

Vetier András

Valószínűségszámítás

4. rész

Vetier András

Valószínűségszámítás

4. rész

Folytonos eloszlások
két dimenzióban

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

© Vetier András, Typotex, Budapest, 2019
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 035 8

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a [facebook.com/typotexkiado](https://www.facebook.com/typotexkiado) oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók	9
1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség	9
1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékekkel	10
1.3. Feltételes valószínűség	12
1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül	13
1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra	13
1.6. Általános szorzási szabály	14
1.7. Eloszlásfüggvény	16
2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás	17
2.1. Egyenletes eloszlás véges területű halmazon	17
2.2. Végtelen területű halmazon nem létezik egyenletes eloszlás	17
3. Béta-eloszlások két dimenzióban	19
3.1. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek dél és egy óra között	19
3.1.1. Három ember esete	19
3.1.2. Tíz ember esete	23
3.1.3. Általános eset	25
3.2. Ábrák	26
3.3. Feladatok megoldásokkal	32
3.4. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek valamilyen véges intervallumon	34
3.5. Ha az érkezések tetszőleges eloszlást követnek (<i>Extra tananyag</i>)	35
4. Kísérleti eredmények függvényének várható értéke	37
4.1. Diszkrét eset (ismétlés)	37
4.2. Folytonos eset	38
4.3. Szorzat várható értéke	39
5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének átlagára	41
5.1. Diszkrét eset (ismétlés)	41
5.2. Folytonos eset	43
6. Vetület- és feltételes eloszlások	45
6.1. Vetítések koordinátatengelyekre	45
6.2. Vetületeloszlások sűrűségfüggvénye	46
6.3. Feltételes eloszlások sűrűségfüggvénye	47
6.4. Feltételes sűrűségfüggvények rendszere	50
6.5. Sűrűségfüggvények keverése	51

6.6.	Feltételes eloszlásfüggvény	52
6.7.	Feltételes valószínűség	53
6.8.	Feltételes medián	54
6.9.	Feltételes várható érték	55
6.10.	Feltételes variancia	55
6.11.	Feltételes szórás	56
6.12.	Egy számolás mintapélda: $Y = \text{RND}_1$, $X = Y \cdot \text{RND}_2$	57
6.13.	Folytonos szimuláció két dimenzióban	59
7.	Transzformáció síkról síkra	63
7.1.	Példa: transzformáció szorzás és osztás segítségével	63
7.1.1.	A transzformáció definíciója	63
7.1.2.	A transzformáció inverzének képletpárja	63
7.1.3.	Az egységnégyzet képe egy „vitorla” alakú halmaz	64
7.1.4.	A transzformáció hatásának szemléltetése	64
7.1.5.	A „börtönrács” „díszes rács”-ba transzformálódik, a négyzetből pedig „vitorla” lesz	68
7.1.6.	Pontfelhők transzformációja	70
7.1.7.	Eloszlások transzformációja	71
7.2.	Jacobi-mátrix	72
7.3.	Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat	73
8.	Lineáris transzformáció síkról síkra	75
8.1.	Mátrixszal való szorzás	75
8.2.	Mátrixszal való szorzás és eltolás	76
9.	Transzformáció síkról egyenesre	77
9.1.	Példák ábrákkal szemléltetve	77
9.1.1.	Transzformáció a $z = x + y$ összegfüggvénnyel	77
9.1.2.	Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzatfüggvénnyel	78
9.1.3.	Transzformáció a $z = x/y$ hányadosfüggvénnyel	79
9.2.	Általános transzformációs képlet	80
9.3.	Számolások a fentebbi példákkal kapcsolatban	81
9.3.1.	Transzformáció a $z = x + y$ összegfüggvénnyel	81
9.3.2.	Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzatfüggvénnyel	84
9.3.3.	Transzformáció a $z = x/y$ hányadosfüggvénnyel	86
9.4.	Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – példák ábrákkal szemléltetve	88
9.4.1.	Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben	88
9.4.2.	Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben	89
9.4.3.	Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben	90
9.5.	Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – általános képlet	91
9.6.	Számolások a fentebbi kétlépéses példákkal kapcsolatban	93
9.6.1.	Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben	93
9.6.2.	Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben	94
9.6.3.	Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben	94
9.7.	Konvolúció	94

