Russelltől Gödelig

Russelltől Gödelig

Esszék a matematika filozófiai problémáiról

Szerkesztette Molnár Zoltán Gábor

Írta
Lévai Emese Sarolta
Márton Gábor
Molnár Zoltán Gábor
Varga Bálint

TYPOTEX

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Regionális Fejlesztési Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

SZÉCHENYI 2020

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

ISBN 978 963 493 090 7

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Fried Katalin
A borítót készítette: Szalay Éva
Nyomta és kötötte: László András és Társa Nyomdaipari Bt.
Felelős vezető: László András

Tartalom

Előszó

Ez az esszékötet a Műegyetem Matematika Intézetének *A matematika filozófiai alapjai és alkalmazásai* című, szabadon választható tárgyának keretében feldolgozott írásokról tartalmaz értelmező, elemző tanulmányokat. A matematikafilozófiának és a nyelv analitikus filozófiájának mintegy egy évszázadát ölelik fel azok a nevezetes művek, amelyekről a szerzők a gondolataikat tárják az Olvasó elé. Ezek közül időrendben az első Gottlob Frege 1882-es *Jelentés és jelölet*e, az utolsó William W. Tait 1980-as *Finitizmus* című írása. Az egyik szempont, ami szerint kiválasztottuk azokat a munkákat, amikről elemzést készítettünk, hogy legyen bennük legalább egy analitikus filozófiailag értékelhető érv. Ez kétségkívül egyfajta pedagógiai/népszerűsítő szempont, hiszen azt szerettük volna megmutatni, hogy a matematikafilozófiának van olyan része (és nem is elhanyagolható része), amelyben a tanulmányok a bennük szereplő összetett érvelések folytán intellektuális kihívást jelentenek mind az analitikus filozófia, mind a matematika, illetve az informatika kedvelői számára. A kötet szerkesztője (és a kilencből hat esszéjének szerzője) **Molnár Zoltán Gábor**, a BME Algebra Tanszékének munkatársa, az említett kurzus vezetője és az egyetem matematikafilozófiai témájú tárgyainak kezdeményezője és szervezője.

Frege *Jelentés és jelölet*e (1982) kiváló reprezentánsa Frege tanulmányainak, és jól modellezi a téma analitikus megközelítését. Nemcsak e filozófiai irányzat legelső képviselőjeként tekinthetünk rá, hanem írásaival a nyelvről való elemző gondolkodásunkhoz is újszerűen járult hozzá. A jelkapcsolat jelölőre és jelöltre, illetve jelentésre való felbontása máig ható gyümölcsöző keretelmélet, még akkor is, ha számos ponton kritizálható vagy a bemutatott kezdeti állapotában finomításra szorul. A logika vagy informatika iránt érdeklődők számára azért érdekes, mert először veti fel, hogy az igazságértékek (a Boole-féle igaz és hamis értékek) szemantikai, azaz formai, felszíni nyelvi megjelenésen túli minőségek, és voltaképpen ugyanolyan tárgyak, mint amikre a főnevek szoktak referálni. Mindez számára nem megmagyarázatlan előfeltevés, hanem jelelméletéből érvelés útján adódik. Frege tanulmányának másik fontos módszertani eredménye, ahogy a filozófiai problémákhoz közelít és oldja meg őket logikai eszközökkel.

Bertrand Russell *A denotálásról* (1905) című írása szintén az analitikus filozófia születéséhez köthető alapvető tanulmány. Dekonstruktivista, amennyiben kifejezések egy jól definiált körére, a denotáló kifejezésekre vonatkozólag igazolja Frege jelentéselméletének tarthatatlanságát, és egy összetettségi fokkal alacsonyabb elméletben látja a Frege által vázolt problémákat magyarázhatónak. Továbbá ennek kapcsán egy páratlanul izgalmas és száz éven át vitatott gondolatmenetet követ, aminek az összetettsége közel áll egy átlagos matematikai bizonyítás mélységéhez és szerkezetéhez. Erről szóló írásunkban tehát nem véletlenül az úgynevezett *Gray elégiája érv* elemzése áll a középpontban.

