Laczkovich Miklós

333 mértékelméleti feladat

Laczkovich Miklós

333 mértékelméleti feladat

TYPOTEX

A szerző kéziratát az ELTE Oktatási és Képzési Tanács Pályázati Bizottsága 1/2016.10.28-i határozata alapján a 2016. évi tankönyv- és jegyzettámogatási keretből támogatásra ítélt pályázati műnek minősítette.

ISBN 978 963 493 005 1

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A borítót készítette: Szalay Éva
Készült a Kódex Könyvgyártó Kft. nyomdájában
Felelős vezető: Marosi Attila

Votisky Zsuzsa emlékének ajánlom

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Magyar nyelvű mértékelméleti feladatgyűjteményekben tulajdonképpen nincs hiány. Az [1], [3], [4], [5] tankönyvekben és a [8] egyetemi jegyzetben számos mértékelméleti feladatot találunk. Ezek közül is kiemelhetjük az [5] könyvet, amely csaknem 200 mértékelméleti feladatot tartalmaz, megoldásokkal. Ugyan ezen könyvek közül a régebbiek könyvesboltokban már nem kaphatók, de használt példányaikhoz hozzájuthatunk, vagy könyvtárakból kikölcsönözhetjük őket.

Eredetileg az indított egy új mértékelméleti feladatgyűjtemény közreadására, hogy az ELTE matematikus szakának mértékelméleti tárgyához jobban illeszkedő feladatsorokat állítsak össze. Ezért kiindulásul összegyűjtöttem azokat a feladatokat, amelyeket az ELTE-n a mértékelmélet tárgy oktatása során az elmúlt 40 évben használtam.

Azonban a feladatgyűjtemény írása közben az anyag – ahogy az gyakran megtörténik – mintegy önmagát kezdte megszervezni. Hamar felmerült az igény, hogy a tárgy oktatásából kimaradó, de fontos vagy érdekes tételeket is feldolgozzak feladatsorokon keresztül. Mivel minden matematikai eredmény (legyen a bizonyítása bármilyen nehéz vagy hosszú) feldolgozható feladatsorok formájában, ezért szabad döntés kérdése, hogy mi az, amit ilyen módon beleillesztünk az anyagba, és mi az, amit nem: amit feltételezünk, vagyis amit „tudni kell”. Végül is a szükséges mértékelméleti előismeretek a következőkre redukálódtak: Hahn felbontási tétele, a Carathéodory-tétel, az integráltételek (a monotonkonvergencia-tétel, Beppo Levi tétele, a Fatou-lemma, a kis és a nagy Lebesgue-tétel), a mértékterek szorzata, a Fubini-tétel és a Radon–Nikodym-tétel. Ezeket ismertnek tételezzük fel, bár az állításokat pontosan kimondjuk a fejezetek elején, ahol felsoroljuk a szükséges definíciókat és tudnivalókat. Ezeknek az alaptételeknek a bizonyítása megtalálható az irodalomjegyzékben felsorolt tankönyvekben és jegyzetekben.

A fentiekből világos, hogy a közölt feladatanyag meglehetősen heterogén: a feladatok között vannak egyszerű gyakorlófeladatok, vannak gondolkodtató feladatok és vannak olyan bizonyítandó állítások is, amelyek egy-egy tétel technikai részletét képezik. Azonban igyekeztem minden feladatot úgy megfogalmazni, hogy önmagában is érdekes és meggondolásra érdemes legyen. A heterogenitás a feladatok nehézségére is vonatkozik: vannak nagyon könnyű, de nagyon nehéz feladatok is. Ennek ellenére a feladatok nehézségét nem jelöltem meg. Ennek egyik oka, hogy egy feladat nehézsége szubjektív megítélés kérdése, a másik pedig az, hogy egy nehéznek deklarált feladat elriaszthat a megoldástól. Azonban minden feladathoz tartozik megoldási ötlet és teljes megoldás is[1].

Mint minden feladatgyűjtemény esetében, itt is nehéz lenne a feladatok eredetét megjelölni. Néhány feladatot én találtam ki, de a többségüket hallottam vagy olvastam. Olyanok is vannak, amelyeket kollektíve találtunk ki az ELTE Analízis Tanszék azon oktatóival, akikkel a mértékelmélet tárgyat az elmúlt 40 évben tanítottuk. Kivételt képez a 177. feladat, amiért Ruzsa Imrének tartozom köszönettel.

Köszönetnyilvánítás. Különösen hálás vagyok Totik Vilmosnak, aki az anyagot alaposan átnézte, és akinek a megjegyzései és javaslatai óriási segítséget jelentettek számomra.

Budapest, 2017. június 24.

Laczkovich Miklós

[1] egyetlen szándékos és elrejtett kivételtől eltekintve.

1. Jelölések

A szokásos halmazelméleti jelöléseket használjuk. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a $\subset$ jel a nem szigorú tartalmazást jelöli, tehát $A \subset B$ teljesül $A = B$ esetén is. A szigorú tartalmazást az $\subsetneq$ jellel jelöljük, tehát $(A \subsetneq B) \iff (A \subset B$ és $A \neq B)$.

$P(X)$ jelöli X részhalmazainak rendszerét.

Az A és B halmazok *szimmetrikus differenciája* az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmaz.

$|A|$ jelöli a véges A halmaz elemszámát.

Ha $H \subset X$, akkor χ_H-val jelöljük H karakterisztikus függvényét. Azaz: $\chi_H(x) = 1$, ha $x \in H$, és $\chi_H(x) = 0$, ha $x \notin H$ $(x \in X)$.

Az f függvénynek a H halmazra való megszorítását $f|_H$ jelöli.

Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer és H egy halmaz, akkor $\mathcal{A}|_H$-val jelöljük az $\{A \in \mathcal{A} \colon A \subset H\}$ halmazrendszert.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ rendre a nemnegatív egészek, a pozitív egészek, az egészek, a racionális számok, illetve a valós számok halmazát jelöli.

Az a valós szám *pozitív*, illetve *negatív* része az $a^+ = \max(a, 0)$, illetve az $a^- = \max(-a, 0)$ szám. Ekkor $a = a^+ - a^-$ és $|a| = a^+ + a^-$.

Az I intervallum hosszát $|I|$-vel jelöljük.

$\mathbb{R}^p$ jelöli a p-dimenziós euklidészi teret.

Legyen $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| < r\}$ minden $a \in \mathbb{R}^p$ és $r > 0$ esetén. A $B(a, r)$ halmazt az a középpontú és r sugarú *nyílt gömbnek* nevezzük. A $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| \leq r\}$ halmazt az a középpontú és r sugarú *zárt gömbnek* nevezzük.

A $B(a, r)$ gömböt *racionális gömbnek* nevezzük, ha az a középpont koordinátái és az r sugár egyaránt racionális számok. Világos, hogy a racionális gömbök halmaza megszámlálható.

Az $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ alakú halmazokat *téglának* nevezzük.

Az $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ téglát *racionálisnak* nevezzük, ha $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ minden $i = 1, \ldots, p$-re. A racionális téglák halmaza szintén megszámlálható.

$\mathcal{P}^p$-vel jelöljük az $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ alakú téglákból és az üres halmazból álló halmazrendszert.

Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$-re $\mathcal{P}^p(H)$-val jelöljük azon $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ téglákból álló halmazrendszert, amelyekre $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p] \subset H$. Az üres halmazt szintén $\mathcal{P}^p(H)$ elemének tekintjük.

A $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz belsejét, illetve lezártját $\operatorname{int} H$, illetve $\operatorname{cl} H$ jelöli.

Az $x \in \mathbb{R}^p$ pontnak a $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaztól vett távolságát $\operatorname{dist}(x, H)$-val jelöljük. Azaz

$$\operatorname{dist}(x, H) = \inf\{|y - x| \colon y \in H\}.$$

2. Halmazrendszerek

Definíciók és egyéb tudnivalók

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer

félgyűrű, ha van eleme, $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{A}$, és bármely két elemének a különbsége előáll mint véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmaz uniója;

modulus, ha van eleme, és $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \setminus B \in \mathcal{A}$;

gyűrű, ha modulus, és $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{A}$;

algebra, ha gyűrű és van maximális eleme;

σ-gyűrű, ha gyűrű, és $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ esetén $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;

σ-algebra, ha algebra és σ-gyűrű.

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer *háló*, ha $\emptyset \in \mathcal{A}$, és $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cap B,\ A \cup B \in \mathcal{A}$.

Megjegyezzük, hogy a félgyűrű fenti fogalma különbözik a [3] könyvben definiált félgyűrűfogalomtól.

Ha $\mathcal{A}$ modulus, akkor $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{A}$, hiszen $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. Így minden modulus félgyűrű.

Könnyű belátni, hogy ha $\mathcal{A}$ σ-gyűrű és $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Ugyanis $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)$.

Tetszőleges $\mathcal{A}$ halmazrendszerhez létezik egy legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó modulus. Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy veszünk egy X halmazt, amelyre $\bigcup \mathcal{A} \subset X$, azaz $\mathcal{A} \subset P(X)$, majd vesszük az összes olyan modulus metszetét, amely tartalmazza $\mathcal{A}$-t és része $P(X)$-nek. Könnyű belátni, hogy az így kapott halmazrendszer modulus, nem függ X-től, és része minden olyan modulusnak, amely tartalmazza $\mathcal{A}$-t.

Ugyanígy láthatjuk be, hogy tetszőleges $\mathcal{A}$ halmazrendszerhez létezik egy legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó gyűrű, illetve σ-gyűrű. A legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó modulust (vagy gyűrűt, illetve σ-gyűrűt) az $\mathcal{A}$ által generált modulusnak (vagy gyűrűnek, illetve σ-gyűrűnek) nevezzük.

A gondolatmenet algebrákra nem működik, mert algebrák metszete általában nem lesz algebra (lásd a 17. feladatot). Meg lehet mutatni, hogy ha az $\mathcal{A}$ által generált gyűrű (illetve σ-gyűrű) nem algebra (azaz nincs maximális eleme), akkor nem létezik legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó algebra (illetve σ-algebra). (Lásd a 18. feladatot.) Ha azonban adott egy X halmaz, amelyre $\bigcup \mathcal{A} \subset X$, azaz $\mathcal{A} \subset P(X)$, akkor létezik egy legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó algebra (illetve σ-algebra), amelynek a maximális eleme X, nevezetesen az összes olyan algebra (illetve σ-algebra) metszete, amely tartalmazza $\mathcal{A}$-t, és amelynek a maximális eleme X. Ezt az algebrát (illetve σ-algebrát) nevezzük az $\mathcal{A}$ által generált algebrának (illetve σ-algebrának). Ez tehát függ X-től. Amikor egy $\mathcal{A}$ halmazrendszer által generált algebráról (illetve σ-algebráról) beszélünk, akkor a szövegösszefüggésből általában világos, hogy melyik X halmazhoz tartozó algebrát (illetve σ-algebrát) tekintjük. Ez legtöbbször az $\bigcup \mathcal{A}$ halmaz.

Adott $A_1, A_2, \ldots$ halmazsorozatra $\liminf_{n\to\infty} A_n$-nel jelöljük azon elemek halmazát, amelyek véges sok kivétellel mindegyik A_n-nek elemei, továbbá $\limsup_{n\to\infty} A_n$-nel jelöljük azon elemek halmazát, amelyek végtelen sok A_n-nek elemei.

Feladatok

1. Legyen $\mathcal{A}$ gyűrű és $A_1, \ldots, A_{100} \in \mathcal{A}$. Legyen E azon pontok halmaza, amelyek az A_i-k közül pontosan 17-nek elemei. Mutassuk meg, hogy $E \in \mathcal{A}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{A}$ σ-gyűrű és $A_n \in \mathcal{A}$ minden n-re, akkor $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$ és $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

3. Legyen X adott halmaz, és legyen $A_1, A_2, \ldots \subset X$ tetszőleges halmazsorozat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n}.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{A}$ akkor és csak akkor modulus, ha $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{A}$, és minden $H \in \mathcal{A}$-ra $\mathcal{A}|_H$ algebra.

5. Bizonyítsuk be, hogy

(i) egy halmazrendszer akkor és csak akkor gyűrű, ha a szimmetrikus differenciára mint összeadásra és a metszetképzésre mint szorzásra nézve (algebrai értelemben) gyűrűt alkot;

(ii) egy halmazrendszer akkor és csak akkor algebra, ha a szimmetrikus differenciára mint összeadásra és a metszetképzésre mint szorzásra nézve (algebrai értelemben) egységelemes gyűrűt alkot.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{H}$ háló, akkor $\{A \setminus B : A, B \in \mathcal{H}\}$ félgyűrű.

7. Adjunk példát olyan $\mathcal{H}$ hálóra, amelyre $\{A \setminus B : A, B \in \mathcal{H}\}$ nem modulus.

8. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}$ periodikus részhalmazai algebrát alkotnak.

9. Mutassuk meg, hogy az egész számok halmazának azon részhalmazai, amelyeknek van sűrűsége (azaz amelyekre a limesz

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|A \cap [-N, N]|}{2N}$$

létezik), *nem* alkotnak gyűrűt.

10. Bizonyítandó, hogy ha $\mathcal{A}$ gyűrű (illetve σ-gyűrű) és $\bigcup \mathcal{A} \subset X$, akkor az $\mathcal{A} \cup \{X \setminus A\colon A \in \mathcal{A}\}$ halmazrendszer algebra (illetve σ-algebra).

11. Ha az $\mathcal{A}$ halmazrendszer n halmazból áll ($n \geq 1$ véges), akkor legfeljebb hány eleme van a generált gyűrűnek?

12. Mi az $\mathcal{A} = \{\{n, n+1, n+2, \ldots\} : n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer által generált gyűrű?

13. Mi az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények grafikonjaiból álló halmazrendszer által generált gyűrű?

14. Bizonyítandó, hogy az $\mathcal{A}$ halmazrendszer által generált gyűrű minden eleme lefedhető $\mathcal{A}$ véges sok elemével, és az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrű minden eleme lefedhető $\mathcal{A}$ megszámlálhatóan sok elemével.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{A} \subset P(\mathbb{R})$ minden eleme szimmetrikus a 0-ra, akkor az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrű elemei szintén szimmetrikusak a 0-ra.

16. Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges halmazrendszer. Bizonyítandó, hogy

(i) ha egy halmaz benne van az $\mathcal{A}$ által generált gyűrűben, akkor benne van az $\mathcal{A}$ egy alkalmas véges részrendszere által generált gyűrűben is;

(ii) ha egy halmaz benne van az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűben, akkor benne van az $\mathcal{A}$ egy alkalmas megszámlálható részrendszere által generált σ-gyűrűben is.

17. Mutassunk példát két olyan algebrára, melyek metszete nem algebra.

18. Bizonyítandó, hogy

(i) az $\mathcal{A}$ halmazrendszert tartalmazó algebrák között akkor és csak akkor van legszűkebb, ha az $\mathcal{A}$ által generált gyűrű algebra, és

(ii) az $\mathcal{A}$ halmazrendszert tartalmazó σ-algebrák között akkor és csak akkor van legszűkebb, ha az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrű σ-algebra.

19. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ halmazra $\mathcal{P}^1(H)$ félgyűrű. (Emlékeztetjük az olvasót, hogy $\mathcal{P}^1(H)$-val jelöljük azon $[a, b)$ intervallumok halmazát, melyekre $[a, b] \subset H$. Az üres halmazt szintén $\mathcal{P}^1(H)$ elemének tekintjük.)

20. Legyen $\mathcal{A}$ félgyűrű. Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{A}$, akkor $(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_k)$ előáll véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmaz uniójaként.

21. Legyen $\mathcal{A}$ félgyűrű. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}$ által generált gyűrű egyenlő azon halmazok rendszerével, amelyek előállnak véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmaz uniójaként.

22. Van-e generált félgyűrű? (Tehát igaz-e, hogy minden $\mathcal{A}$ halmazrendszerhez van egy legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó félgyűrű?)

23. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ félgyűrűk, akkor $\{A \times B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ is félgyűrű.

24. Legyen $H \in \mathbb{R}^p$ tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{P}^p(H)$ félgyűrű. (Emlékeztetjük az olvasót, hogy $\mathcal{P}^p(H)$-val jelöljük azon $[a_1, b_1) \times ... \times [a_p, b_p)$ téglák halmazát, melyekre $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p] \subset H$. Az üres halmazt szintén $\mathcal{P}^p(H)$ elemének tekintjük.)

25. Legyen $\mathcal{A} \subset P(X)$ félgyűrű, és jelöljük $L(\mathcal{A})$-val azon $f \colon X \to \mathbb{R}$ függvények halmazát, amelyekhez léteznek páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ halmazok úgy, hogy f konstans mindegyik A_i halmazon, és nulla az $X \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ halmazon. Mutassuk meg, hogy $L(\mathcal{A})$ vektortér a pontonkénti összeadás és konstanssal való szorzás műveleteire nézve.

26. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{R}$ gyűrűben nincs végtelen sok páronként diszjunkt nemüres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{R}$-nek csak véges sok eleme van.

27. Igaz-e az előző feladat állítása, ha azt gyűrű helyett félgyűrűre, modulusra vagy hálóra mondjuk ki?

28. Legyen $\mathcal{H}$ monoton osztály. (Ez azt jelenti, hogy ha $H_1, H_2, \ldots \in \mathcal{H}$ és $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$, akkor $\cup_{n=1}^{\infty} H_n \in \mathcal{H}$, valamint, ha $H_1, H_2, \ldots \in \mathcal{H}$ és $H_1 \supset H_2 \supset \ldots$, akkor $\cap_{n=1}^{\infty} H_n \in \mathcal{H}$.) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathcal{H}$ monoton osztály tartalmazza az $\mathcal{A}$ gyűrűt, akkor tartalmazza az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűt is.

3. Additív halmazfüggvények

Definíciók és egyéb tudnivalók

$\overline{\mathbb{R}}$-rel jelöljük a kibővített valós számok halmazát, azaz $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Az összeadás műveletét a következőképpen terjesztjük ki $\overline{\mathbb{R}}$-re: $(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = \pm\infty$ minden $a \in \mathbb{R}$-re, $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$. A $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ összegeket nem definiáljuk.

A szorzást a következőképpen terjesztjük ki $\overline{\mathbb{R}}$-re: $(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$, $(\pm\infty) \cdot a = a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, ha $a > 0$, $(\pm\infty) \cdot a = a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, ha $a < 0$, $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \infty$, $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$.

A rendezést is kiterjesztjük $\overline{\mathbb{R}}$-re: legyen $-\infty < a < \infty$ minden $a \in \mathbb{R}$-re.

Legyen $\mathcal{A}$ olyan halmazrendszer, amely tartalmazza az üres halmazt. A $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvény *végesen additív* (röviden *additív*), ha $\mu(\emptyset) = 0$, és valahányszor $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, melyek uniója is $\mathcal{A}$-ban van, akkor $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$. A definícióba beleértendő, hogy a jobb oldali összeg értelmes, azaz a tagok között nem szerepelhet ∞ és $-\infty$ mindegyike. Ebből egyszerűen levezethető, hogy ha μ additív az $\mathcal{A}$ gyűrűn, akkor μ nem veheti fel a ∞ és $-\infty$ értékek mindegyikét.

Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer és $\vartheta\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, akkor ϑ *pozitív* és *negatív részén* a

$$\begin{aligned} \pi(H) &= \sup\{\vartheta(A)\colon A \in \mathcal{A}|_H\} \quad (H \in \mathcal{A}) \\ \text{és} \ \ \nu(H) &= -\inf\{\vartheta(A)\colon A \in \mathcal{A}|_H\} \quad (H \in \mathcal{A}) \end{aligned}$$

halmazfüggvényeket értjük. A ϑ halmazfüggvény *totális variációja* a

$$\tau(H) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\vartheta(A_i)|\colon A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}|_H \text{ páronként diszjunkt halmazok}\right\}$$

$(H \in \mathcal{A})$ halmazfüggvény.

Feladatok

29. A 8. feladat állítása szerint $\mathbb{Z}$ periodikus részhalmazai algebrát alkotnak. Lássuk be, hogy ezen az algebrán egy és csak egy végesen additív és eltolás-invariáns μ halmazfüggvény van, amelyre $\mu(\mathbb{Z}) = 1$. (Ez a sűrűség.)

30. Legyen μ nemnegatív és végesen additív halmazfüggvény az $\mathcal{A}$ algebrán, amelynek maximális eleme X. Tegyük fel, hogy $\mu(X) = 1$ és $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

olyan halmazok, melyekre $\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) > 100$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan pont, amely több, mint 100 db A_i-nek eleme.

31. Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathcal{A} = \{H \subset X : H \text{ véges}\}$, $f : X \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, és $\vartheta(H) = \sum_{x \in H} f(x)$ $(H \in \mathcal{A})$. Mutassuk meg, hogy ϑ additív $\mathcal{A}$-n, és határozzuk meg ϑ pozitív és negatív részét, illetve totális variációját (vagyis a π, ν és τ halmazfüggvények értékeit) minden véges H halmazban. Ellenőrizzük, hogy $\vartheta(A) = \pi(A) - \nu(A)$ és $\tau(A) = \pi(A) + \nu(A)$ minden $A \in \mathcal{A}$-ra.

32.

(i) Legyen ϑ additív halmazfüggvény az $\mathcal{A}$ hálón. Mutassuk meg, hogy ϑ pozitív és negatív része, illetve totális variációja (vagyis a π, ν, τ halmazfüggvények) mindegyike additív $\mathcal{A}$-n.

(ii) Legyen ϑ additív halmazfüggvény az $\mathcal{A}$ moduluson. Mutassuk meg, hogy $\vartheta(A) = \pi(A) - \nu(A)$ minden olyan $A \in \mathcal{A}$ halmazra, amelyre a $\pi(A) - \nu(A)$ különbség értelmes.

(iii) Legyen ϑ additív halmazfüggvény az $\mathcal{A}$ gyűrűn. Mutassuk meg, hogy $\tau(A) = \pi(A) + \nu(A)$ minden $A \in \mathcal{A}$-ra.

33. Legyen H tetszőleges síkbeli halmaz, és jelöljük $\mathcal{P}^2(H)$-val azon $[c_1, d_1) \times [c_2, d_2)$ téglák halmazát az üres halmazzal együtt, amelyek lezártja része H-nak. (A $\mathcal{P}^2(H)$ halmazrendszer félgyűrű a 24. feladat szerint.) Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Definiáljuk a μ_f halmazfüggvényt a következőképpen:

$$\mu_f(\emptyset) = 0 \text{ és } \mu_f([c_1, d_1) \times [c_2, d_2)) = f(c_1, c_2) + f(d_1, d_2) - f(c_1, d_2) - f(c_2, d_1)$$

minden $[c_1, d_1) \times [c_2, d_2) \in \mathcal{P}^2(H)$ téglára. Bizonyítsuk be, hogy μ_f additív a $\mathcal{P}^2(H)$ félgyűrűn.

34. Tegyük fel, hogy $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ zárt téglalap, és μ véges értékű additív halmazfüggvény a $\mathcal{P}^2(T)$ félgyűrűn. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\mu = \mu_f$ (az előző feladat jelöléseit használva).

35. Legyen $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ és $f : T \to \mathbb{R}$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) $\mu_f(A) = 0$ minden $A \in \mathcal{P}^2(T)$-re;

(ii) vannak olyan $g : [a_1, b_1) \to \mathbb{R}$ és $h : [a_2, b_2) \to \mathbb{R}$ függvények, hogy $f(x, y) = g(x) + h(y)$ minden $(x, y) \in T$-re.

36. Legyen $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, és legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy a μ_f halmazfüggvény akkor és csak akkor nemnegatív a $\mathcal{P}^2(G)$ félgyűrűn, ha G minden pontjában $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \geq 0$.

37. Legyen $\mathcal{A} \subset P(X)$ félgyűrű, és legyen μ véges értékű additív halmazfüggvény $\mathcal{A}$-n.

(i) Bizonyítsuk be, hogy μ kiterjeszthető véges értékű additív halmazfüggvényként az $\mathcal{A}$ által generált $\mathcal{R}$ gyűrűre, és a kiterjesztés egyértelmű.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy μ kiterjeszthető véges értékű additív halmazfüggvényként $P(X)$-re.

38. Legyen H tetszőleges síkbeli halmaz, és legyen μ véges értékű additív halmazfüggvény a $\mathcal{P}^2(H)$ félgyűrűn. Igaz-e, hogy van olyan $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\mu = \mu_f$? (A μ_f halmazfüggvényt a 33. feladatban definiáltuk.)

39. Legyen $\mathcal{H}$ háló. Bizonyítsuk be, hogy a $\vartheta\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény akkor és csak akkor terjeszthető ki a $\mathcal{H}$ által generált gyűrűre additív halmazfüggvényként, ha $\vartheta(\emptyset) = 0$, és

$$\vartheta(A \cap B) + \vartheta(A \cup B) = \vartheta(A) + \vartheta(B) \tag{1}$$

minden $A, B \in \mathcal{H}$-ra.

40. Legyenek $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots$ végesen additív halmazfüggvények az $\mathcal{A}$ gyűrűn. Bizonyítsuk be, hogy ha egyik ϑ_n sem azonosan nulla, akkor az alábbi állítások közül legalább az egyik igaz.

(i) Vannak páronként diszjunkt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok és különböző n_1, $n_2, \ldots$ indexek úgy, hogy $\vartheta_{n_i}(A_i) \neq 0$ minden $i = 1, 2, \ldots$-re.

(ii) Van olyan $A \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\vartheta_n(A) \neq 0$ végtelen sok n-re.

4. Borel-halmazok

Definíciók és egyéb tudnivalók

Az $A\subset\mathbb{R}^p$ halmaz *nyílt*, ha minden $a\in A$-hoz van olyan $r>0$, hogy $B(a,r)\subset A$. Más szóval az A halmaz akkor nyílt, ha előáll nyílt gömbök uniójaként. Az $A\subset\mathbb{R}^p$ halmaz *zárt*, ha $\mathbb{R}^p\setminus A$ nyílt.

Borel[2] *tétele* azt állítja, hogy ha a korlátos és zárt $F\subset\mathbb{R}^p$ halmazt nyílt halmazok egy tetszőleges $\mathcal{G}$ rendszere lefedi, akkor $\mathcal{G}$-ből kiválasztható véges sok olyan halmaz, amelyek szintén lefedik F-et.

Az $A\subset\mathbb{R}^p$ halmaz F_σ, ha előáll megszámlálhatóan sok zárt halmaz uniójaként. Az $A\subset\mathbb{R}^p$ halmaz G_δ, ha előáll megszámlálhatóan sok nyílt halmaz metszeteként. Az $A\subset\mathbb{R}^p$ halmaz $F_{\sigma\delta}$, ha előáll megszámlálhatóan sok F_σ halmaz metszeteként. Az $A\subset\mathbb{R}^p$ halmaz $G_{\delta\sigma}$, ha előáll megszámlálhatóan sok G_δ halmaz uniójaként. A definíciókból nyilvánvaló, hogy (i) nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt, (ii) zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt, (iii) megszámlálhatóan sok F_σ halmaz uniója F_σ, (iv) megszámlálhatóan sok G_δ halmaz metszete G_δ.

Az $\mathbb{R}^p$ tér nyílt halmazai rendszere által generált σ-gyűrűt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$-vel jelöljük. Mivel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$-nek van maximális eleme (nevezetesen $\mathbb{R}^p$), ezért $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ valójában σ-algebra. A $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ halmazrendszer elemeit *Borel-halmazoknak* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy minden zárt, nyílt, F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$ vagy $G_{\delta\sigma}$ halmaz Borel.

Ha $A\subset\mathbb{R}^p$ Borel-halmaz, akkor $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)|_A$ helyett $\mathcal{B}(A)$-t fogunk írni. Más szóval $\mathcal{B}(A)$ jelöli a $\{B\subset A\colon B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)\}$ halmazrendszert. Világos, hogy $\mathcal{B}(A)$ σ-algebra minden $A\subset\mathbb{R}^p$ Borel-halmazra. Könnyen látható, hogy ha G nyílt, akkor $\mathcal{B}(G)$ megegyezik a G által tartalmazott nyílt halmazok rendszere által generált σ-gyűrűvel.

Ha $A\subset\mathbb{R}^p$ és $f\colon A\to\mathbb{R}$, akkor C_f-fel jelöljük azon $x\in A$ pontok halmazát, amelyekben f folytonos. Az f függvény *oszcillációja* a $B\subset A$ halmazon az

$$\omega_f(B)=\sup\{f(x)\colon x\in B\}-\inf\{f(x)\colon x\in B\}$$

mennyiség (feltéve, hogy a különbség a jobb oldalon értelmes). Az f függvény *oszcillációja* az $x\in B$ pontban

$$\omega_f(x)=\lim_{r\to 0+0}\omega_f(A\cap B(x,r)).$$

[2] Émile Borel (1871–1956) francia matematikus.

Ha van olyan $\delta > 0$, hogy f korlátos az $A \cap B(x, \delta)$ halmazon, akkor a fenti limesz létezik és véges, hiszen ekkor az $r \mapsto \omega_f(A \cap B(x, r))$ függvény monoton növő a $(0, \delta)$ intervallumon. Nyilvánvaló, hogy f akkor és csak akkor folytonos x-ben, ha $\omega_f(x) = 0$.

A pozitív egészekből álló véges sorozatok halmazát Σ-val jelöljük. Feltesszük, hogy az üres sorozat (melyet $\emptyset$-val jelölünk) szintén eleme Σ-nek. Az $F \subset \Sigma$ halmazt *fának* nevezzük, ha $\emptyset \in F$ és minden $k \geq 1$ és $(n_1, \ldots, n_k) \in F$ esetén $(n_1, \ldots, n_{k-1}) \in F$. Azt mondjuk, hogy $(n_1, \ldots, n_k)$ *végpontja* F-nek, ha $(n_1, \ldots, n_k) \in F$ és $(n_1, \ldots, n_k, i) \notin F$ minden $i \in \mathbb{N}$-re. Az F fa *jólfundált*, ha nincs olyan végtelen $(n_1, n_2, \ldots)$ sorozat, hogy $(n_1, \ldots, n_k) \in F$ minden k-ra.

Feladatok

41. Bizonyítsuk be, hogy

(i) minden $\mathbb{R}^p$-beli nyílt halmaz előáll mint racionális téglák egyesítése, valamint

(ii) minden $\mathbb{R}^p$-beli nyílt halmaz előáll mint racionális gömbök egyesítése.

42. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. Bizonyítsuk be, hogy

(i) a G által tartalmazott racionális téglák rendszere által generált σ-gyűrű egyenlő $\mathcal{B}(G)$-vel, valamint

(ii) a G által tartalmazott racionális gömbök rendszere által generált σ-gyűrű egyenlő $\mathcal{B}(G)$-vel.

43. Bizonyítsuk be, hogy

(i) minden nyílt halmaz F_σ,

(ii) minden zárt halmaz G_δ,

(iii) minden F_σ halmaz $G_{\delta\sigma}$,

(iv) minden G_δ halmaz $F_{\sigma\delta}$.

44. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (a, b) nyílt intervallumra a $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ halmaz nem G_δ.

45. Adjunk meg olyan halmazt $\mathbb{R}$-ben, amely

(i) G_δ és nem F_σ,

(ii) F_σ és nem G_δ,

(iii) $G_{\delta\sigma}$, de nem F_σ, sem pedig G_δ,

(iv) $F_{\sigma\delta}$, de nem F_σ, sem pedig G_δ.

46.

(i) Bizonyítsuk be, hogy bármely $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre a C_f halmaz G_δ.

(ii) Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvényre $C_f = A \cap U$, ahol U egy alkalmas G_δ halmaz.

47. Igaz-e, hogy bármely $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre f folytonossági pontjainak halmaza F_σ?

48. Jelöljük $D(f)$-fel azon pontok halmazát, amelyekben az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Bizonyítsuk be, hogy bármely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $D(f)$ Borel-halmaz.

49. Legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos minden n-re. Jelöljük A-val azon $x \in \mathbb{R}$ pontok halmazát, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergens. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz $F_{\sigma\delta}$.

50. Jelöljük $A_n(x)$-szel az $x = 0, a_1a_2\ldots$ tizedestörtben az első n jegy közötti 7-esek számát. (Ha a tizedestört-előállítás nem egyértelmű, akkor vegyük azt az alakot, amelyben minden jegy 0 valahonnan kezdve.) Bizonyítsuk be, hogy az $A = \{x : \lim_{n\to\infty} A_n(x)/n = 1/10\}$ halmaz Borel.

51. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban szereplő A halmaz $F_{\sigma\delta}$.

52. Jelöljük A-val a $(0, 1)$ intervallum azon irracionális elemeinek halmazát, amelyek tizedestört alakja teljesíti a következő feltételt: valahányszor a tizedestört egy jegye prímszám és a következő jegy összetett szám, akkor az azt követő jegyek között van nyolc egymás utáni jegy, amelyek a 20151028 jegycsoportot alkotják. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz Borel.

53. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen $\mathcal{A}$ olyan halmazrendszer, amely tartalmazza a G-beli nyílt gömböket, és amelyre teljesül, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ esetén $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{B}(G) \subset \mathcal{A}$.

54. Legyen $\mathcal{F} \subset P(\mathbb{R}^p)$ egy zárt halmazokból álló olyan halmazrendszer, amelyre teljesül, hogy minden $A, B \in \mathcal{F}$ esetén $A \subset B$ vagy $B \subset A$. Bizonyítsuk be, hogy az $\bigcup \mathcal{F}$ halmaz F_σ.

A következő három feladat célja annak bizonyítása, hogy a Borel-halmazok rendszerének számossága kontinuum. Ugyan erre az állításra létezik egyszerűbb megoldás, de ahhoz szükség van a kiválasztási axiómára és a jólrendezési tételre, valamint ezek alkalmazásaként a Borel-halmazok ún. transzfinit osztályozására. A következő feladatok nem támaszkodnak ezekre az eszközökre.

55. Legyen $\mathcal{A}$ az $\mathbb{R}^p$-beli racionális gömbök halmaza, és legyen $A_1, A_2, \dots$ az $\mathcal{A}$ halmazrendszer egy rögzített sorozatba rendezése. Bizonyítsuk be, hogy ha az $F \subset \Sigma$ fa jólfundált és legalább két eleme van, akkor létezik egy és csak egy olyan $f : F \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ leképezés, amelyre

(i) $f(n_1, \dots, n_k) = A_{n_k}$, valahányszor $(n_1, \dots, n_k)$ végpontja F-nek,

(ii) $f(n_1, \dots, n_k) = \bigcup\{f(n_1, \dots, n_k, i) : (n_1, \dots, n_k, i) \in F\}$ minden olyan $(n_1, \dots, n_k) \in F$-re, amely nem végpontja F-nek és amelyre k páros, továbbá

(iii) $f(n_1, \dots, n_k) = \bigcap\{f(n_1, \dots, n_k, i) : (n_1, \dots, n_k, i) \in F\}$ minden olyan $(n_1, \dots, n_k) \in F$-re, amely nem végpontja F-nek és amelyre k páratlan.

