Fried Ervin

ALGEBRA II.
Algebrai struktúrák

Fried Ervin

ALGEBRA II.

Algebrai struktúrák

TYPOTEX

A mű digitális formában történő megjelenését a Nemzeti Kulturális Alap támogatta.

Nemzeti Kulturális Alap

© Fried Ervin jogutódja (Fried Katalin), Typotex, Budapest, 2021
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Bírálók: dr. Csákány Béla egyetemi tanár és dr. Ágoston István egyetemi docens

ISBN 978 963 279 994 0

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról, akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
Műszaki szerkesztő: Fried Katalin

TARTALOM

ELŐSZÓ
(és használati javaslat)

Ez a tankönyv a NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ gondozásában 2000-ben megjelent ALGEBRA I. című tankönyv folytatása. Ennek megfelelően elsődlegesen az Eötvös Loránd Tudományegyetem másodéves matematikus és alkalmazott matematikus hallgatói számára készült, e szakoknak a tematikáját követi; vagyis a különböző (absztrakt) algebrai struktúrákkal foglalkozik. E könyv anyagának és módszereinek a tanulmányozásához megfelelő alapot ad az első kötet; noha annak ismerete itt nem feltétlenül szükséges. Igaz, hogy egyes tételeket itt nem bizonyítunk be ismételten.

Ez a könyv bevezető jellegű, tehát egyik struktúrafajtát sem vizsgálja részletesebben. Bevezető jellegű algebrajegyzet és -tankönyv Magyarországon (is) igen sok van; ezekről az irodalomjegyzékben adunk tájékoztatást. A felsoroltak mindegyike más és más felfogásban tárgyalja a fenti tananyagot, ezért nem lehet ezen tankönyveket rangsorolni; tulajdonképpen jól kiegészítik egymást. Ez a tankönyv az 1980-ban megjelent *Általános algebra* c. tankönyvem pótlására készült, amelynek legutóbbi kiadása is elfogyott. Tekintettel arra, hogy az idézett tankönyvhöz képest itt is lényeges változtatásokat éreztem szükségesnek, ezért nem tartottam volna jónak a fenti tankönyv újabb – lényegében változatlan – kiadását. Nem változtattam a könyv „szellemén”, a tananyagot is főleg bővítettem. Igen lényeges különbség található a két könyv szerkezetében.

Az egész kötetet öt nagyobb részre osztottam fel. Az első résznek a címe: Alapfogalmak. Ide soroltam azokat a fogalmakat és ismereteket, amelyek egyik későbbi struktúrafajtához sem kapcsolhatók külön. Ennek következtében az itteni fogalmak nincsenek is konkrét példákkal megvilágítva.

Célszerű, hogy az első rész tüzetes átolvasása csak akkor történjen meg, ha valahol később ezekre az ismeretekre szükség van. Ezt utalások, illetve a nevek jelzik. Az algebrában is, mint bármely matematikai ágazatban az okoz gondot, hogy a fogalmak csak a példák után érthetők meg, viszont a példák megadásánál szükség van a pontos fogalmakra. (Ezért szokták a jobb képességű hallgatók egy-egy tárgy lehallgatása után azt mondani, hogy most kellene ismét felvenni ezt a tárgyat.)

A második rész olyan struktúrákkal foglalkozik, amelyek egyetlen kétváltozós művelet segítségével definiálhatók; nevezetesen egy rövid félcsoport-elméleti bevezetés után a csoportelmélettel. A harmadik rész tárgya a kommutatív gyűrűk elmélete. Itt a polinomgyűrűk megértését célzó rész, valamint az egyenletekkel foglalkozó (és ehhez kapcsolódó) részek szerepelnek. A negyedik rész témája az algebrák (az ilyen nevű algebrai struktúrák). Itt a modulusok általánosabb elmélete van (hagyatkozva az első kötetbeli ismeretekre). Az algebrák fontosságát az adja, hogy ezek vektorterek és gyűrűk is egyszerre; és igen sok fontos struktúra algebra. A kommutatív esetben az algebrai egészek, a nemkommutatív esetben a csoportalgebrák vizsgálata a leglényegesebb pont. Az ötödik rész címe: egyéb algebrai struktúrák. Ez a kaleidoszkópszerű „színes forgatag” olyan témákat tartalmaz, amelyek egyrészt a már tárgyalt struktúrák „mögé” tekintenek, másrészt kapcsolatot teremtenek „nem algebrai” ágakkal.

E könyvben sokkal több feladat szerepel, mint az *Általános algebra* c. tankönyvemben. Ezek a feladatok részben az idézett könyv megírása óta eltelt idő „oktatási termékei”, részben e kötet írásakor keletkeztek. Nagyszámú hasznos és igen jó feladat található a TANKÖNYVKIADÓ gondozásában 1988-ban megjelent és BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA, CZÉDLI GÁBOR és SZENDREI ÁGNES készítette *Absztrakt algebrai feladatok* című példatárban. Igyekeztem, hogy az itteni feladatanyagnak ne legyen átfedése a fenti példatárral; nem biztos, hogy ez maradéktalanul sikerült. A feladatok az egyes alfejezetek után következnek, illetve amikor kevés feladat adódott, vagy a feladatok megoldásához a későbbi anyag ismerete is szükséges volt, akkor e feladatok több alfejezet után szerepelnek együtt. A feladatok nagy része az anyag megértését szolgálja, de szerepelnek komolyabb gondolkozást megkívánó feladatok is. Ezt külön nem jeleztem. (Kérem, aki a kötetek bármelyikében hibát talál, észrevételét jelezze e-mailben, a `fried.algebra@cs.elte.hu` címen. A talált hibák javítása – lehetőleg naprakészen – megtalálható lesz az internet `http://www.math.elte.hu/fried.algebra` oldalán.)