10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel	97
10.1. Regresszió egy dimenzióban	97
10.1.1. A medián minimál tulajdonsága	97
10.1.2. A távolság várható értékének minimalizálása	98
10.1.3. A várható érték minimál tulajdonsága	99
10.1.4. A távolság négyzete várható értékének minimalizálása	100
10.2. Regresszió két dimenzióban	101
10.2.1. A hiba abszolút értéke várható értékének minimalizálása	101
10.2.2. A hiba négyzete várható értékének minimalizálása	102
10.3. Egy számolás mintapélda	102
11. Normális eloszlások a síkon	105
11.1. Standard normális eloszlás a síkon	105
11.2. Standard normális eloszlás r korrelációval	106
11.3. Normális eloszlás $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ paraméterekkel	109
11.4. Vetületeloszlások	116
11.5. Feltételes sűrűségfüggvény	117
11.6. Feltételes medián és várható érték	118
11.7. Feltételes szórás	118
11.8. Példa: Testmagasság és testsúly	119
11.9. Példa: A műszer hibáját korrigáljuk	122

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t,
- behívja a PAINT programot,
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást,
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit ír oda,
- elmenti a JPG fájl, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám,
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre.

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. december 17.

Üdvözlettel,

Vetier András

1. fejezet

Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

Két valószínűségi változót véve – legyenek ezek X és Y – összerakhatjuk őket egyetlen (X, Y) véletlen számpárrá, véletlen ponttá. Ily módon egy kétdimenziós valószínűségi változót kapunk. Példák:

1. Amikor az ejtőernyős célba ugrik, igyekszik a célpontot eltalálni, de ez nem sikerül pontosan. Általában a célpont közelében ér talajt. Ez a pont véletlentől (is) függ. A pont, illetve annak koordinátái egy (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változót adnak.
2. Ha véletlenszerűen választunk egy magyar férfit, akkor az

X = testmagassága centiméterekben mérve,

Y = testsúlya (pontosabban: testtömege) kilogrammokban mérve

jelölésekkel élve (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó.

3. Számítógéppel generáljunk három, 0 és 1 közötti véletlen számot, és legyenek

X = a legkisebb,

Y = a legnagyobb.

Ekkor (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó.

1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség

A folytonos kétdimenziós valószínűségi változókat általában a sűrűségfüggvényükkel jellemezzük. Az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényt a síknak valamilyen A részhalmazán integrálva megkapjuk annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) véletlen pont az A halmazba esik:

$$P(A) = P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

Ahhoz, hogy egy $f(x, y)$ függvény valamilyen kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye lehessen, két feltételnek kell teljesülni:

$$f(x, y) \geq 0,$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1.$$

Ezek a feltételek minden kétdimenziós sűrűségfüggvényre teljesülnek, és ha egy kétváltozós függvény teljesíti ezeket a tulajdonságokat, akkor lehet olyan kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változót értelmezni, melynek sűrűségfüggvénye a szóban forgó függvény. (Lásd: 6. fejezet, 6.13. Folytonos szimuláció két dimenzióban.)

A sűrűségfüggvény értéke mint arányossági tényező. Ha A egy kicsike halmaz (x, y) közelében, akkor

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy \approx f(x, y) \times A \text{ területe}$$

és

$$f(x, y) \approx \frac{P((X, Y) \in A)}{A \text{ területe}}.$$

Hangsúlyozzuk, hogy az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény értéke semminek sem képviseli a valószínűségét. Ha (x, y) egy adott pont a síkon, akkor $f(x, y)$ jelentése a következő: az (x, y) pont közelében akármilyen kicsi A halmaz esetén annak a valószínűsége, hogy (X, Y) az A halmazba esik, közelítőleg $f(x, y) \times A$ területe:

$$P((X, Y) \in A) \approx f(x, y) \times A \text{ területe}.$$

A sűrűségfüggvény értékének közelítése. Legyen most A az a kicsi téglalap az (x, y) pontra támaszkodóan, melynek „bal alsó” sarka az (x, y) pont, „jobb felső” sarka pedig az $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pont. Ekkor A területe $\Delta x \Delta y$, ezért

$$f(x, y) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Ezt a formulát fogjuk használni a 3. fejezetben a béta-eloszlások sűrűségfüggvényeinek levezetéséhez.

1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékekkel

A felületi sűrűség – speciálisan a síkon vett sűrűség – fogalma a fizikából jól ismert. Szemléltetés céljából szeretnénk támaszkodni erre a fogalomra.

