Kecskés Lajos

A halmaz peremén

Cirkálás a komplex végtelenben

Kecskés Lajos

A halmaz peremén

Cirkálás a komplex végtelenben

TYPOTEX

A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A szerző köszönetét fejezi ki Huber Kristófnak az ábrák grafikai kialakításához nyújtott segítségéért.

ISBN 978-963-493-122-5

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
Műszaki szerkesztő: Nagy Tamás
A borítót készítette: Szalay Éva
Készült a Multiszolg Bt. nyomdájában.
Felelős vezető: Kajtor Bálint

Tartalom

„ ...az evezőket
bolond repülés szárnyaivá tettük,
s vitorláink mind balfelé vetődtek...”

Dante: *Isteni színjáték.*
Pokol, huszonhatodik ének
Babits Mihály fordítása

Ádám fiamnak, aki a „bolond repülés”-hez – a komplex számok végtelenjében történő cirkálásaimhoz – szoftverszárnyakat épített.

Előszó *(Az „Egy ölnyi végtelen” befejező sorai)*

„Ezután láték új eget és új földet; mert az első ég és az első föld elmúlt vala; és a tenger többé nem vala.”

Jel. 21.1

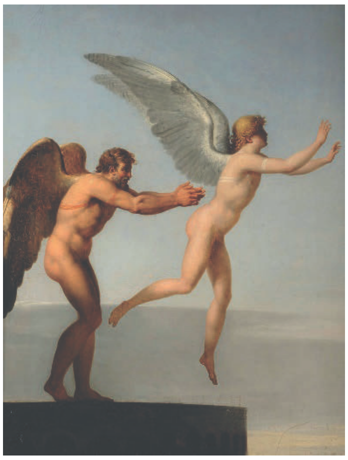
„…Új ég, új csillag ragyogott felettünk,
ha jött az éj: a mi egünk lebújva
a tenger alá, már egészen eltűnt.”

Dante: *Isteni színjáték*.
Pokol, huszonhatodik ének
Babits Mihály fordítása

A Dante-idézet folytatása (János apostol jövendölésének parafrázisaként) új ég és új csillagok feljöttét is rebesgeti. Vajon, ha Dante Odüsszeuszától eltérően nem hagyjuk magunkat sodortatni a hullámokkal, hanem az *„Egy ölnyi végtelen”* bevezető soraiban említett két iránytűtől vezérelve egészen *más*felé is elkezdünk kalandozni: kikerülhetjük-e a (valljuk be, azért nagyon izgalmas) poklot, és megtalálhatjuk-e az új eget és az új csillagokat (a *más*világot...)?

Vagy – ha mi már megfáradtan mégiscsak hazatérünk Ithakába – (a jóeszű) Télemakhosz nekivág-e majdan az *örvénylő hullámok*nak, sőt, esetleg Szkülla *égbe nyúló* szikláinak is?

Kecskés Lajos: *Egy ölnyi végtelen*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.