(Itt említem meg, hogy az első kötetben a rezultánsnál elírás történt: a 296. és 297. oldalon a_n^n és b_k^k helyesen a_n^k és b_k^n.)

Ebben a könyvben ■ jelöli a bizonyítások és □ jelöli a definíciók és a megjegyzések végét.

Remélem, hogy ezt a tankönyvet is sikerrel használhatják más szakok és más egyetemek elsősorban matematikus szakra járó, de egyéb matematikát – mindenekelőtt algebrai módszereket – tanuló egyetemi hallgatói is.

Mint az első kötetben is említettem, egyetlen könyv (de az internet sem) pótolhatja az élő előadás élményét. A matematikát csak úgy lehet megtanulni, ha (lehetőleg aktívan) nyomon követjük a gondolkodásmódot, az esetleges hibákat; és a tételeket, a fogalmakat és a bizonyításokat *in statu nascendi* (a születés pillanatában) láthatjuk. Semmi sem pótolhat egy vitát az előadóval. Az írott segédanyagra az ismeretek felfrissítésekor van szükség. Ettől függetlenül célszerűnek tartom azt, hogy a tankönyv a közölt tananyagon kívül lehetőleg gondolkozni is tanítson és magyarázzon. Természetesen ehhez szükséges, hogy a fogalmak, tételek és a bizonyítások (eltekintve néhány hosszadalmas és mechanikus bizonyítástól) mind megtalálhatóak legyenek a tankönyvben.

Az itt szereplő fogalmak és tételek nem csak az elméleti és az alkalmazott matematika egyéb területeiről származnak, hanem gyökerük számos esetben az algebrán belül van. Ennek ellenére általában lemondtam e fogalmaknak a motivációjáról, mert ez az egész tárgyalást igen hosszadalmassá és esetleg érthetetlenebbé tenné.

Köszönetnyilvánítás. E könyv készítésével kapcsolatban is szeretném hálámat kifejezni azoknak, akik velem a matematikai gondolkozásmódot megismertették és megszerettették. Így NEUKOMM GYULA gimnáziumi tanáromnak, GEHÉR ISTVÁN egyetemi diáktársamnak, FUCHS LÁSZLÓ, RÉNYI ALFRÉD, PÉTER RÓZSA és mindenekfelett TURÁN PÁL egyetemi tanáraimnak. Hálával tartozom diákjaimnak és tanítványaimnak, akik állandó javító célzattal bírálták munkáimat; és akiktől ugyancsak nagyon sokat tanultam. Ezeknek a diákoknak a száma olyan nagy, hogy őket felsorolva óhatatlanul kimaradna jó néhány, akiket nem szeretnék megbántani. Ezért inkább egyetlen nevet sem írok ide; ők úgyis tudják, hogy

róluk van szó. Hálával tartozom algebrista kollégáimnak, akik jelenlétükkel erősítették a magyar algebrista közösséget.

Vannak, akik a könyv második kötetének a közvetlen megjelenését is elősegítették. Hálával és köszönettel tartozom két lektoromnak, név szerint Csákány Bélának és Ágoston Istvánnak, akik magukra vállalták az átnézés keserveit, számos értelemzavaró hibától mentve meg a könyvet. Ha hiba maradt benne, az nem az ő munkájukat, hanem az enyémet minősíti.

Hálával tartozom a könyv előállításában való részvételéért Fried Katalinnak a tördelésért, a Nemzeti Tankönyvkiadóban Palojtay Máriának és Balassa Zsófiának, akik a könyvet gondozták. Hálával tartozom az anyagi háttér biztosításáért a Széchenyi Professzori Ösztöndíjnak, valamint a **T 029525** számú OTKA-nak. Végül, de nem utolsósorban hálával tartozom feleségemnek, Hay Erzsébetnek, az erkölcsi háttér biztosításáért, türelméért és a könyv átolvasásában nyújtott segítségéért.

Budapesten a 2002. évben

Fried Ervin

ELSŐ RÉSZ
ALAPFOGALMAK

Az algebra tárgyát röviden a következőképpen fogalmazhatnánk meg: műveletekkel ellátott halmazok vizsgálata. Noha ez a meghatározás csak durván tükrözi a valóságot, arra azonban felhívja a figyelmet, hogy az algebrai vizsgálatokban igen lényeges szerepet játszanak a halmazelméleti alapfogalmak. Ennek megfelelően az első részben először halmazelméleti alapfogalmakat vizsgálunk. Ezután az algebrai alapfogalmakra térünk rá. Végezetül a részbenrendezett halmazoknak olyan vizsgálata szerepel, amely az algebrában igen fontos.

1. Halmazelméleti alapfogalmak

Ennek a fejezetnek a legnagyobb része már ismert fogalmak átismétlése és rendszerezése. Egyedül a jólrendezéssel kapcsolatos tételek újak. (Egyes esetekben szemléltetés végett később definiált fogalmak is szerepelnek, de akkor ezek már az első kötetben is felléptek.)