Ha egy kétdimenziós sűrűségfüggvénnyel van dolgunk, akkor könnyen elképzelhetjük azt a tömegeloszlást a síkon, aminek a síkon vett sűrűségét a szóban forgó sűrűségfüggvény írja le. Ha valaki ezt mégsem tudja elképzelni, akkor olvassa lelkesen a következő „konstrukciót”!

Jön az úthenger! Képzeld el az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény grafikonját, ami a háromdimenziós térben egy felület. A felület alatti térrészben – képzeletben – egyenletesen helyezünk el egységnyi össztömegű festéket! Az egyenletesség itt azt jelenti, hogy a térrész minden részhalmazára annyi festék kerül, amennyi a térrész térfogata. És akkor most jöjjön az úthenger, és a térrészben elhelyezett festéket préselje függőleges irányú préseléssel a vízszintes síkra!

A síkon kapunk egy tömegeloszlást, ami festékből készült, és így a festék színárnyalata is jelzi, hogy hol sűrűbb, hol ritkább az anyag (a festék). Ennél a konstrukciónál a sík (x, y) pontjában a tömegsűrűség éppen $f(x, y)$ -nek adódik.

Ha valaki ennek a gyerekes tálalásnak az egzakt hátterét szeretné tudni, akkor íme, tessék: egy $f(x, y)$ sűrűségfüggvény grafikonja (felülete) alatti térrészben vett egyenletes eloszlás vetülete az (x, y) síkra olyan folytonos eloszlást ad, aminek sűrűségfüggvénye $f(x, y)$.

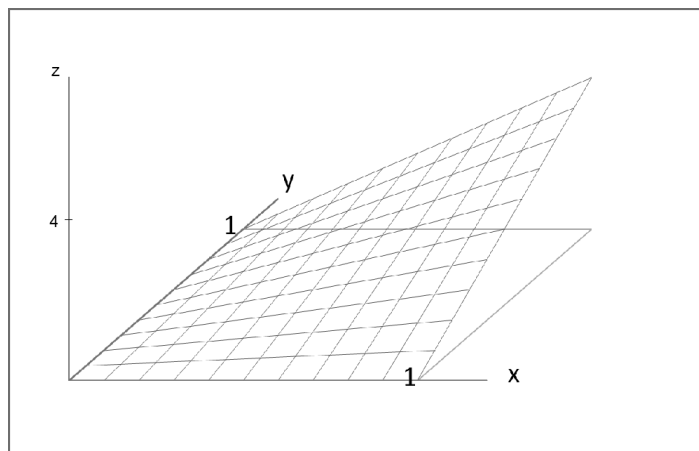
Példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$(\sqrt{\text{RND}_1}, \sqrt{\text{RND}_2})$$

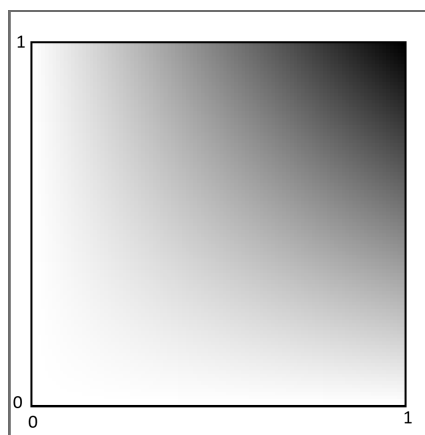
valószínűségi változót. Ennek sűrűségfüggvénye – mint azt néhány oldallal később belátjuk – a következő:

$$f(x, y) = 4xy \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1).$$

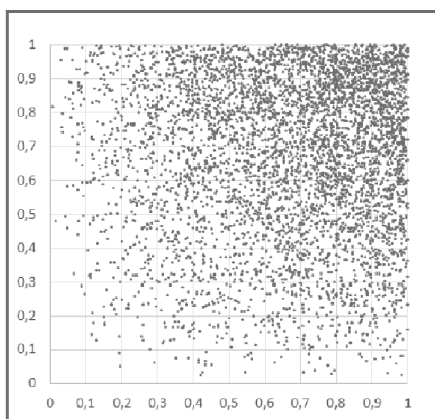
Íme a megfelelő ábrák:



1.1. ábra. $(\sqrt{\text{RND}_1}, \sqrt{\text{RND}_2})$ sűrűségfüggvény szemléltetése felülettel



1.2. ábra. $(\sqrt{\text{RND}_1}, \sqrt{\text{RND}_2})$ eloszlásának szemléltetése festékkel



1.3. ábra. $(\sqrt{\text{RND}_1}, \sqrt{\text{RND}_2})$ – pontfelhő 5000 kísérletből

A következő oldalak, fejezetek bőven szolgáltatnak további példákat, tessék előre lapozgatni!