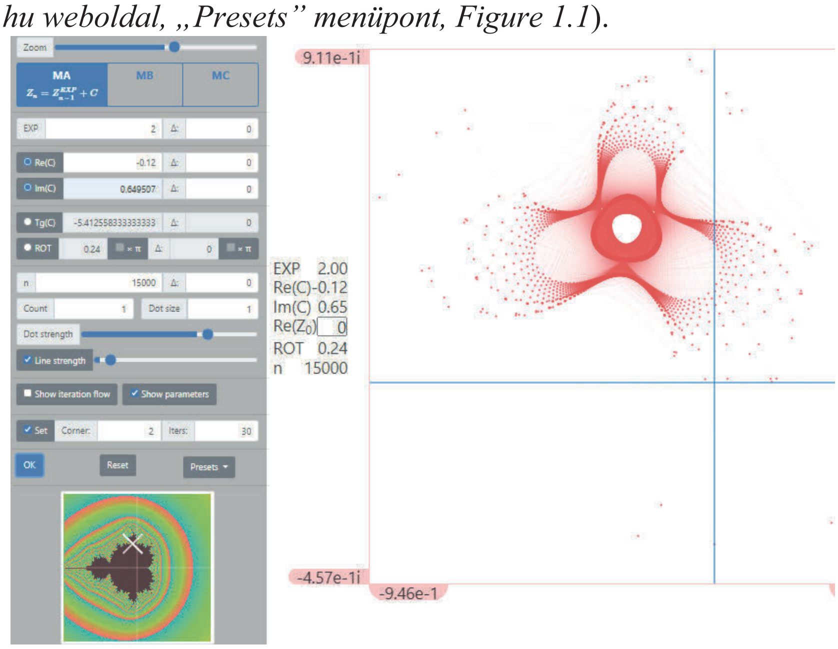
1. Ég és föld között

„Középütt szállj!” – adja tanácsát,
„Icarus, erre vigyázz, nehogy aztán, hogyha alant szállsz,
víz nehezítse a tollaidat, s tűz marja, ha túl fönt:
szállj csak a kettő közt!...

Ovidius: *Daedalus és Icarus.*
Devecseri Gábor fordítása

Kövessük Dante fantáziáját: alakítsuk szárnyakká az evezőket, repüljünk a feltételezett másvilág örvénylő hullámai – „mennyből alászállt” városai, csillagai, netán-talán(?) csillaglakói – felé! Őrizzük meg mindkét hajdani iránytűnket (a racionalitást és az intuíciót), de – okulva Szkülla tobzódó étvágyának keserű tapasztalatából és Daidalus bölcs intelméből – használjunk majd féket a merész utazáshoz!

Ezt megelőzően azonban készüljünk fel az útra, idézzük fel a varázslatos vizeken, szörnyek lakta szigetek között cirkáló Odüsszeusznak az *„Egy ölnyi végtelen”*-ben leírt látomásait: elevenítsük fel a matematika klasszikus Mandelbrot-algoritmusa [$\mathbf{Z_n = (Z_{n-1})^{EXP} + C}$] által megjeleníthető, káprázatos formagazdagságú geometriai alakzatokra vonatkozó ismereteket! Amennyiben a Mandelbrot-halmazt megjelenítő kép, a „Mandelbrot-tenger” öblökkel-fjordokkal csipkézett partvidékéről kiszemelt „C”-értékeket (komplex számokat) helyettesítünk be a fenti képletbe, akkor a $\mathbf{Z_n}$-értékek által definiált pontok halmaza ciklikusan kavargó örvények és „buboréklények” látványos, nyüzsgő sokaságát rajzolja ki a komplex számsíkon. Például az egyik leglátványosabb „buboréklényt” az EXP = 2 kitevő és a C = –0,12 + 0,649507i komplex szám definiálja (*circal.hu weboldal, „Presets” menüpont, Figure 1.1*).



1.1. ábra
A „circal.hu” weboldal segítségével megjelenített Mandelbrot-halmaz és az „X” szimbólummal megjelölt pontjából származó cirkál

További buborékokra és örvényekre bukkanhatunk, ha a **Re(C)** és **Im(C**) értékeket az *„Egy ölnyi végtelen”*-ben megfogalmazottaknak megfelelően a Mandelbrot-halmaz peremvidékéről választjuk. (A „circal.hu” weboldal „MA” programváltozata a fent említett klasszikus Mandelbrot-képletet használva megjeleníti az összetartozó $Re(Z_n)$ … $Im(Z_n)$ értékpárok által reprezentált pontokat.)

Azt is megtapasztalhatjuk, hogy „belehajózva” a tenger mélyébe (vagyis a „C”-értéket a halmaz belsejéből választva) nem történik érdekfeszítő esemény, a pontsorozat villámgyorsan összesűrűsödik egy, az origótól nem túlságosan távolra eső pont környékére („elsüllyedünk” Kharübdisz örvényeiben). Másrészről viszont, a part szűk környezetét kifelé elhagyva (vagyis elég nagy „C”-értékeket választva), a pontsorozat kifut a szinte felmérhetetlenül táguló végtelenbe (Szkülla „felszippantja” Odüsszeusz szerencsétlen társait). Ekkor a $\mathbf{Z_n}$-értékek $|\mathbf{Z_n}|$ abszolút értékei (a komplex síkon az origóból a **Z** komplex számra mutató vektorok) már egészen kicsi **n**-értékek esetén is megközelítik, majd meghaladják a számítógép kapacitása által definiált „gépi végtelen”-t. (Saját számítógépemen ez az érték **= 10^{307}**.)

