
advektív gyorsulás, 28, 38, 65, 119, 135, 183, 226
Agulhas-áramlat, 108
Alfvén, H. O. G., 223
Alfvén-hullám, 223
alsó Ekman-réteg, 94
Andok, 87
anticiklon, 23, 67, 77, 80, 95, 173, 273, 296
anticiklonális, 35, 160
Atlanti-óceán, 78, 106
attraktor, 147, 190
állóhullám, 126, 274
általános légkörzés, 82, 179
áramlási függvény, 36, 51, 57, 59, 85, 106, 240, 302
árapályhullám, 64, 74, 156
átlagolt egyenletek, 182

Baktérítő, 82
Balaton, 104, 274, 282
bárikus széltörvény, 77
baroklin, 116, 128, 131
baroklin hullám, 171, 177, 180
baroklin instabilitás, 170, 175, 300, 308, 314
baroklin vektor, 295
barotróp, 116, 128, 131, 156
barotróp instabilitás, 247, 300
Batchelor, G.K., 197
belső Froude-szám, 111, 117, 118, 151, 176, 179
belső hullám, 119, 123, 271
belső Kelvin-hullám, 156
belső mag, 221
belső Poincaré-hullám, 155, 157
belső Rossby-hullám, 168, 170
belső Rossby-sugár, 151, 155, 164, 173, 296, 300, 310
belső szoliton, 133
Bernoulli-törvény, 133, 232, 234
besodródás, 317
beta paraméter, 67, 75, 105, 199, 254
beta-sík-közelítés, 75, 107, 239, 247, 252, 254, 262, 314
bifurkáció, 72, 147
Bjerknes tétele, 215
Bjerknes, V., 173
blokkolás, 118
bolygólégkör, 21, 178
bore, 66
Boussinesq-közelítés, 115, 153, 154, 286
Brazíliai áramlat, 108
Brunt–Väisälä-frekvencia, 111, 113, 157, 291
Burger, A. P., 151
Burger-szám, 151, 166, 303
Buys-Ballot, C., 77

centrifugális erő, 23, 259
centripetális erő, 36, 37
Charney, J. G., 60, 173
Cholnoky Jenő, 274
ciklon, 21, 23, 30, 67, 77, 80, 95, 171–173, 296, 313
ciklonális, 23, 35, 160
ciklonképződés, 171
cirkuláció, 22, 214, 215, 295, 296
cirkuláris hullám, 42
cnoidális hullám, 235
Coriolis- és külső erő egyensúlya, 26
Coriolis-erő, 19, 22, 70, 82, 92, 220
Coriolis-gyorsulás, 20, 22, 69, 259
Coriolis-paraméter, 67, 73
csilapított harmonikus oszcillátor, 269
csoportsebesség, 39, 43, 56, 120, 124, 271, 305, 306
Csukcs-tenger, 34
Curie-pont, 148

de Vries, G., 226
Déli-sark, 27, 68
diffúziós egyenlet, 200, 285
dimenziótlan beta paraméter, 67, 76, 80, 87

dimenziótlanítás, 29, 49, 71, 76, 87, 90, 104, 117, 144, 214, 219, 261, 268, 303
dinamikai nyomás, 31, 47, 116, 261
dinamikai sűrűség, 116
disszipációs hossz, 191
diszkrét spektrum, 124, 157
diszperziós reláció, 38, 41, 55, 57, 61, 80, 87, 119, 155, 174, 223, 256
diszperzív hullám, 39
domborzat, 241
döntött domborzat, 53, 54, 80, 87, 226
döntött felszín, 51
Duna, 21

Egyenlítő, 67, 82, 86, 101, 254
egyenlítői beta paraméter, 254
egyenlítői Kelvin-hullám, 254, 258
egyenlítői Poincaré–Rossby-hullám, 255
egyenlítői Poincaré-hullám, 256
egyenlítői Rossby-hullám, 257, 258
egyenlítői Rossby-sugár, 254
Ekman, V. W., 89, 131
Ekman-pumpálás, 97, 98, 103
Ekman-réteg, 91, 92, 298, 323, 324
Ekman-spirál, 95, 100, 187
Ekman-szám, 89, 90, 92, 104
Ekman-transzport, 100–102, 105, 263, 298
El Nino, 258, 299
elhajlás, 271
elliptikus hullám, 62
elliptikus integrál, 236
elliptikus koszinusz, 236
előrejelezhetetlenség, 203
előrejelzési idő, 194, 198, 200, 203
Elsasser, W., 220
Elsasser-szám, 220, 221
eltolási áram, 217
energiafluxus, 192
energiakaszkád, 192, 196
energiaspektrum, 190
ensztrófia, 195
ensztrófiafluxus, 197, 200
ensztrófiakaszkád, 196
ensztrófiakaszkád, 200
ensztrófiaspektrum, 196
entrópia, 293
Eötvös-hatás, 69
Euler-egyenlet, 29, 31, 128, 137, 152, 154, 158, 191
érdességi magasság, 187
Északi-sark, 27, 68