1.1. Halmazok

Nem célunk, és nem is lehet itt célunk az, hogy szigorú halmazelméleti megalapozást nyújtsunk. Arra törekszünk csupán, hogy ismertessük azokat a fontosabb halmazelméleti fogalmakat és összefüggéseket, amelyeket majd felhasználunk. Lényegében az úgynevezett „naiv halmazelméletet” tárgyaljuk, és bizonyos szemléletes tényeket a későbbiekben is „gátlástalanul” felhasználunk. Egy ponton térünk el a naiv halmazelmélettől: bevezetjük az osztály fogalmát is. Erre ugyanis bizonyos algebrai vizsgálatoknál szükségünk lesz. A halmazelmélet két alapvető fogalma az *osztály* és az *elemének lenni*. Az osztály fogalmára azért van szükség, hogy olyan nagy összességeket is megengedhessünk, amelyek más összességnek nem lehetnek elemei. Ennek megfelelően, *ha az A osztály eleme a B osztálynak (jelben: $A \in B$), akkor A halmaz*. Ha a fenti kapcsolat nem áll fenn, ezt $A \notin B$ fogja jelölni (A *nem eleme* B*-nek*). *Két osztály pontosan akkor egyenlő, ha elemeik ugyanazok.*

Az alábbiakban csak halmazokra mondjuk ki állításainkat, de ezek jó része igaz az osztályokra is. A halmazok egyenlőségére vonatkozó állítás alapján minden halmaz megadható elemeivel. Ezt formailag a következőképpen tesszük. Ha mód van rá, akkor kapcsos zárójelen belül felsoroljuk a halmaz elemeit, vagy addig folytatjuk a felsorolást, amíg világosan nem látható, hogy mik a halmaz elemei. Például:

$$\{1, 5, 13\} \quad \text{vagy} \quad \{2, 4, 6, \ldots\}, \quad \text{vagy} \quad \{1, 4, 9, 16, \ldots\}.$$

Az első halmaz minden elemét felsoroltuk, a második halmaz elemei nyilván a páros természetes számok, a harmadiké pedig a négyzetszámok.

Amennyiben ilyen felsorolás nem adható meg, vagy nagyon kényelmetlen volna, akkor a zárójelen belül egy függőleges vonalat húzunk, amelynek a bal oldalán olyan elemek állnak, amelyek közül a halmaz elemei kikerülnek, jobb oldalán pedig azt az „utasítást” írjuk le, amelynek alapján a halmaz elemeit „kiválasztjuk”. Így

$$B = \{x \mid x \in A\}$$

azt jelenti, hogy $B = A$. Mint látható, *a halmazokat nagy latin betűkkel fogjuk jelölni*. Noha a halmazok elemei is halmazok, általában *a halmazok elemeinek a jelölésére kis latin betűket használunk*.

Egy halmaz elemei között nincsenek megegyezők. Amennyiben ez előfordulhat, akkor halmaz helyett *rendszerről* beszélünk. (Például egy lineárisan összefüggő vektorrendszerben ugyanaz a vektor többször is szerepelhet.) A rendszer is kifejezhető a halmazelméleti alapfogalmak segítségével (ennek a pontos mikéntjére a függvények tárgyalásánál térünk ki). A halmazjelölés bemutatott formái rendszerekre is alkalmazhatók.

Tényként fogadjuk el, hogy létezik olyan halmaz, amelynek nincsenek elemei. Mivel minden halmazt egyértelműen meghatároznak az elemei, ezért csak egyetlen ilyen halmaz van: ezt *üres halmaznak* nevezzük és a $\emptyset$ jellel jelöljük.

Megjegyezzük, hogy az üres halmaz „léte” nélkül a többi alaptulajdonságból nem lehetne következtetni arra, hogy léteznek halmazok; míg az üres halmazból már végtelen sok halmazt tudunk „konstruálni” a következőképpen:

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \quad \ldots$$

Az itt felsorolt halmazok nemcsak különbözőek, hanem elemszámuk $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ is egyre növekszik. (Feltesszük, hogy egyetlen halmaz sem eleme önmagának.)

A halmazok között az „elemének lenni” kapcsolaton kívül létezik egy másik igen fontos kapcsolat:

Az A halmaz *része* vagy *részhalmaza* a B halmaznak, ha az A minden eleme a B halmaznak is eleme. E kapcsolatot $A \subseteq B$ jelöli. Ha emellett $A \neq B$, akkor *valódi részről* beszélünk (jelben: $A \subset B$). Minden halmaznak része az üres halmaz.

Az A és B halmazok $A \cup B$ *egyesítését* és $A \cap B$ *metszetét* a következőképpen értelmezzük:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}, \qquad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B *idegen* vagy *diszjunkt* halmazok.

Beszélhetünk több halmaz egyesítéséről vagy metszetéről is, ehhez azonban szükségünk van az *indexezésre*. Ez tulajdonképpen egy függvény, ami egy I úgynevezett *indexhalmaz* minden i eleméhez hozzárendel egy A_i halmazt. (A függvényt definiálhatjuk a halmazelmélet egyéb fogalmaival, mi azonban definiálatlan alapfogalomnak fogjuk tekinteni.)

Az $\{A_i \mid i \in I\}$ halmazrendszer egyesítését, illetve metszetét a következőképpen értelmezzük:

$$\left\{\bigcup A_i \mid i \in I\right\} = \{x \mid \text{legalább egy } i \in I \text{ mellett } x \in A_i\},$$

$$\left\{\bigcap A_i \mid i \in I\right\} = \{x \mid \text{minden } i \in I \text{ mellett } x \in A_i\}.$$

Ha kétértelműség nem lép fel, akkor az $\bigcup A_i$, illetve a $\bigcap A_i$ jelölést használjuk. Ha az $\{A_i \mid i \in I\}$ halmazrendszer pontosan a B halmaz elemeiből áll, akkor $\left\{\bigcup A_i \mid i \in I\right\}$ helyett az $\left\{\bigcup A \mid A \in B\right\}$ jelölés is szerepelhet.

Egy $\{A_i \mid i \in I\}$ halmazrendszer *idegen*, illetve *páronként idegen*, ha $\bigcap A_i = \emptyset$, illetve bármely különböző $i, j \in I$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Az A halmaz $P(A)$ *hatványhalmazán* az A halmaz részhalmazainak halmazát értjük:

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Az A halmaz *partícióján* vagy *osztályozásán* az A halmaz részhalmazainak olyan rendszerét értjük, amelyek az A halmazt „egyrétűen lefedik”. Más szóval $\pi \subseteq P(A)$ partíció, ha π különböző elemei páronként idegenek és $\left\{\bigcup B \mid B \in \pi\right\} = A$. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy definíciónk szerint π elemei a „felsorolásban” többször is szerepelhetnek.

