Róka Sándor

ZÉNÓN FIGYELMEZTETÉSE

Róka Sándor

ZÉNÓN FIGYELMEZTETÉSE

Feladatok a matematika történetéből

TYPOTEX

A könyv megjelenését a Nemzeti Kulturális
Alap a kiadói program keretében támogatta.

Nemzeti Kulturális Alap

ISBN 978 963 493 110 2

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról, akcióinkról
a *www.typotex.hu* és a *facebook.com/typotexkiado*
oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
Szerkesztette Scharnitzky Péter és Széll Szilvia
Tördelés: Szalay Éva
Borítóterv: Faniszló Ádám
Készült a Pauker Nyomdában
Felelős vezető: Vértes Gábor

TARTALOM

BEVEZETŐ

Melyik képletet használjam? – kérdezi a diák matematikaórán a tanárától… Ha ezt kérdezi, akkor baj van. A matematika nem szabálygyűjtemény, a matematika a gondolkodás iskolája. Matematikaórán a gondolkodás örömét lehetne átélni.

Milyen a matematika? Képtelenség elmondani, saját szemeddel kell látnod.

Látni fogjuk a matematika születését, a görög csodát, és felbukkannak a matematika történetének legendás alakjai. Láthatjuk, milyen feladatokon gondolkoztak, és hogyan oldották meg azokat.

Eratoszthenész egyetlen bottal megmérte a Föld nagyságát, Arkhimédész pedig egy vonalzót mozgatva szöget harmadolt. A kétezer éven át megoldatlan kérdésektől eljutunk a Happy End-problémáig, megismerünk örökzöld feladatokat, háttérrel, történetekkel. Ha figyelünk, ha fülelünk, láthatjuk, mikor szép egy állítás, mitől szép egy bizonyítás.

A matematika módszerek összessége, egyfajta gondolkodási mód.

Esterházy Péter szerint: „Egy-egy játék az egy-egy megismerési mód. Mást tudok meg egy Fradi–MTK-meccs esetében, s mást a Banach-terek vizsgálatakor.

De a matematika nem valami távoli érthetetlenség, amelyhez külön ész kéne, ugyanavval az (egy szál) eszünkkel közelítünk a regényhez, mint őhozzá. A matematika is a létezésünkről, annak gazdagságáról ad hírt. Mindig ugyanarról beszélünk, hol Flaubert, hol Bolyai, hol Pilinszky, hol Gödel hangját halljuk.

Ha fülelünk.”

A GÖRÖG CSODA

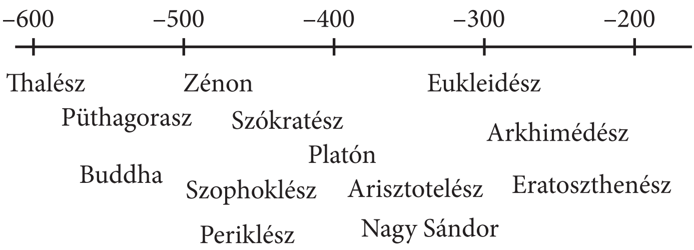
Kétezer-háromszáz évvel ezelőtt megszületett egy könyv, Eukleidész *Elemek* című műve. A *Biblia* után ez a legnépszerűbb könyv, azaz a legtöbbször kiadott könyvek sorában a második. Egyetlen műnek sem volt ehhez hasonlítható hatása az emberiség szellemi fejlődésére.

Az ókori kultúrákban korábban is voltak matematikai ismeretek: ki tudták számolni egy földterület nagyságát, és megoldottak másodfokú egyenleteket, de a görögök voltak azok, akik a bizonyítást feltalálták. A matematika a görögök találmánya. Örök érvényű az, ahogyan a geometriát felépítették.