Kurt Gödel *Néhány tétel a matematika megalapozásáról* című 1952-es előadásának publikálásra nem került szövege már egy olyan kor nyelvfelfogását tükrözi, ahol a formális nyelvek elméletének legelső komoly eredményei megjelentek. Gödel úgynevezett Gibbs-előadása nem csak apologetikai munka a matematikafilozófiai realizmus vagy platonizmus mellett. Számos olyan gondolatot tartalmaz, ami a modern kognitív tudomány számára is érdekes lehet, tekintettel arra, hogy az elme komputációs elmélete mellett hoz fel érveket, ellenérveket, és ütközteti őket izgalmas gondolatmenetekben.

Gödel, Church, Turing és Kleene algoritmikus és bizonyításelméleti eldönthetőséggel kapcsolatos eredményeit, az ezeket tartalmazó legfontosabb cikkeket mutatja be **Márton Gábor** informatikus *Az „aritmechanikus” gépek tündöklése és alkonya* című esszéjében. Gondos precizitással tárja az Olvasó elé ezeknek az eredetiben ritkán olvasott, de sokszor emlegetett ’30-as, ’40-es évekbeli munkáknak az alapvető mondanivalóját. Körültekintő módon hasonlítja össze az eredményekben szereplő úgynevezett átlós módszert, és szintetizálja a leírtakat egy érdekes gondolatkísérletben.

Tait *Finitizmus* (1980) című írása nem pusztán önmaga jogán fontos, hanem azért, mert egy olyan matematikafilozófiai irányzatot helyez kontextusba (David Hilbert finitizmusát), ami iránytűként mutatott a jövőbe a ’20-as évek matematikai logikai kutatásait illetően. Lényeges tehát megértenünk, hogy miért ez lehetett az az alap, amire Hilbert alapozni szándékozta volna az ellentmondásmentes matematikát. Bár Tait kiváló értője a göttingeni iskolának, a cikk vitatott abban a tekintetben, hogy történetileg hűen írja-e le Hilbert elképzeléseit, már csak azért is, mert nem tudjuk pontosan, Hilbert mit értett finitizmus alatt. Másfelől, Tait gondolatmenete túlságosan vázlatos. Ám mégis, kiváló racionális analízisét adja egy lehetséges finitizmus-felfogásnak, amely az esszé fő gondolata.

Kalmár László *A Church-tézis plauzibilitása ellen*i írása (1956) a következő esszénk tárgya. Ugyan néhány évvel később Elliot Mendelsohn megtalálta érvelésében a matematikai hibát, ez nem vesz el az írás jelentőségéből. Kalmár László ugyanis nem matematikai tételt mondott ki, hanem tézist állított fel, vagy ha úgy tetszik, kutatási programot vázolt, és azt a feladatot hagyta hátra az utókorra, hogy az általa megadott, számára algoritmusnak tűnő műveletleírást próbálja meg megérteni és valamilyen új algoritmusfogalomba illeszteni.

Szintén Gödel Gibbs-előadásáról írt esszét a kötetben **Lévai Emese Sarolta** BME közlekedésmérnök hallgató, aki azt vette észre, hogy az előadás sajátos dramaturgiával rendelkezik, és beazonosíthatók azok a szerepek, amelyeknek a bőrébe bújva Gödel eljátssza a vitát a platonizmus és az antirealizmus, a komputacionalizmus és a vitalizmus álláspontjai között. Hogy az előadás valóban tartalmaz efféle dramatikus elemeket, arra már Gödel egyik életrajzírója is felhívta a figyelmet. Az esszé rendkívül jól ragadja meg az utókor benyomását azzal kapcsolatban, hogy vajon miért nem gondolta publikálni Gödel ezt az előadását folyóiratcikk formájában.

A logika analitikus filozófiájából nem maradhat ki Michael Dummett, akinek *A Gödel-tétel filozófiai jelentőségéről* (1963) című cikkét tárgyalja kötetünk következő esszéje. A cikkben Dummett azzal foglalkozik, hogy miként kell értékelnünk azt az érzetünket, hogy a Gödel-mondatot annak ellenére véljük igaznak, hogy nem bizonyítható. A matematikafilozófiában ez a kérdés a deflácionizmus álláspontjához kapcsolható, ami szerint az igazság nem szubsztanciális fogalom. Ám kognitív vonatkozásaiban is érdekes lehet az írás: vajon van-e az agynak olyan képessége, ami többet tud, mint a mechanisztikus igazoló eljárások.