56. Bizonyítsuk be, hogy minden $B \subset \mathbb{R}^p$ Borel-halmazhoz van olyan legalább kételemű jólfundált F fa és olyan $f : F \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ leképezés, amelyre teljesülnek az előző feladat feltételei, és $B = f(\emptyset)$.

57. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^p$-beli Borel-halmazok rendszerének számossága kontinuum.

5. Mértékek és előjeles mértékek

Definíciók és egyéb tudnivalók

A $\vartheta\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvény *σ-additív* (más szóval *előjeles mérték*), ha $\vartheta(\emptyset) = 0$, és valahányszor $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, melyek uniója is $\mathcal{A}$-ban van, akkor $\vartheta(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(A_n)$. A definícióba beleértendő, hogy a jobb oldali végtelen sornak van összege. Ezen azt értjük, hogy a részletösszegek értelmesek, azaz a tagok között nem szerepelhet ∞ és $-\infty$ mindegyike, és hogy a $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vartheta(A_i)$ limesz létezik. Ebből következik, hogy ha a $\vartheta(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)$ érték véges, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(A_n)$ végtelen sor abszolút konvergens, hiszen a sor minden átrendezésének ugyanannyi az összege.

A $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvény *külső mérték*, ha $\mu(\emptyset) = 0$, és valahányszor az $A \in \mathcal{A}$ halmazt lefedik az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok, akkor $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. A definícióból következik, hogy egy külső mérték mindig nemnegatív, hiszen minden $A \in \mathcal{A}$-ra $\emptyset \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$, és így $0 \le \mu(A)$.

A $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvény *mérték*, ha nemnegatív és σ-additív.

Könnyű belátni, hogy ha ϑ előjeles mérték az $\mathcal{A}$ gyűrűn, akkor $\pi(A)$, $\nu(A)$ és τ mértékek $\mathcal{A}$-n.

Ismeretes, hogy egy félgyűrűn értelmezett halmazfüggvény akkor és csak akkor mérték, ha additív és külső mérték.

Hahn[3] *felbontási tétele* azt állítja, hogy ha $\mathcal{A} \subset P(X)$ σ-gyűrű és ϑ előjeles mérték $\mathcal{A}$-n, akkor van olyan $P \subset X$ halmaz, hogy P és $X \setminus P$ legalább egyike $\mathcal{A}$-ban van, és minden $A \in \mathcal{A}$-ra $\vartheta(A \cap P) \ge 0$ és $\vartheta(A \setminus P) \le 0$.

Egy egyszerű és gyakran alkalmazott tény a következő. Legyen ϑ előjeles mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, akkor

[3] Hans Hahn (1879–1934) osztrák matematikus.

$\vartheta(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \lim_{n\to\infty} \vartheta(A_n)$. Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\vartheta(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) &= \vartheta\left(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots\right) = \\ &= \vartheta(A_1) + \vartheta(A_2 \setminus A_1) + \vartheta(A_3 \setminus A_2) + \ldots = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\vartheta(A_1) + \vartheta(A_2 \setminus A_1) + \ldots + \vartheta(A_n \setminus A_{n-1})\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \vartheta(A_n).\end{aligned}$$

Ha $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ és $\vartheta(A_1)$ véges, akkor $\vartheta(A_1 \cap A_2 \cap \ldots) = \lim_{n\to\infty} \vartheta(A_n)$. Ez egyszerűen következik az előző állításból, ha azt az $A_1 \setminus A_n$ halmazokra alkalmazzuk.

Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Egy $A \in \mathcal{A}$ halmazt *atomnak* nevezünk (a μ mértékre nézve), ha $\mu(A) > 0$, és minden $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ halmazra $\mu(B) = 0$ vagy $\mu(A \setminus B) = 0$.

Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn, és legyen $A \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy egy állítás az A halmaz *μ-majdnem minden pontjára igaz* vagy *A-n μ-majdnem mindenütt igaz*, ha van olyan $N \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\mu(N) = 0$, és a szóban forgó állítás az $A \setminus N$ halmaz minden pontjára igaz. A μ-majdnem mindenütt kifejezés helyett legtöbbször a μ-m.m. rövidítést fogjuk használni.

Legyen μ külső mérték $P(X)$-en. Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz a $H \subset X$ halmazt *jól vágja ketté*, ha $\mu(H) = \mu(H \cap A) + \mu(H \setminus A)$. Azt mondjuk, hogy *$A$ mindent jól vág ketté*, ha minden $H \subset X$ halmazt jól vág ketté. Jelöljük $\mathcal{M}_\mu$-vel azon $A \subset X$ halmazok rendszerét, amelyek mindent jól vágnak ketté. *Carathéodory*[4] *tétele* azt állítja, hogy az $\mathcal{M}_\mu$ halmazrendszer σ-algebra, amelynek maximális eleme X, és amelyen μ mérték. Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *mérhető* a μ külső mértékre nézve, ha $A \in \mathcal{M}_\mu$. (Tehát egy halmaz akkor és csak akkor mérhető μ-re nézve, ha mindent jól vág ketté.)

Legyen μ mérték az $\mathcal{A} \subset P(X)$ félgyűrűn. Ekkor μ kiterjeszthető $P(X)$-re külső mértékként. Valóban, könnyű ellenőrizni, hogy

$$\overline{\mu}(H) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \colon A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \ldots),\ H \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots\right\} \quad (H \subset X) \tag{2}$$

egy külső mértéket definiál $P(X)$-en, ami $\mathcal{A}$ minden elemén megegyezik μ-vel. (Az utóbbi állítás abból következik, hogy μ külső mérték $\mathcal{A}$-n.) Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathcal{A}$ elemei mindent jól vágnak ketté, azaz $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{\overline{\mu}}$. Ebből megkaptuk a *mértékkiterjesztési tételt*, ami azt állítja, hogy minden, félgyűrűn értelmezett mérték kiterjeszthető mértékként a félgyűrű által generált σ-algebrára. Nem nehéz belátni, hogy a kiterjesztés egyértelmű a generált σ-algebra minden olyan elemére, amely lefedhető megszámlálhatóan sok véges mértékű félgyűrűbeli halmazzal.

[4]Constantin Carathéodory (1873–1950) görög matematikus.

Az előjeles mértékek kiterjeszthetőségére és a kiterjesztés egyértelműségére nézve lásd a 79. és 80. feladatokat.

Meg lehet mutatni (lásd a 66. feladatot), hogy ha egy $A \subset X$ halmaz $\mathcal{A}$ minden elemét jól vágja ketté, akkor A mindent jól vág ketté. Így $\mathcal{M}_{\overline{\mu}}$ elemei pontosan azok a halmazok, amelyek $\mathcal{A}$ elemeit jól vágják ketté.

Legyen $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ egy nem feltétlenül korlátos zárt intervallum, és legyen $f : I \to \mathbb{R}$. Ha az f függvény monoton növő és balról folytonos az I intervallumon, akkor a $\mu_f([c, d)) = f(d) - f(c)$ ($[c, d] \subset I$) halmazfüggvény mérték a $\mathcal{P}^1(I) = \{[c, d) : [c, d] \subset I\} \cup \{\emptyset\}$ félgyűrűn. (Lásd a 68. feladatot.) Ez a mérték a (2)-ben definiált módon kiterjeszthető $P([a, b))$-re külső mértékként. Ezt a kiterjesztést szintén μ_f-fel jelöljük, és az f által generált *Lebesgue*[5]*–Stieltjes*[6]*-féle külső mértéknek* nevezzük. A Carathéodory-tételből és hozzá kapcsolódó gondolatmenetből következik, hogy μ_f mérték a $\mathcal{P}^1(I)$ által generált σ-algebrán, vagyis $[a, b)$ Borel-halmazainak rendszerén.

Az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény *totális variációja* a $V_F = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ számok halmazának szuprémuma, ahol $F : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ befutja az $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmazát. Az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény totális variációját $V(f; [a, b])$-vel jelöljük. Az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény *korlátos változású*, ha $V(f; [a, b]) < \infty$.

Feladatok

58. Adjunk példát olyan hálóra és rajta értelmezett olyan mértékre, ami nem külső mérték.

59. Adjunk példát olyan végesen additív külső mértékre, ami nem mérték (valamely $\mathcal{A}$ halmazrendszeren, ami persze nem lehet gyűrű).

60. Legyen $\mathcal{A}$ olyan halmazrendszer, amelyre teljesül, hogy $\emptyset \in \mathcal{A}$ és $\mathcal{A}$ bármely két elemének az uniója is $\mathcal{A}$-ban van. Bizonyítsuk be, hogy ha μ végesen additív külső mérték $\mathcal{A}$-n, akkor μ mérték $\mathcal{A}$-n.

61. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn.

(i) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_n \in \mathcal{A}$ halmazokra

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3}$$

(ii) Mutassuk meg, hogy (3)-ban általában nem áll egyenlőség.

[5] Henri Lebesgue (1875–1941) francia matematikus.

[6] Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894) holland matematikus.

62. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn.

(i) Bizonyítsuk be, hogy ha $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \dots)$ és $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) < \infty$, akkor
$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{4}$$

(ii) Mutassuk meg, hogy a $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) < \infty$ feltétel nélkül (4) általában nem igaz.

63. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú divergens sor. Mutassuk meg, hogy vannak olyan $I_n \subset [0, 1]$ intervallumok, hogy $|I_n| \leq a_n$ minden n-re, és $\limsup_{n\to\infty} I_n = [0, 1]$.

(Ha olyan divergens sort választunk, amelynek a tagjai nullához tartanak, akkor a kapott intervallumsorozatra és μ-nek a Lebesgue-mértéket választva (4) bal oldala 1, míg a jobb oldala 0. Ezzel beláttuk, hogy (4)-ben általában nem áll egyenlőség, akkor sem, ha $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) < \infty$.)

64. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Mutassuk meg, hogy ha $A_n \in \mathcal{A}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, akkor $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$ (vagyis azon pontok, amelyek végtelen sok A_n-nek elemei, nullmértékű halmazt alkotnak). (Ezt az állítást a 184. feladat állításával együtt *Borel–Cantelli-lemmának* nevezik.)

65. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Tegyük fel, hogy $A_n \in \mathcal{A}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$. Igaz-e, hogy $\limsup_{n\to\infty} A_n \neq \emptyset$? És ha azt is feltesszük, hogy $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$?

66. Legyen μ mérték a $\mathcal{P} \subset P(X)$ félgyűrűn, és legyen $\overline{\mu}$ a (2)-ben definiált külső mérték. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $A \subset X$ halmaz $\mathcal{P}$ minden elemét jól vágja ketté a $\overline{\mu}$ külső mértékre nézve, akkor A mindent jól vág ketté $\overline{\mu}$-re nézve.

67. Bizonyítsuk be, hogy ha μ mérték $P(\mathbb{R})$-en, és μ csak a 0 és 1 értékeket veszi fel, akkor vagy $\mu \equiv 0$, vagy pedig van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $\mu(H) = 1$, ha $x \in H$, és $\mu(H) = 0$, ha $x \notin H$.

68. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, és legyen $f : I \to \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy a $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a)$ $([a, b] \subset I)$ halmazfüggvény akkor és csak akkor mérték a $\mathcal{P}^1(I) = \{[a, b) : [a, b] \subset I\} \cup \{\emptyset\}$ félgyűrűn, ha f monoton növő és balról folytonos. Mikor lesz μ_f külső mérték $\mathcal{P}^1(I)$-n?

69. Legyen $f(x) = 0$, ha $x \leq 0$, és $f(x) = 1$, ha $x > 0$. Mi az f által generált μ_f Lebesgue–Stieltjes-mérték $\mathbb{R}$-en?

70. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton növő és balról folytonos. Bizonyítsuk be, hogy a $H \subset [a, b)$ halmaz akkor és csak akkor mérhető a μ_f külső mértékre nézve, ha előáll mint egy Borel-halmaz és egy μ_f szerint nullmértékű halmaz uniója.

71. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum, és legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$. Tekintsük az alábbi állításokat.

(i) Az f függvény balról folytonos és korlátos változású.

(ii) A $\vartheta_f([a, b)) = f(b) - f(a)$ $([a, b] \subset I)$ halmazfüggvény előjeles mérték a $\mathcal{P}^1(I) = \{[a, b) : [a, b] \subset I\} \cup \{\emptyset\}$ félgyűrűn.

(iii) Az f függvény balról folytonos.

Bizonyítsuk be, hogy (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii). Azt is mutassuk meg, hogy egyik nyíl sem fordítható meg.

72. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum, és legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.

(i) A $\vartheta_f([a, b)) = f(b) - f(a)$ $([a, b] \subset I)$ halmazfüggvény előjeles mérték a $\mathcal{P}^1(I) = \{[a, b) : [a, b] \subset I\} \cup \{\emptyset\}$ félgyűrűn.

(ii) Az f függvény balról folytonos, és minden $x_n \in I$ szigorúan monoton növő sorozatra $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \infty$.

(iii) Az f függvény balról folytonos, és minden $\min I < x \le \max I$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy f korlátos változású $[x - \delta, x]$-ben.

73. Legyen ϑ előjeles mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Mutassuk meg, hogy ϑ pozitív és negatív része, illetve totális variációja (vagyis a π, ν, τ halmazfüggvények) mindegyike mérték $\mathcal{A}$-n.

74. Legyenek ϑ és ξ előjeles mértékek a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ σ-algebrán. Bizonyítsuk be, hogy ha $\vartheta(T) = \xi(T) \in \mathbb{R}$ minden $T \subset \mathbb{R}^p$ téglára, akkor $\vartheta(A) = \xi(A)$ minden A Borel-halmazra.

Igaz marad-e az állítás, ha csak azt tesszük fel, hogy $\vartheta(T) = \xi(T)$ minden T téglára?

75. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen μ véges mérték G Borel-részhalmazainak $\mathcal{B}(G)$ σ-algebráján. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \in \mathcal{B}(G)$ halmazra $\mu(A) = \sup\{\mu(F)\colon F \subset G \text{ zárt}\}$ és $\mu(A) = \inf\{\mu(U)\colon A \subset U \subset G \text{ nyílt}\}$.

76. Legyen ϑ előjeles mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Bizonyítsuk be, hogy

(i) ϑ-nak van legkisebb és van legnagyobb értéke $\mathcal{A}$-n, valamint

(ii) ϑ alulról vagy felülről korlátos $\mathcal{A}$-n.

77. Legyen ϑ véges értékű előjeles mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $A \in \mathcal{A}$, hogy $\vartheta(B) = 0$ minden $B \in \mathcal{A}$, $B \cap A = \emptyset$ halmazra.

78. Adjunk példát olyan $\mathcal{A} \subset P(X)$ gyűrűre és rajta értelmezett előjeles mértékre, amely kiterjeszthető $P(X)$-re additívan, de nem terjeszthető ki semmilyen $\mathcal{A}$-t tartalmazó σ-gyűrűre σ-additívan.

79. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathcal{A}$ gyűrűn értelmezett ϑ előjeles mértéket akkor és csak akkor lehet előjeles mértékként kiterjeszteni az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűre, ha ϑ alulról vagy felülről korlátos.

80. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ gyűrűn értelmezett ϑ előjeles mérték kiterjeszthető előjeles mértékként az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűre. Mutassuk meg, hogy a kiterjesztés egyértelmű a generált σ-gyűrű minden olyan elemére, amely lefedhető megszámlálhatóan sok véges ϑ-mértékű $\mathcal{A}$-beli halmazzal.

81. Igaz-e, hogy egy $\mathcal{A}$ σ-algebrán értelmezett véges értékű mérték mindig kiterjeszthető mértékként (esetleg előjeles mértékként) minden, $\mathcal{A}$-t tartalmazó σ-algebrára?

82. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ abszolút konvergens sor, és legyenek $x_1, x_2, \ldots \in [a, b)$ tetszőleges számok. Minden $x \in [0, 1]$-re legyen $f(x)$ azon u_n számok összege, amelyek n indexére teljesül $x_n < x$. Mutassuk meg, hogy f balról folytonos és korlátos változású $[a, b]$-ben. Így a 71. feladat állítása szerint ϑ_f előjeles mérték $\mathcal{P}^1([a, b])$-n. Bizonyítsuk be, hogy ϑ_f kiterjeszhető az $[a, b)$ intervallum Borel-halmazainak σ-algebrájára előjeles mértékként, és írjuk le minél egyszerűbben ezt az előjeles mértéket.

83. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn, és tegyük fel, hogy minden $B \in \mathcal{A}$-ra, ha $\mu(B) > 0$, akkor van olyan $A \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ halmaz, hogy $0 < \mu(A) < \mu(B)$. Bizonyítsuk be, hogy a μ mérték értékkészlete intervallum.

84. Legyen μ véges mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Bizonyítsuk be, hogy a μ mérték értékkészlete zárt halmaz. Igaz-e az állítás tetszőleges mértékre?

85. Legyenek $\mu_1, \mu_2, \ldots$ mértékek az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Bizonyítsuk be, hogy ha a véges $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ határérték létezik minden $A \in \mathcal{A}$-ra, akkor μ is mérték $\mathcal{A}$-n. Mutassuk meg, hogy μ végességének feltétele nem hagyható el.

86. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Azt mondjuk, hogy az $A_n \in \mathcal{A}$ halmazsorozat *majdnem konvergál az $A \in \mathcal{A}$ halmazhoz*, ha az alábbi feltételek bármelyike teljesül:

(i) $\chi_{A_n} \to \chi_A$ μ-m.m.;

(ii) az A, $\limsup_{n\to\infty} A_n$ és $\liminf_{n\to\infty} A_n$ halmazok csak nullmértékű halmazban térnek el egymástól.

Mutassuk meg, hogy az (i) és (ii) feltételek ekvivalensek egymással.

87. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn, és jelöljük $\mathcal{A}^{<\infty}$-vel azon $A \in \mathcal{A}$ halmazok gyűrűjét, amelyekre $\mu(A) < \infty$. Az $A, B \in \mathcal{A}^{<\infty}$ halmazokat tekintsük azonosnak, ha $\mu(A\Delta B) = 0$. Definiáljuk az $A, B \in \mathcal{A}^{<\infty}$ halmazok távolságát a $d(A,B) = \mu(A\Delta B)$ képlettel. Mutassuk meg, hogy $(\mathcal{A}^{<\infty}, d)$ teljes metrikus tér.

88. Az előző (87.) feladat jelöléseit használjuk. Legyen $A_n \in \mathcal{A}^{<\infty}$ egy halmazsorozat, és legyen $A \in \mathcal{A}^{<\infty}$. Melyik állításból következik a másik?

(i) Az A_n halmazsorozat konvergál az A halmazhoz a $(\mathcal{A}^{<\infty}, d)$ metrikus térben.

(ii) Az A_n halmazsorozat majdnem konvergál az A halmazhoz.

89. A 86. és 87. feladatok jelöléseit és fogalmait használjuk. Legyen $A_n \in \mathcal{A}^{<\infty}$ olyan halmazsorozat, amelyre $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Mutassuk meg, hogy ha A_n majdnem konvergál az A halmazhoz, akkor $A_n \to A$ a $(\mathcal{A}^{<\infty}, d)$ metrikus térben.

90. Az 87. feladat jelöléseit használjuk. Mutassuk meg, hogy ha $A_n \in \mathcal{A}^{<\infty}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} d(A_n, A_{n+1}) < \infty$, akkor az A_n sorozat majdnem konvergál egy $A \in \mathcal{A}^{<\infty}$ halmazhoz.

91. Legyenek $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots$ előjeles mértékek az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Bizonyítsuk be, hogy ha egyik ϑ_n sem azonosan nulla, akkor van olyan $A \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\vartheta_n(A) \neq 0$ végtelen sok n-re.

92. Legyen $\mathcal{A} \subset P(X)$ σ-gyűrű, és tekintsük a 25. feladatban definiált vektorteret. Legyen H az $L(\mathcal{A})$ vektortér egy bázisa. Tetszőleges $h \in H$-hoz definiálunk egy ϑ_h additív halmazfüggvényt. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\chi_A \in L(\mathcal{A})$, és így χ_A előáll mint a H bázis véges sok elemének a lineáris kombinációja, és az előállítás nulla együtthatójú tagoktól eltekintve egyértelmű. Jelöljük $\vartheta_h(A)$-val a h báziselem együtthatóját ebben az előállításban. Ha $A, B \in \mathcal{A}$ diszjunktak, akkor $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, amiből világos, hogy $\vartheta_h(A \cup B) = \vartheta_h(A) + \vartheta_h(B)$.

Ezzel beláttuk, hogy a ϑ_h halmazfüggvény additív $\mathcal{A}$-n minden $h \in H$-ra. Bizonyítsuk be, hogy a ϑ_h halmazfüggvény csak véges sok $h \in H$-ra lehet σ-additív (*Christensen*[7] *tétele*).

[7] Jens Peter Reus Christensen dán matematikus.

6. Lebesgue-mérték

Definíciók és egyéb tudnivalók

Ha $A = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p) \in \mathcal{P}^p$, akkor A térfogata $t(A) = \prod_{i=1}^{p}(b_i - a_i)$. Legyen továbbá $t(\emptyset) = 0$. Egy korlátos $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *Jordan-féle külső mértéke*

$$k(H) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} t(R_i) \colon H \subset R_1 \cup \ldots \cup R_n,\ R_i \in \mathcal{P}^p\right\}.$$

A $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *Jordan-féle belső mértéke*, amelyet $b(H)$-val jelölünk, azon $\sum_{i=1}^{n} t(R_i)$ számok halmazának szuprémuma, ahol $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{P}^p$ tetszőleges H által tartalmazott és páronként egymásba nem nyúló téglák. Ha H nem tartalmaz téglát, akkor definíció szerint legyen $b(H) = 0$. A $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz *Jordan-mérhető*, ha $b(H) = k(H)$, és ekkor H Jordan-mértéke $t(H) = b(H) = k(H)$.

A $\mathcal{P}^p$ halmazrendszer félgyűrű (lásd a 24. feladatot). A t halmazfüggvény mérték a $\mathcal{P}^p$ félgyűrűn. Ez abból következik, hogy t additív (ez könnyen ellenőrizhető), és külső mérték. Az utóbbi állítás a 68. feladat megoldásának a gondolatmenetével bizonyítható, felhasználva a Borel-féle lefedési tételt. Legyen

$$\lambda(H) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} t(A_n) \colon A_n \in \mathcal{P}^p\ (n = 1, 2, \ldots),\ H \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots\right\}$$

minden $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazra. Ekkor λ külső mérték $P(\mathbb{R}^p)$-n, és kiterjesztése t-nek. A λ halmazfüggvényt a *Lebesgue-féle külső mértéknek* nevezzük. A Carathéodory-tétel szerint az $\mathcal{M}_\lambda$ halmazrendszer σ-algebra, amelyen λ mérték. Az $\mathcal{M}_\lambda$ halmazrendszer elemeit *Lebesgue-mérhető halmazoknak* nevezzük, és $\mathcal{L}$-lel vagy $\mathcal{L}^p$-vel jelöljük. A konstrukcióból következik, hogy $\mathcal{P}^p$ elemei Lebesgue-mérhetőek, azaz $\mathcal{P}^p \subset \mathcal{L}^p$. Mivel a $\mathcal{P}^p$ halmazrendszer által generált σ-gyűrű $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ (lásd a 42. feladatot), ezért $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{L}^p$, azaz minden Borel-halmaz Lebesgue-mérhető.

Ha $p = 1$, akkor a Lebesgue-mérték nem más, mint az $f(x) = x$ függvény által generált Lebesgue–Stieltjes-mérték az $I = \mathbb{R}$ intervallumon.

Az $\mathbb{R}^p$-beli halmazok esetében immár háromféle mérhetőségről is beszélhetünk: egy halmaz lehet Borel-mérhető, Jordan-mérhető vagy Lebesgue-mérhető.

A továbbiakban a Borel-mérhető és Jordan-mérhető jelzőket mindig kiírjuk, de Lebesgue-mérhető helyett gyakran csak mérhetőt fogunk írni.

Minden p-re vannak nem Lebesgue-mérhető halmazok $\mathbb{R}^p$-ben; sőt, bármely pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem-mérhető halmazt (lásd a 135. feladatot).

Feladatok

93. Bizonyítsuk be, hogy ha $M_1, M_2, \ldots$ páronként diszjunkt Lebesgue-mérhető halmazok $\mathbb{R}^p$-ben és $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$, akkor $\lambda(H \cap M) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(H \cap M_i)$ bármely $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazra.

94. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos és zárt, akkor $k(A) = \lambda(A)$.

95. Bizonyítsuk be, hogy a korlátos $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha bármely $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmazt jól vág ketté, azaz $k(H) = k(H \cap A) + k(H \setminus A)$.

96. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned}\lambda(H) &= \inf\{\lambda(G) : H \subset G,\ G \text{ nyílt}\} = \\ &= \inf\{\lambda(A) : H \subset A,\ A \in \mathcal{L}\} = \\ &= \min\{\lambda(A) : H \subset A,\ A \in \mathcal{L}\}\end{aligned}$$

minden $H \subset \mathbb{R}^p$-re.

97. Legyen

$$\underline{\lambda}(H) = \sup\{\lambda(A) : A \subset H,\ A \in \mathcal{L}\}$$

minden $H \in \mathbb{R}^p$-re. Mutassuk meg, hogy

$$\underline{\lambda}(H) = \max\{\lambda(A) : A \subset H,\ A \in \mathcal{L}\}$$

minden $H \in \mathbb{R}^p$-re.

98. Legyen $E \subset \mathbb{R}^p$ véges mértékű mérhető halmaz. Mutassuk meg, hogy

$$\underline{\lambda}(H) = \lambda(E) - \lambda(E \setminus H)$$

minden $H \subset E$-re.

99. Bizonyítsuk be, hogy $b(H) \le \underline{\lambda}(H) \le \lambda(H) \le k(H)$ minden korlátos $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazra.

100. Bizonyítsuk be, hogy egy korlátos $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha $\underline{\lambda}(H) = \lambda(H)$.

101. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

(i) Minden Lebesgue-mérhető $A \in \mathbb{R}^p$ halmazhoz és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan F zárt halmaz és olyan G nyílt halmaz, hogy $F \subset A \subset G$ és $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$.

(ii) Minden Lebesgue-mérhető $A \in \mathbb{R}^p$ halmazhoz van olyan U F_σ halmaz és olyan V G_δ halmaz, hogy $U \subset A \subset V$ és $\lambda(V \setminus U) = 0$.

102. Bizonyítsuk be, hogy ha $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^p$ és $H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots$, akkor $\lambda(H) = \lim_{n\to\infty} \lambda(H_n)$.

103.

(i) Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra adjunk meg olyan sűrű nyílt halmazt $\mathbb{R}$-ben, amelyre $\lambda(G) < \varepsilon$.

(ii) Adjunk példát olyan korlátos nyílt $G \subset \mathbb{R}$ halmazra, amelyre $\lambda(G) < k(G)$.

(iii) Adjunk meg olyan korlátos zárt $F \subset \mathbb{R}$ halmazt, amelyre $\operatorname{int} F = \emptyset$, de $\lambda(F) > 0$.

104. Bizonyítsuk be, hogy $A \subset \mathbb{R}^p$ akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha minden $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ alakú téglát jól vág ketté.

105. Az előző feladat szerint egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha minden intervallumot jól vág ketté. Tegyük fel, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz minden 1 hosszúságú intervallumot jól vág ketté. Igaz-e, hogy A Lebesgue-mérhető?

106. Legyen $0 < c < 1$ adott. Konstruáljunk olyan $A_1, A_2, \ldots \subset [0,1]$ Lebesgue-mérhető halmazokat, melyekre $\lambda(A_i) = c$ minden i-re és $\lambda(A_i \cap A_j) < c^2$ minden $i \neq j$-re.

107. Bizonyítsuk be, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ nullmértékű, akkor beletolható az irracionális számokba, azaz van $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $h + c$ irracionális minden $h \in H$-ra.

108. Bizonyítsuk be, hogy azon $x \in \mathbb{R}$ számok halmaza, melyekre végtelen sok p/q racionális számra teljesül $|x - (p/q)| < 1/q^3$, nullmértékű.

109. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre az $\{f(x)\colon x \in [a,b],\ f'(x) = 0\}$ halmaz nullmértékű.

110. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre az $M = \{x \in [a,b]\colon f'(x) = \infty\}$ halmaz nullmértékű.

111. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre az $N = \{x \in [a,b]\colon \lim_{y\to x} f(y) = \infty\}$ halmaz nullmértékű.

112. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos. Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha f szakadási pontjainak halmaza Lebesgue szerint nullmértékű (*Lebesgue tétele*).

113. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset [0,1]$ halmazhoz van olyan $c \in [0,1]$, hogy $\lambda(H \cap [0,c]) = \lambda(H)/2$.

114. Bizonyítsuk be, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű, akkor van olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-függvény, amely H-t egy nem-elfajuló intervallumra képezi.

115. Bizonyítsuk be, hogy ha az $A, B \subset \mathbb{R}^p$ diszjunkt halmazok legalább egyike mérhető, akkor $\lambda(X \cup Y) = \lambda(X) + \lambda(Y)$ minden $X \subset A$-ra és $Y \subset B$-re.

116. Bizonyítsuk be, hogy ha az $X, Y \in \mathbb{R}^p$ halmazok távolsága pozitív, akkor $\lambda(X \cup Y) = \lambda(X) + \lambda(Y)$.

117. Bizonyítsuk be, hogy ha az $A, B \subset \mathbb{R}^p$ halmazok legalább egyike mérhető, akkor $\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cup B)$.

118. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset B \subset \mathbb{R}^p$ és $\lambda(A) = \lambda(B) < \infty$, akkor minden mérhető C halmazra $\lambda(A \cap C) = \lambda(B \cap C)$.

119. Lássuk be, hogy minden $H \subset \mathbb{R}^p$-hez van olyan A mérhető halmaz, amelyre $H \subset A$, és $\lambda(H \cap B) = \lambda(A \cap B)$ minden mérhető B halmazra. (Az ilyen A halmazokat H *mérhető burkának* nevezzük.)

120. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz akkor és csak akkor mérhető burka H-nak, ha mérhető, tartalmazza H-t, és $A \setminus H$ nem tartalmaz pozitív mértékű mérhető halmazt.

121. Bizonyítsuk be, hogy ha A mérhető burka H-nak és B mérhető burka K-nak, akkor $A \cup B$ mérhető burka $H \cup K$-nak.

122. Bizonyítsuk be, hogy ha $H, K \subset \mathbb{R}^p$, $H \cap K = \emptyset$ és $\lambda(H \cup K) = \lambda(H) + \lambda(K) < \infty$, akkor van olyan mérhető A halmaz, amelyre $H \subset A$ és $A \cap K = \emptyset$.

123. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ Lebesgue-mérhető és $\lambda(A) < \infty$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan E halmaz, amely véges sok tégla uniója, és $\lambda(A \Delta E) < \varepsilon$.

124. Legyen μ véges mérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazhoz és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan E halmaz, amely véges sok intervallum uniója, és $\mu(A \Delta E) < \varepsilon$.

125. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ és $\lambda(A) > 0$, akkor van olyan I intervallum, amelyre $\lambda(I \cap A) > 0{,}99 \cdot |I|$.

126. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ és $\lambda(A) > 0$, $\lambda(B) > 0$, akkor vannak azonos hosszúságú I, J intervallumok, melyekre $\lambda(I \cap A) > 0{,}99 \cdot |I|$ és $\lambda(J \cap B) > 0{,}99 \cdot |J|$.

127. Bizonyítandó, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ pozitív külső mértékű halmazok, melyek közül legalább az egyik mérhető, akkor az $A - B = \{x - y : x \in A,\ y \in B\}$

halmaz tartalmaz nem-elfajuló szakaszt (*Steinhaus*[8] *tétele*).

128. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ Lebesgue-mérhető és $\lambda(A) < \infty$, akkor vannak $A_n \subset \mathbb{R}^p$ halmazok a következő tulajdonságokkal:

(i) mindegyik A_n véges sok tégla uniója;

(ii) az A_n halmazsorozat majdnem konvergál az A halmazhoz;

(iii) az A_n halmazsorozat konvergál az A halmazhoz a $(\mathcal{L}^{<\infty}, d)$ metrikus térben, ahol $\mathcal{L}^{<\infty}$ jelöli a véges Lebesgue-mértékű és mérhető $A \subset \mathbb{R}^p$ halmazok rendszerét, és $d(A, B) = \lambda(A \Delta B)$ minden $A, B \in \mathcal{L}^{<\infty}$-re.

129. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, és tegyük fel, hogy minden $x \in A$ és $r \in \mathbb{Q}$ esetén $x + r \in A$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lambda(A) = 0$ vagy $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

130. Bizonyítandó, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető és $\lambda(A) > 0$, akkor majdnem minden valós szám előáll $a + r$ alakban, ahol $a \in A$ és r racionális. (Vagyis azon számok halmaza, amelyek nem állnak elő ilyen alakban, nullmértékű.)

131. Legyen $A \subset [0, 1]$ Lebesgue-mérhető, és tegyük fel, hogy ha az $x, y \in [0, 1]$ számok tizedesjegyei megegyeznek valahonnan kezdve, akkor x és y egyszerre eleme vagy nem eleme A-nak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lambda(A) = 0$ vagy $\lambda(A) = 1$. (Ez az ún. $0-1$-*törvény*.)

132. Legyen ϑ olyan eltolás-invariáns előjeles mérték $\mathbb{R}^p$ Borel részhalmazain, amelyre $\vartheta([0, 1]^p)$ véges. Bizonyítsuk be, hogy ϑ a Lebesgue-mérték konstansszorosa.

133. Adjunk meg minél több olyan mértéket $P(\mathbb{R})$-en, amely eltolás-invariáns.

134. Legyen ϑ eltolás-invariáns előjeles mérték $P(\mathbb{R})$-en, és tegyük fel, hogy van olyan nemüres G nyílt halmaz, amelyre $\vartheta(G)$ véges. Mutassuk meg, hogy ekkor ϑ azonosan nulla (*Vitali*[9] *tétele*).

135. Bizonyítandó, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ és $\lambda(A) > 0$, akkor A tartalmaz nem Lebesgue-mérhető halmazt.

136. A 117. feladatban láttuk, hogy ha az $A, B \subset \mathbb{R}^p$ halmazok legalább egyike mérhető, akkor $\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cup B)$. Igaz-e, hogy

(i) $\lambda(H \cup K) + \lambda(H \cap K) \geq \lambda(H) + \lambda(K)$ minden $H, K \subset \mathbb{R}^p$-re?

(ii) $\lambda(H \cup K) + \lambda(H \cap K) \leq \lambda(H) + \lambda(K)$ minden $H, K \subset \mathbb{R}^p$-re?

---

[8] Hugo Steinhaus (1887–1972) lengyel matematikus.

[9] Giuseppe Vitali (1875-–1932) olasz matematikus.