Nagy a különbség a folyami kultúrák despotikus társadalma és a görög városállamok demokráciája között. Egyiptomban vagy a perzsák birodalmában a feltétlen engedelmesség volt az elvárt viselkedés: inkább hittek a felbontott áldozati állat májának, mint saját értelmüknek, nem volt szükségük bizonyításra. A görög demokrácia megteremtette az eszéből élő ember típusát – gondoljunk csak a leleményes Odüsszeuszra. A görög városok megbecsült polgárának számított a pedagógus, a szónok és a filozófus, akik akkor voltak sikeresek, ha igazukról meggyőzték a többieket. Érvekkel (és nem hatalmi szóval) úgy győzhetünk meg másokat, ha van néhány állítás, néhány alapelv, melyet közösen elfogadunk, és ezekre alapozva építjük fel érvelésünket. Bíróság előtt a védőbeszédet, a szenátusban a szónoklatot.

Thalész az első ismert matematikus, ő „a matematikusok atyja". Vele kezdődik a görög filozófia és a matematika, valójában az egész európai tudomány története. Thalész beszélt elsőként szögről, továbbá ő állapított meg először általános tételeket geometriai idomokról, és bizonyította is azokat. Például, ha azt tapasztaljuk, hogy két háromszög egy-egy megfelelő oldala és a rajta fekvő két-két szöge egyenlő, akkor nem is kell megmérnünk a másik két-két oldalt és a harmadik szöget, mert azoknak is egyenlőknek kell lenniük. Az egyiptomiakat a földmérés érdekelte, Thalészt a geometriai idomok természete, az azokra vonatkozó általános törvények.

Háromszáz év múlva Eukleidész tizenhárom könyvben (fejezetben) megírta az addigi eredmények összefoglalását, az *Elemek*et, a geometriai fogalmaknak és tételeknek egy olyan gyűjteményét, amelynek felépítése azóta is követendő példa más tudományok előtt. Háromszáz év alatt megszületett egy új tudomány, a matematika.



Ez a háromszáz év más területeken is csodálatos civilizációs fejlődést hozott, a művészetek és a tudományok hihetetlen csúcsokra emelkedtek. A görögök világa a szabad polgároké, a gondolkodó, a tudás és a művészetek iránt érdeklődő emberek világa volt.

Hogyan született meg a görögök matematikája? Az egyiptomi és a babilóniai matematikai tudás keletkezése érthetőbb. Egyiptomban és Babilóniában a matematika a mindennapi élet segítője volt: segítette a naptárszámítást, a kivetett adó mértékének megállapítását, a közmunkák szervezését, a piramisok építését és a kereskedelmet. Konkrét feladatokra adtak gyakorlati szabályokat, nem fogalmaztak meg általános érvényű törvényeket, és eszükbe sem jutott, hogy bizonyítsanak valamit. A Kelet kérdése a *hogyan?* volt. A görögöké a *miért?* – kíváncsiak voltak, fontos volt számukra a világ megismerése, megértése.

A görög csoda okait máig keressük. Fontos az is, hogy míg korábban a tudás megőrzése és fejlesztése egy kiváltságos réteg feladata volt, addig a görögöknél a tudás nyilvánossá vált. Megfigyelhető, hogy a tudományok felvirágzása együtt járt a demokrácia terjedésével, például a felvilágosodás hozta el a zsenik évszázadát.

A geometriai fogalmak egyik kiindulópontja lehet a fölöttünk lévő csillagos égbolt. A csillagok segíthettek minket a pont fogalmához, a csillagképekben megjelennek a háromszögek, négyszögek. Másféle matematikát építenénk, ha olyan világban élnénk, amelyben a dolgok alakja és az alakzatok szerkezete állandóan változik.

Eukleidész könyvében a geometria felépítése a mintaszerű. A felépítés azóta is példaként szolgál a tudósok számára. Ezt a hatást láthatjuk például abban is, hogy a felvilágosodás korának filozófusa, Spinoza Eukleidész módszerét követi fő műve, az *Etika* megírásakor: minden fejezet definíciókból, tételekből és ezek bizonyításaiból áll.