Mindez természetesen egyáltalán nem meglepő, hiszen ismeretes, hogy a hatványozás művelete az egységnél nagyobb kitevők esetén gyors, „féktelen” növekedést eredményez. Érdekes és „szép” alakzatok megjeleníthetőségét az MA-képlet meglehetősen szűk tartományra – a „tengerpart” keskeny sávjára – korlátozza.

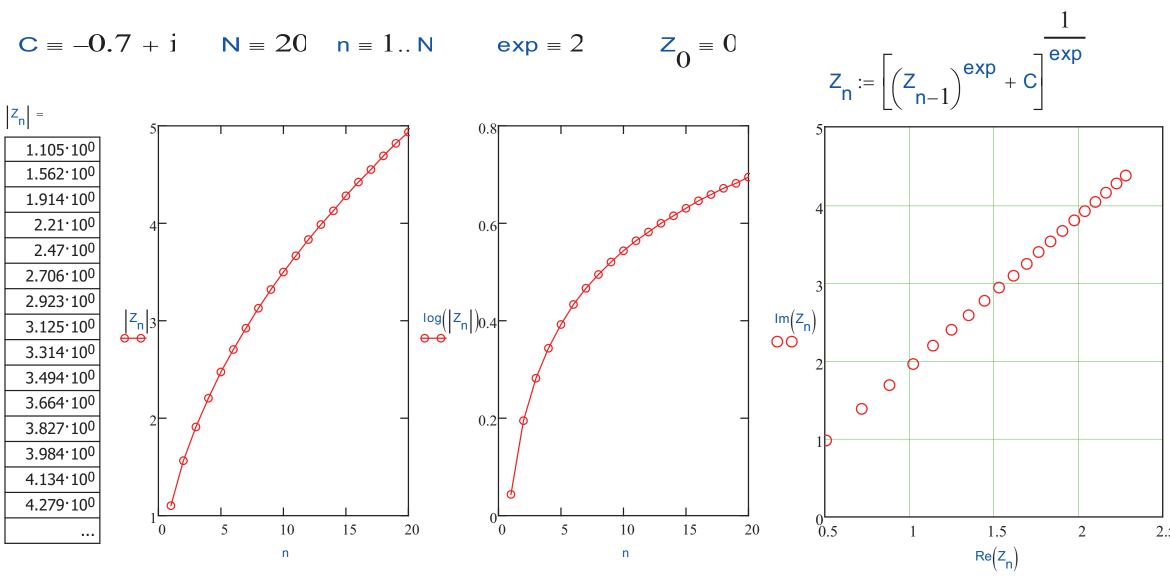
A természetben, a kézzelfogható anyagi-fizikai világban gyakran találkozhatunk hasonló „ingatag” stabilitással. Így például az emlősállatok és az emberek csak 36 … 37 °C-os testhőmérséklet környékén lehetnek életképesek, vérünk kémhatása csak néhány századnyival térhet el a pH = 7,40 értéktől, testfolyadékaink összetevőinek koncentrációértékei is csak szűk határok között mozoghatnak. Megrémülünk, ha az artériás vérnyomásunk „kilóg” a normálisnak tekinthető 100 … 160 higanymilliméter tartományból, a fülünk csak a 20 … 20 000 Hz frekvenciatartományra, szemünk csak az elektromágneses spektrum nagyon szűk, 400 … 700 nanométer hullámhosszúságú tartományára érzékeny: a túl nagy vagy túl kis frekvenciájú hangokat nem halljuk, az infravörös vagy az ultraibolya színeket nem látjuk. Mindezeknél a lényegében közismert tényeknél jóval meghökkentőbb az a friss kozmológiai felismerés, hogy anyagi világunk puszta létezésének lehetősége is borotvaélen táncol: ha az univerzum csak egy parányival gyorsabban tágulna, akkor az ősrobbanás óta eltelt néhány milliárd év alatt a galaxishalmazok már gyakorlatilag végtelen távolságra kerültek volna egymástól, ha viszont a tágulás sebessége egy icipicit is kisebb lenne, ki sem alakulhatott volna a mostanra csillagokkal benépesített világmindenség. A tágulás mértékét számszerűsítő úgynevezett Hubble-állandó és néhány más fizikai paraméter (az elemi részecskék tömege, a gravitációs és elektromágneses kölcsönhatásokra jellemző konstansok) jól meghatározott, pontos számértéke és időbeli stabilitása garantálja, mintegy „kódolja” élhető létezésünk feltételeit.