137. Jelölje $\mathcal{L}^{<\infty}$ a véges mértékű Lebesgue-mérhető halmazok rendszerét $\mathbb{R}^p$-ben. Az $A, B \in \mathcal{L}^{<\infty}$ halmazokat tekintsük azonosnak, ha $\lambda(A\Delta B) = 0$. Definiáljuk az $A, B \in \mathcal{A}^{<\infty}$ halmazok távolságát a $d(A, B) = \lambda(A\Delta B)$ képlettel. A 87. feladatban beláttuk, hogy $(\mathcal{L}^{<\infty}, d)$ teljes metrikus tér.

Mutassuk meg, hogy a $(\mathcal{L}^{<\infty}, d)$ metrikus tér szeparábilis.

7. Mérhető függvények

Definíciók és egyéb tudnivalók

Ha $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor $A(f < c)$-vel fogjuk jelölni az $\{x \in X\colon f(x) < c\}$ halmazt. Hasonlóan definiáljuk az $A(f > c),\ A(f \geq c),\ A(f \leq c),\ A(f = c)$ halmazokat.

Ha adott egy $\mathcal{A}$ σ-gyűrű, akkor $\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmazoknak* nevezzük. Legyen $A \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény *mérhető* (az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűre nézve), ha $A(f < c) \in \mathcal{A}$ minden $c \in \mathbb{R}$-re. Könnyű ellenőrizni, hogy ha f mérhető A-n, akkor az $A(f > c),\ A(f \geq c),\ A(f \leq c),\ A(f = c)$ halmazok mindegyike mérhető minden $c \in \mathbb{R}$-re. Az is könnyen látható, hogy ha f és g mérhető A-n, akkor az $A(f < g) = \{x \in A\colon f(x) < g(x)\}$ halmaz mérhető. Ez a halmaz ui. egyenlő az $A(f < r) \cap A(g > r)$ halmazok uniójával, ahol r befutja a racionális számokat. Ebből következik, hogy ha f és g mérhető A-n, akkor az $A(f \leq g),\ A(f = g),\ A(f \neq g)$ halmazok mindegyike mérhető.

Meg lehet mutatni, hogy ha $f, g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvények, akkor a $B = \{x \in A\colon f(x) + g(x) \text{ értelmes}\}$ halmaz mérhető, és $f + g$ mérhető a B halmazon. Hasonló állítás igaz két mérhető függvény szorzatára és hányadosára is.

Nem nehéz belátni, hogy ha $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető, akkor $f^+,\ f^-,\ |f|$ is mérhetőek; ha $f, g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhetőek, akkor $\max(f, g)$ és $\min(f, g)$ úgyszintén. Továbbá, ha $f_n\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mérhetőek, akkor $\sup\limits_n\{f_n\}$, $\inf\limits_n\{f_n\}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ és $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ ugyancsak mérhetőek.

Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn, legyenek $f_1, f_2, \ldots$ az A halmazon értelmezett véges értékű mérhető függvények, és tegyük fel, hogy $f_n \to f$ pontonként A-n, ahol f is véges értékű. *Jegorov*[10] *tétele* azt állítja, hogy ha $\mu(A) < \infty$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$, és az $f_n \to f$ konvergencia a B halmazon egyenletes.

Legyen $A \in \mathcal{A}$. Az $s\colon A \to \mathbb{R}$ függvényt *egyszerű függvénynek* nevezzük, ha vannak olyan $A_1, \ldots, A_n$ mérhető halmazok, hogy $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, és s mindegyik A_i halmazon konstans.

Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $f\colon A \to \mathbb{R}$. Ha $x \in A$ és x az A halmaz jobb oldali torlódási pontja, akkor az f függvény x pontbeli jobb oldali Dini[11]-deriváltjait a következőképpen értelmezzük.

[10]Dmitrij Fjedorovics Jegorov (1869–1930) orosz matematikus.
[11]Ulisse Dini (1845–1918) olasz matematikus.

$$D^+f(x) = \limsup_{y \to x+0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \quad D_+f(x) = \liminf_{y \to x+0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Ha x az A halmaz bal oldali torlódási pontja, akkor az f függvény x pontbeli bal oldali Dini-deriváltjai

$$D^-f(x) = \limsup_{y \to x-0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \quad D_-f(x) = \liminf_{y \to x-0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ halmazra és $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvényre az f Dini-deriváltjai A minden pontjában értelmezve vannak, kivéve legfeljebb megszámlálhatóan sok pontot. Ugyanis *bármely $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan pontja lehet, amely nem kétoldali torlódási pont.*

Ezt így láthatjuk be. Jelöljük I_+-szal azon $x \in A$ pontok halmazát, amelyek nem jobb oldali torlódási pontok. Minden $x \in I_+$ ponthoz rendeljünk hozzá egy olyan $r > x$ racionális számot, amelyre $(x, r) \cap A = \emptyset$. Különböző I_+-beli pontokhoz különböző racionális számot rendeltünk, mert ha az $x, y \in I_+$ pontokhoz ugyanazt az r-et rendeltük, akkor $x < y$ esetén $(x, r) \cap A$ nem lenne üres, mert tartalmazná y-t, $y < x$ esetén pedig $(y, r) \cap A$ nem lenne üres, mert tartalmazná x-et. Így $x \neq y$ lehetetlen. Ebből nyilvánvaló, hogy I_+ megszámlálható. Ugyanígy bizonyítható, hogy A-nak megszámlálhatóan sok pont kivételével minden pontja bal oldali torlódási pont.

Feladatok

138. Legyen $\mathcal{A}$ σ-gyűrű és $A \in \mathcal{A}$. Lássuk be, hogy egy $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor mérhető, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazra.

139. Legyen $\mathcal{A}$ σ-gyűrű, és legyen $A \in \mathcal{A}$. Lássuk be, hogy egy $s\colon A \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor egyszerű, ha mérhető és az értékkészlete véges.

140. Legyen $\mathcal{A}$ σ-gyűrű, legyen $A \in \mathcal{A}$, és legyenek $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mérhető függvények. Bizonyítsuk be, hogy azon $x \in A$ pontok halmaza, amelyekre az $f_n(x)$ számsorozat monoton, eleme $\mathcal{A}$-nak.

141. Legyen $\mathcal{A}$ σ-gyűrű, legyen $A \in \mathcal{A}$, és legyenek $f_n : A \to \mathbb{R}$ mérhető függvények $(n = 1, 2, \ldots)$. Legyen B azon $x \in A$ pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy ha p prím és $f_p(x)$ racionális, akkor $f_{p^2}(x)$ irracionális. Bizonyítsuk be, hogy $B \in \mathcal{A}$.

142. Mutassunk példát olyan $\mathcal{A}$ σ-gyűrűre, $A \in \mathcal{A}$ halmazra és $f_i : A \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ mérhető függvényekre, melyekre $\sup\limits_i f_i$ nem mérhető. (Persze az I indexhalmaz nem lehet megszámlálható.)

143. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Legyen továbbá $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) > 0$. Lássuk be, hogy az A halmaz akkor és csak akkor atom (a μ mértékre nézve), ha minden mérhető $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény majdnem konstans A-n, azaz ha van olyan $c \in \overline{\mathbb{R}}$, hogy $\mu(A(f \neq c)) = 0$.

144. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn, és legyen $A \in \mathcal{A}$. Mutassuk meg, hogy

(i) ha az $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvény korlátos és mérhető, akkor egyenletesen megközelíthető egyszerű függvényekkel;

(ii) ha $\mu(A) < \infty$ és az $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvény mérhető, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $s \colon A \to \mathbb{R}$ egyszerű függvény, hogy $\mu(A(|f - s| > \varepsilon)) < \varepsilon$.

145. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn, és legyen $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$. Ha f véges értékű mérhető függvény A-n, akkor legyen $F(t) = \mu(A(f < t))$ minden $t \in \mathbb{R}$-re. (Ez az f függvény *eloszlásfüggvénye*.) Bizonyítsuk be, hogy F monoton növő és balról folytonos $\mathbb{R}$-en, $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$, és $\lim_{t \to \infty} F(t) = \mu(A)$. Mikor lesz F jobbról folytonos egy x_0 pontban?

146. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn, és legyen $A \in \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ mérhető függvények és $\mu(A(|f_n - f| > 1/n)) < 1/n^2$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re, akkor $f_n \to f$ μ-majdnem mindenütt A-n.

147. Mutassuk meg, hogy a $\mu(A(|f_n - f| > 1/n^2)) < 1/n$ feltételből ez nem következik.

148. Konstruáljunk olyan $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyekre $f_n \to 0$ pontonként $[0,1]$-en, de nincs olyan nullmértékű $N \subset [0,1]$ halmaz, amelyre az $f_n \to 0$ konvergencia egyenletes volna $[0,1] \setminus N$-en. (Tehát a Jegorov-tételben a kivételes halmazt nem választhatjuk nullmértékűnek.)

149. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn, és legyen $A \in \mathcal{A}$ σ-véges mértékű halmaz. (Ezen azt értjük, hogy A lefedhető megszámlálhatóan sok véges μ-mértékű halmazzal.) Tegyük fel, hogy f_n véges értékű, mérhető A-n minden n-re, és a véges $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ létezik μ-majdnem minden $x \in A$-ra. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, ahol $\mu(N) = 0$, és az $f_n \to f$ konvergencia egyenletes mindegyik C_i-n.

150. Mutassuk meg, hogy az előző feladatban az A halmaz σ-végességének feltétele nem hagyható el.

151. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ Borel-mérhető. Bizonyítandó, hogy minden monoton $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető.

152. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Borel-mérhető. Bizonyítandó, hogy minden folytonos $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető.

153. Definiáljuk az $f \colon [0,1] \to [0,1]$ függvényt a következőképpen. Ha $x = 0,a_1a_2\ldots$ az $x \in [0,1]$ szám 10-es számrendszerbeli felírása, amelyben végtelen sok jegy különbözik 9-től, akkor legyen

$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A_n}{n},$$

ahol A_n jelöli a 7-esek számát az első n jegy között. Lássuk be, hogy f Borel-mérhető.

154. Konstruáljunk olyan $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvényt, amely $[0,1]$ minden részintervallumában felvesz minden értéket.

155. Jelölje $\mathcal{F}_b$ az $\mathbb{R}^p$ Borel-részhalmazain értelmezett és Borel-mérhető függvények halmazát. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{F}_b$ kontinuum számosságú.

156. Legyen $f : [a,b] \to [0,\infty)$ adott, és legyen $A = \{(x,y) : x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény akkor és csak akkor Borel-mérhető, ha az A halmaz Borel.

(A Lebesgue-mérhetőségre vonatkozó analóg állítást illetően l. a 195. feladatot.)

157. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Melyikből következik a másik:

(i) f folytonos majdnem minden $x \in [a,b]$ pontban, illetve

(ii) van olyan $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $f = g$ majdnem mindenütt?

158. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos majdnem mindenütt, akkor f Lebesgue-mérhető.

159. Konstruáljunk olyan Lebesgue-mérhető $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre f nem folytonos az $[a,b] \setminus E$ halmazra megszorítva semmilyen nullmértékű $E \subset [a,b]$ halmazra.

160. Bizonyítandó, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, akkor minden ε-hoz van olyan $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény[12], hogy $\lambda(\{x \in [a,b] : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$.

161. Bizonyítandó, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, akkor vannak $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvények, melyekre $g_n \to f$ majdnem mindenütt.

162. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ véges mértékű Lebesgue-mérhető halmaz, és legyen $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvény. Bizonyítsuk be, hogy minden ε-hoz van olyan $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\lambda(A(|f - g| > \varepsilon)) < \varepsilon$.

163. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető. Bizonyítsuk be, hogy

(i) vannak olyan $g_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy $g_n \to f$ majdnem mindenütt $\mathbb{R}^p$-n, továbbá

[12] A $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt *lépcsősfüggvény*nek nevezzük, ha van olyan $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztás, hogy g konstans (x_{i-1}, x_i)-ben minden $i = 1, \ldots, n$-re.

(ii) minden ε-hoz van olyan $E \subset \mathbb{R}^p$ halmaz, hogy $\lambda(E) < \varepsilon$, és f folytonos az $\mathbb{R}^p \setminus E$ halmazra megszorítva.

164. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Borel-mérhető. Bizonyítsuk be, hogy minden Lebesgue-mérhető $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényhez van olyan $g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-mérhető függvény, hogy $f = g$ majdnem mindenütt.

165. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmaz, és legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvény. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $B \subset A$ Lebesgue-mérhető halmaz, amelyet f kölcsönösen egyértelműen $f(A)$-ra képez.

166. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Lebesgue-mérhető függvény, amelynek van akármilyen kicsi pozitív periódusa. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas $c \in \mathbb{R}$-re $f(x) = c$ majdnem mindenütt.

167. Legyen $\mathcal{A}$ σ-gyűrű, $A \in \mathcal{A}$, és $f : A \to \mathbb{R}$ véges értékű mérhető függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos (vagy általánosabban, ha Borel-mérhető), akkor $g \circ f$ is mérhető.

168. Igaz-e, hogy ha $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető és $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető, akkor $g \circ f$ is Lebesgue-mérhető? És ha f folytonos? És ha f differenciálható?

169. Jelölje f a Cantor-függvényt[13].

(i) Mutassuk meg, hogy $g \circ f$ Lebesgue-mérhető minden $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

(ii) Igaz-e, hogy $g \circ f$ Borel-mérhető minden $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre?

170. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mi annak a feltétele, hogy $g \circ f$ Borel-mérhető legyen minden $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre?

171. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mi annak a feltétele, hogy $g \circ f$ Lebesgue-mérhető legyen minden $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre?

172. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mi annak a feltétele, hogy $f \circ g$ Lebesgue-mérhető legyen minden $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre?

173. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, és legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be a következő állításokat.

---

[13] A Cantor-halmaz minden pontja felírható a 3-as számrendszerben $0,a_1a_2\ldots$ alakban, ahol $a_i = 0$ vagy 2 minden i-re. A Cantor-függvényt a 3-as számrendszerben felírt $x = 0,a_1a_2\ldots$ pontban a 2-es számrendszerben felírt $0,\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\ldots$ számmal definiáljuk. Az így definiált függvényt a Cantor-halmaz kiegészítő intervallumain alkalmas konstansnak definiálva egy monoton növő folytonos függvényt kapunk, amely $[0,1]$-et önmagára képezi. Ez a Cantor-függvény.

(i) Ha A Borel-mérhető (Lebesgue-mérhető) és f folytonos A-n, akkor a D^+f, D_+f, D^-f, D_-f Dini-deriváltak mindegyike Borel-mérhető (Lebesgue-mérhető) az értelmezési tartományán.

(ii) Ha A Borel-mérhető (Lebesgue-mérhető), akkor f' értelmezési tartománya (vagyis azon $x \in A$ pontok halmaza, amelyek torlódási pontjai A-nak, és amelyekben a véges $f'(x) = \lim_{y \to x,\ y \in A} (f(y) - f(x))/(y - x)$ határérték létezik) Borel-mérhető (Lebesgue-mérhető), és ezen f' Borel-mérhető (Lebesgue-mérhető).

8. Integrál

Definíciók és egyéb tudnivalók

Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, és legyen $A \in \mathcal{A}$. Ha $f\colon A \to \mathbb{R}$ nemnegatív értékű egyszerű függvény, akkor vannak olyan $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok és olyan $c_1, \dots, c_n$ nemnegatív valós számok, hogy $f(x) = c_i$, ha $x \in A_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Ekkor az f függvény *Lebesgue-integrálját* (röviden integrálját) az $\int_A f\,d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mu(A_i)$ képlettel definiáljuk. Könnyű belátni, hogy az integrál értéke jóldefiniált, azaz ha $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, $d_1, \dots, d_k$ nemnegatív valós számok, és $f(x) = d_j$, ha $x \in B_j$ $(j = 1, \dots, k)$, akkor $\sum_{i=1}^n c_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{j=1}^k d_j \cdot \mu(B_j)$.

Legyen f nemnegatív mérhető függvény az $A \in \mathcal{A}$ halmazon. Ekkor az f függvény Lebesgue-integrálja (röviden integrálja) az $\int_A s\,d\mu$ integrálok halmazának szuprémuma, ahol s befutja azon egyszerű függvények halmazát, melyekre $0 \le s \le f$. A nemnegatív mérhető függvények integráljára három alapvető tétel vonatkozik.

A *monotonkonvergencia-tétel*[14] azt állítja, hogy ha $0 \le f_1 \le f_2 \dots$ mérhető függvények az $A \in \mathcal{A}$ halmazon, akkor

$$\int_A \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu.$$

Ebből egyszerűen következik a *nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatósága*, ami azt állítja, hogy ha $f_1, f_2, \dots$ nemnegatív mérhető függvények az $A \in \mathcal{A}$ halmazon, akkor

$$\int_A \sum_{n=1}^\infty f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_A f_n\,d\mu.$$

Fatou lemmája azt állítja, hogy ha $f_1, f_2, \dots$ nemnegatív mérhető függvények az $A \in \mathcal{A}$ halmazon, akkor

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu.$$

[14] A monotonkonvergencia-tételt néha Beppo Levi-tételnek is nevezik. Vannak, akik a monotonkonvergencia-tétel azon variánsát nevezik így, amikor f_1-ről a nemnegativitás helyett integrálhatóságot teszünk fel.

Legyen $A \in \mathcal{A}$ és legyen $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető. Az f függvény Lebesgue-integrálja (röviden integrálja)

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu, \tag{5}$$

feltéve, hogy a jobb oldal értelmes, azaz ha az $\int_A f^+\,d\mu$ és $\int_A f^-\,d\mu$ integrálok legalább egyike véges. Azt mondjuk, hogy az f függvény *integrálható* az A halmazon, ha az $\int_A f\,d\mu$ integrál létezik és véges. Az f függvény tehát pontosan akkor integrálható az A halmazon, ha az $\int_A f^+\,d\mu$ és $\int_A f^-\,d\mu$ integrálok mindegyike véges.

Könnyű belátni, hogy ha f, g mérhető függvények A-n, és ha $f = g$ μ-m.m. A-n, akkor $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ abban az értelemben, hogy ha az egyik integrál létezik, akkor a másik is, és egyenlőek. Ez motiválja a következő definíciót. Legyen f értelmezve az $A \in \mathcal{A}$ halmaz egy részhalmazán. Azt mondjuk, hogy f Lebesgue-integrálja (röviden integrálja) az A halmazon létezik és egyenlő I-vel, ha van olyan $g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény, hogy $f = g$ μ-m.m. A-n, és $\int_A g\,d\mu = I$. Ezt úgy jelöljük, hogy $\int_A f\,d\mu = I$. Az f függvény integrálható A-n, ha $\int_A f\,d\mu$ létezik és véges. Nem nehéz belátni a következő állításokat.

Ha $\int_A f\,d\mu$ létezik és az értéke $< \infty$, akkor $f < \infty$ μ-m.m. A-n.

Ha $\int_A f\,d\mu$ létezik és az értéke $> -\infty$, akkor $f > -\infty$ μ-m.m. A-n.

Ha f integrálható A-n, akkor f értéke véges μ-m.m. A-n.

Ha az $\int_A f\,d\mu$ integrál létezik, akkor minden $c \in \mathbb{R}$-re $c \cdot f$-nek is létezik az integrálja A-n, és $\int_A c \cdot f\,d\mu = c \cdot \int_A f\,d\mu$.

Ha az $\int_A f\,d\mu$ és $\int_A g\,d\mu$ integrálok léteznek és az értékük összeadható, akkor $f + g$ értelmes μ-m.m. A-n, $f + g$-nek létezik az integrálja A-n, és

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d + \mu \int_A f\,d\mu.$$

Ha az $\int_A f\,d\mu$ integrál létezik, akkor $\left|\int_A f\,d\mu\right| \le \int_A |f|\,d\mu$.

Függvénysorozatok integráljára vonatkozik a következő két tétel. A *nagy Lebesgue-tétel* azt állítja, hogy ha az $f_1, f_2, \ldots$ és g függvények integrálhatóak az $A \in \mathcal{A}$ halmazon, $|f_n| \le g$ μ-m.m. A-n minden n-re és $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m. A-n, akkor $\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu$.

A *kis Lebesgue-tétel* azt állítja, hogy ha az $f_1, f_2, \ldots$ függvények mérhetőek a véges mértékű $A \in \mathcal{A}$ halmazon, van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f_n| \le K$ μ-m.m. A-n minden n-re és $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-m.m. A-n, akkor $\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu$.

Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ hármast *mértéktérnek* nevezzük, ha X nemüres halmaz, $\mathcal{A}$ olyan σ-algebra, amelynek maximális eleme X, és μ mérték $\mathcal{A}$-n. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér *valószínűségi mértéktér*, ha $\mu(X) = 1$.

Legyenek $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ mértékterek. Tudjuk, hogy az

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2 \colon A_i \in \mathcal{A}_i \ (i = 1, 2)\}$$

halmazrendszer félgyűrű (lásd a 23. feladatot). Meg lehet mutatni, hogy a $\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$ halmazfüggvény mérték az $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ félgyűrűn. A π mérték a (2)-ben leírt módszerrel kiterjeszthető külső mértékként $P(X)$-re, ahol $X = X_1 \times X_2$. Jelöljük az így kapott külső mértéket is π-vel. Jelöljük $\mathcal{M}_\pi$-vel azon halmazok rendszerét, amelyek e kiterjesztésre nézve mindent jól vágnak ketté. Ekkor Carathéodory tétele szerint $\mathcal{M}_\pi$ olyan σ-algebra, amelyen π mérték. Az $(X, \mathcal{M}_\pi, \pi)$ mértékteret az $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ mértékterek szorzatának nevezzük.

Ha $f \colon X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$, akkor f *szekciófüggvényeinek* nevezzük azokat az $f_x \colon X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ $(x \in X_1)$ és $f^y \colon X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ $(y \in X_2)$ függvényeket, amelyekre $f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$ minden $x \in X_1$-re és $y \in X_2$-re.

Legyen az $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ mértékterek szorzata $(X, \mathcal{M}_\pi, \pi)$. *Fubini*[15] *tétele* azt állítja, hogy ha az $\int_X f\,d\pi$ integrál létezik, és az $\{(x, y) \in X \colon f(x, y) \ne 0\}$ halmaz σ-véges π-mértékű (azaz ha lefedhető megszámlálhatóan sok véges π-mértékű halmazzal), akkor μ_1-m.m. $x \in X_1$-re az $\int_{X_2} f_x\,d\mu_2$ integrál létezik, az $x \mapsto \int_{X_2} f_x\,d\mu_2$ függvénynek létezik az integrálja X_1-en, és

$$\int_X f\,d\pi = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_x\,d\mu_2 \right) d\mu_1.$$

[15] Guido Fubini (1879–1943) olasz matematikus.

Feladatok

174. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, legyen $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, ahol $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, és legyenek $c_1, c_2, \ldots \in \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges kiterjesztett valós számok. Legyen $f(x) = c_n$, ha $x \in A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Mi a pontos feltétele annak, hogy (a) létezzen az $\int_A f\, d\mu$ integrál; illetve hogy (b) f integrálható legyen A-n?

175. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyenek $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tetszőleges halmazok. Legyen $f(x)$ azon A_i halmazok száma, amelyek tartalmazzák x-et. Bizonyítandó, hogy ekkor f mérhető, és $\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

176. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér, és legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tetszőleges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan $1 \le i < j \le n$ indexek, hogy $\mu(A_i \cap A_j) > \mu(A_i) \cdot \mu(A_j) - 1/n$.

177. Mutassuk meg, hogy ha n páros, akkor megadható n db $1/2$-mértékű halmaz $[0, 1]$-ben úgy, hogy közülük bármely kettőnek a metszete $(1/4) - (1/4(n-1))$ mértékű. Azt is mutassuk meg, hogy páratlan n-re ez lehetetlen.

178. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér, $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A}$ és $\mu(A_n) = c$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ahol $0 < c < 1$. Bizonyítsuk be, hogy bármely, pozitív számokból álló $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ sorozathoz van olyan $n_1 < n_2 < \ldots$ részsorozat, hogy $\mu(A_{n_i} \cap A_{n_j}) > c^2 - \varepsilon_i$ minden $i < j$-re.

179. Legyen $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.

(i) Valahányszor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mérhető $\mathcal{A}$-ra nézve és a $\lim_{x\to\infty} f$ határérték létezik és véges, akkor f integrálható $\mathbb{R}$-en és $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \lim_{x\to\infty} f$.

(ii) $\mu(\mathbb{R}) = 1$, továbbá $\mu(A) = 0$ minden felülről korlátos $A \in \mathcal{A}$ halmazra.

180. Bizonyítandó, hogy ha f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ és f mérhető függvények A-n és $\int_A |f_n - f|\, d\mu < 1/n^2$, akkor $f_n \to f$ μ-m.m.

181. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér. Legyenek $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mérhető függvények, amelyek közös korlát alatt vannak X-en. Bizonyítsuk be, hogy ha $\int_X f_n\, d\mu = a$ és $\int_X f_n f_m\, d\mu = a^2$ valamely $a \in \mathbb{R}$-re minden $n \ne m$ esetén, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_1(x) + \ldots + f_n(x)}{n} = a \quad \mu\text{-m.m. } x \in X\text{-re.} \tag{6}$$

182. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér. Legyenek $A_n \in \mathcal{A}$ olyan halmazok, melyekre $\mu(A_n) = a$ és $\mu(A_n \cap A_m) = a^2$ valamely $a \in [0,1]$-re minden $n \neq m$ esetén.

Jelöljük $A_n(x)$-szel azon $1 \le i \le n$ indexek számát, amelyekre $x \in A_i$. Mutassuk meg, hogy μ-m.m. x-re $\lim_{n\to\infty} A_n(x)/n = a$. (Ez a *nagy számok törvénye*.)

183. Legyen $q \ge 2$ adott egész szám, és tekintsük az $x \in [0,1]$ számok felírását q alapú számremdszerben. Legyen $0 \le s \le q-1$ egy adott jegy, és jelöljük $B_n(x)$-szel az s-sel egyenlő jegyek számát x q alapú számrendszerbeli felírásának első n jegye között. Bizonyítsuk be, hogy μ-m.m. x-re $\lim_{n\to\infty} B_n(x)/n = 1/q$ (*Borel tétele*).

184. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér, és legyenek $A_1, A_2, \ldots$ olyan halmazok, hogy $\mu(A_i \cap A_j) = \mu(A_i) \cdot \mu(A_j)$ minden $i \neq j$-re, és $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$ (vagyis μ-m.m. pont végtelen sok A_n-nek eleme). (Ezt az állítást a 64. feladat állításával együtt *Borel–Cantelli-lemmának* nevezik.)

185. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér, és legyenek $A_1, A_2, \ldots$ olyan halmazok, hogy $\mu(A_i \cap A_j) = \mu(A_i) \cdot \mu(A_j)$ minden $i \neq j$-re. Mutassuk meg, hogy ekkor vagy $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = 0$, vagy pedig $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = 1$.

186. Legyen az $x \in [0,1]$ szám tizedestört alakja $x = 0{,}a_1a_2\ldots$, és legyen $f(x) = k$, ahol k a legkisebb index, amelyre $a_k = 1$. Ha nincs ilyen index, akkor legyen $f(x) = \infty$. Bizonyítsuk be, hogy f Lebesgue-mérhető, és számítsuk ki az $\int_0^1 f\,d\lambda$ integrált.

187. Legyen $1 \le i_1 < i_2 < \ldots$ pozitív egészek egy rögzített növő sorozata. Ha az $x \in [0,1]$ szám tizedestört alakja $x = 0{,}a_1a_2\ldots$, akkor legyen $f(0{,}a_1a_2\ldots) = 0{,}a_{i_1}a_{i_2}\ldots$. Bizonyítsuk be, hogy f Lebesgue-mérhető, és számítsuk ki az $\int_0^1 f\,d\lambda$ integrált.

188. Ha az $x, y \in [0,1]$ számok tizedestört alakja $x = 0{,}a_1a_2\ldots$ és $y = b_1b_2\ldots$, akkor legyen $f(x) = 0{,}a_1b_1a_2b_2\ldots$. Bizonyítsuk be, hogy f Lebesgue-mérhető a $[0,1]\times[0,1]$ négyzeten, és számítsuk ki az $\int_{[0,1]\times[0,1]} f\,d\lambda_2$ integrált.

189. Ha $x \in [0,1]$ kettes számrendszerbeli alakja $0{,}a_1a_2\ldots$, akkor legyen $f(x) = 0{,}a_1a_2\ldots$ tízes számrendszerben leolvasva. Bizonyítsuk be, hogy f

Lebesgue-mérhető, és számítsuk ki az $\int_0^1 f\,d\lambda$ integrált.

190. Bizonyítsuk be, hogy minden $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrálható függvényhez és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy $\int_a^b |f-g|\,d\lambda < \varepsilon$.

191. Bizonyítsuk be, hogy minden $f\colon \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrálható függvényhez és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\int_{\mathbb{R}^p} |f-g|\,d\lambda < \varepsilon$.

192. Legyen $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrálható. Bizonyítsuk be, hogy az $F(x) = \int_a^x f\,d\lambda$ ($x \in [a,b]$) függvény folytonos $[a,b]$-n.

193. Bizonyítsuk be, hogy ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor f Lebesgue-integrálható $[a,b]$-n, és $\int_a^b f\,d\lambda = \int_a^b f\,dx$.

194. Az *integrálszámítás második középértéktétele* azt állítja, hogy ha $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor van olyan $a \le c \le b$, hogy
$$\int_a^b f \cdot g\,d\lambda = g(a) \cdot \int_a^c f\,d\lambda + g(b) \cdot \int_c^b f\,d\lambda. \tag{7}$$
Felhasználva, hogy ez igaz minden folytonos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre, bizonyítsuk be, hogy minden Lebesgue-integrálható f függvényre is igaz.

195. Legyen $f : [a,b] \to [0,\infty)$ adott, és legyen $A = \{(x,y) : x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha az A halmaz Lebesgue-mérhető.

196. Konstruáljunk olyan korlátos és Lebesgue-mérhető függvényt $[a,b]$-n, amely nem Riemann-integrálható, sőt, semmilyen nullmértékű halmazon megváltoztatva sem lesz Riemann-integrálható.

197. Konstruáljunk olyan nemnegatív, véges értékű Lebesgue-mérhető f függvényt $[0,1]$-en, amelyre $\int_a^b f\,d\lambda = \infty$ minden $0 \le a < b \le 1$-re.

198. Legyen f Riemann-integrálható $[a,b)$ minden zárt részintervallumában.

(i) Bizonyítsuk be, hogy ha $f \ge 0$, akkor
$$\int_a^b f\,d\lambda = \int_a^b f\,dx,$$
ahol a jobb oldalon improprius integrál áll.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor Lebesgue-integrálható $[a,b]$-n, ha az $\int_a^b f\,dx$ improprius integrál abszolút konvergens, és ekkor

$$\int_a^b f\,d\lambda = \int_a^b f\,dx.$$

199. Mutassuk meg, hogy ha f Lebesgue-integrálható $[a,b]$-n, akkor az $N = \{x \in (a,b) : \lim_{y \to x} f(y) = \infty\}$ halmaz nullmértékű.

200. Konstruáljunk olyan Lebesgue-integrálható $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ függvényt, melynek minden racionális pontban ∞ a határértéke.

201. Konstruáljunk olyan Lebesgue-integrálható $f : [0,1] \to [0,\infty]$ függvényt, amelynek a Cantor-halmaz minden pontjában ∞ a határértéke, és a (nyílt) kiegészítő intervallumok mindegyikén folytonos.

202. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, legyen $A \in \mathcal{A}$ véges mértékű halmaz, és legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, amelynek az értékkészlete része a $[c,d)$ balról zárt, jobbról nyílt intervallumnak.

(i) Bizonyítsuk be, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$ egy δ-nál finomabb felosztás, akkor a $\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu(A(y_{i-1} \le f < y_i))$ összeg ε-nál jobban megközelíti f integrálját A-n.

(ii) Legyen $\phi(y) = \mu(A(f < y))$. Mutassuk meg, hogy $\int_A f\,d\mu = \int_c^d y\,d\phi$, ahol a jobb oldalon Riemann–Stieltjes-integrál áll.

(iii) Mutassuk meg, hogy $\int_A f\,dx = c \cdot \mu(A) + \int_c^d \mu(A(f \ge y))\,dy$.

203. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, és legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges (nem feltétlenül véges mértékű) halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ha f nemnegatív és mérhető A-n, akkor $\int_A f\,d\mu = \int_0^\infty \mu(A(f \ge x))\,dx$.

204. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, és legyen f pozitív és mérhető A-n.

(i) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mu(A) > 0$, akkor $\int_A f\,d\mu > 0$.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mu(A)$ nem σ-véges, akkor $\int_A f\,d\mu = \infty$.

205. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, és $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ integrálható. Bizonyítsuk be, hogy ha $\left|\int_A f\,d\mu\right| = \int_A |f|\,d\mu$, akkor vagy $f(x) \geq 0$ μ-m.m. $x \in A$-ra, vagy pedig $f(x) \leq 0$ μ-m.m. $x \in A$-ra.

206. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, és $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ integrálható. Bizonyítandó, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) < \delta$, akkor $\int_B |f|\,d\mu < \varepsilon$.

207. Legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, $A \in \mathcal{A}$, legyenek $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \dots)$ mérhetőek, $|f_n| \leq s$ minden n-re, ahol s integrálható A-n, és tegyük fel, hogy $f_n \to f$ pontonként A-n. Bizonyítsuk be, hogy $\int_A |f_n - f|\,d\mu \to 0$.

208. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér, és legyen f nemnegatív, mérhető függvény X-en. Bizonyítsuk be, hogy $\int_X \log f\,d\mu \leq \log\left(\int_X f\,d\mu\right)$, feltéve, hogy a bal oldali integrál létezik, a $\log(\infty) = \infty$ és $\log 0 = -\infty$ konvenciók alkalmazása mellett.

209. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen f nemnegatív, mérhető függvény X-en, amelyre $\int_X f\,d\mu = 1$. Bizonyítandó, hogy

$$\int_A \log f\,d\mu \leq -\mu(A) \cdot \log \mu(A)$$

minden $A \in \mathcal{A}$-ra. (Az előző feladat konvencióit használjuk.)

210. Legyenek f és g integrálhatóak A-n. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left|\int_A f\,d\mu + i \cdot \int_A g\,d\mu\right| \leq \int_A |f + i \cdot g|\,d\mu.$$

211. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, és legyenek f, g nemnegatív integrálható függvények A-n. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\int_A fg\,d\mu = \sqrt{\int_A f^2\,d\mu} \cdot \sqrt{\int_A g^2\,d\mu},$$

akkor vagy $f = 0$ μ-majdnem mindenütt, vagy pedig van olyan c, hogy μ-m.m. $x \in A$-ra $g(x) = c \cdot f(x)$.

212. Legyen $p, q > 1$, és $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, és legyenek f, g nemnegatív, integrálható függvények A-n, melyekre $\int_A fg\,d\mu =$

$\sqrt[p]{\int_A f^p \, d\mu} \cdot \sqrt[q]{\int_A g^q \, d\mu}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor vagy $f = 0$ μ-majdnem mindenütt, vagy pedig van olyan c, hogy μ-m.m. $x \in A$-ra $g(x)^q = c \cdot f(x)^p$.