Milyen ez a felépítés? Elmondja, hogy mi egy-egy szónak a jelentése – ezek a definíciók. Ha pontról, egyenesről vagy körről beszél, akkor legyen az egyértelmű, hogy mire gondoljunk. Ezt követően megfogalmaz néhány egyszerű állítást (axiómát, posztulátumot), amelyeket igaznak fogadunk el. A tételeket ezekre építi, vagyis olyan állításokat fogalmaz meg, amelyek ezekből levezethetők. Bebizonyítja a tételeket; jellegzetes bizonyítási módja az indirekt gondolkodás. Megvizsgálja, mi történik abban az esetben, ha az állítás nem igaz, és mivel ez ellentmondáshoz vezet, így a kezdeti feltevés hamisnak, tehát az állítás igaznak bizonyul.

Ez a felépítés, ez a módszer könnyen elvarázsolja a figyelmes olvasót. Einstein így emlékszik erre a találkozásra: „Tizenkét éves koromban egy […] csodát tapasztaltam meg; ez egy kis könyvvel kapcsolatos, amely az euklideszi síkgeometriát tárgyalta, s amely az iskolaév kezdetén került a kezembe. Ebben olyan állítások szerepeltek, mint például az, hogy a háromszög három magasságvonala egy pontban metszi egymást. Ezek az állítások egyáltalán nem voltak kézenfekvőek, mégis oly biztosan be lehetett őket bizonyítani, hogy semmiféle kétség sem merülhetett fel velük szemben. Az, hogy az axiómát bizonyítás nélkül kellett elfogadni, egyáltalán nem zavart."

Newton állítólag csak egyszer nevetett életében, mégpedig egy kérdésre adott válasz helyett. Egyik tanítványa Cambridge-ben azt kérdezte tőle, vajon érdemes-e Eukleidész

Elemek című munkáját elolvasni. Newton ezen a lehetetlen kérdésen csak nevetni tudott, mert ha valaki a tudományok iránt érdeklődik, akkor Eukleidész módszerét ismernie kell.

Kant híres mondása: „Két dolog van, aminek elmém soha meg nem szűnő tisztelettel adózik: a fölöttem elterülő csillagos égbolt és a bennem rejlő erkölcsi törvény." Értjük, talán értjük, mire gondolt a filozófus. Eukleidész szerint: „Minden háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik." Világos, mit mond a matematikus.

A matematika állításai maradandók és érthetőek, míg a tudományokban az elméletek állandó megújulása a jellemző. Eukleidész igazságai örök érvényűek, míg Ptolemaiosz geocentrikus világképe történelmi emlék. Eukleidész minden gondolatát értjük, míg Arisztophanész tréfáinak lehetnek olyan utalásai, amiket mi már nem értünk.

Míg a tudomány a létező világot, addig a matematika a lehetséges világot vizsgálja.

A bizonyítások során nem hivatkozhatunk a mindennapi tapasztalatainkra, hanem csak az axiómákra és a már bebizonyított tételekre. Nem a hétköznapi tapasztalásokból következnek a tételek. Inkább fordított a helyzet: az ész világa ellenőrzi a tények világát. Anélkül, hogy papírra vetnénk, tudjuk azt, hogy ha egy háromszögben megrajzoljuk a súlyvonalakat, azok egy pontban metszik egymást. Tudjuk, hogy ha megmérjük egy háromszög szögeit, azok összege mindig 180° lesz.

Az előbbieket a tapasztalat útján ellenőrizhetjük, de arról, hogy végtelen sok prímszám van, nem tudunk meggyőződni. Eukleidész ezt is bebizonyította, méghozzá a görög matematika csodafegyverével, az indirekt bizonyítással. Abból a feltevésből, hogy véges sok prím van, mondjuk kétezer, és nincs több prím, ellentmondásra jutott. Ebből pedig az következett, hogy végtelen sok prímnek kell lennie.