Az A és B halmazok $A \setminus B$ *különbségén* azoknak az A-beli elemeknek a halmazát értjük, amelyek nem elemei B-nek. Így $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$. Amennyiben $B \subseteq A$, akkor azt mondjuk, hogy $A \setminus B$ *a B-nek az A-ra vonatkozó komplementuma*. Ha A valamilyen természetes módon rögzítve van, akkor egyszerűen a B *komplementumáról* beszélünk; ezt $\overline{B}$ jelöli. Világos, hogy $\overline{B}$ komplementuma B.

Az A és B halmaz *szorzatát* vagy *Descartes-szorzatát*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}$$

definiálja. E halmaz elemei tehát elempárok. Hasonló elv alapján értelmezhetők a *többtényezős szorzatok* is. Például:

$$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d) \mid a \in A, b \in B, c \in C, d \in D\}.$$

A szorzatot általában $\left\{\prod A_i \mid i \in I\right\}$ jelöli, ahol az I *indexhalmaz* nem feltétlenül véges. E szorzat egy-egy elemét $(\ldots, a_i, \ldots)$ vagy valami hasonló fogja jelölni. A fenti esetben az a_i neve a szereplő elem *i-edik komponense*. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a többtényezős szorzat nem a kéttényezős szorzat ismétlése; $A \times B \times C$ elemei elemhármasok, míg $(A \times B) \times C$ elemei olyan elempárok, amelyeknek az első komponense is elempár. (Természetesen létezik közöttük egy „természetes bijekció”.)

Ha egy szorzat minden tényezője ugyanaz a halmaz, akkor *hatványról* beszélünk. Az A halmaz n-tényezős hatványát A^n jelöli ($n > 1$ természetes szám). Az $n = 1$ esetben definíció szerint legyen $A^1 = A$, ha pedig $n = 0$, akkor ugyancsak definíció szerint legyen $A^0 = \{\emptyset\}$.

1.2. Reláció és függvény

A relációkat igen általánosan lehet definiálni. Mi itt elsősorban csak speciális típusú (ún. binér) relációkkal foglalkozunk. Ezeket használják a leggyakrabban, és nekünk is főleg csak ezekre lesz szükségünk.

Az (A, B) halmazpáron értelmezett (kétváltozós) relációnak vagy A és B közötti megfeleltetésnek nevezzük az $A \times B$ halmaz tetszőleges ϱ részhalmazát. Az $A \neq B$ esetben *heterogén*, míg $A = B$ esetén *homogén* relációról beszélünk. Az utóbbi esetben azt mondjuk, hogy ϱ *reláció az A halmazon.*

(Általában, az A halmazon értelmezett n-változós reláción az A^n egy részhalmazát értjük.)

Ha $(a, b) \in \varrho$, akkor azt mondjuk, hogy *a és b relációban állnak (egymással).* Ezt a következőképpen szokták még jelölni:

$$\varrho(a, b), \qquad \text{illetve} \qquad a\varrho b.$$

(Megjegyezzük, hogy 0-változós relációt nem értelmezünk, egyváltozós reláció az A halmaz egy részhalmaza; többváltozós reláció esetén csak az $(a_1, \ldots, a_n) \in \varrho_n$ jelölést használjuk.)

Az (A, B) halmazpáron értelmezett relációk halmaza nyilvánvalóan $P(A \times B)$. E halmaz jelölésére $B = A$ esetén az $R(A)$ jelölést fogjuk használni. Az $A \times A$ halmazt *teljes* (vagy *univerzális*) *relációnak* nevezzük. Egy $\varrho \in R(A)$ reláció ($A \times A$-beli) $\overline{\varrho}$ komplementerét ϱ *komplementer relációjának* nevezzük. A teljes reláció komplementere az *üres reláció*, amit ugyancsak $\emptyset$ jelöl. Igen fontos egy A halmaz *diagonális relációja*, amit

$$\Delta(A) = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

definiál.

Egy $\varrho \in P(A \times B)$ reláció ϱ^{-1} *inverzét* a következőképpen értelmezzük:

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in \varrho\}.$$

Könnyen igazolhatók az alábbi összefüggések:

$$\overline{(\overline{\varrho})} = \varrho, \qquad (\varrho^{-1})^{-1} = \varrho, \qquad (\overline{\varrho})^{-1} = \overline{(\varrho^{-1})}, \qquad (\Delta^{-1}) = \Delta.$$

Bizonyos esetekben értelmezhetjük *relációk kompozícióját* vagy *szorzatát.* Ha $\varrho \in P(A \times$ $\times B)$ és $\sigma \in P(B \times C)$, akkor kompozíciójukat a

$$\varrho \circ \sigma = \{(a, c) \mid \text{létezik olyan } b \in B, \text{ amelyre } (a, b) \in \varrho \text{ és } (b, c) \in \sigma\}$$

összefüggés definiálja.