1.3. Feltételes valószínűség

Ha A és B a síknak részhalmazai, akkor $(X, Y) \in A$, illetve $(X, Y) \in B$ egy-egy eseményt jelentenek. Az $(X, Y) \in A$ feltétel mellett az $(X, Y) \in B$ esemény valószínűségét értelemszerűen $P((X, Y) \in B | (X, Y) \in A)$ -vel, vagy rövidebben csak $P(B | A)$ -val jelöljük. A számláló és a nevező is egy-egy integrállal írható fel, ezért a feltételes valószínűség két integrál hányadosával egyenlő:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\iint_{A \cap B} f(x, y) dx dy}{\iint_A f(x, y) dx dy}.$$

Ha $B \subseteq A$, akkor $A \cap B = B$, ezért ezt kapjuk:

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\iint_B f(x, y) dx dy}{\iint_A f(x, y) dx dy}.$$

1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül

Legyen A a síknak egy részhalmaza, melynek pozitív a valószínűsége. Tegyük fel, hogy az $(X, Y) \in A$ esemény bekövetkezett. Ilyen feltétel mellett az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye nyilván

$$f(x, y|A) = \frac{f(x, y)}{P(A)} = \frac{f(x, y)}{\iint_A f(x, y) dx dy}, \text{ ha } (x, y) \in A.$$

1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra

Állítás: Ha X és Y függetlenek, és sűrűségfüggvényeik $f_1(x)$, illetve $f_2(y)$, akkor az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direkt szorzata:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Vázlatos bizonyítás.

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{P(x < X < x + \Delta x) \cdot P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} \approx f_1(x) \cdot f_2(y). \end{aligned}$$

1. példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$(\sqrt{\text{RND}_1}, \sqrt{\text{RND}_2})$$

valószínűségi változót. Mivel RND_1 és RND_2 függetlenek, a kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a szorzási szabállyal számítható:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = 2x \cdot 2y = 4xy \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1).$$

Néhány oldallal előbb felhasználtuk ezt az eredményt.

2. példa: Ha X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = 4$ paraméterekkel, akkor (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direkt szorzata:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = 3e^{-3x} \cdot 4e^{-4y} = 12e^{-3x-4y} \quad (x, y \geq 0).$$

1.6. Általános szorzási szabály

Amikor egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változóval van dolgunk, előfordulhat, hogy ismerjük X -nek az $f_1(x)$ -szel jelölt sűrűségfüggvényét, és minden lehetséges x érték mellett tudjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett milyen eloszlást követ Y . Jelöljük ennek a feltételes eloszlásnak a sűrűségfüggvényét $f_{2|1}(y|x)$ -vel. Az $f_{2|1}(y|x)$ jelölésben az index mutatja, hogy a második koordináta, vagyis az Y sűrűségfüggvényéről van szó az első koordinátával kapcsolatos feltétel mellett, és hogy a sűrűségfüggvényben a változó szerepében az y áll, a feltétel szerepében pedig az x . Az $f_{2|1}(y|x)$ jelölés helyett lehet használni az $f_{2|1}(y|X = x)$ avagy $f_{Y|X}(y|x)$ jelöléseket is.

Természetesen az is előfordulhat, hogy ismerjük Y -nak az $f_2(y)$ -nal jelölt sűrűségfüggvényét, és minden lehetséges y érték mellett tudjuk, hogy az $Y = y$ feltétel mellett milyen eloszlást követ X . Ennek a feltételes eloszlásnak a sűrűségfüggvényét most értelemszerűen $f_{1|2}(x|y)$ -nal jelöljük. Az $f_{1|2}(x|y)$ jelölésben az index mutatja, hogy az első koordináta, vagyis az X sűrűségfüggvényéről van szó a második koordinátával kapcsolatos feltétel mellett, és hogy a sűrűségfüggvényben a változó szerepében az x áll, a feltétel szerepében pedig az y . Az $f_{1|2}(x|y)$ jelölés helyett lehet használni az $f_{1|2}(x|Y = y)$ avagy $f_{X|Y}(x|y)$ jelöléseket is.