f-sík-közelítés, 73, 89, 239, 262, 295, 309
fal menti réteg, 186, 321–323
feláramlás, 101, 102, 298
felhőutca, 149
felpörgetési idő, 97
felső Ekman-réteg, 98
felületi feszültség, 281
ferde rétegzettség, 153, 164, 165, 170
Feröer-szigetek, 34
Fjortoft, R., 197
fluktuációk, 182
Fokker, A., 201
Fokker–Planck-egyenlet, 201
forgatott edény, 21, 80
forgó gömb, 69
Foucault-inga, 74
Föld, 179, 216
Föld forgási szögsebessége, 20, 67, 69
földköpeny, 89, 150
földrajzi hosszúság, 68
földrajzi koordináták, 258, 266
földrajzi szélesség, 68
főn szél, 276
fraktál, 202
frekvenciaarány, 151, 167
front, 160, 162, 163, 179, 279, 299
Froude, W., 45
Froude-szám, 29, 45
függőleges rétegzettség, 117
Fultz, D., 176
Fundy-öböl, 275

geopotenciális magasság, 240
geosztrofikus áramlás, 34, 51, 158, 164, 220, 240, 296
geosztrofikus kiegyenlítődés, 163, 300
geosztrofikus turbulencia, 60, 173, 198
Gibraltári-szoros, 280
globális Richardson-szám, 189, 318
Golf-áramlat, 21, 78, 108, 163, 170, 179, 296
gomolyfelhő (kumulusz), 149, 319
gömbi koordináták, 258
gravitációs áramlat, 279
Grönland, 285

Hadley, G., 180
Hadley-cella, 180
harmonikus oszcillátor, 86, 256, 269
harmonikus rezgés, 113, 291
határréteg, 89, 90, 112

háromdimenziós turbulencia, 192
háttéráramlás, 84, 241, 306
háztartási vízlefolyó, 21
hegy mögötti hullám, 121, 306
hegységrendszer, 84, 306
Hermite-polinom, 256
Hide, R., 176
hidegfront, 172
hidraulikus ugrás, 66, 276
hidrosztatikus közelítés, 262
hidrosztatikus nyomás, 32, 46, 116, 125, 128, 152, 239, 296, 300
Himalája, 87
holt víz, 131
hőáram, 313, 323
hullámcsomag, 39
hullámtörés, 137, 227, 282
hurrikán, 67
hurrikán szeme, 252

ideális gáz, 241, 291, 293
időjárás, 80, 179
impulzusnyomaték, 50
indukciós egyenlet, 218
instabilitás, 134
instabilitási feltétel, 287
instabilitási ráta, 135, 140, 175, 251, 253, 282, 310
inverziós helyzet, 271, 272

jet, 179, 200, 252, 308
jetstream, 82, 179
jóidő-felhő, 319
Jupiter, 21, 179, 200

Kalifornia, 102
kaotikus attraktor, 190
káosz, 178, 182, 194, 202
Kármán Tódor, 187
Kármán-féle örvénysor, 195
Kármán-konstans, 187, 321
KdV-egyenlet, 226, 232
Kelet-Afrikai hegység, 87
Kelet-Ausztráliai áramlat, 108
Kelvin–Helmholtz-felhők, 136
Kelvin–Helmholtz-instabilitás, 136, 171, 172, 177, 280, 281
Kelvin-hullám, 63, 74, 82, 254
kettős diffúziós instabilitás, 284
keveredési réteg, 112, 189, 322
kevert hullám, 257
kétdimenziós turbulencia, 195, 300
kétrétegű közeg, 128, 132
kinematikai viszkozitás, 29, 89, 90
Klein–Gordon-egyenlet, 61
Kolmogorov, A. N., 190
Kolmogorov-hossz, 193
Kolmogorov-spektrum, 193
kontinuitási egyenlet, 28, 47, 115, 129, 240, 276
konvekció, 141, 177, 220, 323
konvekciós cella, 147
Korteweg, D. J., 226
Korteweg–de Vries-egyenlet, 226
körülfordulási idő, 191
Kraichnan, R. H., 197
Kurosio-áramlat, 108
külső mag, 150, 216, 221
kvázi-geosztrofikus egyenlet, 57, 59, 86, 87, 167, 169, 174, 226, 268, 300, 302
kvázi-geosztrofikus közelítés, 37, 53, 55, 262