Esszékötetünk utolsó írásaként Hilary Putnam *Agyak a tartályban* (1981) című munkáját értelmezi és elemzi **Varga Bálint** kognitív tudománnyal foglalkozó kutató. Az izgalmas elmefilozófiai tanulmány azt a kérdést állítja középpontba, hogy nem lehet-e, hogy valójában csak agyak vagyunk egy tartályban, és egy gonosz tudós hozza létre azokat a mentális képeket, amik számunkra úgy tűnnek, mintha az általunk szokásosan érzékelt külvilágból érkeznének.

Reméljük, hogy kötetünket haszonnal forgatják majd akár a szervezett felsőoktatásban tanuló érdeklődő hallgatók, akár azon kívüli Olvasók, vonzódjanak bár a filozófiához, a kognitív tudományhoz, a matematikához vagy az informatikához.

Molnár Zoltán Gábor

Budapest, 2019. december 1.

Gottlob Frege: *Jelentés és jelölet*

MOLNÁR ZOLTÁN GÁBOR

Bevezetés

Gottlob Frege *Jelentés és jelölet* című munkája a filozófia ún. nyelvi fordulatának egyik legjelentősebb alapműve, amely erős lökést adott a később analitikus filozófiának nevezett irányzat fejlődésének. Ahogy az irányzat iránt érdeklődő matematikusok tartják, az analitikus filozófia a filozófia azon megközelítési módja, amelyiket a matematikusok is értenek. Mindez annak köszönhető, hogy a filozófia nyelvi fordulatára éppen az jellemző, hogy egyfelől pontosan megfogalmazott érvekkel (logikai modellel) kísérli meg körbekeríteni a klasszikus filozófiai problémákat, másfelől különös figyelmet fordít az állítások nyelvi megfogalmazására, mint az egyetlen olyan megnyilvánulási formára, amely mintegy természettudományos objektivitással vizsgálat tárgyává tehető.

Nyugodtan ki lehet jelenteni, hogy ugyanabban az időben, amikor a filozófia nyelvi fordulata lezajlott, a matematika is hasonló átalakuláson ment át. Míg az analitikus filozófia a problémák természetes nyelvi megfogalmazásának vizsgálatát állította a középpontba, addig a matematikában egy formális-szimbolikus átalakulás ment végbe a tudományos nyelvhasználat terén. Nem arról van pusztán szó, hogy ha beletekintünk egy matematikakönyvbe, akkor képletek sokaságát látjuk. Ez a természettudományos irodalomra is érvényes, bár kétségkívül leginkább a matematikára jellemző. Valójában arról van szó, hogy Gottlob Frege, David Hilbert, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, Alfred Tarski, Alonso Church és még sokan mások munkássága eredményeképpen a matematikai állítások formális megfogalmazásai a matematikai vizsgálatok tárgyaivá válhattak, és tisztázni vagy legalábbis modellezni lehetett a bizonyítás mint a matematikai megismerés eszközének, a matematikai igazságkeresés technikájának működését és természetét. Amíg tehát a nyelvi fordulat a filozófiában olyan kérdésekben eredményezett erős előretörést, mint a szkepticizmus (agyak vagyunk-e egy tartályban?), a dualizmus (a test és az elme különbözőségének problémája) vagy a platonizmus (miből származik az absztrakt fogalmak objektivitása?) kérdése, addig a matematikában a nyelvi fordulat az axiomatizálás, a levezetés, a matematikai igazság fogalmait tisztázta a korábbihoz képest messze megnyugtatóbb eredménnyel, bár nyilván nem pontot téve a kutatás végére.