213. Legyen μ véges mérték $\mathbb{R}$ Borel-részhalmazain. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos Borel-mérhető függvény, akkor az $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x+t) \, d\mu(t)$ függvény Borel-mérhető.

214. Bizonyítsuk be, hogy van olyan μ véges mérték $\mathbb{R}$ Borel-részhalmazain, és van olyan korlátos, zárt F halmaz, hogy $\mu(\{x\}) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, és az $x \mapsto \mu(F - x)$ függvény nem folytonos.

215. Bizonyítsuk be, hogy ha $f \colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrálható, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot \sin(nx) \, d\lambda = 0$$

(*Riemann*[16] *lemmája*).

216. Legyen $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrálható, legyen továbbá $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1 szerint periodikus, korlátos és Lebesgue-mérhető. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot g(tx) \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, d\lambda \cdot \int_0^1 g(x) \, d\lambda. \tag{8}$$

217.

(i) Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazok, melyekre $\lambda(A), \lambda(B) > 0$, akkor van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $\lambda(A \cap (B + x)) > 0$.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset [0, 1]$ Lebesgue-mérhető halmazok, akkor van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lambda(A \cap (B + x)) \geq \frac{1}{2} \cdot \lambda(A)\lambda(B). \tag{9}$$

(iii) Mutassuk meg, hogy (9) jobb oldalán az $1/2$ együttható nem javítható.

[16] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) német matematikus.

9. Képhalmazok

Definíciók és egyéb tudnivalók

Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon A \to \mathbb{R}^q$ leképezés *Lipschitz*[17], ha van olyan $K > 0$, hogy $|f(y) - f(x)| \le K \cdot |y - x|$ minden $x, y \in A$-ra.

Az f leképezés *lokálisan Lipschitz*, ha minden $x \in A$-ra vannak $K, \delta > 0$ számok úgy, hogy $|f(y) - f(x)| \le K \cdot |y - x|$ minden $y \in A$, $|y - x| < \delta$ esetén.

Ismeretes (és nem nehéz belátni), hogy minden $G \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz előáll mint páronként diszjunkt nyílt intervallumok uniója, és az előállítás egyértelmű. Az előállításban szereplő nyílt intervallumokat G *komponenseinek* nevezzük.

Feladatok

218. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz, és legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$ monoton. Bizonyítsuk be, hogy $f(A)$ Borel.

219. Legyen $f\colon [u, v] \to \mathbb{R}$ monoton növő és balról folytonos függvény, és legyen μ_f az f által generált Lebesgue–Stieltjes-féle külső mérték. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

(i) Tetszőleges $H \subset [u, v)$-re $\lambda(f(H)) \le \mu_f(H)$.

(ii) Ha a $H \subset [u, v)$ halmaz pontjaiban f jobbról is folytonos, akkor $\mu_f(H) = \lambda(f(H))$.

(iii) Tetszőleges $H \subset [u, v)$ halmazra $\mu_f(H)$ egyenlő $\lambda(f(H))$-nak és az f függvény H-ban fekvő szakadási pontjaiban való ugrásainak összegével.

220. Legyen $f\colon [u, v] \to \mathbb{R}$ monoton növő és balról folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $H \subset [u, v)$ mérhető μ_f-re nézve, akkor $f(H)$ Lebesgue-mérhető. Ha f szigorúan monoton, akkor a megfordítás is igaz.

221. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szigorúan monoton folytonos (sőt folytonosan differenciálható) $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ függvény, amely egy pozitív mértékű

[17] Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903) német matematikus.

halmazt nullmértékű halmazba képez. (Vegyük észre, hogy ekkor f inverze egy nullmértékű halmazt pozitív mértékű halmazra képez.)

222. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $g\colon [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvény, amely egy alkalmas mérhető halmazt nem-mérhető halmazra képez.

223. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely mint az $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ mértékteret önmagába képező leképezés nem mérhető (vagyis nem igaz, hogy ha H mérhető, akkor $f^{-1}(H)$ is mérhető). Miért nem mond ez ellent annak a ténynek, hogy minden folytonos függvény Lebesgue-mérhető?

224. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, és legyen $f : H \to \mathbb{R}^p$ lokálisan Lipschitz-leképezés. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lambda(H) = 0$, akkor $\lambda(f(H)) = 0$.

225. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, és legyen $f : H \to \mathbb{R}^p$ lokálisan Lipschitz. Bizonyítsuk be, hogy ha H Lebesgue-mérhető, akkor $f(H)$ is Lebesgue-mérhető.

226. Milyen (p, q) párokra igaz az az állítás, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ Lebesgue-mérhető és az $f : H \to \mathbb{R}^q$ leképezés Lipschitz, akkor $f(H)$ is Lebesgue-mérhető?

227. Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f\colon H \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $|D^+ f(x)| \le K$ és $|D_+ f(x)| \le K$ minden olyan $x \in H$-ra, amely H-nak jobb oldali torlódási pontja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lambda(f(H)) \le K \cdot \lambda(H)$.

228. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon H \to \mathbb{R}$ differenciálható a mérhető $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjaiban, akkor $\lambda(f(H)) \le \int_H |f'|\, d\lambda$.

229. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}$ monoton növő és differenciálható a mérhető $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjaiban, és tegyük fel, hogy $f'(x) \ge K$ minden ilyen pontban. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lambda(f(H)) \ge K \cdot \lambda(H)$.

230. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon H \to \mathbb{R}$ monoton növő és differenciálható a mérhető $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjaiban, akkor $\lambda(f(H)) = \int_H f'\, d\lambda$.

A következő néhány feladat célja a 230. feladat állításának általánosítása deriváltakról Dini-deriváltakra.

231. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő és jobbról folytonos. Legyen $m > 0$. Jelöljük U-val azon $x \in (a,b)$ pontok halmazát, amelyekre van olyan $x < y < b$, hogy $(f(y) - f(x))/(y - x) > m$. Bizonyítsuk be, hogy U nyílt, és U minden (u, v) komponensére teljesül, hogy $(f(v) - f(u))/(v - u) \ge m$.

232. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő, és legyen $m > 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lambda(\{x \in (a,b)\colon D^+ f(x) > m\}) \le (f(b) - f(a))/m.$$

233. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő, és legyen $m > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset (a,b)$ és $D^+f(x) > m$ minden $x \in A$-ra, akkor $\lambda(f(A)) \geq m \cdot \lambda(A)$.

234. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő, és legyen $A \subset [a,b]$ Lebesgue-mérhető. Jelölje Df az f függvény négy Dini-deriváltjának akármelyikét. Bizonyítsuk be, hogy ha Df véges az A halmaz minden pontjában, akkor $\lambda(f(A)) = \int_A Df\, d\lambda$.

235. Mutassuk meg, hogy az előző (234.) feladat állítása nem marad igaz, ha a Df függvény végességét nem tesszük fel.

10. Mértéktartó leképezések

Definíció

Legyenek $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ mértékterek. Azt mondjuk, hogy $f : X_1 \to X_2$ *mértéktartó leképezés,* ha minden $B \in \mathcal{A}_2$ halmazra $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ és $\mu_1\left(f^{-1}(B)\right) = \mu_2(B)$.

Feladatok

236. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen ν olyan mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$-n, amely véges a korlátos halmazokon. Legyen $f\colon X \to \mathbb{R}^p$ olyan függvény, amelyre teljesül, hogy $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \subset \mathbb{R}^p$ Borel-halmazra. Mutassuk meg, hogy f akkor és csak akkor mértéktartó az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérről az $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), \nu)$ mértéktérbe, ha minden $T \in \mathcal{P}^p$ téglára $\mu(f^{-1}(T)) = \nu(T)$.

237. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, és legyen $f\colon X \to \mathbb{R}$ véges értékű mérhető függvény. Jelöljük f eloszlásfüggvényét F-fel, és legyen μ_F az F által generált Lebesgue–Stieltjes-mérték. Mutassuk meg, hogy f mértéktartó az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérről az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_F)$ mértéktérbe.

238. Legyen f mértéktartó leképezés az $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ mértéktérről az $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ mértéktérbe, és legyen $g : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető az $\mathcal{A}_2$ σ-algebra szerint. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\int_{X_2} g\, d\mu_2 = \int_{X_1} (g \circ f)\, d\mu_1 \tag{10}$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is, és egyenlőek.

239. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$, és legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$ véges értékű mérhető fuggvény. Legyen F az f eloszlásfüggvénye, és legyen μ_F az F által generált Lebesgue–Stieltjes-mérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_A f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} x\, d\mu_F$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is, és egyenlőek.

240. Adjunk példát olyan $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ mértékterekre, $f : X_1 \to X_2$ mértéktartó leképezésre és $g : X_2 \to \mathbb{R}$ leképezésre, hogy $\int_{X_1} (g \circ f)\, d\mu_1$

létezik, de $\int_{X_2} g\, d\mu_2$ nem létezik. Miért nem mond ez ellent a 238. feladat állításának?

241. Legyen $[0,1) = \bigcup [a_i, b_i)$ egy véges vagy végtelen felosztás, és legyen

$$f(x) = (x - a_i)/(b_i - a_i)$$

minden i-re és $a_i \le x < b_i$-re. Bizonyítsuk be, hogy az $f : [0,1) \to [0,1)$ leképezés mértéktartó a $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$ mértéktérről önmagába.

242. Legyen n pozitív egész. Lássuk be, hogy az $x \mapsto \{nx\}$ $(x \in [0,1))$ leképezés mértéktartó az $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$ mértéktérről önmagába. (Itt $\{y\}$ az y valós szám törtrészét jelöli.)

243. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x - \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, $f(0) = 0$ leképezés mértéktartó az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mértéktérről önmagába.

244. Bizonyítsuk be, hogy ha $f \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-mérhető, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tfrac{1}{x})\, d\lambda \tag{11}$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is, és egyenlőek (*Boole*[18] *tétele*).

245. Legyen $f(0) = 0$ és $f(x) = \{x^{-1}\}$ $(0 < x < 1)$. Bizonyítsuk be, hogy az $f \colon [0,1) \to [0,1)$ leképezés mértéktartó a $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \mu)$ mértéktérről önmagába, ahol $\mu(A) = \int_A (1+x)^{-1}\, d\lambda$ minden $A \in \mathcal{B}([0,1))$-re.

[18] George Boole (1815–1864) angol matematikus.

11. Korlátos változású függvények

Definíciók és egyéb tudnivalók

Emlékeztetjük az olvasót, hogy $V(f;[a,b])$-vel jelöljük az $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ függvény totális variációját az $[a,b]$ intervallumon (lásd 26. oldal). Az $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ függvény *korlátos változású*, ha $V(f;[a,b])<\infty$.

Ismeretes, és könnyű bizonyítani, hogy $V(f;[a,b]) = V(f;[a,c]) + V(f;[c,b])$ minden $a<c<b$-re.

Ugyancsak könnyen látható, hogy tetszőleges $g,h\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ függvényekre $V(g+h;[a,b])\le V(g;[a,b])+V(h;[a,b])$, valamint $|V(g;[a,b])-V(h;[a,b])|\le V(g-h;[a,b])$.

Feladatok

246. Bizonyítsuk be, hogy ha f és g korlátos változásúak $[a,b]$-ben, akkor $f+g$, $f\cdot g$, és tetszőleges $c\in\mathbb{R}$-re $c\cdot f$ is korlátos változású $[a,b]$-ben.

247. Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos. Minden $y\in\mathbb{R}$-re jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(\{y\})$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y)=\infty$, ha $f^{-1}(\{y\})$ végtelen. Mutassuk meg, hogy az N függvény Borel-mérhető $\mathbb{R}$-en, és $\int_{\mathbb{R}} N\,d\lambda = V(f;[a,b])$ (*Banach*[19] *tétele*).

248. Legyen $f_{\alpha,\beta}(0)=0$ és $f_{\alpha,\beta}(x)=x^\alpha\cdot\sin\left(x^\beta\right)$ $(0<x\le 1)$. Mely (α,β) $(\beta<0<\alpha)$ párokra lesz $f_{\alpha,\beta}$ (i) differenciálható, (ii) korlátos változású, (iii) Lipschitz, (iv) folytonosan differenciálható $[0,1]$-ben?

249. Legyen $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos, és tekintsük az f függvény következő lehetséges tulajdonságait:

(i) f korlátos változású.

(ii) f m.m. értéket csak véges sokszor vesz fel.

(iii) Minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $Y\subset\mathbb{R}$ és $n<\infty$, hogy $\lambda(Y)<\varepsilon$, és f minden $y\notin Y$ értéket legfeljebb n-szer vesz fel.

[19] Stefan Banach (1892–1945) lengyel matematikus.

Bizonyítsuk be, hogy (i)$\Longrightarrow$(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Mutassunk példát olyan $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre, amely rendelkezik a (ii) és (iii) tulajdonságokkal, de (i)-gyel nem.

250. Legyen f korlátos változású $[a,b]$-n, és legyen $V(x) = V(f;[a,x])$ minden $x \in [a,b]$-re.

(i) Bizonyítsuk be, hogy $V+f$ és $V-f$ monoton növő függvények, tehát $f = \frac{V+f}{2} - \frac{V-f}{2}$ az f függvény előállítása két monoton növő függvény különbségeként.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy ha $f = g - h$, ahol f és g monoton növő függvények $[a,b]$-n, akkor van olyan $n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, hogy $g = \frac{V+f}{2} + n$ és $h = \frac{V-f}{2} + n$.

251. Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, és legyen $f(x) = \int_a^x g\, d\lambda$ minden $x \in [a,b]$-re. Mutassuk meg, hogy f korlátos változású, és $V(f;[a,b]) = \int_a^b |g|\, d\lambda$.

252. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor $V(f;[a,b]) \le \int_a^b |f'|\, d\lambda$. Speciálisan, ha f' Lebesgue-integrálható, akkor f korlátos változású.

253. Igaz-e, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható és korlátos változású, akkor a $V(x) = V(f;[a,x])$ $(x \in [a,b])$ függvény is differenciálható?

254. Igaz-e, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható és korlátos változású, akkor előáll két differenciálható monoton függvény különbségeként?

12. Abszolút folytonosság

Definíciók és egyéb tudnivalók

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt *abszolút folytonosnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $[a_i, b_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ egymásba nem nyúló intervallumok $[a,b]$-ben, melyekre $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen ϑ előjeles mérték $\mathcal{A}$-n. Azt mondjuk, hogy ϑ *abszolút folytonos μ-re nézve*, ha $\vartheta(A) = 0$ teljesül minden olyan $A \in \mathcal{A}$ halmazra, amelyre $\mu(A) = 0$. A *Radon*[20]*–Nikodym*[21]*-tétel* azt állítja, hogy ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér (ez azt jelenti, hogy X előáll megszámlálhatóan sok véges μ-mértékű halmaz uniójaként), és ha a ϑ előjeles mérték abszolút folytonos μ-re nézve, akkor van olyan mérhető $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, hogy $\vartheta(H) = \int_H f\, d\mu$ minden $H \in \mathcal{A}$-ra. Az f függvény lényegében egyértelmű, azaz ha $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető és $\vartheta(H) = \int_H g\, d\mu$ minden $H \in \mathcal{A}$-ra, akkor $f = g$ μ-m.m. X-en. Az f függvényt a ϑ előjeles mérték μ-re vonatkozó *Radon–Nikodym-deriváltjának* nevezzük, és $d\vartheta/d\mu$-vel jelöljük.

Feladatok

255. Bizonyítsuk be, hogy ha f és g abszolút folytonosak $[a,b]$-ben, akkor $f+g$, $f \cdot g$, és tetszőleges $c \in \mathbb{R}$-re $c \cdot f$ is abszolút folytonosak $[a,b]$-ben.

256. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{x}$ függvény abszolút folytonos $[0,1]$-en. Adjunk meg minden $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t.

257. Tegyük fel, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos változású az $[a,b]$ intervallumban, és abszolút folytonos a $[c,b]$ intervallumban minden $a < c < b$-re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f abszolút folytonos $[a,b]$-ben.

258. Mutassuk meg, hogy a Cantor-függvény nem abszolút folytonos $[0,1]$-en. (Mutassuk meg, hogy $\varepsilon = 1$-hez nincs jó δ.)

259. Legyen $f_{\alpha,\beta}(0) = 0$ és $f_{\alpha,\beta}(x) = x^{\alpha} \cdot \sin\left(x^{\beta}\right)$ $(0 < x \le 1)$. Mely (α, β) $(\beta < 0 < \alpha)$ párokra lesz $f_{\alpha,\beta}$ abszolút folytonos $[0,1]$-ben? Ellenőrizzük,

[20] Johann Radon (1887–1956) osztrák matematikus.

[21] Otto Marcin Nikodym (1887–1974) lengyel matematikus.

hogy f pontosan azokban az esetekben abszolút folytonos, amikor f' Lebesgue-integrálható $[0,1]$-en.

260. Tegyük fel, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha az $[a_i,b_i] \subset [a,b]$ intervallumokra $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. (Az intervallumok lehetnek egymásba nyúlóak.) Bizonyítsuk be, hogy f Lipschitz.

261.

(i) Bizonyítsuk be, hogy ha az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos, akkor a $V(x) = V(f;[a,x])$ $(x \in [a,b])$ függvény is abszolút folytonos.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos, akkor előáll két monoton és abszolút folytonos függvény különbségeként.

262. Azt mondjuk, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik az (N) tulajdonsággal, ha minden nullmértékű $H \subset [a,b]$ halmazra $f(H)$ is nullmértékű. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos, akkor (N) tulajdonságú.

263. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos és $f'(x) = 0$ m.m. $x \in [a,b]$-re, akkor f konstans.

264. Konstruáljunk olyan folytonos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt, amely (N) tulajdonságú, és van egy pozitív mértékű halmaz, amelynek az elemeit f végtelen sokszor veszi fel.

265. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $f\colon A \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény (S) *tulajdonságú*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $H \subset A$, $\lambda(H) < \delta$ esetén $\lambda(f(H)) < \varepsilon$. Igaz-e, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és (N) tulajdonságú, akkor (S) tulajdonságú?

266. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos, akkor (S) tulajdonságú.

267. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) Az f függvény (S) tulajdonságú.

(ii) Az f függvény (N) tulajdonságú, és m.m. értéket csak véges sokszor vesz fel.

268. Bizonyítsuk be, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha folytonos, korlátos változású és (N) tulajdonságú (*Banach és Zareckij*[22] *tétele*).

[22] Mojszej Aronovics Zareckij (1903–1930) orosz-szovjet matematikus.

269. Konstruáljunk olyan $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt, amely (i) folytonos és korlátos változású, de nem (N) tulajdonságú; (ii) folytonos és (N) tulajdonságú, de nem korlátos változású; (iii) korlátos változású és (N) tulajdonságú, de nem folytonos.

270. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor (S) tulajdonságú.

271. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő és balról folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy a μ_f Lebesgue–Sieltjes-mérték akkor és csak akkor abszolút folytonos λ-re nézve, ha f abszolút folytonos.

272. Bizonyítsuk be, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha van olyan $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható függvény, hogy $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x g\, d\lambda$.

273. Bizonyítsuk be, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor integrálfüggvénye egy Riemann-integrálható függvénynek (vagyis akkor és csak akkor létezik egy $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, amelyre $f(x) = \displaystyle\int_a^x g\, dt$ minden $x \in [a,b]$-re), ha $f(a) = 0$, f Lipschitz, és van olyan $A \subset [a,b]$ halmaz, hogy $[a,b] \setminus A$ nullmértékű, f differenciálható A pontjaiban, és f' az A halmazra megszorítva folytonos.

274. Mutassuk meg, hogy van olyan $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény, amely abszolút folytonos, de $[a,b]$ semmilyen részintervallumában sem Lipschitz.

275. Legyen $P \subset [a,b]$ nem üres és sehol sem sűrű zárt halmaz, és legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan monoton növő függvény, amely konstans minden olyan intervallumon, amely nem metszi P-t, de nem konstans semmilyen nyílt intervallumon, amely metszi P-t. (A $P = C$ (Cantor-halmaz) esetében a Cantor-függvény ilyen.) Lehetséges-e, hogy f abszolút folytonos?

276. Igaz-e, hogy ha $f : [0,1] \to [0,1]$ és $g : [0,1] \to [0,1]$ abszolút folytonosak, akkor $f \circ g$ is abszolút folytonos $[0,1]$-ben?

277. Igaz-e, hogy egy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor áll elő két abszolút folytonos függvény kompozíciójaként, ha folytonos és (N) tulajdonságú?

278. Igaz-e, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható és abszolút folytonos, akkor előáll két differenciálható monoton függvény különbségeként?

279. Bizonyítsuk be, hogy egy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor állítható elő két abszolút folytonos függvény kompozíciójaként, ha folytonos és (S) tulajdonságú (*Nina Bari*[23] *tétele*).

280. Legyen X végtelen halmaz, és legyen $\mathcal{A} = P(X)$. Legyen $\mu(H) = \infty$, ha

[23]Nina Bari (1901–1961) orosz-szovjet matematikus.

$H \subset X$ nemüres, és legyen $\mu(\emptyset) = 0$. Legyen továbbá $\nu(H) = \infty$, ha $H \subset X$ végtelen, és legyen $\nu(H) = H$ elemszáma, ha $H \subset X$ véges. Ellenőrizzük, hogy μ és ν mértékek $P(X)$-en, és mindegyik abszolút folytonos a másikra nézve. Van-e μ-nek Radon–Nikodym-deriváltja ν-re nézve? Van-e ν-nek Radon–Nikodym-deriváltja μ-re nézve?

281. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen f integrálható X-en. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra és az $(X, \mathcal{C}, \mu)$ mértéktér σ-véges, akkor van olyan $\mathcal{C}$ szerint mérhető g függvény, hogy $\int_B g\, d\mu = \int_B f\, d\mu$ minden $B \in \mathcal{C}$-ra. Határozzuk meg a g függvényt abban az esetben, amikor $\mathcal{C}$ véges sok halmazból áll.

282. Mutassuk meg, hogy az előző feladat állítása nem marad igaz, ha az $(X, \mathcal{C}, \mu)$ mértéktér σ-végességének feltételét elhagyjuk, még akkor sem, ha az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér σ-véges.

283. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Melyek azok a nemnegatív, mérhető $f\colon X \to [0, \infty]$ függvények, amelyekre teljesül, hogy μ abszolút folytonos a $\vartheta(H) = \int_H f\, d\mu$ $(H \in \mathcal{A})$ mértékre nézve? Minden ilyen f-re döntsük el, hogy van-e μ-nek Radon–Nikodym-deriváltja ϑ-ra nézve, és ha van, akkor határozzuk meg.

284. Legyen az $\mathcal{A}$ σ-algebra maximális eleme X, és legyenek ν és μ mértékek $\mathcal{A}$-n.

(i) Mutassuk meg, hogy létezik egy maximális ν-mértékű $S \in \mathcal{A}$ halmaz, amelyre $\mu(S) = 0$.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy ha ν σ-véges, akkor van olyan $X = A \cup S$ felbontás, hogy ν abszolút folytonos μ-re nézve A-n, és $\mu(S) = 0$.

285. Legyen az $\mathcal{A}$ σ-algebra maximális eleme X, és legyenek α és β véges mértékek $\mathcal{A}$-n. A

$$\frac{d\alpha}{d\alpha + d\beta} = \frac{d\alpha/d\beta}{(d\alpha/d\beta) + 1}$$

formális átalakítás azt sugallja, hogy ha α abszolút folytonos β-ra nézve, és f az α mérték Radon–Nikodym-deriváltja β-ra nézve, akkor $f/(f+1)$ az α mérték Radon–Nikodym-deriváltja $\alpha + \beta$-ra nézve. Igaz-e ez az állítás?

Hogyan határozhatjuk meg α Radon–Nikodym-deriváltját $\alpha + \beta$-ra nézve, ha α nem abszolút folytonos β-ra nézve?

13. Szingularitás

Definíciók és egyéb tudnivalók

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen ϑ előjeles mérték $\mathcal{A}$-n. Azt mondjuk, hogy ϑ *szinguláris* μ*-re nézve*, ha van olyan $N \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\mu(N) = 0$, és $\vartheta(A \setminus N) = 0$ teljesül minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra.

A ϑ előjeles mérték *Lebesgue-felbontása* μ-re nézve a $\vartheta = \alpha + \sigma$ előállítás, ahol α a μ-re nézve abszolút folytonos, a σ pedig a μ-re nézve szinguláris előjeles mérték $\mathcal{A}$-n.

Nem nehéz belátni, hogy *ha ϑ σ-véges (azaz ha X előáll megszámlálhatóan sok véges ϑ-mértékű halmaz uniójaként), akkor ϑ-nak van Lebesgue-felbontása μ-re nézve.* (Lásd a 286. feladatot.)

Könnyű belátni, hogy *ha a Lebesgue-felbontás létezik, akkor egyértelmű* (lásd a 287. feladatot).

Az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt *szingulárisnak* nevezünk, ha korlátos változású, és $f'(x) = 0$ m.m. $[a, b]$-ben.

Ha az f függvény értelmezve van az $a \in \mathbb{R}$ pont egy jobb oldali környezetében, akkor $f(a+0)$-val jelöljük a $\lim\limits_{x\to a+0} f$ féloldali határértéket (feltéve, hogy létezik). Az $f(a-0)$ jelölés értelmezése hasonló. Ha az f függvény értelmezve van az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében, akkor $u_f(a)$-val jelöljük f ugrását az a pontban, vagyis az $f(a+0) - f(a-0)$ különbséget, feltéve, hogy a féloldali határértékek léteznek és végesek.

Az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt *tiszta ugrófüggvénynek* nevezünk, ha korlátos változású, és minden $a \le c < d \le b$-re

$$f(d) - f(c) = (f(c+0) - f(c)) + \sum_{x \in D \cap (c,d)} u_f(x) + (f(d) - f(d-0)), \quad (12)$$

ahol D jelöli f szakadási pontjainak halmazát.

Legyen X rögzített nemüres halmaz, és legyen $\mu(A) = |A|$, ha $A \subset X$ véges, és $\mu(A) = \infty$, ha $A \subset X$ végtelen. Ekkor μ mérték $P(X)$-en, amelyet (az X-hez tartozó) *számosságmértéknek* nevezünk.

Feladatok

286. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen ϑ előjeles mérték $\mathcal{A}$-n. Bizonyítsuk be, ha ϑ σ-véges (azaz ha X előáll megszámlálhatóan sok véges ϑ-mértékű halmaz uniójaként), akkor ϑ-nak van Lebesgue-felbontása μ-re nézve.

287. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen ϑ előjeles mérték $\mathcal{A}$-n. Bizonyítsuk be, hogy ha ϑ-nak van Lebesgue-felbontása μ-re nézve, akkor ez egyértelmû.

288. Legyen μ a számosságmérték, λ pedig a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-en.
(i) Mi λ Lebesgue-felbontása μ-re nézve? (ii) Van-e μ-nek Lebesgue-felbontása λ-ra nézve?

289. Legyen $\mathcal{A}$ σ-algebra, legyen $\mathcal{A}$ maximális eleme X, legyenek továbbá μ és ν mértékek $\mathcal{A}$-n. Bizonyítsuk be, hogy ν akkor és csak akkor szinguláris μ-re nézve, ha minden $\varepsilon > 0$-ra van $A \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $\mu(A) < \varepsilon$ és $\nu(X \setminus A) < \varepsilon$.

290. Bizonyítsuk be, hogy ha f és g szingulárisak $[a, b]$-ben, akkor $f + g$, $f \cdot g$, és tetszőleges $c \in \mathbb{R}$-re $c \cdot f$ is szinguláris $[a, b]$-ben.

291. Legyen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton növő és balról folytonos. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) f szinguláris.
(ii) Van olyan $A \subset [a, b]$ halmaz, hogy $\lambda([a, b] \setminus A) = 0$ és $\lambda(f(A)) = 0$.
(iii) A μ_f Lebesgue–Stieltjes-mérték szinguláris λ-ra nézve.

292. Bizonyítsuk be, hogy a monoton növő $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor tiszta ugrófüggvény, ha

$$f(b) - f(a) = (f(a + 0) - f(a)) + \sum_{x \in D \cap (a,b)} u_f(x) + (f(b) - f(b - 0)),$$

ahol D jelöli f szakadási pontjainak halmazát.

293. Bizonyítsuk be, hogy minden monoton növő tiszta ugrófüggvény szinguláris.

294. Bizonyítsuk be, hogy minden monoton növő $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény előállítható $g + h$ alakban, ahol g, h is monoton növő függvények, g folytonos, h pedig tiszta ugrófüggvény.

295. Bizonyítsuk be, hogy minden korlátos változású $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény előállítható $g + h$ alakban, ahol g abszolút folytonos és h szinguláris. Mutassuk meg, hogy az előállítás konstans összeadandóktól eltekintve egyértelmű.

296. Legyen f monoton növő, folytonos és szinguláris függvény $[a, b]$-ben, és legyen $E_\infty = \{x \in (a, b)\colon\ f'(x) = \infty\}$. Bizonyítsuk be, hogy

(i) $\lambda([f(a), f(b)] \setminus f(E_\infty)) = 0$, és
(ii) $\mu_f([a, b] \setminus E_\infty) = 0$.

297. Konstruáljunk olyan pontokat, amelyekben a Cantor-függvény deriváltja végtelen. Lehet egy ilyen pont racionális?

14. Differenciálás

Definíciók és egyéb tudnivalók

Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Ha $c \in [a,b)$, akkor az f függvény c pontbeli jobb oldali deriváltját $f'_+(c)$ jelöli, tehát

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Hasonlóan, $c \in (a,b]$ esetén

$$f'_-(c) = \lim_{x\to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak *sűrűségi pontja*, ha $\lim\limits_{h\to 0+0} \lambda(H\cap(x_0-h,x_0+h)/(2h) = 1$. Könnyű belátni, hogy x_0 akkor és csak akkor sűrűségi pontja H-nak, ha az $f(x) = \lambda(H \cap [a,x])$ függvény deriváltja az x_0 pontban 1-gyel egyenlő. (Az a pontot tetszőlegesen választhatjuk.)

Az $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény *approximatíve folytonos az $x_0 \in (a,b)$ pontban*, ha minden $\varepsilon > 0$-ra $\lim\limits_{h\to 0+0} \frac{1}{2h} \cdot \lambda(\{x \in (x_0-h, x_0+h)\colon |f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

Az $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *primitív függvénye*, ha $F'(x) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.

Feladatok

298. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{ha } x \neq 0,\\ 0, & \text{ha } x = 0,\end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = \begin{cases} \cos(1/x), & \text{ha } x \neq 0,\\ 0, & \text{ha } x = 0.\end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy f-nek és g-nek van primitív függvénye $\mathbb{R}$-en, de f^2-nek és g^2-nek nincs.

299. Legyen $f(x) = x^{-1/2}\sin(1/x)$, ha $x \neq 0$, és legyen $f(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy f-nek van primitív függvénye $\mathbb{R}$-en, de van olyan $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $f \cdot g$-nek nincs primitív függvénye $\mathbb{R}$-en.

300. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető. Bizonyítsuk be, hogy ha f lokálisan korlátos (azaz minden pontnak van olyan környezete, amelyben korlátos) és minden pontban approximatíve folytonos, akkor f-nek van primitív függvénye $\mathbb{R}$-en.

(Később látni fogjuk, hogy f mérhetőségének a feltételére nincs szükség, mert az következik az approximatív folytonosságból. Lásd a 332. feladatot.)

301. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Bizonyítsuk be, hogy f szigorú lokális szélsőértékhelyeinek halmaza megszámlálható.

302. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Bizonyítsuk be, hogy azon c pontok halmaza, amelyekben f jobbról és balról is differenciálható és $f'_-(c) \neq f'_+(c)$, megszámlálható.

303. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő, akkor m.m. differenciálható (*Lebesgue tétele*).

304. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású. Bizonyítsuk be, hogy f m.m. differenciálható $[a,b]$-ben, és az f' függvény Lebesgue-integrálható $[a,b]$-n.

305. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor pontonként konvergens az $[a,b]$ intervallumon, ahol $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő függvények $(n = 1,2,\dots)$. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n = f'$ m.m. $[a,b]$-n (*Fubini tétele*).

306. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ mérhető halmazra m.m. $x \in H$ pont sűrűségi pontja H-nak.

307. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ halmazra m.m. $x \in H$ pont sűrűségi pontja H-nak. (Vagyis az előző feladatban a mérhetőség feltételére nincs szükség.)

308. Konstruáljunk olyan szigorúan monoton folytonos függvényt $\mathbb{R}$-en, amelynek a deriváltja m.m. nulla.

309. Legyenek $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvények $(n = 1,2,\dots)$. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} V(f_n;[a,b]) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor legalább egy $x \in [a,b]$ pontban konvergens, akkor mindenütt konvergens $[a,b]$-ben, és ha az összege f, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n = f'$ m.m. $[a,b]$-n.

310. Legyen $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, és legyen $f(x) = \int_a^x g\,d\lambda$ minden $x \in [a,b]$-re. Bizonyítsuk be, hogy $f' = g$ m.m. $[a,b]$-ben.

311. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos. Bizonyítsuk be, hogy f m.m. differenciálható, f' Lebesgue-integrálható $[a,b]$-n, és $f(x) = f(a) + \int_a^x f'\,d\lambda$

minden $x \in [a, b]$-re.

312. Bizonyítsuk be, hogy minden szinguláris függvény előáll két monoton szinguláris függvény különbségeként.

313. Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(i) f korlátos változású.

(ii) f abszolút folytonos.

(iii) f' Lebesgue-integrálható $[a, b]$-n.

314. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, és ha f-nek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor f approximatíve folytonos x_0-ban.

315. Jelölje $f_s'(x)$ az f függvény szimmetrikus deriváltját az x pontban, tehát legyen

$$f_s'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

feltéve, hogy a limesz létezik.

Bizonyítsuk be, hogy ha f a Cantor-függvény, akkor minden $x \in (0, 1)$-re $f_s'(x) = 0$ vagy $f_s'(x) = \infty$.

316. Van-e olyan folytonos és nem-konstans függvény $[a, b]$-n, amelyre minden $x \in [a, b]$ pontban $f'(x) = 0$ vagy $f'(x) = \infty$? És ha a folytonosságot nem követeljük meg? És ha a folytonosságot nem követeljük meg, de a függvény semmilyen intervallumban nem lehet konstans?

15. Mértékek differenciálása

Definíciók és egyéb tudnivalók

Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}^p$ pont a $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *sűrűségi pontja*, ha

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 1.$$

A *sűrűségi tétel* azt állítja, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazra teljesül, hogy m.m. $x \in H$ pont sűrűségi pontja H-nak. (Lásd a 329. feladatot.)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt és $f\colon G \to \mathbb{R}$. Az f függvény *approximatíve folytonos az x_0 pontban*, ha minden $\varepsilon > 0$-ra $\lim\limits_{r\to 0+0} \frac{1}{\lambda(B(x_0,r))} \cdot \lambda(\{x \in B(x_0,r)\colon |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

Legyen $f\colon G \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, ahol $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont az f függvény *Lebesgue-pontja*, ha $r \to 0+0$ esetén $\frac{1}{\lambda(B(x_0,r))} \displaystyle\int_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\, d\lambda \to 0$.