A Mandelbrot-halmaz peremén is sajátságos stabilitás, afféle matematikai homeosztázis, „életképesség” tanúi lehetünk. Az itt fellelhető, az *„Egy ölnyi végtelen”*-ben részletesen ismertetett „buboréklények” nyüzsgő sokaságának élettere is csak egy keskeny sáv, és bár ennek a sávnak végtelen sok pontjából végtelen sok alakzat származtatható, az alakzatok jellege (örvények, buborékok) egyáltalán nem mutat túl nagy változatosságot. Szerkezetüket, rendjüket és esztétikájukat szűk intervallumba szorítható (komplex) számértékek kódolják.

Próbáljuk meg mesterséges beavatkozással megzabolázni Szkülla tobzódó étvágyát! Módosítsuk a klasszikus Mandelbrot-algoritmust, iktassunk bele a képletbe egy ***matematikai féket***: a hatványozás (egyik) inverz műveletét, a gyökvonást! „Fék” gyanánt „fejeljük meg” a képletet a kitevő reciprokával (**EXP** = **exp**$^{-1}$). Ez a művelet természetesen ekvivalens az „EXP” gyökkitevővel történő gyökvonással, vagyis legyen:

$$\mathbf{Z_n = [(Z_{n-1})^{exp} + C]^{EXP}}.$$

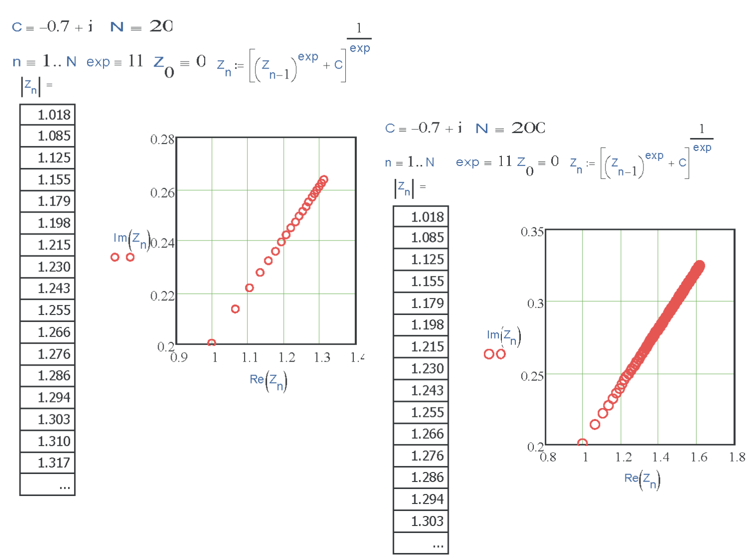
A „fék” – várakozásunknak megfelelően – működni kezd: az iterációszám (n) növelésével a Z_n-értékek nem szökkennek a végtelenbe, a pontsorozatot reprezentáló görbe mintegy vissza-fordul (a logaritmikus léptékválasztás sem feltétlenül szükséges), az összetartozó imaginárius és valós értékeket megjelenítő pontok pedig torlódni kezdenek egy egyenes mentén (1.2. ábra).



1.2. ábra

„Fékezett” Mandelbrot-képlettel („MB”-algoritmussal) előállított pontsorozat az iterációszám függvényében és a komplex számsíkon

Magasabb kitevő (például **exp** = 11) esetén még határozottabb jellegű ez a torlódás, ezáltal lehetővé válik jóval több pont ábrázolása is (1.3. ábra):



1.3. ábra

Magasabb kitevőt tartalmazó MB-algoritmussal előállított pontsorozat a komplex számsíkon

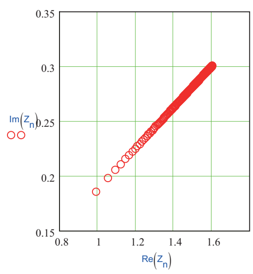
Ha az önkényesen választott „C”-értéket (vagyis az eredetpontot) megváltoztatjuk, a torlódás – ahogyan azt az alábbi néhány példa jól illusztrálja – lényegében megmarad (1.4. ábra):

exp = 11 | **EXP = exp^{-1} = 0,090909….** | **$Z_0 = 0$** | **$Z_n = [(Z_{n-1})^{exp} + C]^{EXP}$** | **n = 1 … 200**