Filozófiai, sőt matematikafilozófiai és logikai téren Gottlob Frege tevékenysége úttörő jellegű, de az a munka, amit a beszélt, írott, illetve formális nyelvi elemekre vonatkozó alapfogalmak bevezetésével végzett, nem egyedülálló. Aki a matematika filozófiája iránt érdeklődik, de rossz élményei vannak a nyelvtanérettségi „Jel és jelrendszer" című tételéhez kapcsolódóan, az könnyen érezheti, hogy ő Frege munkásságával inkább nem foglalkozna. Már csak ha a címben szereplő „jelölet" szót vesszük, még érthetetlenebbnek találhatjuk, mint a „jelölő", illetve a „jelölt" szavakat, amik a nyelvtantételben szerepelnek. Hozzávetőlegesen Frege kutatásaival egy időben, a 19. század végén jött létre a jel tudománya, a szemiotika. Az említett elméleti anyag valami olyan képet sugároz a jelről, mintha ez egy egyszer s mindenkorra felépített és lezárt tudomány lenne. Messze nem ez a helyzet azonban. A jelek viselkedése egy széles problémakör, amely megoldásért kiált, és az elméletek, amik a probléma megoldását szándékozzák szolgáltatni, pusztán modellek, keretek, amelyek egyes vonatkozásokat magyaráznak, másokat nem. A következő két bekezdés dióhéjban összefoglalja azt a Frege korabeli két szemiotikai megközelítést, amelyeknek forrását és célját meg nem nevezve még nyelvtanórán is tanultunk, de csak a szerencsésebbeknek adatott meg, hogy problémacentrikusan és nem kész, bemagolandó tananyagként lett földolgozva.

Ferdinand de Saussure elsősorban a beszélt nyelv jelelméletével foglalkozott. Ő binér relációként értelmezte a nyelvi jelölés jelenségét, amely tehát két dolgot, a jelölőt és a jelöltet kapcsolja össze: a hangképet és a fogalmat. Saussure szerint tehát a jel maga egy szétválaszthatatlan pár. Az egyik tagja a hangmintázat (tehát nem kifejezetten a fizikai hang, hanem egy struktúra, amelyet a hangban az elme képes felismerni), a másik tagja pedig egy fogalom, amelyet nem definiál pontosan, de számos példával körülír. Például a „ló" szó (mint hangmintázat) a ló fogalmával kapcsolódik össze. A ló fogalma azonban nem jól definiált valami: más és más embernek más gondolat jut az eszébe akkor, amikor a pacira gondol. Nagyon érdekes, hogy Saussure úgy gondolja, hogy a jel két komponense, a jelölt és a jelölő nem szétválasztható. Ahogy fogalmaz:

> Nyelv nélkül a gondolat homályos, feltérképezetlen köd. Nincsenek előzetesen létező ideák és semmi sem elkülöníthető a nyelv megjelenése előtt. [Saus, 112. o.]

És fordítva: a nyelv ismerete nélkül a beszédhangot nem érezzük tagoltnak és nem ismerjük föl értelmesként. A jel felismerése tehát pszichológiai folyamat. Mindezek mellett a jel mint kapcsolat önkényes, egészen pontosan, nincs természetes kapcsolat a jelölő és a jelölt között. Bármely fogalom kapcsolódhat egy jelölési jelenség által egy hangformához – mindazonáltal ezt a kapcsolatot a nyelvközösség a közös beszélt nyelv használata által rögzíti, és nem a beszélő dönt önkényesen a jelkapcsolatról. Saussure ezen gondolatait persze nem kell készpénznek vennünk, sok mindent megmagyaráznak, de megint sok mindent nem. Ez az elmélet számunkra azért jó, mert lesz összehasonlítási alapunk a Frege által a *Jelentés és jelölet*ben vázolt nyelvfilozófiai kerethez képest.