Az *Elemek* első könyve a definíciókkal kezdi. Például: „Pont az, aminek nincs része." „A vonal szélesség nélküli hosszúság." „Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak, és mindkét oldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak."

A definíciók feladata az, hogy rögzítsék a fogalmak jelentését, amely nem feltétlenül azonos a hétköznapi szóhasználattal. Utánuk következnek a posztulátumok és az axiómák. E két csoport közötti különbség már az ókorban elhomályosult, általában a bizonyításra nem szoruló állításokkal azonosították őket. Az axiómák olyan alapigazságok, melyek a gondolkodásunk természetéről szólnak, míg a posztulátumok a geometriai látásmódról. Eukleidész a posztulátumokat óvatosan fogalmazza meg. Nem kétségbevonhatatlan kijelentésként közli őket, hanem azt mondja, hogy „legyen megengedett: bármely pontból bármely pontba egyenes vonalat húzni" vagy „bármely középponttal és bármely távolsággal kört rajzolni". Az axiómák ezzel szemben ilyenek: „Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők." „Az egész nagyobb, mint a része."

A posztulátum olyan követelmény, amelynél a görögök nem voltak biztosak abban, hogy a másik fél (akinek elmondanak egy bizonyítást) igaznak tartja azt. Ezek a posztulátumok a mozgáshoz, a változáshoz kapcsolódnak, amelyet óvatosan kell kezelni – erről a görögöknek Zénón óta megalapozott kétségeik vannak…

Néhány tétel az *Elemek*ből:

- „Ha két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők."
- „Minden háromszögben a nagyobb oldal nagyobb szöggel szemben fekszik."
- „Minden háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik."
- „Minden háromszögben két oldal (együtt) nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket."
- „A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemközti oldalra emelt négyzet egyenlő a derékszöget közrefogó oldalra emelt négyzetek összegével." (Pitagorasz-tétel)
- „Ha egy háromszögben az egyik oldalra emelt négyzet egyenlő a háromszög másik két oldalára emelt négyzetek összegével, akkor derékszög a háromszög másik két oldala által közrefogott szög." (A Pitagorasz-tétel megfordítása)
- „Egy körben a középponti szög kétakkora, mint a kerületi, ha e szögek ugyanazon az íven nyugszanak."
- „Írjunk adott körbe egyenlő oldalú és egyenlő szögű tizenötszöget!"
- „Prímszámból prímszámok bármely adott sokaságánál több van."
- „Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz."
- „Mutassuk meg, hogy a négyzetekben az átló lineárisan összemérhetetlen az oldallal." (Másképp: a $\sqrt{2}$ szám irracionális.)

- „Azt állítom, hogy az említett öt testen kívül nem szerkeszthető más egyenlő oldalú, egyenlő szögű és egymással egyenlő lapok által közrefogott test.” (Más szavakkal: csak ötféle szabályos test van. Ezek a tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder és ikozaéder.)

Miért különleges könyv az *Elemek*? Mert a világ megismerésének, a biztos igazságok megtalálásának módszerét, eszközét teszi elénk. Gondolkodásunk terében egy új világot nyitott meg. Vajon miért nem született az elmúlt 2300 évben egy új *Elemek*?

Eukleidész példát mutat arra, hogy ha kiválasztjuk az axiómákat, a természet néhány igaznak tartott alapelvét, arra egy biztonságos világot lehet építeni. Ha nem kételkedünk az alapelvek igazában, akkor a felépített világban sem kételkedhetünk.