Lebesgue tétele azt állítja, hogy *ha $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt és $f\colon G \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, akkor λ-m.m. $x_0 \in G$ pont Lebesgue-pontja f-nek.* (Lásd a 323. feladatot.)

Legyen $x \in \mathbb{R}^p$, és legyen ϑ olyan halmazfüggvény, amely értelmezve van a $B(x,r)$ gömbökön minden elég kis r-re. A

$$\lim_{r\to 0+0} \frac{\vartheta(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))}$$

határértéket (amennyiben létezik) $\dfrac{d\vartheta}{d\lambda}(x)$-szel jelöljük, és a ϑ halmazfüggvény λ szerinti deriváltjának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy x_0 akkor és csak akkor sűrűségi pontja a $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaznak, ha $\dfrac{d\vartheta}{d\lambda}(x_0) = 1$, ahol $\vartheta(A) = \lambda(H \cap A)$ minden $A \subset \mathbb{R}^p$ Borel-halmazra.

Gyakran használható Lindelöf[24] *lefedési tétele: ha $\mathcal{G}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere $\mathbb{R}^p$-ben, akkor $\mathcal{G}$-ből kiválasztható megszámlálhatóan sok halmaz, amelyek lefedik $\bigcup \mathcal{G}$-t.*

[24]Ernst Lindelöf (1870–1946) finn matematikus.

Ezt így láthatjuk be. Legyen $B_1, B_2, \dots$ az $\mathbb{R}^p$-beli racionális gömbök egy felsorolása. Legyen I azon i indexek halmaza, amelyekhez van olyan $G \in \mathcal{G}$, hogy $B_i \subset G$. Válasszunk ki minden $i \in I$-hez egy $G_i \in \mathcal{G}$ halmazt, amelyre $B_i \subset G_i$. Ekkor a G_i $(i \in I)$ halmazok lefedik $\bigcup \mathcal{G}$-t. Valóban, minden $x \in \bigcup \mathcal{G}$-re van olyan $G \in \mathcal{G}$, hogy $x \in G$. Mivel G nyílt, ezért van olyan B nyílt gömb, hogy $x \in B \subset G$. A B gömb középpontját kicsit eltolva és a sugarát lecsökkentve feltehetjük, hogy a gömb racionális, azaz $B = B_i$ valamely i-re. Ekkor $x \in B_i \subset G_i$, amivel az állítást beláttuk.

A következő lefedési tétel az ún. Vitali-féle és az ún. Besicovitch[25]-féle lefedési tételek egyszerűsített variánsa:

$\mathbb{R}^p$-beli gömbök bármely véges $\mathcal{G}$ rendszeréből kiválaszthatunk egy olyan diszjunkt $\mathcal{F}$ részrendszert, hogy $\mathcal{F}$ minden elemét a középpontjából 3-szorosára nyújtva, az így kapott gömbök lefedik $\bigcup \mathcal{G}$-t.

A tétel bizonyítását lásd a 321. feladatban. A fenti lefedési tételből egyszerűen levezethető az ún. *maximál-egyenlőtlenség* (lásd a 322. feladatot). Ez azt állítja, hogy *ha μ Borel-mérték $\mathbb{R}^p$-n, $t > 0$ és*

$$H_t = \{x \in \mathbb{R}^p \colon \exists\, r > 0,\ \mu(B(x,r))/\lambda(B(x,r)) > t\},$$

akkor

$$\lambda(H_t) \le 3^p \cdot \mu(\mathbb{R}^p)/t. \tag{13}$$

Ebből azonnal adódik a függvényekre vonatkozó maximál-egyenlőtlenség: *ha $f \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ nemnegatív mérhető függvény, $t > 0$ és*

$$H_t = \left\{x \in \mathbb{R}^p : \exists\, r > 0,\ \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \cdot \int_{B(x,r)} f \, d\lambda > t\right\},$$

akkor

$$\lambda(H_t) \le (3^p/t) \cdot \int_{\mathbb{R}^p} f \, d\lambda. \tag{14}$$

Feladatok

317. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f \colon G \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, és legyen $\vartheta(A) = \int_A f \, d\lambda$ minden $A \subset G$ Borel-halmazra. Tekintsük az alábbi állításokat, ahol $x_0 \in G$ egy rögzített pont:

(i) Az x_0 pont Lebesgue-pontja f-nek.

(ii) Az f függvény approximatíve folytonos az x_0 pontban.

[25] Abram Szamojlovics Besicovitch (1891–1970) orosz matematikus.

(iii) $\dfrac{d\vartheta}{d\lambda}(x_0) = f(x_0)$.

Bizonyítsuk be, hogy (i)$\Longrightarrow$(ii) és (i)$\Longrightarrow$(iii).

318. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, legyen $f\colon G \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, és tegyük fel, hogy f korlátos x_0 egy környezetében. Bizonyítsuk be, hogy az x_0 pont akkor és csak akkor Lebesgue-pontja f-nek, ha f approximatíve folytonos az x_0 pontban.

319. Legyen $f(x) = \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ és $F(x) = \int_0^x f\,d\lambda$ $(x \in \mathbb{R})$. Bizonyítsuk be, hogy $F' = f$ mindenütt, de az $x = 0$ pont nem Lebesgue-pontja f-nek, és f nem approximatíve folytonos 0-ban. (Tehát a 317. feladatban szereplő tulajdonságokra a (iii)$\Longrightarrow$(i) és (iii)$\Longrightarrow$(ii) implikációk nem igazak általában, még korlátos függvényekre sem.)

320. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt és $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mérhető. Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor approximatíve folytonos az $x_0 \in G$ pontban, ha van olyan H mérhető halmaz, hogy x_0 sűrűségi pontja H-nak, $x_0 \in H$, és f a H halmazra szorítkozva folytonos x_0-ban.

321. Legyen $\mathcal{G} = \{B_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ gömbök egy tetszőleges véges rendszere $\mathbb{R}^p$-ben. Legyen $B_i = B(a_i, r_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, ahol $r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_n > 0$. Válasszunk ki egy $\mathcal{F}$ részrendszert a következőképpen. Legyen $B_1 \in \mathcal{F}$ és $i_1 = 1$. Ha $\mathcal{G}$-ben van B_{i_1}-től diszjunkt gömb, akkor legyen i_2 a legkisebb index, amelyre $B_{i_2} \cap B_{i_1} = \emptyset$, és tegyük B_{i_2}-t $\mathcal{F}$-be. Ha $\mathcal{G}$-ben van $B_{i_1} \cup B_{i_2}$-től diszjunkt gömb, akkor legyen i_3 a legkisebb index, amelyre $B_{i_3} \cap (B_{i_1} \cup B_{i_2}) = \emptyset$, és tegyük B_{i_3}-at $\mathcal{F}$-be. Folytassuk az eljárást amíg lehet. Legyen az így kapott részrendszer $\mathcal{F} = \{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_s}\}$. Bizonyítsuk be, hogy ha a B_{i_j} gömbök mindegyikét a középpontjából 3-szorosára nyújtjuk, akkor az így kapott gömbök lefedik $\bigcup \mathcal{G}$-t.

322. Lássuk be a maximál-egyenlőtlenséget. Legyen μ Borel-mérték $\mathbb{R}^p$-n, $t > 0$ és $H_t = \{x \in \mathbb{R}^p\colon \exists\, r > 0,\ \mu(B(x,r))/\lambda(B(x,r)) > t\}$. Mutassuk meg, hogy

$$\lambda(H_t) \le 3^p \cdot \mu(\mathbb{R}^p)/t. \tag{15}$$

323. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható. Felhasználva a függvényekre vonatkozó maximál-egyenlőtlenséget, valamint azt a tényt, hogy f jól közelíthető folytonos függvényekkel, bizonyítsuk be, hogy f-nek m.m. $x \in \mathbb{R}^p$ pont Lebesgue-pontja (*Lebesgue tétele*).

324. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, legyen ϑ véges előjeles mérték G Borel-halmazain. Bizonyítsuk be, hogy ha ϑ abszolút folytonos λ-ra nézve, akkor a $g(x) = \dfrac{d\vartheta}{d\lambda}(x)$

limesz létezik λ-m.m. $x \in G$-re, g Lebesgue-integrálható G-n, és $\vartheta(A) = \int_A g\, d\lambda$ minden $A \subset G$ Borel-halmazra.

325. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen ϑ véges előjeles mérték G Borel-részhalmazain. Bizonyítsuk be, hogy ha ϑ szinguláris λ-ra nézve, akkor $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = 0$ λ-m.m. $x \in G$-re.

326. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen ϑ véges előjeles mérték G Borel-részhalmazain. Bizonyítsuk be, hogy

(i) az $f(x) = \frac{d\vartheta}{d\lambda}(x)$ derivált létezik λ-m.m. $x \in G$-re,

(ii) az f függvény Lebesgue-integrálható G-n, és

(iii) ϑ Lebesgue-felbontása λ-ra nézve $\alpha+\sigma$, ahol $\alpha(A) = \int_A f\, d\lambda$ $(A \in \mathcal{B}(G))$ és $\sigma = \vartheta - \alpha$.

327. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen ϑ előjeles mérték G Borel-részhalmazain. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = 0$ λ-m.m. $x \in G$-re, akkor ϑ szinguláris λ-ra nézve.

328. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen ϑ tetszőleges előjeles mérték G Borel-részhalmazain. Bizonyítsuk be, hogy a (véges vagy végtelen) $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ derivált λ-m.m. $x \in G$-re létezik.

329. Bizonyítsuk be, hogy bármely $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazra teljesül, hogy λ-m.m. $x \in H$-ra $\lim_{r\to 0+0} \lambda(H \cap B(x,r))/\lambda(B(x,r)) = 1$ (*Sűrűségi tétel*).

330. Bizonyítsuk be, hogy a $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha λ-m.m $x \notin H$ pontra $\lim_{r\to 0+0} \lambda(H \cap B(x,r))/\lambda(B(x,r)) = 0$.

331. Tegyük fel, a $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz m.m. x pontjára

$$\limsup_{r\to 0+0} \frac{\underline{\lambda}(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} > 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy a H halmaz mérhető.

332. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. Bizonyítsuk be, hogy egy $f\colon G \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha f m.m. $x_0 \in G$ pontban approximatíve folytonos.

333. Jelöljük $\mathcal{C}$-vel azon $\mathbb{R}^p$-beli konvex halmazok rendszerét, melyek belseje nem üres. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{C}$ bármely $\mathcal{F}$ részrendszerének az uniója mérhető (akkor is, ha $\mathcal{F}$ nem megszámlálható).

Megoldási ötletek, válaszok

1. Írjuk fel az E halmazt az A_i halmazok és halmazelméleti műveletek segítségével.

2. Fejezzük ki a $\liminf_{n\to\infty} A_n$ és $\limsup_{n\to\infty} A_n$ halmazokat az A_n halmazok és halmazelméleti műveletek segítségével.

3. Mivel χ_{A_n} minden értéke 0 vagy 1, ezért $\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = 1$ ha $\chi_{A_n}(x) = 1$ végtelen sok n-re, és $\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = 0$ egyébként.

4. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$; $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

5. Mutassuk meg, hogy $P(X)$ elemei a szimmetrikus differenciára mint összeadásra nézve Abel-csoportot alkotnak, amelyben az üres halmaz a nullelem, és minden elem ellentettje önmaga. A metszetképzéssel együtt pedig egy (kommutatív) gyűrűt kapunk $P(X)$-en. Ezek után a feladat megoldásához azt kell ellenőrizni, hogy az unió és a különbség kifejezhető a szimmetrikus differenciával és a metszettel.

6. Az $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ azonosság mutatja, hogy a $\mathcal{B} = \{A \setminus B : A, B \in \mathcal{H}\}$ halmazrendszer zárt a metszetképzésre. Be kell még látni, hogy ha $A, B, C, D \in \mathcal{A}$, akkor $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D)$ előáll véges sok diszjunkt $\mathcal{B}$-beli halmaz uniójaként. Ennek bizonyításához feltehető $D \subset C$. A szereplő $U \setminus V$ különbségeket írjuk fel $U \cap V^c$ alakban, ahol V^c a V halmaznak egy, a szereplő halmazok mindegyikénél bővebb halmazra vonatkozó komplementerét jelöli.

7. Legyenek U, V, W független halmazok. (Ez azt jelenti, hogy az $U \cup V \cup W$ halmaz pontjait U, V és W együttesen nyolc nem üres részre osztják. Vagy precízebben: bármely $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ $0-1$-sorozatra van olyan $x \in U \cup V \cup W$ pont, hogy $\chi_U(x) = \varepsilon_1$, $\chi_V(x) = \varepsilon_2$ és $\chi_W(x) = \varepsilon_3$.) Mutassuk meg, hogy ekkor az U, V, W által generált $\mathcal{H}$ hálóra az $\{A \setminus B : A, B \in \mathcal{H}\}$ halmazrendszer nem modulus.

8. Ha az $A, B \subset \mathbb{Z}$ halmazok periodikusak a p, illetve q periódussal, akkor $A \setminus B$, $A \cup B$ periodikusak a $p \cdot q$ periódussal.

9. Mutassuk meg, hogy a páros egész számok minden részhalmaza előáll mint két sűrűséggel rendelkező halmaz metszete.

10. Ha $A, B \subset X$, akkor $A \setminus (X \setminus B) = A \cap B,\ A \cup (X \setminus B) = X \setminus (B \setminus A)$.

11. $2^{2^n - 1}$.

12. Lássuk be először, hogy az $\mathbb{N}$ halmaz minden egyelemű részhalmaza eleme a generált gyűrűnek. Mi következik ebből a gyűrű tulajdonságai alapján?

13. A generált gyűrű minden eleme rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden függőleges egyenessel való metszete véges, sőt korlátos elemszámú.

14. Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{A}$ véges sok elemével lefedhető halmazok gyűrűt alkotnak, az $\mathcal{A}$ megszámlálhatóan sok elemével lefedhető halmazok pedig σ-gyűrűt alkotnak.

15. A 0-ra szimmetrikus halmazok σ-gyűrűt alkotnak.

16. Azon halmazok, amelyek elemei az $\mathcal{A}$ valamely véges (megszámlálható) részrendszere által generált gyűrűnek, gyűrűt (σ-gyűrűt) alkotnak.

17. Olyan algebrákat kell keresnünk, amelyek metszetének nincs maximális eleme. A keresett algebrák maximális elemei csak végtelen halmazok lehetnek.

18. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ által generált gyűrű nem algebra. Legyen $\mathcal{B}$ egy tetszőleges $\mathcal{A}$-t tartalmazó algebra, és legyen Y egy $\bigcup \mathcal{B}$-nél szigorúan bővebb halmaz. Mutassuk meg, hogy van olyan $\mathcal{A}$-t tartalmazó algebra, amelynek $\bigcup \mathcal{B}$ nem eleme. Így $\mathcal{B}$ nem lehet a legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó algebra.

19. Ellenőrizzük, hogy $\mathcal{P}^1(H)$ bármely két elemének a különbsége vagy $\mathcal{P}^1(H)$-beli, vagy pedig előáll mint két diszjunkt $\mathcal{P}^1(H)$-beli halmaz uniója.

20. Alkalmazzunk n szerinti indukciót, ezen belül pedig k szerinti indukciót.

21. Annak bizonyítására, hogy a megadott halmazrendszer gyűrű, használjuk fel az előző feladat állítását.

22. Mutassuk meg, hogy ha A, B nemüres halmazok, $A \subset B$ és $B \setminus A$ legalább kételemű, akkor az $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B\}$ halmazrendszert tartalmazó félgyűrűk metszete $\mathcal{A}$, de $\mathcal{A}$ nem félgyűrű. Így nem létezik legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó félgyűrű.

23. Az $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ azonosság mutatja, hogy a $\mathcal{C} = \{A \times B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ halmazrendszer zárt a metszetképzésre. Lássuk be, hogy ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $C, D \in \mathcal{B}$, akkor $(A \times B) \setminus (C \times D)$ előáll véges sok diszjunkt $\mathcal{C}$-beli halmaz uniójaként.

24. Alkalmazzuk az előző feladat állítását.

25. Ha f konstans az A halmazon és g konstans a B halmazon, akkor $f + g$ és $c \cdot f$ konstans az $A \cap B$ halmazon.

26. Első lépésként mutassuk meg, hogy $\mathcal{R}$-ben csak véges sok atom van. (Egy $A \in \mathcal{R}$ halmaz *atom,* ha minden $B \in \mathcal{R}$ halmazra $A \subset B$ vagy $A \cap B = \emptyset$.)

Majd lássuk be, hogy $\mathcal{R}$ minden eleme tartalmaz atomot. Végül bizonyítsuk be, hogy minden $\mathcal{R}$-beli halmaz atomok uniója.

27. Az állítás félgyűrűre és modulusra igaz, hálóra nem.

28. Feltehetjük, hogy $\mathcal{H}$ a legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó monoton osztály. Elég belátni, hogy $\mathcal{H}$ gyűrű. (Mert ekkor σ-gyűrű is.) Legyen $A \in \mathcal{A}$ rögzített. Első lépésként vegyük észre, hogy ha $\mathcal{H}'$ jelöli azon $E \in \mathcal{H}$ halmazok rendszerét, amelyekre $E \cap A$, $E \cup A$, $E \setminus A$ mindegyike $\mathcal{H}$-ban van, akkor $\mathcal{H}'$ monoton osztály.

29. Lássuk be először, hogy ha A egy mindkét irányban végtelen számtani sorozat d differenciával, akkor szükségképpen $\mu(A) = 1/d$.

30. Bontsuk fel X-et véges sok diszjunkt halmaz uniójára úgy, hogy mindegyik A_i halmaz előálljon mint ezek közül néhány uniója. (Használjuk fel ehhez a 11. feladat megoldásában szereplő halmazokat.) Mutassuk meg, hogy ezek között van olyan, ami több, mint 100 db A_i-nek részhalmaza.

31. A ϑ halmazfüggvény additivitása nyilvánvaló. A definíciók alkalmazásával azonnal megkapjuk π, ν és τ értékeit. Az ellenőrizendő egyenlőségek az $a = a^+ - a^-$ és $|a| = a^+ - a^-$ összefüggésekből adódnak.

32. (i) Legyen $\mathcal{A}$ háló, és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok, amelyekre $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$. A π halmazfüggvény additivitásának bizonyítását bontsuk két részre: a $\pi(A) \le \sum_{i=1}^{n} \pi(A_i)$ és $\pi(A) \ge \sum_{i=1}^{n} \pi(A_i)$ egyenlőtlenségeket lássuk be egyenként. (ii) Legyen $\mathcal{A}$ modulus. Ha $A \in \mathcal{A}$ és $\vartheta(A)$ véges, akkor a $\vartheta(A) = \pi(A) - \nu(A)$ egyenlőséget bizonyítandó induljunk ki abból, hogy $\vartheta(B) = \vartheta(A) - \vartheta(A \setminus B)$ minden $B \subset A$-ra. (iii) megoldását ismét bontsuk szét a $\tau(A) \le \pi(A) + \nu(A)$ és a $\tau(A) \le \pi(A) + \nu(A)$ egyenlőtlenségek bizonyítására.

33. Legyen $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, ahol $A, A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{P}^2(H)$, és az $A_1, \ldots, A_n$ téglák páronként diszjunktak. Legyenek az A_i tégla csúcspontjai a_i, b_i, c_i, d_i, ahol a_i a bal alsó csúcspont, d_i pedig a jobb felső csúcspont. Ekkor $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(b_i) - f(c_i) + f(d_i))$. Mutassuk meg, hogy jobb oldali összegben minden tag kiesik, kivéve az A csúcspontjaihoz tartozó tagokat.

34. Legyen $f(p) = \mu(A_p)$ minden $p \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ pontra, ahol A_p jelöli azt a balról zárt, jobbról nyílt téglát, amelynek (a_1, a_2) a bal alsó csúcspontja, p pedig a jobb felső csúcspontja. Legyen továbbá $f = 0$ a T tégla vízszintes alsó és függőleges oldalán. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mu = \mu_f$.

35. Mutassuk meg, hogy ha (i) igaz, akkor a $g(x) = f(x, a_2)$ és $h(y) = f(a, y) -$

$f(a_1, b_1)$ függvények kielégítik a feltételeket.

36. Az *akkor* állítás bizonyításához mutassuk meg, hogy tetszőleges $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset G$ téglához van olyan $(u, v) \in T$ pont, hogy $\mu_f(T) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v)$. A *csak akkor* állítás bizonyításához mutassuk meg, hogy tetszőleges $(u, v) \in G$ pontra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \lim_{h \to +0} \frac{\mu_f([u, u+h) \times [v, v+h))}{h^2}.$$

37. (i) Alkalmazzuk a 21. feladat állítását. (ii) A 25. feladat állítása szerint $L(\mathcal{A})$ vektortér. Legyen $f \in L(\mathcal{A})$, és legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, melyekre $f(x) = a_i$, ha $x \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, és $f(x) = 0$, ha $x \in X \setminus A$, ahol $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Definiáljuk f „integrálját" az

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mu(A_i)$$

képlettel. Mutassuk meg, hogy ez jóldefiniált, és az integrál egy $\Lambda \colon L(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ lineáris függvényt definiál az $L(\mathcal{A})$ vektortéren.

Terjesszük ki Λ-t lineárisan az $L(P(X))$ függvényhalmazra. Ha a kiterjesztés M, akkor $A \mapsto M(\chi_A)$ $(A \subset X)$ a μ egy megfelelő kiterjesztése lesz.

38. Az állítás igaz. Bizonyítsuk először a $H = \mathbb{R}^2$ esetet. Az általános eset bizonyításához használjuk fel a 37. feladat állítását.

39. Az elégségesség bizonyításához gondoljuk meg, hogy ha A eleme a generált gyűrűnek, akkor χ_A előáll $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ alakban, ahol $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ és $a_1, \ldots, a_n, a \in \mathbb{Z}$. Definiáljuk ϑ kiterjesztését az $\overline{\vartheta}(A) = \sum_{i=1}^n a_i \vartheta(A_i)$ képlettel. A definíció értelmességéhez be kell látni, hogy (1) teljesülése esetén, ha $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^k b_j \chi_{B_j}$, akkor $\sum_{i=1}^n a_i \vartheta(A_i) = \sum_{j=1}^k b_j \vartheta(B_j)$. Bizonyítsuk a következő állítást: ha $A_1, \ldots, A_n, A \in \mathcal{H}$, $A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset A$, $a_1, \ldots, a_n, a \in \mathbb{Z}$ és $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} = a \chi_A$, akkor $\sum_{i=1}^n a_i \vartheta(A_i) = a \vartheta(A)$. Alkalmazzunk n szerinti indukciót.

Ötlet egy másik megoldáshoz: a 6. feladat állítása szerint az $\mathcal{A} = \{A \setminus B : A, B \in \mathcal{H}\}$ halmazrendszer félgyűrű. A 37. feladat (i) állítása alapján elég belátni, hogy ϑ additívan kiterjeszthető az $\mathcal{A}$ félgyűrűre. Mutassuk meg, hogy a $\overline{\vartheta}(A \setminus B) = \vartheta(A) - \vartheta(A \cap B)$ definíció értelmes, azaz $A, B, C, D \in \mathcal{H}$,

$A \setminus B = C \setminus D$ esetén $\vartheta(A) - \vartheta(A \cap B) = \vartheta(C) - \vartheta(C \cap D)$. Ezt bizonyítandó tegyük fel először, hogy $A \subset C$, majd az általános esetet vezessük vissza az $A \subset C$ esetre. Annak bizonyításához, hogy az így definiált $\overline{\vartheta}$ additív $\mathcal{A}$-n, mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathcal{A}$ és $H \in \mathcal{H}$, akkor $\overline{\vartheta}(A) = \overline{\vartheta}(A \cap H) + \overline{\vartheta}(A \setminus H)$.

40. Tegyük fel, hogy (ii) nem igaz. Válasszunk egymás után olyan A_n halmazokat, amelyekre $\vartheta_n(A_n) \neq 0$, és minden $k < n$-re vagy $A_k \cap A_n = \emptyset$, vagy pedig $A_k \supset A_n$. A Ramsey[26]-tétel[27] alkalmazásával kapunk egy $n_1 < n_2 < \dots$ indexsorozatot úgy, hogy vagy $A_{n_i} \cap A_{n_j} = \emptyset$ minden $i < j$-re, vagy pedig $A_{n_1} \supset A_{n_2} \supset \dots$. Tekintsük a második esetet. Mutassuk meg, felhasználva (ii) tagadását, hogy ekkor alkalmas $A_{n_i} \setminus A_{n_j}$ alakú halmazokra teljesül (i).

41. Azt kell megmutatni, hogy minden nyílt halmaz egyenlő az általa tartalmazott racionális gömbök, illetve az általa tartalmazott racionális téglák uniójával.

42. Az (i) állítást bizonyítandó lássuk be, hogy minden tégla Borel-halmaz. Az előző (41.) feladat állításának felhasználásával mutassuk meg, hogy minden nyílt halmaz benne van a téglák rendszere által generált σ-gyűrűben.

43. Az (i) állítás bizonyításához használjuk fel, hogy minden tégla F_σ, majd alkalmazzuk a 41. feladat (i) állítását. A (ii) állítást vezessük vissza (i)-re, (iii)-at (ii)-re és (iv)-et (iii)-ra.

44. Tegyük fel, hogy $\mathbb{Q} \cap (a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, ahol $G_1, G_2, \dots$ nyíltak. Mutassuk meg, hogy vannak egymásba skatulyázott $I_n \subset G_n$ zárt intervallumok, melyekre $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ egyetlen eleme sem racionális.

45. Induljunk ki a 44. feladat állításából. Lássuk be, hogy a $(\mathbb{Q} \cap (0,1)) \cup ((1,2) \setminus \mathbb{Q})$ halmaz egyszerre $F_{\sigma\delta}$ és $G_{\delta\sigma}$, de nem F_σ és nem G_δ.

46. (i) Mutassuk meg, hogy bármely $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre az $\{x\colon \omega_f(x) < c\}$ halmaz nyílt minden $c > 0$-ra. (ii) Mutassuk meg, hogy bármely $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvényre és minden $c > 0$-ra $\{x \in A\colon \omega_f(x) < c\} = A \cap G$, ahol G egy alkalmas nyílt halmaz.

47. Az állítás hamis, keressünk ellenpéldát.

48. Jelöljük $f[x, y]$-nal az $(f(x) - f(y))/(x - y)$ differenciahányadost. Az f függvény akkor és csak akkor differenciálható az x pontban, ha a $\lim_{y \to x} f[x, y]$ véges határérték létezik. A határértékre vonatkozó Cauchy-kritérium szerint ez

[26] Frank P. Ramsey (1903–1930) angol filozófus, matematikus és közgazdász.

[27] Ramsey tétele azt állítja, hogy ha egy megszámlálhatóan végtelen X halmaz kételemű részhalmazait két osztályba soroljuk, akkor van olyan végtelen $Y \subset X$ halmaz, hogy Y kételemű részhalmazai ugyanabba az osztályba tartoznak. Lásd [2, 14.1. Tétel, 177. oldal].

pontosan akkor teljesül, ha minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy $|f[x,y] - f[x,z]| < \varepsilon$ minden $y, z \in (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$-re. Írjuk fel ennek alapján a $D(f)$ halmazt olyan alakban, amelyből leolvashatjuk, hogy Borel-halmazról van szó. Használjuk fel azt is, hogy $D(f)$ része azon pontok halmazának, amelyekben f folytonos, és hogy az utóbbi halmaz Borel a 46. feladat állítása szerint.

49. Legyen $A_{n,m,k} = \left\{x\colon \left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \le 1/k\right\}$ minden $n, m, k \in \mathbb{N}^+$-ra. Írjuk fel az A halmazt az $A_{n,m,k}$ halmazok és halmazelméleti műveletek segítségével.

50. Vegyük észre, hogy $A_n(x)$ lépcsősfüggvény minden n-re. Írjuk fel a vizsgált A halmazt az $\{x : |A_n(x) - (n/10)| < n/k\}$ halmazok és halmazelméleti műveletek segítségével.

51. Vegyük észre, hogy az $\{x : |A_n(x) - (n/10)| < n/k\}$ halmaz csak véges sok pontban különbözik egy zárt halmaztól minden n-re és k-ra. Vezessük le ebből, hogy a kérdéses A halmaz csak egy megszámlálható halmazban különbözik egy $F_{\sigma\delta}$ halmaztól. Mutassuk meg, hogy ebből már következik, hogy A maga is $F_{\sigma\delta}$.

52. Legyenek B, C, D tetszőleges halmazok. Jelölje E azon $x \in B$ elemek halmazát, amelyekre teljesül, hogy ha $x \in C$, akkor $x \in D$. Gondoljuk meg, hogy $E = (B \setminus C) \cup (B \cap D)$.

53. A 41. feladat (ii) állítása szerint $\mathcal{A}$ tartalmazza G nyílt részhalmazait. Legyen $\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R}^p\colon G \cap A \in \mathcal{A},\ G \setminus A \in \mathcal{A}\}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{B}$ olyan σ-algebra, amely tartalmazza $\mathbb{R}^p$ nyílt részhalmazait. Ebből következik, hogy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{B}$.

54. Legyen $\bigcup \mathcal{F} = E$. Bizonyítsuk be, hogy ha E nem zárt, akkor vannak olyan $F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F}$ halmazok, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E$.

55. Minden $x \in \Sigma$ sorozatra jelöljük L_x-szel azon sorozatok halmazát, melyek x folytatásai (az x sorozatot beleértve). Legyen F adott jólfundált fa, melynek legalább két eleme van. Jelöljük E_0-lal azon $x \in F$ pontok halmazát, amelyekre x hossza páros, és amelyekre létezik egy és csak egy olyan $f : (L_x \cap F) \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ leképezés, amelyre $f(n_1, \ldots, n_k) = A_{n_k}$, valahányszor $(n_1, \ldots, n_k) \in L_x$ és végpontja F-nek;

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \bigcup \{f(n_1, \ldots, n_k, i) : (n_1, \ldots, n_k, i) \in F\}$$

minden olyan $(n_1, \ldots, n_k) \in L_x \cap F$-re, amely nem végpontja F-nek és amelyre k páros, továbbá

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \bigcap \{f(n_1, \ldots, n_k, i) : (n_1, \ldots, n_k, i) \in F\}$$

minden olyan $(n_1,\dots,n_k) \in L_x \cap F$-re, amely nem végpontja F-nek és amelyre k páratlan. A feladat megoldásához azt kell igazolnunk, hogy $\emptyset \in E_0$.

Jelöljük E_1-gyel azon $x \in F$ pontok halmazát, amelyekre x hossza páratlan, és amelyekre $x^\wedge i \in E_0$ minden i-re, ahol $x^\wedge i$ jelöli azt a sorozatot, amit úgy kapunk x-ből, hogy folytatjuk az i taggal.

Mutassuk meg, hogy $E_0 \cup E_1 = F$.

56. Jelöljük $\mathcal{A}$-val azon Borel-halmazok rendszerét, amelyekre létezik F és f a megadott tulajdonságokkal. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{A}$ tartalmazza az A_i gömböket, továbbá tartalmazza bármely megszámlálhatóan sok elemének az unióját és a metszetét. Az 53. feladat szerint ebből következik, hogy $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$.

57. A jólfundált fák halmaza kontinuum számosságú.

58. Olyan hálót keressünk, amelyben egyetlen halmazt sem lehet nem triviális módon felbontani diszjunkt halmazok uniójára.

59. Olyan halmazrendszert keressünk, amelyben egyetlen halmazt sem lehet nem triviális módon felbontani véges sok diszjunkt halmaz uniójára, de van olyan halmaz, amelynek van nem triviális felbontása megszámlálhatóan sok diszjunkt halmaz uniójára.

60. Ellenőrizzük, hogy a félgyűrűn értelmezett halmazfüggvényekre vonatkozó analóg állítás bizonyítása minimális változtatással átvihető erre az esetre.

61. (i) Az $\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} A_n$ halmazok növő sorozatot alkotnak, ezért az uniójuk mértéke egyenlő a mértékük limeszével. (ii) Olyan példa is van, amelyben az A_n halmazok $[0,1]$ részintervallumai, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ és $|A_n| = 1/2$ minden n-re.

62. (i) Ha $A_n \subset X$, akkor $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = X \setminus \liminf\limits_{n\to\infty}(X \setminus A_n)$. (ii) Olyan példa is van, amelyben $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ és $\mu(A_n) = 1$ minden n-re.

63. Olyan intervallumokat kell konstruálni, amelyek együttesen $[0,1]$ minden pontját végtelen sokszor lefedik.

64. A feladat az A_n halmazsorozat limsup-járól állítja, hogy nullmértékű. Használjuk fel a limsup-halmaz képletét (lásd a 2. feladatot).

65. Az állítás még a pluszfeltétel mellett is hamis. Keressünk olyan ellenpéldát, amelyben az A_n halmazok a $[0,1]$ részintervallumai.

66. Legyen $\overline{\mu}(H) < \infty$. Fedjük le H-t $\mathcal{P}$-beli halmazokkal úgy, hogy $\sum \mu(A_n)$ közel legyen $\overline{\mu}(H)$-hoz. Használjuk fel, hogy A jól vágja ketté az A_n halmazok mindegyikét.

67. Ha $\mu \not\equiv 0$, akkor keressük az x pontot intervallumskatulyázással, olyan egymásba skatulyázott intervallumok metszeteként, amelyek mértéke nem nulla.

68. μ_f pontosan akkor lesz külső mérték, amikor mérték, hiszen μ_f additív a $\mathcal{P}^1(I)$ félgyűrűn, és egy félgyűrűn értelmezett halmazfüggvény pontosan akkor mérték, ha additív és külső mérték.

69. Ez a nulla pontra koncentrált ún. Dirac-mérték. Azaz $\mu_f(H) = 1$, ha $0 \in H$ és $\mu_f(H) = 0$, ha $0 \notin H$.

70. A *csak akkor* állítást bizonyítandó lássuk be először, hogy ha H mérhető, akkor előáll egy G_δ halmaz és egy nullmértékű halmaz különbségeként.

71. Az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikáció bizonyításához alkalmazzuk a 68. feladat állítását. Az (ii)$\Longrightarrow$(iii) implikáció ugyanúgy adódik, mint a 68. feladat megoldásában.

A következő megfigyelés segít olyan függvényt konstruálni, amely balról folytonos (vagy akár folytonos), de amelyre ϑ_f nem előjeles mérték. Ha ϑ_f előjeles mérték és $x_n \in I$ egy szigorúan monoton növő x-hez tartó sorozat, akkor $\vartheta_f([x_1, x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([x_n, x_{n+1}))$. Amint azt az előjeles mérték definíciója után megjegyeztük, ebből következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([x_n, x_{n+1}))$ sor abszolút konvergens. Így $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n) - f(x_{n+1})| < \infty$.