Langevin, P., 201
Langevin-egyenlet, 201
lee wave, 121
lencsefelhő, 122
légszennyezés, 273
lineáris polarizációjú hullám, 119
Ljapunov-exponens, 135, 203
log-lineáris sebességprofil, 322
logaritmikus sebességprofil, 187
lokális rendszer, 68, 262
Lord Kelvin, 64
Lorentz-erő, 219, 220
Lorentz-transzformáció, 217

mammatusz felhő, 289
Margules, M., 161
Margules-összefüggés, 167, 173
Margules-összefüggés, 160
Mars, 21, 179, 216
Maxwell-egyenletek, 217
mágneses dinamó, 216
mágneses fluxus, 219
mágneses Reynolds-szám, 218
mágneses tér befagyása, 219
mágneses viszkozitás, 218
meanderezés, 82, 243, 246
meanderezési hossz, 84
megacunami, 66
megnetohidrodinamika, 216
melegfront, 172

merevlap-közelítés, 48, 53, 125, 309
mélységi arány, 45
mérsékelt égöv, 82
MHD, 216
mintázatképződés, 141, 148, 177
Monyin, A. S., 321
Monyin–Obukhov-hossz, 321

nagy óceáni szállítószalag, 285
Nagy Vörös Folt, 34, 200
Nansen, F., 101
Navier–Stokes-egyenlet, 27, 116, 286
nemdiszperzív hullám, 39
nemegyensúlyi fázisátalakulás, 141, 147
nemlineáris hullám, 60, 80, 177
Neumann János, 60
normálmódus, 124, 126
Nusselt, W., 148
Nusselt-szám, 148
nyírás, 94
nyírási instabilitás, 136, 140, 252, 283
nyírási örvényesség, 107
nyírási paraméter, 89, 101, 104
nyírási rotáció, 104
nyírt áramlás, 250
nyomási kordináták, 239
Nyugat-Afrika, 102
nyugati peremáramlat, 107, 108, 244, 265, 266
nyugati szél, 82, 107

Obukhov, A. M., 321
Ohm-törvény, 217, 218
okklúziós front, 172
óceáni áramlás, 108, 265
óceáni gyűrű, 21, 52, 171, 173, 296
óceáni körök, 77, 108
óceáni örvény, 21, 30, 296
ózonlyuk, 308
örvényesség, 20, 22, 37, 96, 97, 213, 295
összenyomhatatlanság, 28, 46, 115, 183, 216
összenyomhatóság, 291

parti szél, 280
passzát szél, 82, 101, 106
paszív sodródás, 202
peremfeltétel, 94, 303
Peru, 102, 299
Péclet, J. C. E., 182
Péclet-szám, 181, 182
Planck, M., 201
planetáris határréteg, 112, 189, 273, 323, 324
planetáris hullám, 79, 81
planetáris örvényesség, 73, 242
planetáris Rossby-hullám, 59, 79, 80
Poincaré-hullám, 60, 65, 74, 82, 255
poláris front, 82, 170
poláris jet, 83
polarizációs egyenletek, 41, 119, 130, 169, 222
potenciális hőmérséklet, 293
potenciális örvényesség, 49, 55, 56, 59, 78, 85, 104, 153, 198, 216, 241, 244, 268, 294
potenciális sűrűség, 291
potenciálgödör, 125, 230
potenciálmozgás, 71, 235
potenciálvölgy, 229
Prandtl, L., 144
Prandtl-szám, 144