A bizonyítások megértése fejleszti gondolkodásunkat. Egy tételt akkor értünk meg igazán, ha tudjuk, mi a lényeges pont a bizonyításában. Mi ad motivációt egy tétel megfogalmazásához, és hogyan lehet rájönni annak egy bizonyítására? Hogyan lehetne másképp bebizonyítani ugyanazt? Magyarázzuk meg, hogy milyen eszközt és miért használunk! Ne csak azt lássuk, hogy logikailag helyes valami, hanem azt is, hogy szükség van az adott lépésekre! Ha ezekben jártasabbá válunk, akkor szerencsésebbek lehetünk a világ megértésében is.

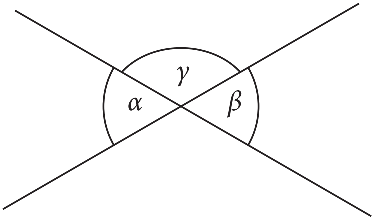
Hogyan bizonyítottak a görögök? Hogyan bizonyított Eukleidész?

Az *Elemek* I. 15. tétele így hangzik: „Ha két egyenes metszi egymást, a keletkező csúcsszögek egyenlők.”

Kövessük a bizonyítást a mai jelölésekkel, szóhasználattal!

Az I. 13. tétel alapján $\alpha + \gamma = 180°$.

Ugyanígy $\beta + \gamma = 180°$.



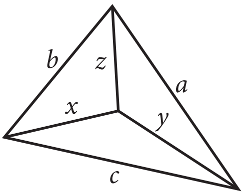
Az 1. axióma szerint: amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.

Ezért $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

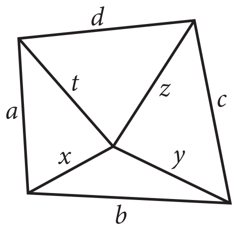
Vegyük észre, hogy az új egyenlőség mindkét oldalán szerepel a γ szög. Használhatjuk a 3. axiómát: ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők. Vonjuk ki az egyenlőség mindkét oldalából a γ szöget, ezután ez marad: $\alpha = \beta$. Éppen ezt akartuk bizonyítani: a két csúcsszög, α és β egyenlő.

A csúcsszögek egyenlősége ránézésre igaznak látszik, valószínűleg nem éreztük, hogy szükség van a bizonyításra.

Bizonyítani kell az igaznak látszó állításokat is. Például gondolhatjuk azt, hogy egy háromszög / konvex négyszög belső pontját összekötve a csúcsokkal, ezen szakaszok összege kisebb, mint a háromszög/négyszög kerülete.



$x + y + z < a + b + c$



$x + y + z + t < a + b + c + d$

Igaznak gondolhatjuk mindkét állítást, pedig csak az egyik igaz.

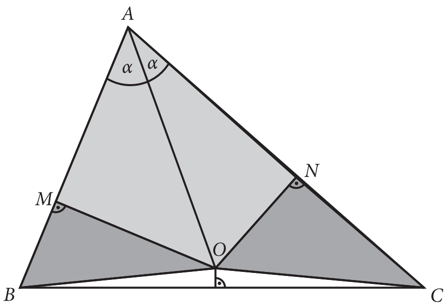
Ajánlott feladat

1. Az előbbi két állításból melyik igaz, és melyik hamis?

A bizonyításoknál figyelmesen kell lépkednünk, mert hibázhatunk. Eukleidésznek volt egy könyve, amelyben hamis bizonyításokat gyűjtött össze. Nézzük ezek közül az egyiket!

„Tétel”: Minden háromszög egyenlő szárú.

Bizonyítás: Az *ABC* háromszög *A* csúcsából induló szögfelezője és a szemközti oldal felezőmerőlegese az *O* pontban metszi egymást.



Az *AOM* és az *AON* derékszögű háromszögek egybevágók, hiszen közös az átfogójuk, és ugyanakkorák a szögeik. Ezért $AM = AN$.

A szögfelező minden pontja ugyanakkora távolságra van a szög két szárától, így $OM = ON$. Továbbá az oldalfelező merőleges minden pontja ugyanakkora távolságra van az oldal két végpontjától: $OB = OC$. Ezek miatt az OMB és az ONC derékszögű háromszögek egybevágók, tehát $MB = NC$.