C = –0,5 +1i

$|Z_n| =$

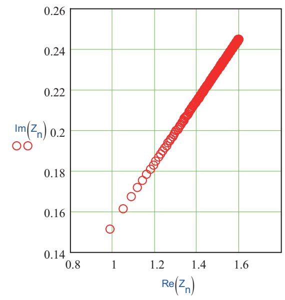
1.01
1.076
1.116
1.146
1.169
1.189
1.206
1.22
1.234
1.245
1.256
1.266
1.275
1.284
1.292
1.3
1.307
1.314
1.32
1.326
1.332
1.338



C = –0,1 +1i

$|Z_n| =$

1
1.066
1.106
1.135
1.158
1.177
1.194
1.209
1.222
1.233
1.244
1.254
1.263
1.272
1.28
1.287
1.294
1.301
1.308
1.314
1.319
1.325



1.4. ábra

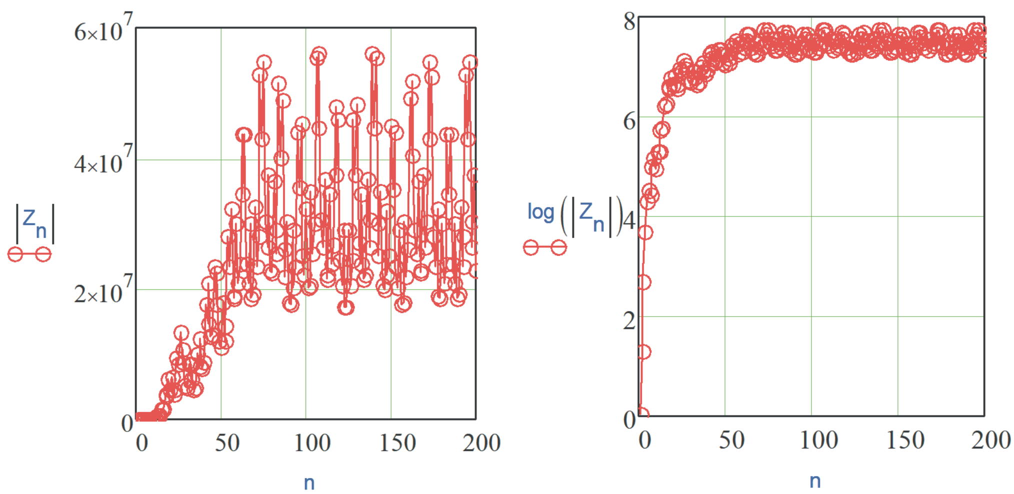
Magasabb kitevőt tartalmazó MB-algoritmussal előállított, különböző „C” eredetpontokból származó pontsorozatok (a komplex számsíkon)

A matematikában gyakran találkozhatunk felcserélhető (kommutatív) műveletekkel. Felmerülhet a kérdés: vajon felcserélhető-e az imént módosított, a gyökvonással „fékezett” Mandelbrot-képletben a hatványozás és a gyökvonás? Próbáljuk meg: az eredetpontot (C = –0,1 + 1i) változatlanul hagyva cseréljük fel a kitevők számértékeit! Legyen **EXP** = 11; és eszerint **exp** = $\mathbf{EXP}^{-1}$ = 0,090909…

Amint azt alább megfigyelhetjük, szó sincs következmények nélküli felcserélhetőségről, mert váratlan és nagyon meglepő dolog történik (1.5. ábra): a Z_n-értékek némi gyors növekedés után határértékhez tartanak, pontosabban szólva egy, az origótól jócskán távol eső határérték környékén kezdenek el oszcillálni. Eszerint a fékezett képlettel megadott leképezésnek, ha nem is fixpontja, de fix tartománya van: a $|Z_n|$-érték az iterációszám tetszőleges növelése esetén sem lép ki ennek kereteiből.