Olyan függvény konstruálásához, amelyre (ii) teljesül, de (i) nem, lássuk be, hogy ha f balról folytonos az $I = [a, b]$ intervallumon és korlátos változású $[c, b]$-n minden $a < c < b$-re, akkor ϑ_f előjeles mérték $\mathcal{P}^1(I)$-n.

72. Az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikációt már beláttuk az előző (71.) feladat megoldásában. A (ii)$\Longrightarrow$(iii) implikációt bizonyítsuk indirekt. Az (iii)$\Longrightarrow$(i) implikáció bizonyításához azt kell belátni, hogy ha $[a_0, b_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$ diszjunkt felbontás, akkor $\vartheta_f([a_0, b_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([a_n, b_n))$. Legyen S azon $x \in [a_0, b_0]$ pontok halmaza, amelyekre

$$\vartheta_f([a_0, b_0) \cap [a_0, x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([a_n, b_n) \cap [a_0, x)).$$

Mutassuk meg, hogy $\sup S \in S$ és $\sup S = b_0$.

73. Mivel π additív a 32. feladat szerint, ezért elég belátni, hogy külső mérték. A ν-re vonatkozó állítás visszavezethető a π-re vonatkozó állításra, a τ-re vonatkozó állítás pedig ezekből már világos.

74. Legyen T adott tégla, és jelöljük $\mathcal{C}$-vel azon A Borel-halmazok rendszerét, amelyekre $\vartheta(A\cap T) = \xi(A\cap T)$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{C}$ tartalmaz minden T-beli Borel-halmazt. Ennek bizonyításához alkalmazzuk a 28. feladat állítását.

A végességi feltétel nélkül az állítás nem igaz.

75. Jelöljük $\mathcal{A}$-val azon $A \in \mathcal{B}(G)$ halmazok rendszerét, amelyekre teljesül a feladat állítása. Azt kell megmutatni, hogy $\mathcal{A} = \mathcal{B}(G)$. Ennek bizonyításához alkalmazzuk a 53. feladat állítását.

76. Alkalmazzuk Hahn felbontási tételét.

77. Induljunk ki az előző (76.) feladat (i) állításából.

78. Keressünk egy olyan $\mathcal{A}$ gyűrűt, amelyen minden additív halmazfüggvény automatikusan σ-additív. Keressünk $\mathcal{A}$-n egy olyan additív halmazfüggvényt, amelynek az $\mathcal{A}$-t tartalmazó bármely σ-gyűrűre való σ-additív kiterjesztése fel kell, hogy vegye a ∞ és $-\infty$ értékek mindegyikét, amiről tudjuk, hogy lehetetlen.

79. Az egyik irányban használjuk fel a $\vartheta = \pi - \nu$ összefüggést, a másik irányban pedig Hahn felbontási tételét.

80. Jelölje $\mathcal{R}$ az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűt, és tegyük fel, hogy az $A \in \mathcal{R}$ halmaz lefedhető egy véges $\vartheta(A)$-mértékű $\mathcal{A}$-beli halmazzal. Legyen $\mathcal{C}$ azon $B \in \mathcal{R}$ halmazok rendszere, amelyekre teljesül, hogy ϑ minden, előjeles mértékként $\mathcal{R}$-re való kiterjesztésének ugyanaz az értéke $B\cap A$-ban. Mutassuk meg, felhasználva az 28. feladatot, hogy $\mathcal{C}$ σ-gyűrű és tartalmazza $\mathcal{A}$-t. Így $\mathcal{C} = \mathcal{R}$ és $A \in \mathcal{C}$, azaz A-ra a kiterjesztés egyértelmű.

81. Egyik állítás sem igaz. Keressünk olyan ellenpéldát, amelyben $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, és μ olyan $\mathcal{A}$-n értelmezett mérték, amely csak a 0 és 1 értékeket veszi fel, de nem terjeszthető ki mértékként $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-re.

82. A kiterjesztés leírásához határozzuk meg a kiterjesztett előjeles mérték értékét minden egyelemű halmazban.

83. Elég megmutatni, hogy ha $B \in \mathcal{A}$ és $0 < a < \mu(B)$, akkor van olyan $A \in \mathcal{A}$, amelyre $A \subset B$ és $\mu(A) = a$. Ehhez először is mutassuk meg, hogy minden pozitív mértékű halmaz tartalmaz akármilyen kis pozitív mértékű halmazt. Konstruáljuk meg az A halmazt a kimerítés módszerével. Azaz keressünk egy „lehetőleg nagymértékű" $A_1 \subset B$ halmazt, amelyre még $\mu(A_1) < a$. Utána keressünk egy „lehetőleg nagymértékű" $A_2 \subset B\setminus A_1$ halmazt, amelyre még $\mu(A_1)+\mu(A_2) < a$. Folytassuk az eljárást, és mutassuk meg, hogy az $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ halmazra $\mu(A) = a$.

Ötlet egy másik megoldáshoz: vegyünk egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ halmazrendszert, amely maximális arra a tulajdonságra nézve, hogy bármely két $A, B \in \mathcal{F}$ halmazra $\mu(A \setminus B) = 0$ vagy $\mu(B \setminus A) = 0$. (Egy ilyen rendszer létezése könnyen bizonyítható a Zorn-lemmából.) Mutassuk meg, hogy μ már az $\mathcal{F}$ halmazrendszerre megszorítva is felvesz minden értéket 0 és $\sup\{\mu(A)\colon A \in \mathcal{A}\}$ között.

84. Bizonyítsuk be először a feladat állítását arra az esetre, amikor a tér teljesen atomos, ami alatt azt értjük, hogy létezik atomoknak egy páronként diszjunkt rendszere, amely $\mathcal{A}$ minden elemét lefedi. Az általános esetet vezessük vissza erre az esetre, illetve az előző (83.) feladat eredményére.

85. Legyen $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, ahol $A_1, A_2, \ldots$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok. Be kell látnunk, hogy $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Itt a $\geq$ egyenlőtlenség könnyen látható. Mutassuk meg, hogy ha $>$ állna, akkor volnának olyan diszjunkt $B_k \subset A$ halmazok, melyekre $\inf_k \mu(B_k) > 0$.

86. Használjuk fel a 3. feladat állítását.

87. A teljességet bizonyítandó mutassuk meg először, hogy ha $d(A_n, A_{n+1}) < 1/2^{n+1}$ minden n-re, akkor az (A_n) sorozat konvergál a $\limsup_{n\to\infty} A_n$ halmazhoz.

88. Az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikáció nem igaz még akkor sem, ha $A = \emptyset$. Keressünk ellenpéldát abban a $(\mathcal{A}^{<\infty}, d)$ térben, ahol $\mathcal{A}^{<\infty}$ a $[0,1]$ intervallum Borel-halmazainak σ-algebrája a Lebesgue-mértékkel.

A (ii)$\Longrightarrow$(i) implikáció sem igaz. Ha μ nem korlátos, akkor lehetséges, hogy $\limsup_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, de $A_n \not\to \emptyset$.

89. Fejezzük ki az $A \setminus \liminf_{n\to\infty} A_n$ halmazt az $A \setminus A_n$ halmazok segítségével, a $\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \setminus A$ halmazt pedig az $A_n \setminus A$ halmazok segítségével.

90. Használjuk a Borel–Cantelli-lemmát.

91. A 40. feladat alapján feltehetjük, hogy vannak páronként diszjunkt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok és különböző $n_1, n_2, \ldots$ indexek úgy, hogy $\vartheta_{n_i}(A_i) \neq 0$ minden $i = 1, 2, \ldots$-re. Mutassuk meg, hogy az A_i halmazok sorozatából kiválaszthatunk egy olyan részsorozatot, amelynek az uniója kielégíti a feltételt.

92. Alkalmazzuk az előző (91.) feladat állítását.

93. Először bizonyítsuk be az állítást arra az esetre, amikor csak véges sok M_i halmaz van. Alkalmazzunk teljes indukciót az M_i halmazok számára nézve. Az általános esetben használjuk fel, hogy λ külső mérték.

94. A $\lambda(A) \leq k(A)$ egyenlőtlenség nyilvánvaló. A $k(A) \leq \lambda(A)$ egyenlőtlenséget bizonyítandó használjuk fel, hogy A kompakt.

95. Legyen A Jordan-mérhető. Ha a T_i téglalapok lefedik H-t, akkor a $T_i \cap A$ Jordan-mérhető halmazok lefedik $H \cap A$-t, a $T_i \setminus A$ Jordan-mérhető halmazok pedig lefedik $H \setminus A$-t. Ebből könnyű belátni, hogy $k(H \cap A) + k(H \setminus A) \leq k(H)$. Mivel a fordított irányú egyenlőtlenség mindig igaz, ez bizonyítja az egyenlőséget.

Ha az egyenlőség minden A-ra fennáll, akkor alkalmazzuk azt egy H-t tartalmazó téglára. Vezessük le ebből, hogy $b(H) = k(H)$.

96. Az első egyenlőséget bizonyítandó fedjük le H-t olyan nyílt téglaredszerrel, amelynek az össztérfogata közel van $\lambda(H)$-hoz. Ebből a második egyenlőség nyilvánvaló. A harmadik egyenlőséget bizonyítandó fedjük le H-t nyílt halmazok olyan sorozatával, amelynek a mértékei tartanak $\lambda(H)$-hoz, és vegyük a metszetüket.

97. Válasszunk olyan mérhető $A_n \subset H$ halmazokat, hogy $\lambda(A_n) \to \underline{\lambda}(H)$ teljesüljön, és vegyük az uniójukat.

98. Ha $A \subset H$ mérhető, akkor $E \setminus A$ is mérhető, és lefedi $E \setminus H$-t. Ha $E \setminus H \subset A \subset E$ mérhető, akkor $E \setminus A$ is mérhető, és része H-nak.

99. Mind a három egyenlőtlenség nyilvánvaló a definíciókból, felhasználva azt is, hogy véges sok tégla uniója mérhető.

100. Alkalmazzuk a 96. feladat állítását.

101. A G nyílt halmaz létezését már láttuk a 96. feladatban. Az F halmaz létezését vezessük vissza G létezésére.

102. Mutassuk meg, hogy vannak olyan $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ mérhető halmazok, melyekre $H_n \subset A_n$ és $\lambda(H_n) = \lambda(A_n)$ minden n-re.

103. (i) Írjunk egy megszámlálható sűrű halmaz (pl. $\mathbb{Q}$) pontjai köré rövid nyílt intervallumokat, és vegyük ezek unióját. (ii) Vegyük az így kapott halmaznak $(0, 1)$-gyel vett metszetét. (iii) Vonjuk ki az (i)-ben konstruált nyílt halmazt egy zárt intervallumból.

104. Használjuk fel a 66. feladat állítását.

105. Az állítás igaz. Vezessük le a feltételből, hogy $A \cap [n, n+1)$ mérhető minden n-re.

106. Válasszuk az A_n halmazokat induktíve. Ha az $A_1, \dots, A_n$ halmazokat már kiválasztottuk, akkor válasszuk A_{n+1}-et úgy, hogy az $A_1, \dots, A_n$ halmazok mindegyikét kevéssel c^2-nél kisebb mértékű halmazban messe. Ez együttesen csak egy c-nél kisebb mértékű halmazt adna, a hiányzó részt a $[0, 1] \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n))$ halmazból kell pótolni. Ezért minden lépésben biztosítani kell, hogy ez a maradék-halmaz pozitív mértékű legyen.

107. Mit mondhatunk azon c számok halmazáról, amelyekre $H + c$ nem részhalmaza az irracionális számoknak?

108. Ha egy x számra végtelen sok p/q racionális számra teljesül $|x - (p/q)| < 1/q^3$, akkor ezek között végtelen sok különböző nevezőjű kell, hogy legyen. Adott

$q \in \mathbb{N}^+$-ra mekkora azon $x \in [0,1]$ számok halmazának mértéke, amelyekre $|x-(p/q)| < 1/q^3$ valamely $p \in \mathbb{Z}$-re?

109. Jelöljük H_n-nel azon $x \in [a,b]$ pontok halmazát, melyekre $|f(y)-f(x)| \le \varepsilon \cdot |y-x|$ valahányszor $|y-x| < 1/n$. Mutassuk meg, hogy $\lambda(f(H_n)) \le \varepsilon \cdot (b-a)$ minden n-re. Használjuk fel a 102. feladatot annak bizonyítására, hogy a feladatban szereplő halmaz külső mértéke szintén legfeljebb $\varepsilon \cdot (b-a)$.

110. Mutassuk meg először, hogy az M halmaz felbontható megszámlálhatóan sok olyan halmaz egyesítésére, amelyen f szigorúan monoton növő és korlátos. Így elég belátni, hogy ha $H \subset M$ és f szigorúan monoton növő és korlátos H-n, akkor H nullmértékű. Vezessük vissza ezt az állítást az előző (109.) feladatra.

111. Mutassuk meg, hogy az N halmaz megszámlálható.

112. Használjuk fel, hogy f akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $F\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztás, hogy $\Omega_F(f) < \varepsilon$. Itt $\Omega_f(f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$, ahol $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$ és $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$.

Jelöljük $\omega_f(x)$-szel az f függvény oszcillációját az $x \in [a,b]$ pontban, azaz legyen

$$\omega_f(x) = \lim_{h\to 0+0}\left(\sup_{[x-h,x+h]\cap[a,b]} f - \inf_{[x-h,x+h]\cap[a,b]} f\right).$$

Világos, hogy f akkor és csak akkor folytonos x-ben, ha $\omega_f(x) = 0$. Mutassuk meg, hogy f akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha minden $\delta > 0$-ra az $E_\delta = \{x \in (a,b)\colon \omega_f(x) \ge \delta\}$ halmaz mértéke nulla. (Vegyük észre, hogy E_δ korlátos és zárt, tehát a 94. feladat állítása szerint $k(E_\delta) = \lambda(E_\delta)$.)

113. Lássuk be, hogy az $x \mapsto \lambda(H \cap [0,x])$ függvény folytonos.

114. Először bizonyítsuk az állítást zárt halmazokra. Mutassuk meg, hogy ha H zárt és $\lambda(H \cap [0,\infty)) > 0$, akkor az $f(x) = 0$ $(x < 0)$, $f(x) = \lambda(H \cap [0,x])$ $(x \ge 0)$ függvény megfelel. Lássuk be, hogy f értékkészletének minden elemét f a H halmazon is felveszi.

115. Használjuk fel, hogy a mérhető halmazok mindent jól vágnak ketté.

116. Vezessük vissza az állítást az előző (115.) feladatra.

117. Ha A mérhető, akkor jól vágja ketté a B és $A \cup B$ halmazok mindegyikét.

118. Használjuk fel, hogy C jól vágja ketté A és B mindegyikét.

119. Használjuk fel a 96. és 118. feladatok állításait.

120. A feltétel elégségességének bizonyításához vegyük észre, hogy ha az A halmaz kielégíti a feladatban megfogalmazott feltételeket és a H halmaz mérhető burka M, akkor $\lambda(A \setminus M) = \lambda(M \setminus A) = 0$.

121. Használjuk fel az előző (120.) feladat állítását.

122. Mutassuk meg, hogy H és K mérhető burkainak metszete nullmértékű.

123. Mutassuk meg, hogy ha az I_n téglák lefedik A-t és $\sum_{n=1}^{\infty} t(I_n)$ elég közel van $\lambda(A)$-hoz, akkor elég nagy N-re az $E = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ halmaz megfelel.

124. Alkalmazzuk a 28. feladat állítását.

125. Tegyük fel először, hogy $\lambda(A) < \infty$. Mutassuk meg, hogy ha az I_n intervallumok lefedik A-t és $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ elég közel van $\lambda(A)$-hoz, akkor az I_n intervallumok legalább egyike ilyen.

126. Tegyük fel, hogy $\lambda(I \cap A) > 0{,}99 \cdot |I|$. Mutassuk meg, hogy ha I-t felosztjuk n egyenlő részre, akkor a részek valamelyikére szintén teljesül egy hasonló egyenlőtlenség.

127. Nyilvánvaló, hogy $d \in A - B$ akkor és csak akkor, ha $(B + d) \cap A \neq \emptyset$. Így elég megmutatni, hogy $(B + d) \cap A \neq \emptyset$ minden d-re, ahol d befutja egy alkalmas nem-elfajuló intervallum pontjait. Ezt bizonyítandó használjuk fel a 117. és 126. feladatok állítását.

128. A 90. feladat állítása szerint elég olyan A_n halmazokat találni, amelyek mindegyike véges sok tégla uniója, továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} d(A_n, A) < \infty$.

129. Legyen $B = \mathbb{R} \setminus A$. Ha $\lambda(A) > 0$ és $\lambda(B) > 0$, akkor a 127. feladat állítása szerint $A - B$ tartalmaz racionális számot. Mutassuk meg, hogy ez lehetetlen.

130. Használjuk fel az előző (129.) feladat állítását.

131. Ha $0 < \lambda(A) < 1$, akkor $([0,1] \setminus A) - A$ tartalmaz szakaszt. Mutassuk meg, hogy ez lehetetlen. Hogy ne kelljen bajlódni a kétféleképpen felírható számokkal, vegyünk inkább egy szakaszt a $B - A'$ halmazban, ahol $B = ([0,1] \setminus A) \setminus D$ és $A' = A \setminus D$, ahol D a véges tizedestörtek halmaza.

132. Mutassuk meg először, hogy ha ϑ felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor nem korlátos sem alulról, sem felülről, ami lehetetlen. Így feltehető, hogy $\vartheta \geq 0$. Tegyük fel, hogy $\vartheta([0,1]^p) = 1$. Lássuk be, hogy ϑ egyenlő a Lebesgue-mértékkel először a racionális koordinátájú téglákon, majd az összes téglán, végül az összes Borel-halmazon.

133. Legyen $\mathcal{I} \subset P(\mathbb{R})$ σ-ideál, azaz olyan halmazrendszer, amelyre teljesül, hogy ha $A \in \mathcal{I}$ és $B \subset A$, akkor $B \in \mathcal{I}$, továbbá ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{I}$, akkor

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{I}$. Ekkor az a $\mu_{\mathcal{I}}$ halmazfüggvény, amelyre $\mu_{\mathcal{I}}(A) = 0$, ha $A \in \mathcal{I}$ és $\mu_{\mathcal{I}}(A) = \infty$, ha $A \notin \mathcal{I}$ mérték lesz $P(\mathbb{R})$-en. Adjunk meg minél több eltolás-invariáns σ-ideált $\mathbb{R}$-en.

134. Legyen I olyan nem-elfajuló intervallum, amelyre $\vartheta(I)$ véges. Mutassuk meg, hogy van olyan $E \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre (i) E-nek létezik végtelen sok páronként diszjunkt I-beli eltoltja, valamint (ii) E-nek létezik megszámlálhatóan sok eltoltja, amelyek lefedik $\mathbb{R}$-et.

Bizonyítsuk be, hogy $\vartheta(F) = 0$ minden $F \subset E$ halmazra. Vezessük le ebből, hogy $\vartheta(A) = 0$ minden $A \subset \mathbb{R}$-re.

135. Az előző (134.) feladat állításából következik, hogy van olyan $E \subset \mathbb{R}$ halmaz, amely nem Lebesgue-mérhető. Ellenkező esetben ui. a Lebesgue-mérték olyan eltolás-invariáns mérték lenne $P(\mathbb{R})$-en, amely nem azonosan nulla, és amely véges értékű a korlátos nyílt halmazokon.

Legyen $\lambda(A) > 0$. Mutassuk meg, felhasználva a 130. feladat állítását, hogy A egy alkalmas eltoltjának E-vel való metszete nem mérhető.

136. Az (i) állítás hamis. Mutassuk meg, hogy ha az U halmaz nem vágja jól ketté V-t, akkor a $H = U \cap V$ és $K = V \setminus U$ halmazok ellenpéldát szolgáltatnak.

A (ii) állítás igaz. Írjuk fel a megfelelő állítást H és K mérhető burkaira.

137. Jelöljük $\mathcal{M}$-mel azoknak a halmazoknak a rendszerét, amelyek előállnak véges sok racionális gömb uniójaként. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{M}$ mindenütt sűrű $\mathcal{L}^{<\infty}$-ben.

138. Lássuk be, hogy ha f mérhető, akkor a $\{B \subset \mathbb{R} \colon f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ halmazrendszer olyan σ-gyűrű, amely tartalmazza a nyílt halmazokat.

139. Ha az s függvény értékei a c_i számok, akkor az $A(s = c_i)$ halmazok lefedik A-t.

140. Írjuk fel a kérdéses halmazt az $A(f_n \le f_{n+1})$, $A(f_n \ge f_{n+1})$ halmazok és halmazelméleti műveletek segítségével.

141. Lásd a 52. feladathoz adott megoldási ötletet.

142. Minden nemnegatív függvényt megkaphatunk $\sup\limits_i f_i$ alakban, ahol mindegyik f_i csak egyetlen pontban nem nulla.

143. Ha A atom és f mérhető, akkor legyen $c = \inf\{a \in \mathbb{R} \colon \mu(A(f > a)) = 0\}$.

144. A (ii) állítást bizonyítandó lássuk be, hogy ha $f \colon A \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor van olyan $g \colon A \to \mathbb{R}$ korlátos és mérhető függvény, amelyre $\mu(A(f \ne g)) < \varepsilon$.

145. Az eloszlásfüggvény pontosan akkor jobbról folytonos t_0-ban, ha az

$A(f = t_0)$ halmaz nullmértékű.

146. Alkalmazzuk a Borel–Cantelli-lemmát.

147. Keressünk olyan ellenpéldát, amelyben μ a Lebesgue-mérték, $A = [0,1]$, $f \equiv 0$ és $f_n = \chi_{I_n}$, ahol I_n egy $1/n$-nél rövidebb intervallum minden n-re. Használjuk fel, hogy $\sum 1/n = \infty$, és alkalmazzuk a 63. feladat állítását.

148. Elég olyan $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket konstruálni, amelyekre $f_n \to 0$ pontonként $[0,1]$-en, de a konvergencia nem egyenletes $[0,1]$-en. Gondoljuk meg, hogy ekkor a konvergencia nem lehet egyenletes egyetlen $[0,1]$-ben sűrű halmazon sem.

149. Bontsuk fel A-t megszámlálhatóan sok véges mértékű halmazra, és alkalmazzuk a Jegorov-tételt mindegyikre.

150. Legyenek $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ pontonként nullához tartó, de nullától különböző értékű függvények. Legyen minden $x \in X$-re és $i \in \mathbb{N}^+$-ra $k_i(x)$ a legkisebb pozitív egész, amelyre teljesül, hogy ha $n \geq k_i$, akkor $|f_n(x)| \leq 1/i$. Ekkor a $(k_1(x), k_2(x), \ldots)$ sorozat monoton növő és végtelenhez tart minden $x \in X$-re. Mutassuk meg, hogy ha minden, pozitív egészekből álló, monoton növő és végtelenhez tartó sorozat előfordul a fenti sorozatok között, akkor X-et nem lehet megszámlálhatóan sok részre felbontani úgy, hogy az $f_n \to 0$ konvergencia egyenletes legyen mindegyik halmazon.

Kézenfekvő, hogy olyan példát konstruáljunk, amelyben minden ilyen sorozat előfordul. A legegyszerűbben ezt úgy érhetjük el, hogy X-nek ezen sorozatok halmazát választjuk. Legyen μ a számosságmérték $P(X)$-en.

151. Az $A(f < c)$ halmaz egy intervallumnak és A-nak a metszete minden c-re.

152. Az $A(f < c)$ halmaz egy nyílt halmaznak és A-nak a metszete minden c-re.

153. Alkalmazzuk az 50. feladat megoldásának gondolatmenetét.

154. Lássuk be, hogy az előző (153.) feladatban konstruált függvény $[0,1]$ minden részintervallumában felvesz minden $[0,1]$-beli értéket.

155. $\mathbb{R}^p$ Borel-halmazainak rendszere kontinuum számosságú az 57. feladat szerint. Mutassuk meg, hogy ha A adott, akkor az $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvényt egyértelműen meghatározzák az $A(f < r)$ $(r \in \mathbb{Q})$ halmazok.

156. Legyen $A_r = \{x \in [a,b] \colon f(x) \leq r\}$. Mutassuk meg, hogy

$$A = \{(x,y) \in [a,b] \times [0,\infty) \colon (\forall r \in \mathbb{Q})\ (x \in A_r \Longrightarrow y \leq r)\}.$$

Fejezzük ki ennek alapján az A halmazt az $A_r \times [0,r]$ halmazok és halmazelméleti műveletek segítségével.

A megfordítást illetően induljunk ki abból, hogy $\{x \in [a,b]\colon f(x) \geq c\} = \{x\colon (x,c) \in A\}$.

157. Egyik állításból sem következik a másik.

158. Mutassuk meg, hogy az $\{x \in [a,b]\colon f(x) < c\}$ halmaz csak egy nullmértékű halmazban tér el egy nyílt halmaztól.

159. Mutassuk meg, hogy egy alkalmas $A \subset [a,b]$ halmazra az $f = \chi_A$ halmaz kielégíti a feltételeket.

160. Alkalmazzuk a 123. és 144. feladatok állításait.

161. Alkalmazzuk az előző (160.) feladat és a 146. feladat állításait.

162. Az állítást bizonyítsuk először egy mérhető halmaz karakterisztikus függvényére, aztán egyszerű függvényekre, majd alkalmazzuk a 144. feladat állítását.

163. Az (i) állítást bizonyítsuk az előző (162.) feladat állításának felhasználásával. A (ii) állítás bizonyításához alkalmazzuk a Jegorov-tételt.

164. Vezessük vissza az állítást arra az esetre, amikor f véges értékű. Véges értékű függvényekre alkalmazzuk a 163. és 152. feladatok állításait.

Alternatív megoldásként gondoljuk meg, hogy az $A_r = \{x \in A\colon f(x) < r\}$ halmazok Lebesgue-mérhetőek, tehát csak egy nullmértékű halmazban térnek el egy Borel-halmaztól (lásd a 101. feladatot). Ezt felhasználva módosítsuk f-et egy nullmértékű halmazon úgy, hogy Borel-mérhető legyen.

165. Bizonyítsuk az állítást először abban az esetben, amikor A kompakt és f folytonos. Az általános esetet vezessük vissza erre az esetre a 163. feladat (ii) állításának segítségével.

166. Legyen $A_c = \{x \in \mathbb{R}\colon f(x) < c\}$. Mutassuk meg, felhasználva a 129. feladat alkalmas variánsát (vagy a Steinhaus-tételt, l. a 127. feladatot), hogy $\lambda(A_c) = 0$ vagy $\lambda(\mathbb{R} \setminus A_c) = 0$ minden $c \in \mathbb{R}$-re. Mutassuk meg, hogy ebből következik, hogy f konstans majdnem mindenütt.

167. $A(g \circ f < c) = f^{-1}(\{y \in \mathbb{R}\colon\ : g(y) < c\})$.

168. Egyik állítás sem igaz. Keressünk olyan ellenpéldát, amelyben g egy nullmértékű halmaz karakterisztikus függvénye, f pedig olyan differenciálható és szigorúan monoton függvény, amely egy pozitív mértékű halmazt nullmértékűbe képez.

169.

(i) A $g \circ f$ függvény konstans a Cantor-halmaz mindegyik kiegészítő intervallumán.

(ii) Az állítás nem igaz. Konstruáljunk ellenpéldát annak felhasználásával, hogy csak kontinuum sok Borel-halmaz van.

170. Az f függvénynek akkor és csak akkor van meg ez a tulajdonsága, ha Borel-mérhető, és az értékkészlete megszámlálható. A feltétel szükségességének bizonyításához használjuk fel azt az ismert állítást, hogy ha $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető, akkor h értékkészletének számossága vagy megszámlálható, vagy kontinuum. (Lásd a II.7.9. Tételt és a II.9.2. Következményt követő megjegyzést a [6] jegyzetben.)

171. Az f függvénynek akkor és csak akkor van meg ez a tulajdonsága, ha Lebesgue-mérhető, és van olyan $N \subset \mathbb{R}$ nullmértékű halmaz úgy, hogy az f függvénynek az $\mathbb{R} \setminus N$ halmazra való megszorításának az értékkészlete megszámlálható. A feltétel szükségességének bizonyításához alkalmazzuk az előző (170.) feladat megoldásának gondolatmenetét, és használjuk fel a 164. feladat állítását is.

172. Csak a konstans függvényeknek van meg ez a tulajdonsága.

173. A D^+f függvény értelmezési tartománya azon $x \in A$ pontok halmaza, amelyek jobb oldali torlódási pontjai A-nak. Jelöljük ezt a halmazt A_+-szal. Azt kell belátni, hogy az $A_+(D^+f \le c)$ halmaz Borel, ha A Borel, és Lebesgue-mérhető, ha A Lebesgue-mérhető. Jelöljük $A_{n,k}$-val azon $x \in A_+$ pontok halmazát, melyekre $(f(y) - f(x))/(y - x) \le c + (1/k)$ minden olyan $y \in A$-ra, amelyre $x < y < x + 1/n$. Állítsuk elő $A_+(D^+ \le c)$-t az $A_{n,k}$ halmazok segítségével, és mutassuk meg, hogy $A_{n,k}$ Borel-halmaz, ha A Borel, és Lebesgue-mérhető, ha A Lebesgue-mérhető. A (ii) állítást vezessük vissza (i)-re.

174. (a) A feltétel az, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^+$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^-$ legalább egyike véges legyen.

(b) A feltétel az, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ abszolút konvergens legyen.

175. Az f függvény nem más mint az A_n halmazok karakterisztikus függvényeinek összege.

176. Legyen f az A_n halmazok karakterisztikus függvényeinek összege. Adjunk alsó becslést az $\int_X f^2\, d\mu$ integrálra.

177. Az előző (176.) feladat megoldásában láttuk, hogy n darab $1/2$-mértékű halmaz között mindig van kettő, amelyek metszetének mértéke legalább $(1/4) - (1/4(n-1))$. A megoldásból világos, hogy ez csak akkor érhető el, ha

$$\int_X f^2\, d\mu = \left(\int_X f\, d\mu\right)^2, \tag{16}$$

ahol $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$. Mármost a (16) egyenlőségből következik, hogy f majdnem konstans (lásd a 211. feladatot). Mivel $\int_X f\,d\mu = n/2$, ezért $f = n/2$ μ-m.m. Vagyis csak olyan példa képzelhető el, amelyben $X = [0,1]$ (majdnem) minden pontja a halmazok közül pontosan $n/2$-nek eleme.

178. Alkalmazzuk a 176. feladat állítását és a Ramsey-tételt. A részsorozat kiválasztásához használjuk az átlós módszert.

179. Ha $A \in \mathcal{A}$ felülről korlátos, akkor $\lim_{x\to\infty} \chi_A = 0$. Ha $\lim_{x\to\infty} f = c$, akkor $\{x \colon |f(x) - c| \geq \varepsilon\}$ felülről korlátos.

180. Alkalmazhatjuk a nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatóságát, vagy a 146. feladat megoldásának gondolatmenetét is.

181. Az $a = 0$ esetben azt kell belátni, hogy $g_n \to 0$ μ-m.m., ahol $g_n = (f_1 + \ldots + f_n)/n$. Mutassuk meg, hogy a $g_{n^2}^2$ függvénysorozatra alkalmazható az előző (180.) feladat állítása. Így $g_{n^2} \to 0$ μ-m.m. Lássuk be azt is, hogy ha $n^2 \leq k < (n+1)^2$, akkor $g_k - g_{n^2}$ kicsi, és így ha egy x pontban $g_{n^2}(x) \to 0$, akkor $g_n(x) \to 0$.

182. Alkalmazzuk az előző (181.) feladatot az $f_n = \chi_{A_n}$ függvényekre.

183. Jelölje H_n azon $x \in [0,1]$ számok halmazát, amelyek q alapú számrendszerbeli felírásában az n-edik jegy s. Alkalmazzuk a H_n halmazsorozatra az előző (182.) feladat állítását.

184. Legyen $f_n = \chi_{A_n}$. Azt kell belátni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \infty$ μ-m.m. $x \in X$-re. Legyen $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, ahol $a_n = \mu(A_n)$ minden n-re. Számítsuk ki az $\int_X (f_1 + \ldots + f_n - s_n)^2\,d\mu$ integrált, és az eredményt felhasználva becsüljük meg az $X(|f_1 + \ldots + f_n - s_n| > s_n/2)$ halmaz mértékét. Bizonyítsuk be ennek alapján, hogy μ-m.m. $x \in X$-re $f_1(x) + \ldots + f_n(x) \geq s_n/2$ teljesül végtelen sok n-re.

185. Az állítás a Borel–Cantelli-lemmából következik, ha azt az $X \setminus A_n$ halmazokra alkalmazzuk. Ehhez persze ellenőriznünk kell, hogy $\mu(B_i \cap B_j) = \mu(B_i) \cdot \mu(B_j)$ teljesül minden $i \neq j$-re.

186. Gondoljuk meg, hogy az $A_k = \{x \in [0,1] \colon f(x) = k\}$ halmaz véges sok szakasz uniója és véges sok sok pont uniója. Számítsuk ki $\lambda(A_k)$-t.

187. Állítsuk elő f-et egy alkalmas függvénysor összegeként, és alkalmazzuk a nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatóságát.

188. Alkalmazzuk az előző (187.) feladat megoldásának gondolatmenetét.

189. Állítsuk elő f-et egy alkalmas függvénysor összegeként, és alkalmazzuk a nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatóságát.

190. Alkalmazzuk a 160. feladat állítását.

191. Bizonyítsunk először véges mértékű halmazon kívül eltűnő korlátos függvényekre, felhasználva a 162. feladat állítását.

192. Alkalmazzuk a 190. feladat állítását.

193. Először lássuk be, hogy ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-n, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan g lépcsősfüggvény, hogy $\int_a^b |f - g|\,dx < \varepsilon$.

194. Használjuk fel a 190. és 192. feladatok állításait.

195. A „csak akkor" állítás bizonyításához alkalmazzuk a 156. feladat megoldásának gondolatmenetét. A megfordítást bizonyítandó alkalmazzuk Fubini tételét.

196. Keressünk ilyen tulajdonságú karakterisztikus függvényt.

197. Legyen I_n a $[0, 1]$ intervallum racionális végpontú részintervallumainak egy sorozatba rendezése. Ha f_n olyan nemnegatív, véges értékű Lebesgue-mérhető függvény, amelyre $\int_{I_n} f_n\,d\lambda \ge 1$, akkor az $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvény szintén nemnegatív, Lebesgue-mérhető, és $\int_a^b f\,d\lambda = \infty$ minden $0 \le a < b \le 1$-re. Már csak azt kell elérni, hogy véges értékű legyen.

198. Mindkét állítás bizonyításához alkalmazzuk a monotonkonvergencia-tételt.

199. A 111. feladat ugyanezt állítja tetszőleges véges értékű függvényre. Ezt közvetlenül nem alkalmazhatjuk, mert a jelen feladatban f felvehet végtelen értékeket is. De a 111. feladat megoldásának gondolatmenete kis módosítással alkalmazható.

200. Keressük a függvényt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ alakban, ahol $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda < \infty$, és f_n limesze az n-edik racionális pontban ∞.