A másik megkerülhetetlen jelelmélész Charles Sanders Peirce, aki triadikus relációként értelmezte a jelkapcsolatot, vagy ahogy ő nevezte, a szemiózist. Ám ne várjunk olyan érthető megfogalmazást tőle, mint akár Saussure-től, akár Fregétől. Első olvasatra érthető és produktív a három elem említése és az ezek közötti kapcsolat, amely lényegében a következő hármasból áll: jel, jelentés és objektum, amit a jel jelöl. De amint beleássuk magunkat Peirce írásaiba, kiderül, hogy olyan sajátos szóhasználattal él, olyan furcsán fogalmaz, hogy lényegében felfejthetetlen, hogy egészen pontosan mire gondol. Ezzel szemben látni fogjuk, hogy szinte egészen pontosan érthető, hogy Frege a *Jelentés és jelölet*ben mit állít. A szemiózis (vagy reprezentáció) első eleme a jel. Jel bármi lehet: tárgy, fogalom, mentális kép. A szemiózisban részt vevő második elem az objektum vagy tárgy: az, ami helyett a jel áll, amit a jel jelöl. A szemiózis harmadik eleme az interpretáns, amely a jel egyfajta jelentését, fordítását, interpretációját testesíti meg. Ő maga is lehet jel, vagy éppen nem. Peirce úgy fogalmaz, hogy a jel „meghatározza" az interpretánsát, de ezt nem úgy kell érteni, hogy minden jel determinálja, kijelöli, definiálja a jelentését, hanem csak úgy, hogy utal rá. Egy jel nagyon sok interpretánsra utalhat, és Peirce szerint végső soron csak maga az interpretáns mint saját magának a jele az, ami saját magát maradéktalanul meghatározza. Hogy lássuk, Peirce hogyan gondolkodik erről, itt egy idézet:

> Hogy példát adjunk arra, hogy a jel szó logikailag milyen kört fed le, nos, egy egész könyv egy jel, és ennek egy fordítása a jel egy replikánsa. Valamely irodalom egésze egy jel. Az a mondat, hogy „Roxana Nagy Sándor királyi hitvese volt", jele Roxánának és Nagy Sándornak, és bár az előbbin van a logikai hangsúly, „Nagy Sándor" legalább annyira alanya a mondatnak, mint „Roxana"; és Roxana, illetve Nagy Sándor mint valóságos személyek objektumai ennek a jelnek. Minden jel, ami elegendően teljes, jele különböző valódi tárgyaknak. Mindezek a tárgyak, beszéljünk akár Hamlet őrületéről is, a létezés egy és ugyanazon univerzumának elemei, azaz az „Igazságnak". [Peirce, 239. o.]

A továbbiakban látni fogjuk, hogy mindkét fenti elmélettel szöges ellentétben áll Frege álláspontja, amely egészen biztosan nem egy tökéletes elmélet, de nagyon jó alapnak bizonyult a nyelvfilozófiai vizsgálódások számára. Frege visszautasítja, hogy nem létező dolgokat jelölhessenek jelek, nem hisz abban, hogy a jelentés pusztán átfogalmazás, interpretáció, és azt sem gondolja, hogy a jel mentális állapotokat jelölne. Frege ugyanis nem kívánt elrugaszkodni a kétértékűség elvétől (a nem létező dolgokra, mint például Hamlet őrületére, vonatkozóan nem kívánta értelmesnek tekinteni az igazságértékelést), a jelentést nem pusztán magyarázatnak vagy egy másik jelnek gondolta, és visszautasította azt is, hogy az olyan fogalmak, mint a ló fogalma, pszichológiai folyamatok végtermékei lennének.

Mielőtt rátérnénk Frege gondolataira, érdemes néhány tőle időben nem túl távoli matematikus nézőpontját is megvizsgálnunk. Elsőként Alfred North Whitehead gondolatait idézzük az 1897-ben megjelent *Univerzális algebra* című könyvéből (ezt a munkát tekintik az univerzális algebra mint tudomány első szisztematikus tankönyvének, bár túl korai megjelenésű ahhoz, hogy érdemleges fejleményeket lehessen benne találni). Whitehead szerint:

> Például az aritmetikában ezt írjuk: $2+3=3+2$. Amely azt jelenti, hogy amennyiben az említett dolgok teljes számát tekintjük, a $2+3$ és a $3+2$ ugyanahhoz a számhoz vezet, éspedig az 5-höz. De a $2+3$ és a $3+2$ nem azonos [sic!]; a szimbólumok sorrendje a két számításban különböző, és ez a sorrendbeli különbözőség a gondolkodásunkat is különböző irányba tereli. Az egyenlőség jelentősége abból ered, hogy ennek a két gondolati eljárásnak ugyanaz az eredménye, ha pusztán a szóban forgó tárgyak teljes száma érdekel minket. [Whit, 6. o.]