Állítás: Ha X sűrűségfüggvénye $f_1(x)$, és Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett $f_{2|1}(y|x)$, akkor (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x).$$

Hasonlóképpen, ha Y sűrűségfüggvénye $f_2(y)$, és X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltétel mellett $f_{1|2}(x|y)$, akkor (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x|y).$$

Vázlatos bizonyítás. A két formula közül az elsőt bizonyítjuk:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \frac{\mathbf{P}(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{\mathbf{P}(x < X < x + \Delta x) \cdot \mathbf{P}(y < Y < y + \Delta y | x < X < x + \Delta x)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{\mathbf{P}(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathbf{P}(y < Y < y + \Delta y | x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} \approx \\ &\approx \frac{\mathbf{P}(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathbf{P}(y < Y < y + \Delta y | X = x)}{\Delta y} \approx \\ &\approx f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x). \end{aligned}$$

2. példa: Ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda_1 = 2$ paraméterrel, és az $X = x$ feltétel mellett Y exponenciális eloszlást követ x paraméterrel, akkor

$$f_1(x) = 2e^{-2x} \quad (x \geq 0),$$

$$f_{2|1}(y|x) = x e^{-xy} \quad (y \geq 0),$$

és így az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = 2e^{-2x} \cdot x e^{-xy} = 2x e^{-2x-xy} = 2x e^{-x(2+y)} \quad (x, y \geq 0).$$

3. példa ($Y = \text{RND}_1$, $X = Y \cdot \text{RND}_2$): Válasszunk egy pontot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az Y pont. Ha Y -t már megválasztottuk, akkor 0 és Y között válasszunk egy másik pontot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az X pont. Ezek után X -ből és Y -ből rakjuk össze az (X, Y) pontot a síkon! Számítógéppel X és Y így állítható elő random számok segítségével:

$$Y = \text{RND}_1, \quad X = Y \cdot \text{RND}_2.$$

Most pedig megadjuk, illetve kiszámoljuk (X, Y) , illetve X sűrűségfüggvényének a képletét:

Ha Y egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és 1 között, akkor

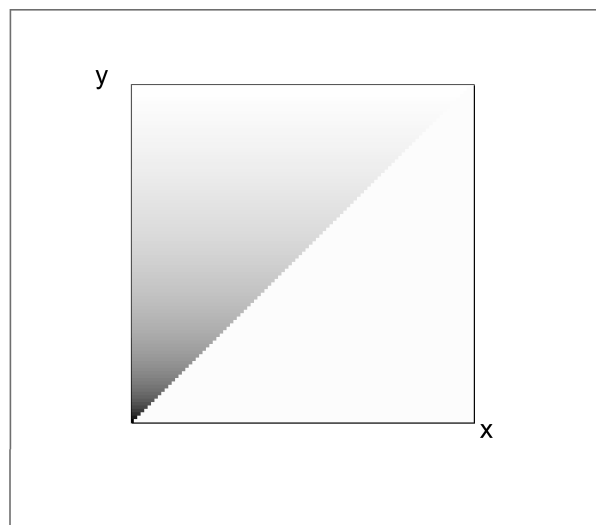
$$f_2(y) = 1 \quad (0 < y < 1).$$

Mivel az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és y között, ezért

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y).$$

A szorzási szabály alapján az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = 1 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y < 1).$$



1.4. ábra. (X, Y) eloszlása festékkal szemléltetve, ahol $Y = \text{RND}_1$, $X = Y \cdot \text{RND}_2$

1.7. Eloszlásfüggvény

Egy kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az

$$F(x, y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y)$$

képlettel definiáljuk. Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvényből integrálással adódik:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^x f(x, y) dx \right) dy.$$

A sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvényből kétszeres parciális deriválással kapjuk:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Egy téglalap valószínűsége az eloszlásfüggvénynek a téglalap sarkain vett értékeiből kiszámolható:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x_1 < X < x_2 \text{ és } y_1 < Y < y_2) &= \\ &= \mathbf{P}(X < x_2 \text{ és } Y < y_2) - \mathbf{P}(X < x_1 \text{ és } Y < y_2) - \\ &\quad - \mathbf{P}(X < x_2 \text{ és } Y < y_1) + \mathbf{P}(X < x_1 \text{ és } Y < y_1) = \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

A kétdimenziós eloszlásfüggvény fogalmát megemlítettük, de rögtön hozzá is tesszük: számunkra ennek a fogalomnak nincs jelentősége, nem is fogjuk használni a későbbiekben.