Az $AM = AN$ és $MB = NC$ egyenlőségek miatt $AM + MB = AN + NC$, tehát $AB = AC$.

Beláttuk, hogy az ABC háromszög két oldala egyenlő, $AB = AC$. Valahol tévedtünk.

Ajánlott feladat

2. Hol a hiba az előző bizonyításban?

Ez is megerősít minket abban, hogy körültekintően kell figyelnünk a lépéseinkre, nehogy eltévedjünk.

Zénón szerepe

Hogyan lett a matematika bizonyító tudománnyá? Fontos szerepük lehetett ebben az ókori filozófusoknak, akik ezekre a kérdésekre keresték a választ: Mi az emberi gondolkodás? Mit jelent az, ha azt mondom, hogy valami mozog? Mi a mozgás?

Zénón a mozgással kapcsolatban több paradoxont is megfogalmazott. Hol mozog a mozgó test? Ott, ahol van, vagy ott, ahol nincs? Ahol van, ott nem mozoghat. Ahol nincs, ott sem. Tehát nem mozoghat a test, a mozgás elgondolhatatlan. Nincs mozgás.

Nézzünk egy másik esetet, Akhilleusz és a teknősbéka versenyfutását. A gyorslábú Akhilleusz tízszer gyorsabban fut, mint a teknősbéka, ezért tíz méter előnyt ad neki. Míg Akhilleusz lefutja ezt a tíz métert, egyet halad előre a teknőc; míg lefutja Akhilleusz ezt a métert, tíz centimétert halad előre a teknős, és így tovább a végtelenségig. Amíg Akhilleusz lefutja azt a távot, amennyi előnye a teknőcnek volt, addig a teknőc egy keveset előrehalad, így újabb előnyt szerez. Utoléri-e valamikor? Tudjuk, hogy igen, de a gondolatmenetünk szerint mindig a teknős vezet.

Ha valami mozog – mondjuk *A* pontból *B*-be –, mielőtt elérné célját, a fele utat kell megtennie. De mielőtt ezt a fele utat befutná, ennek a felét, az egésznek a negyedét kell megtennie. És így tovább. A mozgás el sem kezdődhet.

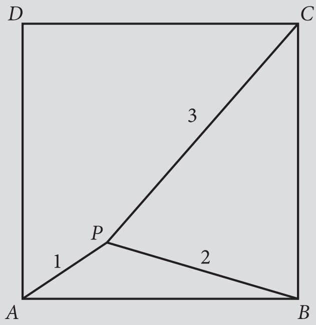
A paradoxonok mögött alapvető kérdések rejlenek: a végtelenség és a folytonosság problémája.

Zénón nem a mozgás lehetőségét tagadta, inkább arra figyelmeztetett, hogy a gondolkodásmódunk a mozgás megértésében ilyen lehetetlenségekhez vezet. Talán azért látunk ellentmondásokat, mert tévesen gondolkozunk a mozgásról, mert nem olyan a tér, mint gondoljuk. Ha ezt tisztázzuk, akkor valami fontosat tudunk meg a körülöttünk lévő világról.

Zénónnak fontos szerepe volt abban, hogy az ókori görög világban megszületett a matematika, hiszen a helyes gondolkodás módszereit, a helyes következtetések formáit kereste, ami biztos igazságokhoz vezet.

Ajánlott feladat

3. Az $ABCD$ négyzetnek P olyan belső pontja, melyre $PA = 1$, $PB = 2$ és $PC = 3$. Mekkora az $APB\angle$?



A feladatot azzal az útmutatással tűzték ki 1939-ben az *American Mathematical Monthly* folyóirat probléma-rovatában, hogy a megoldáshoz csak Eukleidész I. könyvében lévő eszközöket használjunk.