Később pedig így ír:

> Vegyük észre, hogy a $b=b'$ egyenlőségben foglalt állítás két elemből áll; ezeknek a jó megkülönböztethetőség kedvéért nevet is adunk, éspedig rendre „truizmusnak” és „paradoxonnak” nevezzük. A truizmus b és b' részleges azonossága, minthogy mindkettő rendelkezik a B-ség tulajdonságával [lásd a fenti és a következő példát!]. A paradoxon a különbözőség b és b' között, minthogy b egy dolog és b' egy másik: és így ez a két dolog, lévén különbözők, valamely tulajdonságukban eltérnek. Egy ilyen kalkulusban az ekvivalencia fennállása esetén a truizmus a lehető legkisebb figyelmet érdemli, míg a különbözőségre nagy hangsúlyt fektetünk. Így a $2+3=3+2$ egyenlőség esetén az, hogy mindkét oldal a közös 5-ség fogalmához tartozik, explicit módon még meg sem említődik. A közvetlen és egyedüli állítás az, hogy a két *különböző* dolog, a $2+3$ és a $3+2$, számosságuk tekintetében ekvivalensek. [Whit, 7. o.]

Ebben, főleg a második idézetben, tulajdonképpen semmi meglepő nincs. Aki tanult vektorokat, az hozzávetőlegesen ezt a megkülönböztetést sajátította el. Amikor azt mondjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor a tartalmas állítás az, hogy bár az $\overrightarrow{AB}$ irányított egyenes szakasz más, mint a $\overrightarrow{CD}$ irányított egyenes szakasz, mégis „vektorság" tekintetében azonosak, azaz párhuzamosak, ugyanolyan irányításúak és a hosszuk egyenlő. Az irányított egyenes szakaszokat tehát ekvivalenciaosztályokba soroljuk, és ami $\overrightarrow{AB}$-ben és $\overrightarrow{CD}$-ben közös, hogy azonos osztályba tartoznak; ezt a tulajdonságot sorolja Whitehead a „truizmus" fogalma alá. Persze tudjuk, hogy általában $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ nem azonosak a szó szoros értelmében; ez pedig a „paradoxon" az állításban. Kiváló példa a fenti tudományfilozófiai vizsgálódás az analitikus filozófia voltaképpeni működésére. Az ekvivalencia kérdése tisztázandó volt a 20. század fordulóján, Whitehead tisztázta is az *Univerzális algebrá*ban, és ma már átkerült a relációelméletbe, sőt, minden alapozó felsőbb matematika kurzuson mint szakmai fogást (az ekvivalenciaosztályozást) tanítják. Hasonló élményünk lesz Frege cikkével kapcsolatban is. Aki az igazságértékkel és a mondatok összetevőkre bontásával kapcsolatban fejt ki érveket, amelyek konklúziói mint kiindulópontok épültek be a modern matematikai logikába.

Matematikatörténeti kérdés, hogy Whitehead abban az évben, amikor ezt a könyvét írta, ismerte-e Frege cikkét a jelentésről és a jelöletről. A fenti idézetekből az vehető ki, hogy egy egyenlőségállítás, a $2+3=3+2$ formula, mint jelentéssel bíró szimbólumsor érdekelte. Úgy tűnik, hogy megkülönböztette a $2+3=3+2$ formulából kiolvasható tartalmas állítást, hogy az összeadás sorrendje, azaz a szám megadásának módja nem változtat az eredményen, és a triviális állítást, hogy az 5 az az 5. Frege nagyon hasonló problémával kezdi elemzését és ebből jut arra a következtetésre, hogy a nyelvi kifejezéseknek nemcsak *jelöletük* lehet, azaz olyan tárgy, amelyet a nyelvi kifejezést jelöl, hanem *jelentésük* is, amely valami olyasmi, aminek a megfogalmazását éppen a kifejezés hivatott nyelvileg reprezentálni.