201. Mivel a $\operatorname{dist}(x, C)$ függvény limesze a Cantor-halmaz pontjaiban nulla, ezért kézenfekvő, hogy az $1/\operatorname{dist}(x, C)$ függvénnyel próbálkozzunk. Ez a függvény nem Lebesgue-integrálható, de könnyű úgy módosítani, hogy az legyen.

202. Legyen $A_i = A(y_{i-1} \le f < y_i)$. Ekkor $y_{i-1} \cdot \mu(A_i) \le \int_{A_i} f\,d\mu \le y_i \cdot \mu(A_i)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva a felső becslés éppen az (i)-ben szereplő összeg. A Stieltjes-integrál definíciójából és (i)-ből (ii) azonnal következik. Alkalmazzuk a (ii)-ben szereplő Stieltjes-integrálra a parciális integrálás képletét.

203. Legyen $A_n = A(1/n \le f < n)$. Különböztessünk meg két esetet aszerint, hogy $\mu(A_n) < \infty$ minden n-re vagy sem. A első esetben alkalmazzuk az előző (202.) feladat (ii) állítását A helyett A_n-nel, majd tartsunk n-nel végtelenbe.

204. Mutassuk meg, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$-ra $\mu(A(f > \varepsilon)) > 0$.

205. Ha az állítás nem igaz, akkor vannak olyan pozitív mértékű B és C halmazok, amelyeken f pozitív, illetve negatív. Azt kell megmutatni, hogy ez ellentmond a feltételnek.

206. Először korlátos függvényekre bizonyítsunk. Az általános esetben alkalmazhatjuk a 190. feladat megoldásában követett gondolatmenetet.

207. Alkalmazzuk a nagy Lebesgue-tételt az $|f_n - f|$ függvénysorozatra.

208. Bizonyítsuk az állítást először nemnegatív egyszerű függvényekre, felhasználva a $\log x$ függvény konkávitását. A következő lépésben bizonyítsuk az állítást olyan f függvényekre, amelyekre $f \geq \delta > 0$ mindenütt X-en.

209. Először is lássuk be, hogy az $\int_A \log f \, d\mu$ integrál létezik. Ha $\int_A \log f \, d\mu = -\infty$, akkor az állítás igaz. Gondoljuk meg, hogy ha $\int_A \log f \, d\mu > -\infty$, akkor szükségképpen $\mu(A) < \infty$.

Ha $0 < \mu(A) < \infty$, akkor vezessük vissza az állítást az előző (208.) feladat állítására.

210. Mutassuk meg, hogy ha $a^2+b^2 = 1$, és az (f, g) párt az $(af+bg, bf-ag)$ párral helyettesítjük, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség egyik oldala sem változik. Válasszuk meg a-t és b-t úgy, hogy $bf - ag$ integrálja nulla legyen.

211. Tekintsük a Schwarz-egyenlőtlenségnek azt a bizonyítását, ami abból indul ki, hogy $\int_A (tf-g)^2 \, d\mu \geq 0$ minden $t \in \mathbb{R}$-re. Gondoljuk meg, hogy ha a Schwarz-egyenlőtlenségben egyenlőség áll, akkor szükségképpen $\int_a (tf-g)^2 \, d\mu = 0$ egy alkalmas t-re.

212. Tekintsük a Hölder-egyenlőtlenség következő bizonyítását. Mivel $p^{-1} + q^{-1} = 1$, ezért a $\log x$ függvény konkávitása miatt

$$\log(fg) = p^{-1} \log f^p + q^{-1} \log g^q \leq \log(p^{-1} f^p + q^{-1} g^q),$$

azaz $fg \leq p^{-1} f^p + q^{-1} g^q$ mindenütt A-n. Ezt A-n integrálva azt kapjuk, hogy $\int_A fg \, d\mu \leq 1$, feltéve, hogy $\int_A f^p \, d\mu = \int_A g^q \, d\mu = 1$.

Gondoljuk meg, hogy ha a Hölder-egyenlőtlenségben egyenlőség áll, és

$$\int_A f^p \, d\mu = \int_A g^q \, d\mu = 1,$$

akkor szükségképpen $f^p = g^q$ μ-m.m.

213. Bizonyítsuk az állítást először intervallum karakterisztikus függvényére, majd véges sok intervallum uniójának karakterisztikus függvényére, aztán Borel-halmaz karakterisztikus függvényére (a 28. feladat felhasználásával), Borel-mérhető egyszerű függvényre, majd végül korlátos Borel-mérhető függvényre (a 144. feladat felhasználásával).

214. Konstruáljunk olyan μ mértéket és olyan F zárt halmazt, melyekre $\mu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$, és van olyan $x_n \to 0$ sorozat, hogy $(F - x_n) \cap F = \emptyset$ minden n-re.

215. Bizonyítsunk először lépcsősfüggvényekre. Az általános esetben alkalmazzuk a 190. feladat állítását.

216. Először a konstans f függvényekre bizonyítsunk, felhasználva a könnyen ellenőrizhető $\int_a^b g(tx)\,d\lambda = \frac{1}{t} \cdot \int_{a/t}^{b/t} g(x)\,d\lambda$ összefüggést. Utána tekintsük a lépcsősfüggvények esetét, majd (a 190. feladat állításának felhasználásával) az általános esetet.

217. Tekintsük a $H = \{(x, y) \colon y \in A \cap (B + x)\}$ halmazt, és a Fubini-tétel segítségével számítsuk ki kétféleképpen a kétdimenziós Lebesgue-mértékét.

218. Vezessük vissza az állítást arra az esetre, amikor f szigorúan monoton, majd alkalmazzuk a 151. feladat állítását az f^{-1} függvényre.

219. A $\lambda(f(H)) \le \mu_f(H)$ egyenlőtlenség bizonyításához csak λ és μ_f definíciójára van szükség. (ii) bizonyításához lássuk be, hogy ha f konstans az (a, b) nyílt intervallumon, akkor $\mu_f((a, b)) = 0$. Azt is gondoljuk meg, hogy tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ halmaz Lebesgue-féle külső mértéke egyenlő azon $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ összegek infimumával, ahol az $[a_n, b_n)$ intervallumok egy megszámlálható halmaz híján lefedik A-t, és $a_n, b_n \in A$ minden n-re.

A (iii) állítás (ii)-ből következik, felhasználva, hogy $\mu_f(\{x\})$ egyenlő f ugrásával x-ben.

220. Használjuk fel a 70., 218. és 219. feladatok állításait.

221. Legyen $G \subset [0, 1]$ olyan nyílt halmaz, amely sűrű $[0, 1]$-ben és $\lambda(G) < 1$. Keressük f-et $\int_0^x g(t)\,dt$ alakban, ahol g olyan folytonos függvény $[0, 1]$-en, mely pozitív G-ben és eltűnik $[0, 1] \setminus G$-ben.

222. Legyen f mint az előző (221.) feladatban. Mutassuk meg, hogy f inverze megfelel.

223. Az f függvény Lebesgue-mérhetősége azzal ekvivalens, hogy ha H Borel, akkor $f^{-1}(H)$ Lebesgue-mérhető. Ebből nem következik, hogy ha H Lebesgue-mérhető, akkor $f^{-1}(H)$ is Lebesgue-mérhető).

224. Legyen H_k azon $x \in H$ pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy $|f(y) - f(x)| \le k \cdot |y-x|$ minden $y \in H$, $|y-x| < 1/k$ esetén. Ekkor $H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots$, tehát elég belátni, hogy $f(H_k)$ nullmértékű minden k-ra. Ezt bizonyítandó mutassuk meg, hogy minden nullmértékű halmaz lefedhető tetszőlegesen kis össztérfogatú kockarendszerrel.

225. Mutassuk meg, hogy H minden F_σ részhalmazának a képe F_σ.

226. Az állítás pontosan akkor igaz, ha $p \le q$.

227. Adott $\varepsilon > 0$-ra legyen H_n azon $x \in H$ pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy $|f(y) - f(x)| \le (K + \varepsilon) \cdot (y - x)$ minden $y \in H \cap (x, x + 1/n)$-re. Elég belátni, hogy $\lambda(f(H_n)) \le (K + \varepsilon) \cdot (\lambda(H_n) + \varepsilon)$ minden n-re (miért?).

228. Jelöljük H torlódási pontjainak halmazát H'-vel. Tudjuk, hogy $H \setminus H'$ megszámlálható (l. 38. oldal). Adott $\varepsilon > 0$-ra legyen $H_n = \{x \in H \cap H' \colon (1+\varepsilon)^n \le f'(x) < (1+\varepsilon)^{n+1}\}$. Mutassuk meg, hogy $f(H_n) \le (1+\varepsilon) \cdot \int_{H_n} f' \, d\lambda$ minden $n \in \mathbb{Z}$-re.

229. Nyilván feltehetjük, hogy $K > 0$. Vezessük vissza a feladat állítását arra az esetre, amikor f szigorúan monoton növő, majd alkalmazzuk az 227. feladat állítását az f^{-1} függvényre.

230. A 228. feladat szerint elég belátni, hogy $\lambda(f(H)) \ge \int_H f' \, d\lambda$. Ezt bizonyítandó alkalmazzuk a 228. feladat megoldásának a gondolatmenetét.

231. Tetszőleges $a \le x < y \le b$-re jelöljük az $(f(y) - f(x))/(y - x)$ differenciahányadost $f[x, y]$-nal. Az $f[u, v] \ge m$ egyenlőtlenség bizonyításához elég megmutatni, hogy $f[x, v] \ge m$ minden $u < x < v$-re. Legyen $H = \{y \in (x, b) : f[x, y] \ge m\}$ és $z = \sup H$. Mutassuk meg, hogy $f[u, z] \ge m$, $z < v$ lehetetlen, és hogy $f[x, v] \ge m$ a $z > v$ esetben is igaz.

232. Ha f jobbról folytonos, akkor az állítás visszavezethető az előző (231.) feladat állítására. Ha f tetszőleges monoton növő függvény, és ha f értékeit a szakadási pontokban a jobb oldali határértékre változtatjuk, akkor ezzel $D^+ f$ értéke a folytonossági pontokban nem változik, és a függvény jobbról folytonos lesz.

233. Fedjük le $f(A)$-t intervallumokkal, és alkalmazzuk az előző (232.) feladat egyenlőtlenségét az intervallumok ősképein.

234. Legyen először $Df = D^+ f$. Induljunk ki a 227. és 233. feladatok állításaiból, majd alkalmazzuk a 228. és 230. feladatok megoldásában követett gondolatmenetet.

235. Ellenpélda gyanánt tekintsük a Cantor-függvényt és a Cantor-halmazt.

236. Legyen $\xi(A) = \mu(f^{-1}(A))$ minden $A \subset \mathbb{R}^p$ Borel-halmazra. Ekkor ξ mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$-n. Alkalmazzuk a 74. feladat állítását a ξ és ν mértékekre.

237. Az állítás azonnal adódik az előző (236.) feladat felhasználásával.

238. Ellenőrizzük (10)-et először karakterisztikus függvényekre, aztán nemnegatív egyszerű függvényekre, majd nemnegatív mérhető függvényekre.

239. Vezessük vissza az állítást az előző (238.) feladat állítására.

240. Az 238. feladat (i) állítása mérhető g függvényekre vonatkozik.

241. Legyen $\mu(A) = \lambda(A \cap [0,1))$ minden $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazra. Alkalmazzuk a 236. feladatban megfogalmazott kritériumot annak bizonyítására, hogy f mértéktartó a $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$ mértéktérről az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ mértéktérbe.

242. Ez az előző (241.) feladat állításának speciális esete.

243. Alkalmazzuk a 236. feladatban megfogalmazott kritériumot.

244. Borel-mérhető függvényekre az állítás az előző (243.) és a 238. feladatok állításaiból adódik. Gondoljuk meg, hogy ha az állítás igaz Borel-mérhető függvényekre, akkor Lebesgue-mérhető függvényekre is igaz.

245. Alkalmazzuk a 236. feladatban megfogalmazott kritériumot.

246. A szorzatra vonatkozó állítás bizonyításához használjuk az

$$f(y)g(y) - f(x)g(x) = f(y) \cdot (g(y) - g(x)) + g(x) \cdot (f(y) - f(x))$$

azonosságot.

247. Az N függvény előáll mint lépcsősfüggvények monoton növő sorozatának a limesze. Ezt úgy láthatjuk be, hogy vesszük $[a,b]$ felosztásainak egy végtelenül finomodó F_n sorozatát, és minden n-re tekintjük az F_n osztóintervallumainak f általi képei karakterisztikus függvényeinek az összegét. Az így kapott N_n függvényekre $N_n \to N$ növőleg, és $\int_{\mathbb{R}} N_n \, d\lambda$ tart f totális variációjához.

248. A válaszok a következők. (i): $\alpha > 1$, (ii): $\alpha + \beta > 0$, (iii): $\alpha + \beta \geq 1$, (iv): $\alpha + \beta > 1$. A (ii) kérdést megválaszolandó gondoljuk meg, hogy ha a $\int_0^1 |f'_{\alpha,\beta}(x)| \, dx$ improprius integrál konvergens, akkor $f_{\alpha,\beta}$ korlátos változású.

249. Használjuk fel a 247. feladat állítását.

250. (i) Mutassuk meg, hogy ha $x < y$, akkor $V(y) - V(x) \geq |f(y) - f(x)|$.

(ii) Mutassuk meg, hogy ha $x < y$, akkor $V(y) - V(x) \le g(y) - g(x) + h(y) - h(x)$.

251. A $V(f;[a,b]) \le \int_a^b |g|\,d\lambda$ egyenlőtlenség bizonyításához csak a totális variáció és a korlátos változású függvény definíciójára van szükség. A fordított egyenlőtlenség bizonyításához használjuk fel, hogy ha ϕ lépcsősfüggvény és $\Phi(x) = \int_a^x \phi(x)\,dx$, akkor

$$V(\Phi;[a,b]) = \int_a^b |\phi|\,d\lambda \text{ és } |V(f;[a,b]) - V(\Phi;[a,b])| \le \int_a^b |g-\phi|\,d\lambda.$$

252. Használjuk fel a 228. feladat állítását.

253. Az állítás hamis. Keressünk olyan ellenpéldát, amelyben $f(x) = 0$ minden $x \in [-1,0]$-ra, és $f(x) = x^\alpha \cdot \sin\left(x^\beta\right)$ minden $x \in [0,1]$-re, alkalmas α-val és β-val.

254. Az állítás nem igaz. Mutassuk meg, hogy az előző (253.) feladat megoldásában konstruált függvény ellenpélda.

255. A szorzatra vonatkozó állítás bizonyításához használjuk az

$$f(y)g(y) - f(x)g(x) = f(y)\cdot(g(y) - g(x)) + g(x)\cdot(f(y) - f(x))$$

azonosságot.

256. A $\sqrt{x}$ függvény folytonosan differenciálható, és így Lipschitz az $[a,1]$ intervallumon minden $0 < a < 1$-re.

257. Jelöljük V_x-szel f totális variációját $[a,x]$-ben. Lássuk be, hogy $\lim_{x\to a+0} V_x = 0$, majd alkalmazzuk az előző (256.) feladat megoldásának gondolatmenetét.

258. A Cantor-halmaz nullmértékű és kompakt, tehát lefedhető véges sok diszjunkt és akármilyen kis összhosszúságú intervallumrendszerrel.

259. Az f függvény pontosam akkor abszolút folytonos, ha $\alpha + \beta > 0$. A bizonyításhoz használjuk a 248. és 257. feladatok állításait.

260. A feltétel megengedi, hogy ugyanazt az intervallumot vegyük n-szer.

261. A feladat megoldásához csak a definíciókat kell használni.

262. A bizonyításhoz csak az abszolút folytonosság definíciójára van szükség, valamint arra, hogy egy nullmértékű halmaz lefedhető egymásba nem nyúló és tetszőlegesen kicsi összhosszúságú intervallumokkal.

263. Használjuk fel a 109. és az előző (262.) feladatok állításait.

264. Legyen $P \subset [a,b]$ pozitív mértékű és sehol sem sűrű zárt halmaz. Legyenek $[a,b] \setminus P$ komponensei (a_n, b_n) $(n = 1,2,\ldots)$. Legyen $f(x) = x$ minden

$x \in P$-re. Az (a_n, b_n) kiegészítő intervallumban definiáljuk f-et a következőképpen: legyen $f((a_n+b_n)/2) = c_n$, és legyen f lineáris az $[a_n, (a_n+b_n)/2]$ és $[(a_n+b_n)/2, b_n]$ intervallumok mindegyikében. Mutassuk meg, hogy a c_n értékek megválaszthatók úgy, hogy f folytonos legyen, és egy megszámlálható halmaz kivételével P minden elemét végtelen sokszor vegye fel.

265. Az állítás nem igaz. Mutassuk meg, hogy az előző (264.) feladat megoldásában konstruált függvény ellenpélda.

266. Tartozzon δ az ε pozitív számhoz a függvény abszolút folytonossága alapján. Mutassuk meg, hogy ha $\lambda(A) < \delta$, akkor $\lambda(f(A)) \le \varepsilon$.

267. Az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikáció bizonyításához használjuk fel az 165. feladat állítását. Az (ii)$\Longrightarrow$(i) implikációt bizonyítsuk indirekt. Tegyük fel, hogy (i) nem igaz. Mutassuk meg, hogy ekkor vannak olyan A_n halmazok, hogy $\lambda(A_n) < 1/n^2$, $\lambda(f(A_n)) \ge \varepsilon$ minden n-re, és az $f(A_n)$ halmazok mérhetőek. Legyen $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$ és $B = \limsup_{n\to\infty} f(A_n)$. Mutassuk meg, hogy $\lambda(B \setminus f(A)) > 0$, és f a $B \setminus f(A)$ halmaz minden elemét végtelen sokszor veszi fel.

268. Ha f abszolút folytonos, és δ az $\varepsilon = 1$-hez tartozik a definíció értelmében, akkor f totális variációja minden $\le \delta$ hosszúságú intervallumban legfeljebb 1. Ebből rögtön következik, hogy f korlátos változású.

Legyen f folytonos, korlátos változású és (N) tulajdonságú. Az abszolút folytonosságot bizonyítandó mutassuk meg, hogy ha $[a_i, b_i]$ egymásba nem nyúló intervallumok, akkor $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \le \int_J N\, d\lambda$, ahol $J = \bigcup_{i=1}^{n} f((a_i, b_i))$, és $N(y)$ jelöli $f^{-1}(\{y\})$ elemszámát. Mutassuk meg, hogy ha $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ kicsi, akkor $\lambda(J)$ is kicsi, és az $\int_J N\, d\lambda$ integrál is kicsi.

269. Az első két jelenséget illusztrálandó példák gyanánt választhatunk olyan függvényeket, amelyek már korábban szerepeltek.

270. Alkalmazzuk a 267., 228. és 109. feladatok állításait.

271. Először lássuk be, hogy ha μ_f abszolút folytonos λ-ra nézve, akkor f folytonos. Így arra az esetre szorítkozhatunk, amikor f folytonos. Mivel f monoton növő, így korlátos változású. Ezért f akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha (N) tulajdonságú.

272. Monoton növő függvények esetén használjuk a 271. feladat állítását és a Radon–Nikodym-tételt. Az általános esetet vezessük vissza a monoton függvény esetére a 261. feladat segítségével.

273. A feltétel elégségességét bizonyítandó mutassuk meg, hogy f' az A halmazról kiterjeszthető $[a, b]$-re Riemann-integrálható függvényként, és hogy f megegyezik a kiterjesztés integrálfüggvényével.

274. Mutassuk meg, hogy a 200. feladatban szereplő függvény integrálfüggvénye megfelel.

275. Lehetséges. Ha g egy pozitív mértékű és sehol sem sűrű zárt halmaz karakterisztikus függvénye, akkor g integrálfüggvénye ilyen.

276. Az állítás hamis. Keressünk olyan ellenpéldát, amelyben a külső függvény $\sqrt{x}$, és az összetett függvény azért nem abszolút folytonos, mert nem korlátos változású.

277. Minden abszolút folytonos függvény (S) tulajdonságú, és ez megőrződik a kompozíció során. Az (S) tulajdonság erősebb, mint az (N) tulajdonság.

278. Az állítás nem igaz.

279. Tegyük fel, hogy f (S) tulajdonságú. Legyen $m = \min_{[a,b]} f$ és $M = \max_{[a,b]} f$. Jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(\{y\})$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y) = \infty$, ha $f^{-1}(\{y\})$ végtelen. Legyen $s(x) = 1/N(x)$, ha $x \in [m, M]$, és legyen $s(x) = 1$, ha $x \notin [m, M]$. Legyen U az s függvény integrálfüggvénye. Mutassuk meg, hogy $f = U^{-1} \circ (U \circ f)$ egy megfelelő előállítás, azaz U^{-1} és $U \circ f$ abszolút folytonos függvények.

280. A μ mértéknek van Radon–Nikodym-deriváltja ν-re nézve, de a ν mértéknek nincs Radon–Nikodym-deriváltja μ-re nézve.

281. Mivel $\vartheta(B) = \int_B f\, d\mu$ egy olyan előjeles mértéket definiál $\mathcal{C}$-n, amely abszolút folytonos μ-re nézve, ezért alkalmazhatjuk a Radon–Nikodym-tételt.

282. Keressünk olyan példát, amelyben $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\}$.

283. A μ mérték akkor és csak akkor abszolút folytonos ϑ-ra nézve, ha $f > 0$ μ-m.m.

A μ-nek akkor és csak akkor van Radon–Nikodym-deriváltja ϑ-ra nézve, ha $f > 0$ μ-m.m., és az $X(f = \infty)$ halmaz minden mérhető részhalmazának a μ-mértéke 0 vagy ∞. Ha ez a feltétel fennáll, akkor a

$$g(x) = \begin{cases} 1/f(x), & \text{ha } f(x) < \infty, \\ \infty, & \text{ha } f(x) = \infty \end{cases}$$

függvény a μ Radon–Nikodym-deriváltja lesz ϑ-ra nézve.

284. Azon halmazok rendszere, amelyeken μ nulla, zárt a megszámlálható unióra.

285. Az állítás igaz. Ha α nem abszolút folytonos β-ra nézve, akkor vegyünk egy olyan $X = A \cup S$ felbontást, amelyre α abszolút folytonos β-ra nézve A-n, és

$\beta(S) = 0$. Ha f az α mérték Radon–Nikodym-deriváltja β-ra nézve A-n, akkor a

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/(f(x)+1), & \text{ha } x \in A, \\ 1, & \text{ha } x \in S \end{cases}$$

függvény az α Radon–Nikodym-deriváltja lesz $\alpha + \beta$-ra nézve X-en.

286. Ha ϑ σ-véges mérték, akkor a Lebesgue-felbontás létezése egyszerűen következik a 284. feladat (ii) állításából. Ha ϑ σ-véges előjeles mérték, akkor alkalmazzuk Hahn felbontási tételét.

287. Ha $\vartheta = \alpha_1 + \sigma_1 = \alpha_2 + \sigma_2$ Lebesgue-felbontások, akkor van olyan $N \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\mu(N) = 0$, és $\sigma_1(A) = \sigma_2(A) = 0$, valahányszor $A \in \mathcal{A}$ és $A \cap N = \emptyset$.

288. (i) Lássuk be, hogy λ abszolút folytonos μ-re nézve. (ii) Nincs ilyen felbontás.

289. Ha a feltétel teljesül, akkor vegyünk olyan A_n halmazokat, melyekre $\mu(A_n) < 1/n^2$ és $\nu(X \setminus A_n) < 1/n^2$ minden n-re. Legyen $S = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Mutassuk meg, hogy $\mu(S) = 0$ és $\nu(X \setminus S) = 0$.

290. Mindhárom állítás nyilvánvaló a szinguláris függvény definíciójából, felhasználva a 246. feladat állítását.

291. Lássuk be az (i)$\Longrightarrow$(ii), (ii)$\Longrightarrow$(iii), (iii)$\Longrightarrow$(ii), (ii)$\Longrightarrow$(i) implikációkat ebben a sorrendben. Használjuk fel a 109., 219. és 233. feladatok állításait.

292. Az elégségesség bizonyításához vegyük észre, hogy a $(f(x-0), f(x+0))$ $(x \in D)$ intervallumok páronként diszjunktak.

293. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő tiszta ugrófüggvény, és jelöljük A-val f folytonossági pontjainak halmazát. Mutassuk meg, hogy $\lambda([a,b] \setminus A) = 0$ és $\lambda(f(A)) = 0$, majd alkalmazzuk a 291. feladat állítását.

294. A h függvényt adjuk meg a 82. feladatban leírt konstrukció segítségével, ahol $x_1, x_2, \ldots$ jelölik f szakadási pontjait $[a,b)$-ben, és $u_n = u_f(x_n)$. A kapott h függvényt kicsit módosítva kapunk egy monoton növő tiszta ugrófüggvényt, amelyre teljesül, hogy $g = f - g$ folytonos. Mutassuk meg, hogy g monoton növő.

295. Ha f monoton növő és folytonos, akkor az előállítást adjuk meg a μ_f mértéknek λ-ra vonatkozó Lebesgue-felbontása segítségével. Ha f monoton növő, akkor először alkalmazzuk az előző (294.) feladat állítását. Az egyértelműséget bizonyítandó használjuk fel a 263. feladat állítását.

296. Mutassuk meg, hogy az $f((a,b) \setminus E_\infty))$ halmaz nullmértékű. Ezt bizonyítandó használjuk fel a 234. feladat állítását.

297. Legyen $k \geq 2$ adott egész szám. Legyen $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ olyan $0-1$ sorozat, amelyben nincs k egymás utáni 0 tag, sem pedig k egymás utáni 1 tag.

Mutassuk meg, hogy ekkor $f'(x_\varepsilon)=\infty$, ahol $x_\varepsilon = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n/3^n$. Vezessük le ebből, hogy $f'(x)=\infty$ teljesül a Cantor-halmaz minden olyan racionális pontjára, amelynek a nevezője nem 3-hatvány. Ilyen például az $1/4$ szám.

298. Ellenőrizzük, hogy az $U(x)=x^2\cdot\cos(1/x)$ $(x\neq 0)$, $U(0)=0$ függvény mindenütt differenciálható, és a deriváltja egy folytonos függvényben különbözik f-től. Mivel minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, ebből következik, hogy f-nek is van.

Azt bizonyítandó, hogy f^2-nek nincs primitív függvénye, vegyük észre, hogy $g(x)=1-2f^2(2x)$ minden $x\neq 0$-ra, és ha f^2-nek volna primitív függvénye, akkor $1-2f^2(2x)$-nek is lenne.

299. Az, hogy f-nek van primitív függvénye, az előző (298.) feladathoz hasonlóan bizonyítható. Mutassuk meg, hogy ha $g(x)=x^{1/2}\sin(1/x)$, ha $x\neq 0$ és $g(0)=0$, akkor $f\cdot g$-nek nincs primitív függvénye $\mathbb{R}$-en.

300. Mutassuk meg először, hogy f minden intervallumon Lebesgue-integrálható. Legyen $F(x)=\int_0^x f\,d\lambda$ $(x\in\mathbb{R})$, és lássuk be, hogy F primitív függvénye f-nek $\mathbb{R}$-en. Ezt bizonyítandó becsüljük az $|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)|$ mennyiséget, felhasználva f approximatív folytonosságát.

301. Ha az x pont f szigorú lokális maximumhelye, akkor egy alkalmas racionális végpontú (p,q) intervallumra $f(y)<f(x)$ minden $y\in(p,q)$ és $y\neq x$ esetén. A (p,q) intervallumok különbözőek.

302. Vezessük vissza az állítást az előző (301.) feladat állítására.

303. Mutassuk meg, felhasználva a 173., 234. és 233. feladatok állításait, hogy az $A=\{x\in[a,b]\colon D_+f(x)<D^+f(x)<\infty\}$ és $B=\{x\in[a,b]\colon D^+f(x)=\infty\}$ halmazok nullmértékűek. Így f jobbról differenciálható m.m. $x\in[a,b]$ pontban. Alkalmazva az előző (302.) feladat állítását, vezessük le ebből, hogy f m.m. differenciálható.

304. Elég belátni, hogy ha f monoton növő, akkor f' Lebesgue-integrálható. Osszuk fel $[a,b]$-t n egyenlő részre az $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ pontokkal. Legyen $g_n(x)=(f(x_i)-f(x_{i-1}))/(x_i-x_{i-1})$ minden $x\in(x_{i-1},x_i)$-re $(i=1,\ldots,n)$. Mutassuk meg, hogy $g_n\to f'$ m.m. A Fatout-lemma alkalmazásával vezessük le ebből, hogy f' Lebesgue-integrálható.

305. Először mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'\le f'$ m.m. $[a,b]$-n. Az egyenlőség bizonyítását vezessük vissza arra az esetre, amikor $f_n(a)=0$ minden n-re. Ebben az esetben legyen $s_n=\sum_{i=1}^{n}f_i$. Mutassuk meg, hogy egy alkalmas n_k sorozatra $\sum_{k=1}^{\infty}(f - s_{n_k})$ konvergens. Gondoljuk meg, hogy ha a sor összege g, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = f'$ minden olyan pontban teljesül, amelyben mindegyik f_n és g is differenciálható.

306. Legyenek $H \subset G_n$ nyílt halmazok, melyekre $\lambda(G_n \setminus H) < 1/2^n$. Legyen $f(x) = \lambda(H \cap [0, x])$ és $g_n(x) = \lambda(G_n \cap [0, x])$. Mutassuk meg, hogy a $\sum_n (g_n'(x) - f'(x))$ sor m.m. konvergens, és hogy minden ilyen pont sűrűségi pontja H-nak.

307. Vegyük a H halmaz mérhető burkát, és alkalmazzuk a 119. feladat állítását.

308. Induljunk ki a Cantor-függvényből, majd alkalmazzuk Fubini tételét.

309. Vezessük vissza az állítást Fubini tételére.

310. Legyenek $g_1, g_2, \ldots$ olyan lépcsősfüggvények, hogy $\int_a^b |g - g_n| \, d\lambda < 1/n^2$, és legyen $f_n(x) = \int_a^x g_n \, d\lambda$. Az előző (309.) feladat felhasználásával mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}(f' - f_n')$ m.m. konvergens $[a, b]$-ben.

311. Az állítás azonnal következik a 272. és 310. feladatok állításaiból.

312. Állítsuk elő f-et két monoton függvény különbségeként. Ezen monoton függvényekből vonjuk ki a deriváltjaik integrálfüggvényét. Mutassuk meg, hogy monoton növő és szinguláris függvényeket kapunk, melyek különbsége f.

313. Használjuk fel a 268., 311. és 252. feladatok állításait.

314. Vezessük vissza az állítást arra az esetre, amikor $f(x_0) = 0$ és $f(x) \geq 0$ az x_0 pont egy környezetében. Felhasználva a 304., 313. és 311. feladatok állításait mutassuk meg, hogy

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f \, d\lambda$$

minden elég kis h-ra. Vezessük le ebből, hogy $\lambda(A_h)/h \to 0$ és $\lambda(B_h)/h \to 0$, ahol $A_h = \{x \in (x_0, x_0 + h) \colon |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$ és $B_h = \{x \in (x_0 - h, x_0) \colon |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$.

315. Lássuk be, hogy $f_s'(x) = \infty$ minden $x \in (0, 1) \cap C$-re. Ha $2 \cdot 3^{-n} \leq h \leq 2 \cdot 3^{-n+1}$, akkor becsüljük $f(x+h) - f(x-h)$-t alulról két esetet megkülönböztetve aszerint, hogy x n-edik jegye a hármas számrendszerben felírva 0 vagy 2.

316. Az első kérdésre nemleges a válasz, a másodikra igenlő.

317. (i)$\Longrightarrow$(ii) bizonyításához csak annyit kell észrevenni, hogy

$$\int_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\, d\lambda \ge \int_{A \cap B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\, d\lambda,$$

ahol $A = \{x \in G \colon |f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon\}$. Az (i)$\Longrightarrow$(iii) implikáció nyilvánvaló.

318. Az előző (317.) feladat állítását felhasználva csak azt kell belátnunk, hogy ha f approximatíve folytonos x_0-ban, akkor x_0 Lebesgue-pontja f-nek. Tegyük fel, hogy $|f(x)| \le K$ ha $|x - x_0| < \eta$. Adott $0 < \varepsilon < \eta$-ra legyen $A = \{x \in G \colon |f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon\}$. Lássuk be, hogy

$$\int_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\, d\lambda \le 2K \cdot \lambda(B(x_0, r) \cap A) + \varepsilon \cdot \lambda(B(x_0, r)).$$

319. $F' = f$ bizonyításához gondoljuk meg, hogy f minden intervallumban Riemann-integrálható, és van primitív függvénye a 298. feladat szerint. Annak bizonyításához, hogy a 0 nem Lebesgue-pont, használjuk fel, hogy $|\sin(1/x)| \ge \sin^2(1/x)$.

320. Adott $\varepsilon > 0$-ra legyen $A = \{x \in G \colon |f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon\}$. Legyen $B_r = B(x_0, r)$ minden $r > 0$-ra. Ha van egy H halmaz a megadott tulajdonságokkal, akkor lássuk be, hogy $A \cap B_r \subset B_r \setminus H$ minden elég kis r-re. Ezt felhasználva becsüljük felülről a $\lambda(B_r \cap A)$ mértéket.

Ha f approximatíve folytonos x_0-ban, akkor a $H_{1/k} = \{x \in G \colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ halmazok segítségével konstruáljunk egy olyan H halmazt, amelynek x_0 sűrűségi pontja, $x_0 \in H$, és f a H halmazra szorítkozva folytonos x_0-ben.

321. Lássuk be, hogy $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$. Mutassuk meg, hogy minden i-re van olyan k, hogy a B_{i_k} gömböt a középpontjából 3-szorosára nyújtva az így kapott gömb lefedi B_i-t.

322. Lindelöf lefedési tételét felhasználva vezessük vissza az állítást a következőre: ha $B_1, \ldots, B_n$ olyan gömbök, melyekre $\mu(B_i) > \lambda(B_i) \cdot t$ minden i-re, akkor a gömbök uniójának Lebesgue-mértéke legfeljebb $3^p \cdot \mu(\mathbb{R}^p)/t$. Ezt bizonyítandó használjuk fel a gömbökre vonatkozó lefedési tételt.

323. Feltehetjük, hogy $G = \mathbb{R}^p$, mert különben f-et kiterjesztjük $\mathbb{R}^p$-re az $f(x) = 0$ $(x \notin G)$ definícióval. A folytonos függvényekkel való közelítést illetően használjuk fel a 191. feladat állítását.

324. Alkalmazzuk a Radon–Nikodym-tételt, valamint a 323. és 317. feladatok állításait.

325. Először véges mértékekre bizonyítsunk. Alkalmazzuk a 75. feladat állítását és a maximál-egyenlőtlenséget.

326. Alkalmazzuk a 323–325. feladatokat.

327. Ha $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = 0$, akkor ϑ véges az x pont egy környezetében. Így ebben a környezetben alkalmazhatjuk az előző (326.) feladat állítását.