1.1. Tétel. *A relációk szorzata asszociatív.*

Bizonyítás. Legyen adva az előzőeken kívül még egy $\tau \in P(C \times D)$ reláció. Ha $(a, d) \in (\varrho \circ \sigma) \circ \tau$, akkor létezik olyan $c \in C$, amelyre $(a, c) \in \varrho \circ \sigma$ és $(c, d) \in \tau$. Az első összefüggésből következik, hogy létezik olyan B-beli b, amelyre $(a, b) \in \varrho$ és $(b, c) \in \sigma$. Ekkor viszont a most adott b-re $(a, b) \in \varrho$ mellett $(b, d) \in \sigma \circ \tau$ is igaz, a fent talált $c \in C$ tulajdonságai alapján. Így pedig $(a, d) \in \varrho \circ (\sigma \circ \tau)$ is teljesül. Hasonlóképpen bizonyítható a $\varrho \circ (\sigma \circ \tau) \subseteq (\varrho \circ \sigma) \circ \tau$ összefüggés is; amiből azonnal adódik a két reláció egyenlősége. ■

Könnyen igazolhatók az alábbi összefüggések:

$$\emptyset \circ \varrho = \varrho \circ \emptyset = \emptyset, \qquad \Delta \circ \varrho = \varrho \circ \Delta = \varrho, \qquad (\varrho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \varrho^{-1},$$

feltéve, hogy a felírt kompozíciók elvégezhetők (Δ a „megfelelő” $\Delta(A)$-t jelöli).

Ha $\varrho \in R(A)$ és $B \subseteq A$, akkor $\varrho|_B = \varrho \cap B^2$ a ϱ-nak a B-re való *megszorítása*. Ha $B \subseteq A$, $\sigma \in R(B)$, $\varrho \in R(A)$ és σ a ϱ-nak B-re való megszorítása, akkor ϱ a σ-nak (egy) A-ra való *kiterjesztése*.

Az alábbiakban homogén relációk néhány fontos tulajdonságát vezetjük be.

A ϱ reláció *reflexív*, ha $\Delta \subseteq \varrho$ (azaz minden $a \in A$ elemre $a\varrho a$).

A ϱ reláció *irreflexív*, ha $\Delta \cap \varrho = \emptyset$ (azaz $a\varrho a$ sohasem teljesül).

A ϱ reláció *szimmetrikus*, ha $\varrho^{-1} \subseteq \varrho$ (azaz $a\varrho b$ esetén $b\varrho a$ is igaz). Ezzel ekvivalensek a $\varrho \subseteq \varrho^{-1}$ és $\varrho^{-1} = \varrho$ feltételek is.

A ϱ reláció *antiszimmetrikus*, ha $\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq \Delta$ (azaz $a\varrho b$ és $b\varrho a$ együttesen csak $a = b$ esetén teljesülhet).

A ϱ reláció *szigorúan antiszimmetrikus*, ha $\varrho \cap \varrho^{-1} = \emptyset$ (azaz $a\varrho b$ és $b\varrho a$ sohasem teljesülhet egyszerre).

A ϱ reláció *trihotom*, ha $\{\varrho, \varrho^{-1}, \Delta\}$ partíció (azaz bármely $a, b \in A$ elemre $a\varrho b$, $b\varrho a$ és $a = b$ közül pontosan az egyik teljesül).

A ϱ reláció *tranzitív*, ha $\varrho \circ \varrho \subseteq \varrho$ (ez azt jelenti, hogy ha $a\varrho b$ és $b\varrho c$, akkor $a\varrho c$ is teljesül).

A fenti fogalmakra a gráfelméletben egyéb elnevezések is használatosak. Így, tetszőleges (homogén) relációt *irányított gráfnak* neveznek. Ha a reláció irreflexív, akkor *hurokmentes gráfról* van szó. Szimmetrikus reláció esetén *irányítatlan*, míg irreflexív és szimmetrikus reláció esetén *irányítatlan hurokmentes* gráfról beszélünk. Sok esetben az irányítatlan jelzőt nem szokták kitenni.

Az algebrában is igen fontos a *függvény* (*leképezés*) fogalma. A függvényeket a halmazelméleti fogalmak segítségével is lehet értelmezni, de – mint az előző pontban említettük – kényelmesebb számunkra, ha *a függvényeket is definiálatlan alapfogalomnak tekintjük*. Minden φ függvényhez tartozik két halmaz, a $D(\varphi)$ értelmezési tartomány és az $R(\varphi)$ értékkészlet. E kapcsolatot a következőképpen jelöljük:

$$\varphi : D(\varphi) \to R(\varphi) \qquad \text{vagy} \qquad D(\varphi) \xrightarrow{\varphi} R(\varphi).$$

$D(\varphi)$ tetszőleges a elemének a φ függvény „megfelelteti” az $R(\varphi)$ egy egyértelműen meghatározott b elemét. E kapcsolatot a következőképpen jelölhetjük:

$$b = \varphi(a), \qquad \text{vagy} \qquad \varphi : a \mapsto b, \qquad \text{vagy} \qquad (a, b) \in \varphi.$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a második jelölésnél a nyílnak „talpa” van; ezzel különböztetjük meg attól a jelöléstől, ami az értelmezési tartomány és az értékkészlet között szerepel. A harmadik jelölés arra akar rámutatni, hogy *a függvény speciális relációnak tekinthető*.

Egy $\varphi \in A \times B$ reláció akkor és csak akkor tekinthető függvénynek, ha:

1. *Minden $a \in A$ elemhez van olyan $b \in B$, hogy $(a, b) \in \varphi$.*

2. *Ha $(a, b_1), (a, b_2) \in \varphi$, akkor $b_1 = b_2$.*

A továbbiakban *egy függvény és a neki megfeleltetett reláció között nem teszünk különbséget.*

Azonnal látható, hogy a fenti 1. és 2. tulajdonságok bármelyike megmarad relációk szorzata esetén is. Ennek következménye: *két függvény relációszorzata is függvény.*

A függvények esetében beszélünk ezek *függvényszorzatáról* (*függvénykompozíciójáról*) is, amely éppen fordított sorrendben végezhető, mint a relációszorzás. Legyen $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$ két függvény. Ezek $\varphi \circ \psi$ relációszorzata azokból az (a, c) párokból áll, amelyekre alkalmas $b \in B$ elemmel $(a, b) \in \varphi$ és $(b, c) \in \psi$. Mivel itt függvényekről van szó, ezért b felírható $\varphi(a)$, c pedig $\psi(b)$ alakban, vagyis felírható a $c = \psi(\varphi(a))$ összefüggés. A kapott függvénykompozíció szokásos jelölése $\psi\varphi$, vagy $\psi \cdot \varphi$, vagy $\psi \circ \varphi$.