Már egészen biztosan Frege elméletének ismeretéről tanúskodik a hírhedt Rosser-szakasz, amely onnan lehet ismerős, hogy Saul Kripke pellengérezi ki a *Megnevezés és szükségszerűség* című előadás-sorozatában. A szóban forgó Barkley Rosser-idézet a *Logic for Mathematicians* című 1953-as könyvéből a következőképpen hangzik:

> Bevezetjük az egyenlőséget és az ismerős $x = y$ jelölést használjuk rá. Ha jelentést szeretnénk rendelni ezekhez az állításainkhoz, akkor $x = y$ jelentése az lenne, hogy az x és az y egy és ugyanazon dolognak a két neve. [Rosser, 163. o.]

A kérdés, amire Rosser megkísérelt választ adni, hogy mit jelent az a (formális) nyelvi kifejezés, hogy $a = b$. A kézenfekvő válasz számára azt volt, hogy azt jelenti, hogy az a és a b jel ugyanazt a dolgot jelöli. Néhány mondattal később így magyarázza a jelenséget:

> Más szavakkal, akkor és csak akkor tehetjük az „=” jelét két név közé, ha ugyanannak a dolognak a nevei. A kapott állítás a dologról, hogy nem különbözik magától semmilyen értelemben sem, merő trivialitás. Hovatovább, az állítás éppen arra irányítja a figyelmünket, hogy a két név ugyanannak a dolognak a neve, így igazolja a szokásos használatot, hogy a két nevet kicserélhetjük a dologra vonatkozó összes állításban. [Rosser, 164. o.]

A mai matematikai logikusok ezt a kérdés így válaszolnák meg. A formális (matematikai) $a = b$ mondat pontosan akkor igaz, ha az a dolog, amit a jelöl, egyenlő azzal a dologgal, amit b jelöl.[1] A probléma a következő: ennyi erővel azt is mondhatnánk, hogy az $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$ formális nyelvi mondat azt jelenti, hogy az a dolog, aminek a jele $\overrightarrow{AB}$, az 5 egység hosszúságú, mintha a mondat bármi olyat mondana számunkra, hogy itt az $\overrightarrow{AB}$ jelről tennénk állítást. Pedig nem az $\overrightarrow{AB}$ jelről teszünk állítást, hanem $\overrightarrow{AB}$-ről mint tárgyról. Az persze teljesen rendben van – és Rosser éppen ezért az első idézetben nem írt le rosszat –, hogy az a dolog, amit $\overrightarrow{AB}$ jelöl, az 5 egység hosszúságú. Másik példa. Amikor azt a mondatot kimondjuk, hogy „A Vénusz felhőkkel borított”, akkor senki sem érti ezt úgy, mint a „Vénusz” névre vonatkozó állítást, éspedig, hogy a „Vénusz” mint név egy olyan szó, hogy amit megnevez, az felhőkkel borított. Az „A Vénusz felhőkkel borított” mondat nem a „Vénusz” szóról beszél, hanem a Vénuszról.

Később visszatérünk a Rosser-idézetekre, de érdemes megjegyezni már itt is, hogy a probléma forrása részben az, hogy Rosser egyfelől nem használ modern (modellelméleti) fogalmakat és ezért naiv az álláspontja, másfelől ebből adódóan olyan következtetésekre ragadtatja magát, amit ellenkező esetben nem tenne. Márpedig, ha egy „a” név szerepel egy mondatban, akkor az vagy mindig a név által megnevezett dologra vonatkozik, vagy mindig a dolog nevére, és ezért nem mondhatja, hogy „a két nevet kicserélhetjük a dologra vonatkozó összes állításban”, mert az utóbbi esetben dolgokra sosem vonatkoznak állítások, csak a nevekre. A feloldás Fregére és Alfred Tarskira vezethető vissza. A mondatok elemzése összetevőnként tekintendő, és nem elég kiragadni belőle egy elemet, az összes mondatrész esetén

