

Mincsovics Miklós Emil

Differenciálegyenletek  
és numerikus módszereik  
mérnököknek



Mincsovics Miklós Emil

# Differenciálegyenletek és numerikus módszereik mérnököknek



**TYPOTEX**



A mű elektronikus kiadása  
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.  
projekt keretén belül készült.

© Mincsovics Miklós Emil, Typotex, Budapest, 2020  
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 098 3

Kedves Olvasó!  
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!  
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a [www.typotex.hu](http://www.typotex.hu)  
és a [facebook.com/typotexkiado](https://facebook.com/typotexkiado) oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó  
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989  
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók  
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.  
Felelős kiadó: Németh Kinga  
Főszerkesztő: Horváth Balázs  
Műszaki szerkesztő: Csaba Ferenc  
A borítót készítette: Szalay Éva

# Tartalomjegyzék

<b>Előszó</b>	<b>7</b>
<b>1. Közönséges differenciálegyenletek – bevezető</b>	<b>9</b>
1.1. Elsőrendű differenciálegyenletek . . . . .	9
1.1.1. Néhány elsőrendű megoldható típus . . . . .	9
1.1.2. Modellezés elsőrendű differenciálegyenletekkel . . . . .	24
1.2. Másodrendű differenciálegyenletek . . . . .	31
1.2.1. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek . . . . .	31
1.2.2. Modellezés másodrendű differenciálegyenletekkel . . . . .	41
1.3. KDE-k kvalitatív vizsgálata . . . . .	47
<b>2. Közönséges differenciálegyenletek – elméleti rész</b>	<b>53</b>
2.1. A megoldás létezése és egyértelmősége . . . . .	53
2.1.1. Előkészületek – Metrikus terek . . . . .	58
2.1.2. Megoldás létezése és egyértelmősége . . . . .	61
2.2. Stabilitás . . . . .	67
<b>3. Kezdetiérték-problémák numerikus megoldási módszerei</b>	<b>73</b>
3.1. Numerikus módszerek – bevezető . . . . .	73
3.1.1. Numerikus módszerek konstruálása . . . . .	74
3.1.2. Az implicittség kezelése . . . . .	78
3.2. Numerikus módszerek – elméleti rész . . . . .	91
3.2.1. Normált terek, folytonos lineáris leképezések . . . . .	91
3.2.2. Az explicit Euler-módszer elemzése . . . . .	96
3.2.3. További módszerek elemzése . . . . .	101
3.2.4. Matlab . . . . .	105
<b>4. Közönséges differenciálegyenlet-rendszerek</b>	<b>109</b>
4.1. Lineáris rendszerek . . . . .	113
4.1.1. Állandó együtthatós lineáris rendszerek megoldása . . . . .	113

4.1.2.	Állandó együtthatós lineáris rendszerek fázisképe . . .	123
4.2.	Nemlineáris autonóm rendszerek . . . . .	137
4.2.1.	Nemlineáris autonóm rendszerek fázisképe . . . . .	137
4.2.2.	Stacionárius pontok és stabilitásuk . . . . .	142
4.2.3.	Stabilitásvizsgálat Ljapunov-módszerrel . . . . .	150
4.2.4.	Periodikus pályák . . . . .	162
4.3.	Matlab . . . . .	167
<b>5.</b>	<b>Függelék</b>	<b>169</b>
5.1.	Analízis . . . . .	169
5.2.	Vektorterek, lineáris leképezések . . . . .	174
	<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>179</b>

# Előszó

Ez a könyv két, a Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen gépészmérnököknek tartott tárgyhoz készült jegyzet. A két tárgy: Differenciálegyenletek gépészmérnököknek, melyet a BSc képzés utolsó évében tanulnak egy szakirányon, míg a másik ennek angol nyelvű, kibővített változata, melyet az angol nyelvű MSc képzésen tanulnak. Az anyag négy év tanítási tapasztalatán keresztül alakult és nyerte el ezt a formáját. A jegyzet ezen tárgyak anyagának nagy részét (de nem egészét) fedi le. Mindez nem jelenti azt, hogy mások nem forgathatják. Olyanok számára íródott, akik nem matematikusok, de van igényük precizításra, illetve már hallottak differenciálegyenletekről, egy-két alapvető típussal már találkoztak is, de komolyabban még nem foglalkoztak a témával. Továbbá szeretnének megismerkedni a numerikus közelítő módszerekkel.

Örök kérdés, hogy miért kell még egy jegyzet egy olyan témából, ahol havonta több könyv is megjelenik. Magyar nyelvű szakirodalom is található. Ezek elég széles skálán mozognak, kezdve a Bolyai-sorozatban megjelent [S01] könyvvel, ami kitűnő receptgyűjteményként működik, míg a másik végpont a matematikus hallgatóknak íródott [TS09] könyv. A mi jegyzetünk a kettő között helyezkedik el. Ez azt jelenti, hogy nem csak egy receptgyűjteményt tart az Olvasó a kezében, hanem a sok példa mellett elméleti kérdések is tárgyalásra kerülnek, tételeket bizonyítunk, nem csak kimondunk. Ugyanakkor nem megyünk el teljesen elméleti irányba és nem törekszünk a tételek legélesebb formában való kimondására. Fontosnak tartottuk olyan témák bemutatását, mint a metrikus terek, normált terek, folytonos lineáris leképezések, amiket csak felhasználunk a differenciálegyenletek és numerikus módszereik tárgyalásánál, mivel a mérnökhallgatók általában nem tanulnak erről. Továbbá mellékeljük az analízis és lineáris algebrai alapismereteket is a Függelékben.

A téma már klasszikusnak számít, így természetesen felhasználtunk más könyvek anyagát is, merítettünk például a fentebb említett két könyvből, emellett az ELTE-n matematikus hallgatóknak tartott Differenciálegyen-

letek tárgy gyakorlatanyagát. Az angol nyelvű könyvek közül az alábbiak voltak hatással a jegyzetre: [BDH12], [BDM17], [HSD04], [S94].

Ebben a témakörben, ha alkalmazásokra kerül sor, ma már elképzelhetetlen, hogy kimaradjon a numerikus közelítő módszerek tárgyalása. Ezt szem előtt tartottuk a jegyzet írása folyamán. Mind az egyes típusok megoldásánál, mind a megoldások vizualizálásánál megadtuk a Matlab-kódot, amivel az Olvasó reprodukálhatja az ábrákat, illetve megoldhatja az egyes feladatokat, továbbá egyszerűen módosíthatja ezeket más feladatok megoldásához. A numerikus közelítések tárgyalásánál eleve cél a számítógép használata, itt is mellékelünk több kódot, amik egyszerűen módosíthatóak további feladatok megoldására, illetve más módszerek implementálására. A numerikus módszerek részre a [AP98] könyv volt hatással. Megjegyezzük, hogy a numerikus módszerek elméleti részének tárgyalását másképp végezzük, mint a szokásos út, amelyet nehézkesnek és túl technikásnak éreztünk.

A fenti könyvek mind kiegészítésként, mind mélyebb tudás elsajátítása szempontjából kitűnő további olvasmányok. Ezen kívül még a [TBD18] könyvet ajánljuk az Olvasó figyelmébe, mely egyrészt az alapoktól halad egészen a jelenlegi kutatásokig, mindezt változatos témákban és kitűnő stílusban teszi.