Érdemes jól az emlékezetünkbe vésni, hogy ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$ függvények, akkor $\varphi \circ \psi$ ezek relációszorzatát, míg $\psi \circ \varphi$ függvényszorzatukat jelöli.

Legyen $\varphi : A \to B$ tetszőleges függvény. Az A halmaz egy C részhalmaza esetén $\varphi(C)$-vel jelöljük a $\{\varphi(x) \mid x \in C\}$ halmazt. Ha speciálisan $C = A$, akkor az $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(A)$ jelölést fogjuk használni. Az $\mathrm{Im}(\varphi)$-t a φ *képhalmazának* nevezzük. Ha $\mathrm{Im}(\varphi) = B$, akkor azt mondjuk, hogy φ *szürjekció* vagy *szürjektív* függvény (magyarul *ráképezés* is használatos).

A $\varphi : A \to B$ függvény φ^{-1} inverz relációja általában nem függvény. Ez a reláció mégis igen fontos. Ha D tetszőleges részhalmaza B-nek, akkor a $\varphi^{-1}(D) = \{x \in A \mid \varphi(x) \in D\}$ halmazt, amely A-nak részhalmaza, a D *teljes inverz képének* nevezzük. A $D = \{b\}$ esetben a $\varphi^{-1}(b)$ jelölést is fogjuk használni. Ha $\varphi^{-1}(b)$-nek bármely B-beli b esetén legfeljebb egy eleme van, akkor azt mondjuk, hogy φ *injekció* vagy *injektív függvény.* Látható, hogy egy φ függvény pontosan akkor injekció, ha $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ esetén $a_1 = a_2$ is teljesül.

Nyilvánvalóan igaz, hogy *injekciók függvényszorzata injekció*, és *szürjekciók függvényszorzata szürjekció.*

Egy függvényt *bijekciónak* nevezünk, ha injekció és szürjekció: Világos, hogy az injekciók és szürjekciók függvényszorzatára az előzőekben kimondottak alapján, *bijekciók függvényszorzata bijekció.*

Végül megemlítjük, hogy az indexezés úgy adható meg egy $\varphi : I \to P(A)$ függvénnyel, hogy az $i \in I$ elemhez a $\varphi(i) = A_i$ halmazt rendeljük hozzá. Ezzel egyszersmind a halmazrendszereket is le lehet írni, hiszen az A_i és A_j elemek akkor is megegyezhetnek, ha $i \neq j$.

A fentiekben „egyváltozós” függvényekről beszéltünk, de szükség van *többváltozós függvényekre* is. Ezek azonban nem okoznak elvi gondot, mert egy többváltozós függvény nem más, mint a direkt szorzaton értelmezett egyváltozós függvény.

1.3. Részbenrendezés, elrendezés, jólrendezés

Egy halmazon értelmezett relációk között két olyan típus is van, amely számunkra igen fontos. Ezek egyike a részbenrendezés, a másik az ekvivalenciareláció.

Egy ϱ relációt részbenrendezésnek nevezünk, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

Egy σ relációt szigorú részbenrendezésnek nevezünk, ha irreflexív, szigorúan antiszimmetrikus és tranzitív.

1.2. Tétel. *Ha ϱ részbenrendezés és σ szigorú részbenrendezés egy A halmazon, akkor $\varrho \setminus \Delta$ szigorú részbenrendezés, és $\sigma \cup \Delta$ részbenrendezés. Ezen felül érvényes a $(\varrho \setminus \Delta) \cup \Delta = \varrho$ és a $(\sigma \cup \Delta) \setminus \Delta = \sigma$ összefüggés.*

Bizonyítás. $\varrho \setminus \Delta$ irreflexív és $\sigma \cup \Delta$ reflexív, tetszőleges ϱ és σ reláció esetén. Ha $(a, b) \in \varrho \setminus \Delta$, akkor $a \neq b$, amiből ϱ antiszimmetriája miatt $(b, a) \notin \varrho$. Így $\varrho \setminus \Delta$ sem tartalmazza (b, a)-t, amiből adódik a szigorú antiszimmetria. Ha $(a, b) \in \sigma$, akkor $(b, a) \notin \sigma$. Így e két pár mindegyike csak úgy lehet eleme $\sigma \cup \Delta$-nak, ha Δ-nak eleme, vagyis tényleg antiszimmetrikus relációt kaptunk.

Tegyük most fel, hogy $(a, b), (b, c) \in \varrho \setminus \Delta$. Ekkor ϱ tranzitivitásából $(a, c) \in \varrho$ következik. Mivel $\varrho \setminus \Delta$ szigorúan antiszimmetrikus, ezért $c \neq a$; és így $(a, c) \in \varrho \setminus \Delta$. Ezzel $\varrho \setminus \Delta$ tranzitivitását bizonyítottuk. Tegyük most fel, hogy (a, b) és (b, c) elemei $\sigma \cup \Delta$-nak. Ha mindketten σ-nak is elemei, akkor a tranzitivitásból következik, hogy (a, c) is eleme σ-nak. Ha egyikük eleme σ-nak, a másik pedig Δ-beli, akkor (a, c) megegyezik az (a, b) és (b, c) valamelyikével, és így ugyancsak σ-beli. Amennyiben pedig mindketten Δ-beliek, akkor (a, c) is az. Eszerint (a, c) mindig eleme $\sigma \cup \Delta$-nak, ami bizonyítja a tranzitivitást.