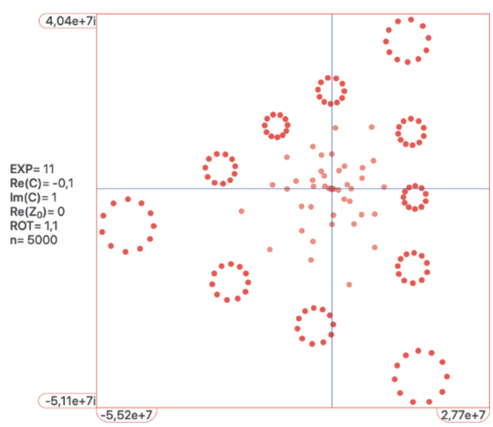
EXP = 11 **Exp= EXP^{-1} = 0,090909** **Z_0 = 0** **$Z_n = [(Z_{n}\text{-}1)^{exp} + C]^{EXP}$** **n = 1…200**
C = -0,1 + 1i

$\lvert Z_n \rvert$ =
1.056
20.546
521.331
$5.145\cdot10^{3}$
$1.998\cdot10^{4}$
$3.403\cdot10^{4}$
$2.670\cdot10^{4}$
$1.001\cdot10^{5}$
$1.482\cdot10^{5}$
$9.207\cdot10^{4}$
$2.106\cdot10^{5}$
$1.965\cdot10^{5}$
$5.544\cdot10^{5}$
$6.134\cdot10^{5}$
$1.651\cdot10^{6}$
$1.749\cdot10^{6}$
...



1.5. ábra
Felcserélt kitevőket tartalmazó MB-algoritmussal előállított pontsorozat (az iterációszám függvényében)

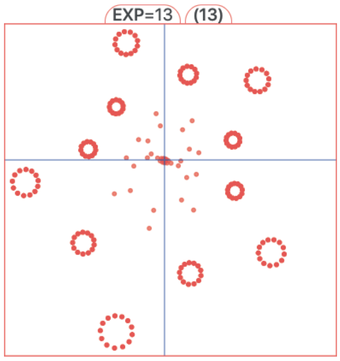
Az itt is alkalmazott logaritmikus ábrázolás még inkább szemléletessé teszi a „folyamatot”. Az összetartozó valós és imaginárius értékpárokat megtestesítő pontok sajátságos, kisebb-nagyobb köröket formázó, összességében hatalmas kiterjedésű (figyeljük meg a tengelyeken feltüntetett léptéket) háromszögszerű alakzatba rendeződnek:



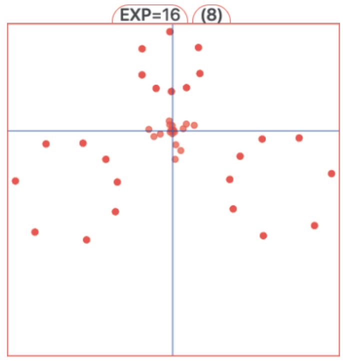
1.6. ábra
Felcserélt kitevőket tartalmazó MB-algoritmussal előállított pontsorozat a komplex számsíkon

Számláljuk meg a nagy köröket kialakító (pici köröcskék segítségével kirajzolt) képpontokat: minden nagy kört 11 képpont alakít ki, vagyis a számlálás eredményeként az általunk beírt kitevőt kapjuk!

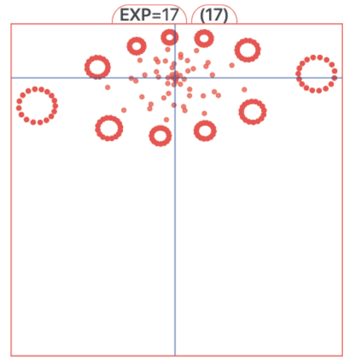
Vajon véletlen volna? Vizsgáljunk meg néhány, más kitevővel megjelenített alakzatot! (Vagyis csak az **EXP**-értékeket módosítsuk!) Hatalmas, a növekvő kitevőnek megfelelően egyre több nagyságrendet átfogó méretű körök jelennek meg a komplex számsíkon. Sok nagyságrenddel nagyobbak ezek az alakzatok, mint a klasszikus Mandelbrot-halmazból eredeztethető örvények és buborékok. (Ismét figyeljünk a koordinátatengelyeken feltüntetett léptékekre!) A körvonalakat kialakító pontocskák sűrűsége sajátos rend szerint változni látszik, a körök elrendeződésében pedig itt-ott többtengelyű szimmetriát vagy legalábbis majdnem-szimmetriát vélhetünk felismerni. Az **EXP**-értékek mellett (zárójelben) feltüntettük az egy-egy kört (vagy éppenséggel ellipszist, de ez csak a tengelyeken alkalmazott lépték megválasztásának kérdése) kialakító képpontok számát:



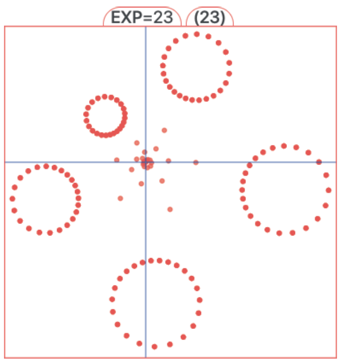
1.7. ábra



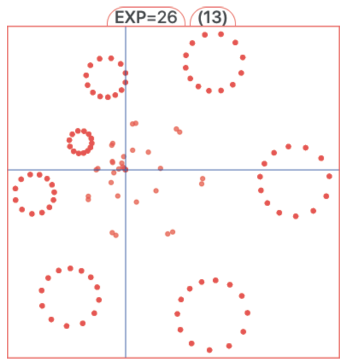
1.8. ábra



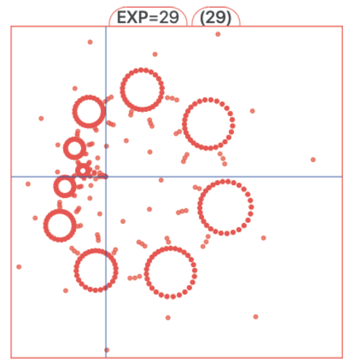
1.9. ábra



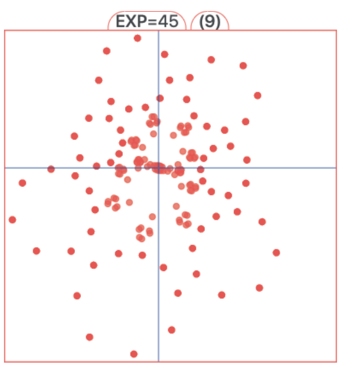
1.10. ábra



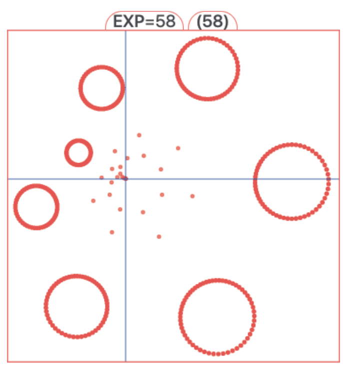
1.11. ábra



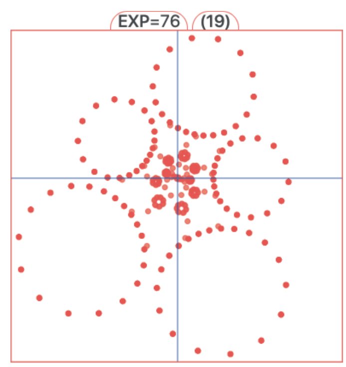
1.12. ábra



1.13. ábra



1.14. ábra



1.15. ábra

1.7. … 1.15. ábrák
Különböző EXP-kitevőket tartalmazó MB-algoritmusokkal előállított ponthalmazok („cirkál”-ok) a komplex számsíkon

Észrevehetjük, hogy (a lényegében ötletszerűen megválasztott kitevők esetén) ez a képpontszám többnyire azonos az **EXP-**kitevővel vagy legalábbis kapcsolatban áll vele, mert minden esetben osztója annak! Megfigyelhetjük azt is, hogy az ábrákon nemcsak körök láthatók: minden ábra tartalmaz az origó környékén a körökhöz nem tartozó, bizonyos mértékig örvényszerű kavargás érzetét keltő ponthalmazokat is (ezek a fix tartomány elérése előtti iterációkból – ahol n < kb. 100…200 – származnak).

Szó szerint „körvonalazódni” kezd valamiféle rend, szabályosság, periodicitás. Ideje, hogy nevet adjunk ezeknek a nyilvánvalóan valamilyen rendszer szerint csoportosuló köröket („circle”) formázó, meglehetősen „cirkalmas” alakzatoknak: Odüsszeusznak az „*Egy ölnyi végtelen*”-ben említett bolyongásaira („cirkálásaira”) és a fraktálokkal kapcsolatos eredetre utaló megnevezéssel legyen a gyűjtőnevük „***CIRKÁL***”.