---

[1] Formálisan, ha valaki ehhez van szokva:

$$\mathfrak{M} \models a = b \quad \Leftrightarrow \quad i([a]^{\mathfrak{M}}, [b]^{\mathfrak{M}}),$$

ahol i a halmazelméleti identitás reláció, melynek definíciója: $i = \{(x,x) \mid x \in M\}$. Azaz i a legszűkebb reflexív reláció, vagyis az, amikor az M univerzum két eleme akkor és csak akkor áll relációban, ha ez a két dolog ugyanaz.

fel kell tárni, hogy mit jelöl a szóban forgó mondatrész. A „Rosser bizonyította a Gödel-tétel általánosítását” mondat elemzése ez lenne: a „Rosser” elnevezésű individuum rendelkezik azzal a tulajdonsággal, amit a „bizonyította a Gödel-tétel általánosítását” kifejezés fogalmaz meg. Vagy az $a = b$ mondat esetén: az „a” nevű dolog és a „b” nevű dolog egymással relációban áll az „=” szimbólum által jelölt relációra vonatkozóan, azaz azonosak.

Végül, mielőtt nekilátnánk a Frege-cikknek, érdemes felidézni az egyenlőség már a fentiekben Rosser által is említett jellemző tulajdonságát, a Leibniz-szabályt. Eszerint, ha $a = b$, akkor minden A tulajdonságra, ha $A(a)$ teljesül, akkor $A(b)$ is teljesül. Sok formális-axiomatikus rendszerben, amiben szerepel az egyenlőség, ez az egyik axióma, például Rossernél is. A Frege-rejtvény, ami központi motivációul szolgál a *Jelentés és jelölet*ben, éppen a Leibniz-szabály miatt fogalmazódhat meg problémaként. Ennek a szabálynak persze sok változata van. Az elsőrendű nyelvekben, amikor csak a „minden x dologra” alakú nyelvi fordulatokkal lehet élni, de a „dolgok minden A tulajdonságára” kifejezésekkel nem, ott a Leibniz-szabály csak korlátozott értelemben fogalmazható meg, csak a nyelv segítségével kifejezhető A tulajdonságokra, a nyelvileg megragadható tulajdonságokra lehet kimondani. Végtelen rendű nyelvekben azonban, ahol olyan kifejezések is a nyelv részei, mint „minden A tulajdonságra”, a Leibniz-szabály akár az egyenlőség definíciójának is alkalmas. Gödel az 1931-es cikkében például a következőképpen definiálja az egyenlőséget: $a = b$ jelöli azt, hogy *minden* A tulajdonságra, ha $A(a)$ teljesül, akkor $A(b)$ is teljesül. Egyenlőknek tehát pontosan azokat mondjuk, amik *minden* tulajdonságukban megegyeznek. Ha két dolog nem egyenlő, akkor van legalább egy olyan tulajdonság, amelyben eltérnek.

Az azonosság problémája

Frege a *Jelentés és jelölet*et az azonosság relációjának jelentéselméleti elemzésével kezdi. Két álláspontot vázol fel, és mindkettőről belátja, hogy hiányosan írja le az azonosság jelentését. Megoldása az lesz, hogy a jel és jelölet párosa mellett egy harmadik vontkozást, a jelentést is bevezeti. Tekintsük tehát az $a = b$ mondatot. Ha az $=$ reláció dolgok közötti reláció lenne, azaz $a = b$ esetén azon *dolgok közötti reláció*, amelyeket az a és b megnevez (ezek tehát a és b jelöletei), akkor abban az esetben, ha $a = b$, akkor $a = b$ és $a = a$ mindkettő azt állítja, hogy egy dolog (melynek jele a) azonos saját magával. Márpedig, folytatja Frege, $a = b$ és $a = a$ között lényeges episztemológiai, azaz ismeretelméleti különbség van. Azt, hogy $a = a$ igaz, minden, a mondat igazságértékének megállapítására vonatkozó különösebb erőfeszítés nélkül tudjuk, míg $a = b$ igazolandó. A másik lehetőség, hogy az $a = b$ nem a dolgokra, hanem a jelölésre vonatkozik, éspedig azt jelenti,