Az utolsó két állítás azonnal következik abból, hogy $\Delta \subseteq \varrho$ és $\sigma \cap \Delta = \emptyset$. ■

A most bizonyított tétel szerint bármely részbenrendezés egyértelműen meghatároz egy szigorú részbenrendezést, és viszont. Ha egy halmazon adott egy rögzített részbenrendezés, akkor ezt a $\leq$ jel fogja jelölni. A megfelelő szigorú részbenrendezésre pedig a $<$ jelet fogjuk használni.

Érdemes megjegyezni, hogy a ϱ részbenrendezéssel együtt ϱ^{-1} is az. A $\leq$ és $<$ relációk inverzét, megfelelően, $\geq$ és $>$ fogja jelölni.

A részbenrendezésre *tipikus példát* adnak egy halmaz részhalmazai, amelyek között a reláció a tartalmazás. Valóban, a H halmaz tetszőleges A részhalmazára $A \subseteq A$; a H halmaz A és B részhalmazaira $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ csak úgy állhatnak fenn, ha $A = B$; s ha a H halmaz A, B és C részhalmazaira $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$ igaz, akkor $A \subseteq C$ is teljesül. Azt, hogy ez a példa tipikus, úgy értjük, hogy minden részbenrendezés „elképzelhető” mint egy halmaz bizonyos részhalmazai között fennálló tartalmazási reláció. Tekintsük ugyanis a H halmaznak egy $\leq$ részbenrendezését. Feleltessük meg a halmaz tetszőleges a elemének a $H_a = \{x \mid x \leq a\}$ halmazt. Ez a megfeleltetés visszafelé is egyértelmű, hiszen $H_a = H_b$ azt jelenti, hogy $a \leq b$ és $b \leq a$, ami csak $a = b$ esetén teljesülhet. Ha pedig $a \leq b$, akkor a tranzitivitás miatt $H_a \subseteq H_b$; míg $H_a \subseteq H_b$-ből a definíció szerint következik $a \leq b$.

Ha az A halmazon adott a $\leq$ részbenrendezés, akkor ehelyett azt is mondhatjuk, hogy *$\langle A; \leq \rangle$ részbenrendezett halmaz.*

Ha $B \subseteq A$, akkor a $\leq$ részbenrendezésnek a B-re való megszorítását is ugyanígy fogjuk jelölni. $\langle B; \leq \rangle$ nyilvánvalóan szintén részbenrendezett halmaz. Az így kapott részbenrendezést *indukált részbenrendezésnek* nevezik.

Legyen B az $\langle A; \leq \rangle$ részbenrendezett halmaz tetszőleges részhalmaza. Ha $a \in B$ olyan, hogy B-ben nincs az a-nál kisebb elem (azaz $x < a$ esetén $x \notin B$), akkor azt mondjuk, hogy a a B-nek egy *minimális eleme.* (Világos, hogy egy tetszőleges, részbenrendezett halmaz bármely véges részhalmazának van minimális eleme.) Ha az $a \in B$ elem a B halmaz minden, tőle különböző eleménél kisebb, akkor a a B-nek *legkisebb eleme.* A szigorú antiszimmetria következtében egy részhalmaznak a legkisebb eleme (ha van ilyen) egyértelmű. (Legkisebb elem általában még véges részbenrendezett halmazok esetében sem létezik.) Analóg módon definiálhatjuk egy részhalmaz *maximális elemeit*, illetve *legnagyobb elemét*. Ezek nem mások, mint a szóban forgó részhalmaz minimális elemei, illetve a legkisebb eleme, ha az eredeti részbenrendezés helyett ennek inverzét tekintjük.

Tekintsük az $\langle A; \leq \rangle$ részbenrendezett halmaz egy tetszőleges B részhalmazát. Ha valamely $x \in A$-ra minden $b \in B$ esetén teljesül $x \leq b$, akkor azt mondjuk, hogy x *alsó korlátja* B-nek. Hasonlóan, ha valamely A-beli y-ra minden B-beli b esetén $b \leq y$ teljesül, akkor y *felső korlátja* B-nek. A B alsó korlátjainak a halmazát $L(B)$, felső korlátjainak a halmazát $U(B)$ jelöli. Ha az $L(B)$ halmaznak van egy u legnagyobb eleme, akkor azt mondjuk, hogy u a B-nek *legnagyobb alsó korlátja.* (Ez tehát azt jelenti, hogy u alsó korlátja B-nek és B bármely x alsó korlátja esetén $x \leq u$ – azaz u felső korlátja B alsó korlátainak.) A B részhalmaz legnagyobb alsó korlátját $\bigwedge\{b \mid b \in B\}$ fogja jelölni. ($b \in B$ helyébe bármely más olyan meghatározás írható, amelyik megadja, hogy mely b elemeket kell figyelembe venni.) Hasonlóképpen az előzőekhez, lehetséges, hogy van az $U(B)$ elemei között egy v legkisebb elem, amit a B *legkisebb felső korlátjának* nevezünk, és $\bigvee\{b \mid b \in B\}$-vel jelölünk ($v$ tehát felső korlát és a felső korlátok alsó korlátja).

Két elem, a és b legnagyobb alsó, illetve legkisebb felső korlátját $a \wedge b$, illetve $a \vee b$ is fogja jelölni.

Most egy fontos speciális esetre térünk rá:

Az $\langle A; \leq \rangle$ részbenrendezett halmazt *rendezett*, *elrendezett* vagy *teljesen rendezett* halmaznak nevezünk, ha a megfelelő $<$ reláció trihotom.

Megjegyezzük, hogy egy elrendezett halmaz minden részhalmaza is elrendezett az indukált részbenrendezésnél.