Rayleigh–Bénárd-instabilitás, 142
Rayleigh-egyenlet, 248
Rayleigh-szám, 147, 181, 286, 323
Rayleigh–Taylor-instabilitás, 141, 282–284, 288
Ráktérítő, 82
redukált nehézségi gyorsulás, 114, 133
redukált sekélyfolyadék-egyenletek, 133, 153, 162, 298
Reynolds-feszültég, 183
Reynolds-szám, 30, 181
rezonancia, 84, 86, 275, 307
rétegfelhő, 161
rétegképződés, 289
rétegzett közeg, 188, 321
rétegzett közeg, 112
Rhines, P. B., 199
Rhines-hossz, 199
Richardson, L. F., 181
Richardson-szám, 181, 189
Rossby, C.-G., 19
Rossby-hullám, 53, 58, 59, 84, 168, 243, 255, 268, 304, 306, 313, 315
Rossby-hullám tengerben, 56
Rossby-hullám, nemlineáris, 60
Rossby-hullám, planetáris, 79
Rossby-hullám, szabad felszínű, 56
Rossby-hullám, topografikus, 53
Rossby-hullám, zárt felszínű, 54

Rossby-sugár, 57, 61, 63, 74, 80, 254
Rossby-szám, 19, 20, 29, 50, 67, 151, 179
Russel, J. S., 65

sajátenergia, 229
sajátérték-probléma, 126, 228, 229, 248, 274
sarki örvény, 308
Schrödinger-egyenlet, 229, 256
sekélyfolyadék, 48, 72, 76, 104, 124, 128, 132, 152, 157, 262
sekélyfolyadék-egyenletek, 48, 53, 60, 104, 225, 254
Severn folyó, 279
síkhullám, 38, 55, 57, 61
sokaságátlag, 182
só-ujjak, 288, 289
stabilitásvizsgálat, 134, 143, 247, 253, 285
Stommel, H. M., 265
Stommel-modell, 265
súrlódási sebesség, 186
Sverdrup, H. U., 79
Sverdrup-egység, 106
Sverdrup-összefüggés, 78
Sverdrup-transzport, 105, 265
szalinitás, 284
szalinitási Rayleigh-szám, 285
szappanhártya, 195, 283
Szaturnusz, 200
Szaturnusz hatszöge, 252
szélnyírás, 89, 100, 104
Sziklás-hegység, 87
szmog, 273
szoliton, 65, 226, 232
sztratoszféra, 34, 112, 124, 273, 305
szuperkritikus áramlás, 276, 277

Taylor, G. I., 33
Taylor–Proudman-tétel, 32, 214
Taylor-függöny, 33
Taylor-oszlop, 34, 118, 203, 220
Taylor-szám, 176
tehetetlenségi gravitáció-hullám, 60, 74
tehetetlenségi körmozgás, 24, 36, 42, 74
tehetetlenségi-mágneses hullám, 221
tehetetlenségi hullám, 40, 119
tehetetlenségi tartomány, 192
tektonikai lemezek, 150
teljes cirkuláció, 216, 296
teljes örvényesség, 213, 214, 296
teljesen kifejlett turbulencia, 181, 190
tengeráramlat, 21, 34, 52
termik, 149, 317, 323
termikus áramlás, 165, 241, 300, 308
termikus konvekció, 141, 177
termikus Rossby-szám, 176
termikus szél, 165
termohalin konvekció, 284
termohalin vízkörzés, 284
termoklin zóna, 112, 272
Thomson, W., 64
topográfiai paraméter, 55, 80
topografikus Rossby-hullám, 53, 75, 80
torlóhullám, 66, 276, 278
tornádó, 34
tólengés, 132, 274
törési törvény, 271
tropopauza, 180, 273, 280
troposzféra, 112, 273
trópusi ciklon, 67
turbulencia, 90, 137, 149, 171, 181, 272, 278, 283, 289
turbulencia rétegzett közegben, 188
turbulens csóva, 317, 319
turbulens diffúziós együttható, 186
turbulens határréteg, 321
turbulens hődiffúziós együttható, 186
turbulens transzportegyüttható, 184, 186
turbulens viszkozitás, 89, 90, 185
Turing, A., 148
Turing-instabilitás, 148

ujjasodás, 288

Velence, 75
Vénusz, 21, 82, 173, 179
viharhullám, 264
viszkózus alréteg, 187
vulkáni hamu, 320

zivatarfelhő (kumulonimbusz), 161, 280
zonális áramlás, 82, 84