Az elrendezett halmazok további specializálását adja a következő definíció:

Az $\langle A; \leq \rangle$ részbenrendezett halmaz *jólrendezett*, ha minden nemüres részhalmazának van legkisebb eleme. Jólrendezett halmazok esetén tehát bármely kételemű részhalmaznak is van legkisebb eleme; amiből következik, hogy jólrendezett halmaz teljesen rendezett.

Tetszőleges $\langle A; \leq \rangle$ elrendezett halmaz esetén a b elemet az a elem *rákövetkezőjének* nevezzük, ha $a < b$ és bármely $x > a$ esetén $b \leq x$. Jólrendezett halmazokban minden a elemnek van rákövetkezője, ha a nem a halmaz legnagyobb eleme, nevezetesen az $\{x \mid x > a\}$ részhalmaz legkisebb eleme.

Igen fontos bizonyítási segédeszközt ad az

1.3. Jólrendezési tétel. *Minden halmaz jólrendezhető.* ■

A halmazelmélet többi axiómájával a jólrendezési tétel összeegyeztethető, de az is összeegyeztethető, hogy a jólrendezési tétel nem igaz. A mai algebrai vizsgálatoknál általában a jólrendezési tétel igazságát szokták feltenni. A jólrendezési tételt azért nem nevezzük axiómának, mert az úgynevezett *kiválasztási axiómából* szokták bizonyítani (pontosabban, azzal ekvivalens). A kiválasztási axióma „lényegében” azt mondja ki, hogy *nemüres halmazok bármely rendszerének minden eleméből egyszerre kiválasztható azoknak egy-egy eleme.*

A következőkben a jólrendezési tétel néhány olyan formáját (illetve következményét) mutatjuk be, amelyeket az algebrai vizsgálatoknál szoktak alkalmazni.

1. Transzfinit indukció

Ha egy „értelmesen megfogalmazott formula” érvényes az $\langle A; \leq \rangle$ jólrendezett halmaz első elemére és érvényes minden olyan a elemre, amelynél kisebbekre is érvényes, akkor az A halmaz minden elemére is érvényes. (Látható, hogy ez a teljes indukció általánosítása.) A transzfinit indukció tulajdonképpen nem átfogalmazása a jólrendezési tételnek, hanem olyan bizonyítási módszer, amely a jólrendezett halmazokon érvényes. Felhasználhatóságát az biztosítja, hogy minden halmaz jólrendezhető. A transzfinit indukció érvényessége azonnal következik a jólrendezett halmazokra. Tekintsük ugyanis azoknak az elemeknek a halmazát, amelyekre a tekintett formula nem igaz. Ha ennek a részhalmaznak volna első eleme, arra a feltétel szerint igaz volna a formula. Így e halmaznak nincs első eleme; ami a jólrendezettség alapján azzal ekvivalens, hogy e részhalmaz üres. Így a formula valóban érvényes a halmaz minden elemére.

Abban az esetben, amikor a természetes számok „természetes” rendezését tekintjük, akkor speciális esetként a *teljes indukciót* nyerjük. A transzfinit indukció segítségével definiálni is lehet fogalmakat. Ilyen esetben *transzfinit rekurzióról* beszélünk.

2. Zorn-lemma

A Zorn-lemma megfogalmazásához néhány fogalomra van szükségünk. Egy részbenrendezett halmaz valamely részhalmazát láncnak nevezzük, ha az az indukált részbenrendezésnél teljesen rendezett. Mint tetszőleges részhalmaznál, egy x elem felső korlátja a C láncnak, ha minden $c \in C$ esetén $c \leq x$ teljesül. Egy $\langle A; \leq \rangle$ részbenrendezett halmazt *induktívnak* nevezünk, ha minden $C \subseteq A$ láncnak létezik (A-beli) felső korlátja. A Zorn-lemma azt mondja ki, hogy minden induktív halmazban van (legalább egy) maximális elem. Abban a speciális esetben, amikor a vizsgált részbenrendezett halmaz elemei egy halmaz bizonyos részhalmazai, akkor az induktivitás azt jelenti, hogy a vizsgált részhalmazok bármely növő láncának egyesítését tartalmazza a szóban forgó részhalmazok egyike. Ez gyakran maga az egyesítés.

A Zorn-lemma ilyen speciális esete használható fel annak a bizonyítására, hogy egy vektortér minden alterének van direkt kiegészítője. Tekintsük azokat az altereket, amelyeknek az adott altérrel való metszete egyedül a nullvektorból áll. Ezek egy induktív halmazrendszert alkotnak. A Zorn-lemma miatt van tehát közöttük maximális. E maximálisok bármelyikéről könnyen belátható, hogy az adott altérnek direkt kiegészítője lesz.

3. Teichmüller–Tukey-lemma

Ennek kimondásához a véges jellegű tulajdonság definiálására van szükség. Egy halmaz részhalmazaira definiált tulajdonságot véges jellegűnek nevezünk, ha egy részhalmaznak pontosan akkor van meg ez a tulajdonsága, ha ennek minden véges részhalmaza ilyen tulajdonságú. A lemma szerint egy halmaz bármely, adott véges jellegű tulajdonsággal rendelkező részhalmazai között van maximális.

A Teichmüller–Tukey-lemma felhasználásával bizonyítható például, hogy bármely vektortérben létezik bázis. Tekintsük ugyanis a vektortérnek a lineárisan független vektorrendszereiből álló részhalmazait. A lineáris függetlenség, definíció szerint, véges jellegű. Létezik tehát maximális lineárisan független rendszer, amiről azonnal belátható, hogy bázis.

A felsorolt állítások ekvivalenciáját nem bizonyítjuk. A részbenrendezésre vonatkozó, itt felsorolt eredmények az algebrában segédeszközként használatosak. A részbenrendezésnek az algebrával való szorosabb kapcsolatára a későbbiekben még vissza fogunk térni.