328. Legyen U azon $x \in G$ pontok halmaza, amelyekre $\vartheta(B(x,r))$ véges legalább egy $r > 0$-ra. Alkalmazzuk 326. feladat (i) állítását a G halmazon. Mutassuk meg, hogy a $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ derivált létezik minden $x \in G \setminus U$ pontban is.

329. Ha H mérhető, akkor alkalmazzuk a 323. és 317. feladatok állításait. Tetszőleges H halmaz esetén használjuk a mérhető burok fogalmát.

330. Az „akkor” állítás bizonyításához használjuk ismét a mérhető burkot.

331. Vegyük $\mathbb{R}^p \setminus H$ mérhető burkát.

332. Legyen f mérhető, és legyen $A_{p,q} = \{x \in G \colon p < f(x) < q\}$. Lássuk be, hogy ha x_0 sűrűségi pontja az $A_{p,q}$ halmaznak minden olyan $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$-ra, amelyre $x_0 \in A_{p,q}$, akkor f approximatíve folytonos x_0-ban.

Ha f m.m. pontban approximatíve folytonos, akkor az $A_c = \{x \in \mathbb{R}^p \colon f(x) \le c\}$ halmaz mérhetőségének bizonyításához használjuk fel a 330. feladat állítását.

333. Mutassuk meg, hogy az $\bigcup \mathcal{F}$ halmaz kielégíti a 331. feladatban megfogalmazott feltételt.

Megoldások

1. Legyen $I = \{1, \dots, 100\}$, és jelöljük $\mathcal{H}$-val az I halmaz 17 elemű részhalmazainak rendszerét. Ekkor

$$E = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \left(\bigcap_{i \in H} A_i \setminus \bigcup_{i \in I \setminus H} A_i \right),$$

amiből a feladat állítása nyilvánvaló.

2. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$$

és

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n.$$

Ebből a feladat állítása nyilvánvaló.

3. Ha $x \in \limsup_{n \to \infty} A_n$, akkor $x \in A_n$, azaz $\chi_{A_n}(x) = 1$ végtelen sok n-re. Mivel χ_{A_n} minden értéke 0 vagy 1, ebből következik, hogy $\limsup_{n \to \infty} \chi_{A_n}(x) = 1$. Ha $x \notin \limsup_{n \to \infty} A_n$, akkor $x \notin A_n$, azaz $\chi_{A_n}(x) = 0$ minden elég nagy n-re, tehát $\limsup_{n \to \infty} \chi_{A_n}(x) = 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\limsup_{n \to \infty} \chi_{A_n} = \chi_{\limsup_{n \to \infty} A_n}$.

Ha $x \in \liminf_{n \to \infty} A_n$, akkor $x \in A_n$, azaz $\chi_{A_n}(x) = 1$ minden elég nagy n-re, tehát $\liminf_{n \to \infty} \chi_{A_n}(x) = 1$. Ha $x \notin \liminf_{n \to \infty} A_n$, akkor $x \notin A_n$, azaz $\chi_{A_n}(x) = 0$ végtelen sok n-re, tehát $\liminf_{n \to \infty} \chi_{A_n}(x) = 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\liminf_{n \to \infty} \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_{n \to \infty} A_n}$.

4. Az $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ azonosság mutatja, hogy minden modulus zárt a metszetképzésre. Legyen $\mathcal{A}$ modulus és $H \in \mathcal{A}$. Ha $B, C \in \mathcal{A}|_H$, akkor $B \setminus C \in \mathcal{A}|_H$. Másrészt a metszetképzésre való zártságból következik, hogy

$$B \cup C = H \setminus ((H \setminus B) \cap (H \setminus C)) \in \mathcal{A}|_H,$$

tehát az $\mathcal{A}|_H$ rendszer gyűrű. Mivel pedig $\mathcal{A}|_H$-nak a H halmaz maximális eleme, ezért $\mathcal{A}|_H$ algebra.

Most tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ halmazrendszerből nem vezet ki a metszetképzés, és $\mathcal{A}|_H$ algebra minden $H \in \mathcal{A}$-ra. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$-ra $A \cap B \in \mathcal{A}_A$, tehát mivel $\mathcal{A}_A$ algebra, ezért $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}$. Így $\mathcal{A}$ modulus.

5. Először belátjuk, hogy tetszőleges X halmazra $P(X)$ a szimmetrikus differenciára mint összeadásra és a metszetképzésre mint szorzásra nézve (algebrai értelemben) gyűrűt alkot. Nyilvánvaló, hogy ha $A, B \subset X$, akkor $A \Delta B \subset X$ és $A \cap B \subset X$, tehát ezek a műveletek értelmesek $P(X)$-en.

Nyilvánvaló, hogy Δ kommutatív. A Δ művelet asszociativitása azt jelenti, hogy $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ bármely A, B, C halmazra. Ez abból következik, hogy mind $(A\Delta B)\Delta C$, mind pedig $A\Delta(B\Delta C)$ azon elemek halmaza, amelyek A, B, C közül páratlan soknak az elemei. Mivel $A\Delta\emptyset = A$ és $A\Delta A = \emptyset$ minden A halmazra, ezért $\emptyset$ a nullelem, és minden halmaz ellentettje önmaga. Ezzel beláttuk, hogy $P(X)$ a szimmetrikus differenciára mint összeadásra nézve Abel-csoport.

Könnyű ellenőrizni, hogy $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$ teljesül minden A, B, C-re, tehát $P(X)$ a két műveletre nézve (kommutatív) gyűrűt alkot.

Most rátérünk a feladat megoldására. Az (i) és (ii) állításokat egyszerre bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ gyűrű. Ekkor $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ és $A \cap B \in \mathcal{A}$ minden A, B-re, tehát a Δ és $\cap$ műveletek értelmesek $\mathcal{A}$-n. A fentiekből tehát következik, hogy $\mathcal{A}$ a megadott műveletekkel a $P(X)$ részgyűrűje, ahol $X = \bigcup \mathcal{A}$. Ha $\mathcal{A}$ algebra és a maximális eleme X, akkor X egységelem, hiszen $X \cap A = A$ minden $A \in \mathcal{A}$-ra.

Most tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ gyűrűt alkot a megadott két műveletre nézve. Ekkor $A\Delta B \in \mathcal{A}$ és $A \cap B \in \mathcal{A}$ minden $A, B \in \mathcal{A}$-ra. Mivel $A \setminus B = A\Delta(A \cap B) \in \mathcal{A}$ és $A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B) \in \mathcal{A}$ minden $A, B \in \mathcal{A}$-ra, ezért $\mathcal{A}$ gyűrű. Ha az algebrai értelemben vett gyűrűben $U \in \mathcal{A}$ egységelem, akkor $U \cap A = A$ minden $A \in \mathcal{A}$-ra. Ez azt jelenti, hogy $A \subset U$ minden $A \in \mathcal{A}$-ra, tehát U maximális elem $\mathcal{A}$-ban, és így A algebra.

6. Az $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ azonosság mutatja, hogy a $\mathcal{B} = \{A \setminus B : A, B \in \mathcal{H}\}$ halmazrendszer zárt a metszetképzésre. Belátjuk, hogy ha $A, B, C, D \in \mathcal{A}$, akkor $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D)$ előáll két diszjunkt $\mathcal{B}$-beli halmaz uniójaként. Ennek bizonyításához feltehetjük, hogy $D \subset C$, hiszen $C \setminus D = C \setminus (C \cap D)$, tehát D-t helyettesíthetjük $C \cap D$-vel.

Legyen $X = A \cup B \cup C \cup D$, és vezessük be az $U^c = X \setminus U$ jelölést minden $U \subset X$-re. Ekkor

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) &= A \cap B^c \cap (C \cap D^c)^c = A \cap B^c \cap (C^c \cup D) = \\ &= [A \cap B^c \cap C^c] \cup [A \cap B^c \cap D] = \\ &= [A \setminus (B \cup C)] \cup [(A \cap D) \setminus B].\end{aligned}$$

Itt $A \setminus (B \cup C), (A \cap D) \setminus B \in \mathcal{B}$, és a két halmaz diszjunkt, hiszen

$$[A \setminus (B \cup C)] \cap C = \emptyset \quad \text{és} \quad (A \cap D) \setminus B \subset D \subset C.$$

7. Legyenek az U, V, W halmazok függetlenek a *Megoldási ötletben* leírt módon. (Ilyen például három különböző egységsugarú nyílt körlap a síkon, amelyeknek van közös pontjuk.) Könnyű ellenőrizni, hogy az U, V, W halmazok által generált $\mathcal{H}$ háló az

$$\emptyset,\ U \cap V \cap W,\ U \cap V,\ U \cap W,\ V \cap W,\ U,\ V,\ W$$

halmazokból, valamint az ezekből képezhető uniókból áll. Az is könnyen látható, hogy az $(U \cup V \cup W) \setminus (U \setminus V)$ halmaz nem eleme az $\{A \setminus B : A, B \in \mathcal{H}\}$ halmazrendszernek, ez tehát nem modulus.

8. Legyenek az $A, B \subset \mathbb{Z}$ halmazok periodikusak a p, illetve q periódussal. (Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$-re $(n \in A) \iff (n+p) \in A$ és $(n \in B) \iff (n+q \in B)$.) Ebből következik, hogy A és B periodikusak a $p \cdot q$ periódus szerint is. Így $A \setminus B$ és $A \cup B$ szintén periodikusak a $p \cdot q$ periódussal. Tehát a kérdéses halmazrendszer gyűrű. Mivel van maximális eleme ($\mathbb{Z}$), ezért algebra.

9. Legyen A a páros egész számok egy tetszőleges részhalmaza. Ha $B = A \cup \{2n \colon 2n \notin A\}$ és $C = A \cup \{2n+1 \colon 2n \notin A\}$, akkor $A = B \cap C$, továbbá B-nek és C-nek van sűrűsége, hiszen tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$-re $|B \cap \{2n, 2n+1\}| = |C \cap \{2n, 2n+1\}| = 1$, tehát

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|B \cap [-N, N]|}{2N} = \lim_{N\to\infty} \frac{|C \cap [-N, N]|}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Ha olyan A halmazt választunk, amelynek nincs sűrűsége (ilyen például azon n egész számok halmaza, amelyekre $2^{2i-1} < n \le 2^{2i}$ valamely i pozitív egészre), akkor láthatjuk, hogy a sűrűséggel rendelkező halmazok rendszere nem zárt a metszetképzésre, tehát nem gyűrű, sőt nem is modulus.

10. Mivel $\mathcal{A}$ gyűrű, ezért az alábbi azonosságokból nyilvánvalóan következik, hogy a

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus A \colon A \in \mathcal{A}\}$$

halmazrendszer bármely két elemének a különbsége is $\mathcal{B}$-ben van: ha $A, B \subset X$, akkor

$$A \setminus (X \setminus B) = A \cap B, \quad (X \setminus A) \setminus B = X \setminus (A \cup B), \quad (X \setminus A) \setminus (X \setminus B) = B \setminus A.$$

Hasonlóan, az alábbi azonosságokból, illetve abból a feltételből, hogy $\mathcal{A}$ gyűrű, következik, hogy a $\mathcal{B}$ halmazrendszer bármely két elemének az uniója is $\mathcal{B}$-ben van: ha $A, B \subset X$, akkor

$$A \cup (X \setminus B) = X \setminus (B \setminus A), \qquad (X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B).$$

Mivel X a $\mathcal{B}$ halmazrendszer maximális eleme, ezért $\mathcal{B}$ algebra.

Belátjuk, hogy ha $\mathcal{A}$ σ-gyűrű, akkor $\mathcal{B}$ σ-algebra. Mivel algebra, ezért elég belátni, hogy $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$ esetén $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$. Minden n-re $B_n \in \mathcal{A}$ vagy $X \setminus B_n \in \mathcal{A}$ teljesül. Legyen C, illetve D azon B_n halmazok uniója, melyek elemei $\mathcal{A}$-nak, illetve amelyek X-re való komplementere eleme $\mathcal{A}$-nak. Ekkor $C \in \mathcal{A}$, hiszen $\mathcal{A}$ σ-gyűrű, tehát $C \in \mathcal{B}$. Másrészt $X \setminus D \in \mathcal{A}$, hiszen megszámlálhatóan sok $\mathcal{A}$-beli halmaz metszete $\mathcal{A}$-ben van. Így $D \in \mathcal{B}$ és $B = C \cup D \in \mathcal{B}$, amivel beláttuk, hogy $\mathcal{B}$ σ-gyűrű.

11. Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ és $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Vezessük be az $A^1 = A$ és $A^{-1} = X \setminus A$ jelölést minden $A \subset X$-re. Tekintsük az $A_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} = A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}$ halmazokat, ahol $\varepsilon_i = \pm 1$ minden $i = 1, \ldots, n$-re, és nem mindegyik ε_i egyenlő -1-gyel. Ezek a halmazok elemei az $\mathcal{A}$ által generált $\mathcal{R}$ gyűrűnek, páronként diszjunktak és az uniójuk X. Nyilvánvaló, hogy az $A_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ halmazokból készíthető uniók egy $\mathcal{R}'$ gyűrűt alkotnak, amelyre $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ és amely mindegyik A_i halmazt tartalmazza. Így $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$. Mivel az $A_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ halmazok száma legfeljebb $2^n - 1$, a belőlük készíthető uniók száma legfeljebb $2^{2^n - 1}$. Így $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$-nek legfeljebb $2^{2^n - 1}$ eleme van.

Ez el is érhető. Jelöljük T_n-nel azon n hosszúságú $(-1) - 1$-sorozatok halmazát, melyeknek legalább egyik koordinátája 1, és legyen A_i azon T_n-beli sorozatok halmaza, amelyek i-edik koordinátája 1 $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor a fenti okoskodásban szereplő jelöléssel $A_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} = \{(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)\}$, ami azt jelenti, hogy T_n mindegyik egyelemű részhalmaza eleme $\mathcal{R}$-nek. Így $\mathcal{R} = P(T_n)$, és $P(T_n)$-nek éppen $2^{2^n - 1}$ eleme van.

12. Jelöljük $\mathcal{B}$-vel a generált gyűrűt. Induljunk ki abból, hogy $\{n\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\} \setminus \{n+1, n+2, \ldots\}$, tehát $\{n\} \in \mathcal{B}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. A gyűrű tulajdonságai alapján ebből következik, hogy $\mathbb{N}$ minden véges részhalmaza és ($\mathbb{N} \in \mathcal{A}$ alapján) ezek $\mathbb{N}$-re vonatkozó komplementerei mind elemei $\mathcal{B}$-nek. Mivel ezen halmazok $\mathcal{R}$ rendszere gyűrűt alkot és $\mathcal{A} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{B}$, ezért $\mathcal{B}$ minimalitása alapján $\mathcal{B} = \mathcal{R}$. Tehát $\mathcal{B}$ azon $A \subset \mathbb{N}$ halmazok rendszere, melyekre A vagy $\mathbb{N} \setminus A$ véges.

13. Jelöljük $\mathcal{B}$-vel a generált gyűrűt. Legyen $\mathcal{C}$ azon síkbeli halmazok rendszere, amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy minden függőleges egyenessel vett metszetük elemszáma véges, sőt korlátos. Mivel $\mathcal{C}$ könnyen láthatóan gyűrű, ezért $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Másrészt $\mathcal{C}$ minden eleme előáll két olyan halmaz különbségeként, amelyek mindegyike véges sok $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának uniója, ezért $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, tehát $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

14. Jelöljük $\mathcal{B}$-vel azon halmazok rendszerét, amelyek lefedhetők $\mathcal{A}$ véges sok elemével. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{B}$-ből a különbség és az unió műveletek nem vezetnek ki, tehát $\mathcal{B}$ gyűrű. Mivel $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, ezért $\mathcal{B}$ tartalmazza az $\mathcal{A}$ által generált gyűrűt. A generált σ-gyűrűre vonatkozó állítás ugyanígy bizonyítható.

15. Jelöljük $\mathcal{B}$-vel azon $H \subset \mathbb{R}$ halmazok rendszerét, amelyek szimmetrikusak a 0-ra. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{B}$-ből nem vezetnek ki a halmazelméleti műveletek, tehát $\mathcal{B}$ σ-gyűrű (sőt σ-algebra). Mivel $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, ezért az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrű része $\mathcal{B}$-nek, tehát az elemei szintén szimmetrikusak a 0-ra.

16. Jelöljük $\mathcal{B}$-vel azon halmazok rendszerét, amelyek elemei az $\mathcal{A}$ egy alkalmas véges részrendszere által generált gyűrűnek. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{B}$-ből nem vezet ki a különbség- és unióképzés, tehát $\mathcal{B}$ gyűrű. Mivel $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, ezért az $\mathcal{A}$ által generált gyűrű része $\mathcal{B}$-nek, ami éppen az (i) állítás. A (ii) állítás hasonlóan igazolható.

17. Legyenek X és Y olyan halmazok, amelyekre az $X \setminus Y, X \cap Y, Y \setminus X$ halmazok mindegyike végtelen. Ekkor $\mathcal{A} = \{H \subset X \colon H \text{ vagy } X \setminus H \text{ véges}\}$, illetve $\mathcal{B} = \{H \subset Y \colon H \text{ vagy } Y \setminus H \text{ véges}\}$ algebrák. Az $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ halmazrendszernek nincs maximális eleme, mert $X \cap Y$ minden véges részhalmaza eleme $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$-nek, de $X \cap Y \notin \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Így $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ nem algebra.

18. (i) Legyen $\mathcal{R}$ az $\mathcal{A}$ által generált gyűrű. Minden $\mathcal{A}$-t tartalmazó algebra gyűrű is, tehát tartalmazza $\mathcal{R}$-et. Ha tehát $\mathcal{R}$ algebra, akkor $\mathcal{R}$ az $\mathcal{A}$-t tartalmazó legszűkebb algebra.

Most tegyük fel, hogy $\mathcal{R}$ nem algebra. Belátjuk, hogy ekkor nem létezik $\mathcal{A}$-t tartalmazó legszűkebb algebra. Legyen $\mathcal{B}$ egy tetszőleges $\mathcal{A}$-t tartalmazó algebra, és legyen $\mathcal{B}$ maximális eleme X. Legyen Y olyan halmaz, amely szigorúan bővebb X-nél. A 10. feladat állítása szerint

$$\mathcal{B}' = \mathcal{R} \cup \{Y \setminus E \colon E \in \mathcal{R}\}$$

algebra.

Mivel $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$, ezért $X \notin \mathcal{R}$, hiszen $X \in \mathcal{R}$ esetén X volna $\mathcal{R}$ maximális eleme, és így $\mathcal{R}$ algebra volna. Ebből következik, hogy $X \notin \mathcal{B}'$. Így $\mathcal{B}'$ nem tartalmazza $\mathcal{B}$-t (hiszen $X \in \mathcal{B}$), tehát $\mathcal{B}$ nem minimális az $\mathcal{A}$-t tartalmazó algebrák között.

A (ii) állítás bizonyítása hasonló.

19. Nyilvánvaló, hogy $I, J \in \mathcal{P}^1(H)$ esetén $I \cap J \in \mathcal{P}^1(H)$. Másrészt $[a, b) \setminus [c, d)$ egyenlő az $[a, b)$, $[d, b)$, $[a, d)$, $\emptyset$, illetve $[a, c) \cup [d, b)$ halmazok valamelyikével az $[a, b)$ és $[c, d)$ intervallumok elhelyezkedésétől függően.

20. Az állítást n szerinti indukcióval bizonyítjuk. Legyen először $n = 1$. Ezt az esetet k szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $k = 1$, akkor $\mathcal{A}$ félgyűrű-tulajdonsága szerint $A_1 \setminus B_1$ előáll véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmaz uniójaként. Legyen $k \geq 1$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz k-ra. Ha $B_1, \ldots, B_{k+1} \in \mathcal{A}$, akkor az indukciós feltevés szerint $A_1 \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_k) = C_1 \cup \ldots \cup C_m$, ahol

$C_1, \ldots, C_m$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok. Ekkor

$$\begin{aligned} A_1 \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{k+1}) &= [A_1 \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_k)] \setminus B_{k+1} = \\ &= (C_1 \setminus B_{k+1}) \cup \ldots \cup (C_m \setminus B_{k+1}). \end{aligned}$$

Ha itt a $C_i \setminus B_{k+1}$ halmazokat felírjuk páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok uniójaként, akkor ezek együtt az $A_1 \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{k+1})$ halmaz megfelelő előállítását adják. Ezzel az $n = 1$ esetet beláttuk.

Most legyen $n \geq 1$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re. Ha $A_1, \ldots, A_{n+1}$, $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{A}$ és $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, akkor

$$(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) \setminus B = U \cup V,$$

ahol $U = (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \setminus B$, és

$$V = [A_{n+1} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)] \setminus B = A_{n+1} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k).$$

Itt $U \cap V = \emptyset$. Az indukciós feltétel szerint U előáll mint páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok uniója, az $n = 1$ eset szerint pedig V is előáll mint páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok uniója. Ezzel a feladatot megoldottuk.

21. Jelöljük $\mathcal{B}$-vel azon halmazok rendszerét, amelyek előállnak véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmaz uniójaként. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{B}$ része az $\mathcal{A}$ által generált gyűrűnek, tehát elég belátni, hogy $\mathcal{B}$ gyűrű.

Az, hogy $\mathcal{B}$ modulus, az előző feladat állításából következik. Az is nyilvánvaló, hogy ha $A, B \in \mathcal{B}$ és $A \cap B = \emptyset$, akkor $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Legyen $A, B \in \mathcal{B}$ tetszőleges. Ekkor $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Itt a jobb oldalon szereplő halmazok diszjunktak, továbbá $B \setminus A \in \mathcal{B}$, tehát az előző megjegyzés szerint $A \cup B \in \mathcal{B}$.

22. Legyenek A, B nemüres halmazok, melyekre $A \subset B$ és $B \setminus A$ legalább kételemű. Ekkor az $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B\}$ halmazrendszer nem félgyűrű, hiszen $B \setminus A$ nem áll elő $\mathcal{A}$-beli halmazok uniójaként.

Legyen $B \setminus A = B_1 \cup B_2$, ahol B_1, B_2 diszjunkt, nemüres halmazok. Ekkor $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, A, B, B \setminus A\}$ félgyűrű (sőt algebra), valamint $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, A, B, B_1, B_2\}$ félgyűrű. Mivel $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, így nem létezik legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó félgyűrű, hiszen bármely $\mathcal{A}$-t tartalmazó $\mathcal{B}$ félgyűrűre vagy $\mathcal{A}_1$ vagy pedig $\mathcal{A}_2$ nem lehet bővebb $\mathcal{B}$-nél.

23. Az $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ azonosság mutatja, hogy a $\mathcal{C} = \{A \times B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ halmazrendszer zárt a metszetképzésre.

Legyen $A, B \in \mathcal{A}$ és $C, D \in \mathcal{B}$. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = [(A \setminus C) \times B] \cup [(A \cap C) \times (B \setminus D)]. \tag{17}$$

Mivel $\mathcal{A}$ félgyűrű, ezért vannak olyan diszjunkt $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ halmazok, hogy $A \setminus C = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Hasonlóan, vannak olyan diszjunkt $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}$ halmazok, hogy $B \setminus D = B_1 \cup \ldots \cup B_k$. Így (17) szerint az $(A \times B) \setminus (C \times D)$ halmaz előáll mint az $A_i \times B$ és az $(A \cap C) \times B_j$ halmazok uniója. Mivel ezek a halmazok elemei $\mathcal{C}$-nek és páronként diszjunktak, ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{C}$ félgyűrű.

24. A $\mathcal{P}^p$ halmazrendszer (vagyis az $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ téglák halmaza az üres halmazzal együtt) félgyűrűt alkot. Ez p szerinti indukcióval adódik a 19. és az előző (23.) feladat állításából.

Könnyű ellenőrizni, hogy ha $\mathcal{A}$ félgyűrű és $\mathcal{B}$ olyan részrendszere $\mathcal{A}$-nak, amelyre teljesül, hogy $(A \in \mathcal{B},\ B \in \mathcal{A},\ B \subset A) \Longrightarrow B \in \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{B}$ szintén félgyűrű. Ebből a feladat állítása nyilvánvaló.

25. Nyilvánvaló, hogy $f \in L(\mathcal{A})$ esetén $c \cdot f \in L(\mathcal{A})$ minden $c \in \mathbb{R}$-re. Legyenek $f, g \in L(\mathcal{A})$ adott függvények. Ekkor vannak $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, melyekre $f(x) = a_i$ ha $x \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, és $f(x) = 0$ ha $x \in X \setminus A$, ahol $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Hasonlóan, vannak $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, melyekre $g(x) = b_j$ ha $x \in B_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, és $g(x) = 0$ ha $x \in X \setminus B$, ahol $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$.

Legyen $C_i = A_i \setminus B$ és $D_j = B_j \setminus A$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k)$. Világos, hogy a C_i, D_j és $A_i \cap B_j$ halmazok páronként diszjunktak és az uniójuk $A \cup B$. Nyilvánvaló, hogy $f + g$ konstans mindegyik C_i, D_j és $A_i \cap B_j$ halmazon, és nulla az $X \setminus (A \cup B)$ halmazon.

Az $\mathcal{A}$ rendszer félgyűrű-tulajdonsága miatt $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$ minden i, j-re. A C_i és D_j halmazok nem feltétlenül elemei $\mathcal{A}$-nak. Azonban a 20. feladat állítása szerint C_i és D_j felbonthatóak véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmaz uniójára. Ebből világos, hogy $f + g \in L(\mathcal{A})$.

26. Nevezzünk egy $A \in \mathcal{R}$ halmazt atomnak, ha minden $B \in \mathcal{R}$ halmazra $A \subset B$ vagy $A \cap B = \emptyset$. Nyilvánvaló, hogy két különböző atom szükségképpen diszjunkt. Így $\mathcal{R}$-ben csak véges sok atom van.

Most belátjuk, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{R}$ nemüres halmazra az $\mathcal{A}_B^* = \{C \in \mathcal{A} \colon C \subset B,\ C \neq \emptyset\}$ halmazrendszerben van minimális elem. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}_B^*$-ban nincs minimális elem. Ekkor létezik egy $A_1 \in \mathcal{A}_B$ halmaz, amely nem üres és valódi része B-nek, hiszen B nem minimális. Mivel A_1 sem minimális, létezik egy $A_2 \in \mathcal{A}_B$ nemüres halmaz, amely valódi része A_1-nek, hiszen A_1 nem minimális. Az eljárást folytatva kapjuk az $A_1, A_2, \ldots$ halmazokat, amelyek mindegyike valódi része az előzőnek. Ekkor az $A_1 \setminus A_2, A_2 \setminus A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok nem üresek és páronként diszjunktak, ami ellentmond a feltételnek.

Így tetszőleges $B \in \mathcal{R}$ nemüres halmazra $\mathcal{A}_B^*$-nak van minimális eleme. Ha $C \in \mathcal{A}_B^*$ minimális, akkor C atom. Ugyanis tetszőleges $A \in \mathcal{R}$ halmazra, ha $C \cap A \neq \emptyset$, akkor $C \cap A \in \mathcal{A}_B^*$ és $C \cap A \subset C$, tehát C minimalitása miatt $C \cap A = C$, azaz $C \subset A$. Ezzel beláttuk, hogy minden nemüres $B \in \mathcal{R}$ halmaz tartalmaz nemüres atomot.

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ az $\mathcal{A}$-beli atomok. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{R}$ halmazra legyen A' az a halmaz, amit úgy kapunk, hogy A-ból kivonjuk az A által tartalmazott atomok unióját. Ekkor $A' \in \mathcal{A}$. Ha A' nem üres, akkor tartalmaz nemüres atomot. Ez azonban lehetetlen, mert A' diszjunkt minden atomtól. Tehát $A' = \emptyset$, és így A előáll mint az általa tartalmazott atomok uniója. Mivel csak véges sok atom van, ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{R}$-nek csak véges sok eleme van.

27. Belátjuk, hogy az állítás minden félgyűrűre (és így minden modulusra is) igaz. Legyen $\mathcal{A}$ olyan félgyűrű, amelyben nincs végtelen sok páronként diszjunkt nemüres halmaz. Ekkor $\mathcal{A}$-ban csak véges sok atom van (ez ugyanúgy adódik, mint az előző feladat megoldásában).

Most belátjuk, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ nemüres halmazra az $\mathcal{A}_B^* = \{C \in \mathcal{A} \colon C \subset B,\ C \neq \emptyset\}$ halmazrendszerben van minimális elem. Ha ez nem lenne igaz, akkor (az előző megoldásban követett gondolatmenet szerint) volna egy olyan $A_1, A_2, \dots$ halmazsorozat $\mathcal{A}$-ban, amelyben mindegyik halmaz valódi része az előzőnek. Ekkor az $A_1 \setminus A_2, A_2 \setminus A_3, \dots \in \mathcal{A}$ halmazok nem üresek és páronként diszjunktak. Mivel $\mathcal{A}$ félgyűrű, ezért $A_i \setminus A_{i+1}$ előáll mint véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmaz uniója. Ezek között kell, hogy legyen nemüres halmaz, tehát minden i-re van olyan $B_i \subset A_i \setminus A_{i+1}$ halmaz, amelyre $B \in \mathcal{A}$ és $B \neq \emptyset$. Ekkor a $B_i \in \mathcal{A}$ halmazok nem üresek és páronként diszjunktak, ami ellentmond a feltételnek.

Így tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ nemüres halmazra $\mathcal{A}_B^*$-nak van minimális eleme. Ha $C \in \mathcal{A}_B^*$ minimális, akkor C atom. Ugyanis tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ halmazra $C \cap A \in \mathcal{A}|_B$ és $C \cap A \subset C$, tehát C minimalitása miatt vagy $C \cap A = \emptyset$, vagy pedig $C \cap A = C$, azaz $C \subset A$. Ezzel beláttuk, hogy minden nemüres $B \in \mathcal{A}$ halmaz tartalmaz nemüres atomot.

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ az $\mathcal{A}$-beli atomok. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ halmazra legyen A' az a halmaz, amit úgy kapunk, hogy A-ból kivonjuk az A által tartalmazott atomok unióját. A félgyűrű-tulajdonság miatt A' előáll mint véges sok $\mathcal{A}$-beli halmaz uniója. Ha A' nem üres, akkor tehát A' tartalmaz egy nemüres $B \in \mathcal{A}$ halmazt. Így B tartalmaz nemüres atomot ami lehetetlen, mert $B \subset A'$ és A' diszjunkt minden atomtól. Tehát $A' = \emptyset$ és így A előáll mint az általa tartalmazott atomok uniója. Mivel csak véges sok atom van, ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{A}$-nak csak véges sok eleme van.

Az állítás hálókra általában nem igaz. Valóban, ha $A_1, A_2, \dots$ olyan halmazok, amelyek mindegyike valódi része az előzőnek, akkor $\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{A_i \colon i = 1, 2, \dots\}$ háló, $\mathcal{A}$-ban nincs végtelen sok páronként diszjunkt nemüres halmaz, de $\mathcal{A}$-nak végtelen sok eleme van.

28. Legyen $A \in \mathcal{A}$ rögzített. Nyilvánvaló, hogy a megoldási ötletben szereplő $\mathcal{H}'$ halmazrendszer monoton osztály. Mivel tartalmazza $\mathcal{A}$-t, ezért $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$, ami azt jelenti, hogy ha $A \in \mathcal{A}$ és $E \in \mathcal{H}$, akkor $E \cap A,\ E \cup A,\ E \setminus A$ mindegyike $\mathcal{H}$-ban van. Most legyen $H \in \mathcal{H}$ rögzített. Ha $\mathcal{H}''$ jelöli azon $E \in \mathcal{H}$ halmazok rendszerét, amelyekre $E \cap H,\ E \cup H,\ E \setminus H$ mindegyike $\mathcal{H}$-ban van, akkor könnyen láthatóan $\mathcal{H}'$ monoton osztály. Mivel az előzőek szerint tartalmazza $\mathcal{A}$-t, így $\mathcal{H}'' = \mathcal{H}$, ami azt jelenti, hogy ha $H, E \in \mathcal{H}$, akkor $E \cap H,\ E \cup H,\ E \setminus H$ mindegyike $\mathcal{H}$-ban van. Így $\mathcal{H}$ gyűrű, tehát σ-gyűrű is (mivel monoton osztály), és így tartalmazza az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűt. (Valójában egyenlő vele, hiszen az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrű monoton osztály, tehát tartalmazza $\mathcal{H}$-t.)

29. Legyen μ végesen additív és eltolás-invariáns halmazfüggvény az adott halmazrendszeren, amelyre $\mu(\mathbb{Z}) = 1$. Ha A egy mindkét irányban végtelen számtani sorozat d differenciával, akkor $\mathbb{Z}$ egyrétűen lefedhető az A halmaz d darab eltolt példányával. Mivel $\mu(\mathbb{Z}) = 1$, ezért szükségképpen $\mu(A) = 1/d$.

Ha a $B \subset \mathbb{Z}$ halmaz periodikus p periódussal és $|B \cap \{0, \dots, p-1\}| = k$, akkor B előáll mint k darab diszjunkt, mindkét irányban végtelen számtani sorozat uniója, melyek differenciája p. Így $\mu(B) = k/p$, ami megegyezik B sűrűségével.

30. Vezessük be az $A^1 = A$ és $A^{-1} = X \setminus A$ jelölést minden $A \subset X$-re. Tekintsük az $A_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} = A_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap A_n^{\varepsilon_n}$ halmazokat, ahol $\varepsilon_i = \pm 1$ minden $i = 1, \dots, n$-re, és nem mindegyik ε_i egyenlő -1-gyel. Ezek a halmazok elemei $\mathcal{A}$-nak, páronként diszjunktak és az uniójuk X. Nyilvánvaló, hogy minden i-re az A_i halmaz egyenlő azon $A_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$ halmazok uniójával, amelyekre $\varepsilon_i = 1$.

Legyen $B_1, \dots, B_k$ az $A_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$ halmazok közül a nemüresek felsorolása. Ekkor $\mu(B_1) + \dots + \mu(B_k) = \mu(X) = 1$. Az A_i halmazok mindegyikének μ-mértéke egyenlő azon B_j-k mértékeinek összegével, amelyek részei A_i-nek. Így $100 < \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) = s_1\mu(B_1) + \dots + s_k\mu(B_k)$, ahol s_j jelöli, hogy a B_j halmaz hány A_i-nak része. Ha mindegyik B_j legfeljebb 100 A_i-nak része, akkor

$$s_1\mu(B_1) + \dots + s_k\mu(B_k) \le 100 \cdot (\mu(B_1) + \dots + \mu(B_k)) = 100,$$

ami lehetetlen.

31. A μ halmazfüggvény additivitása nyilvánvaló. Ugyancsak nyilvánvaló, hogy $\pi(H) = \sum_{x \in H} f(x)^+$, $\nu(H) = \sum_{x \in H} f(x)^-$ és $\tau(H) = \sum_{x \in H} |f(x)|$ minden $H \in \mathcal{A}$-ra. Így az $\vartheta(A) = \pi(A) - \nu(A)$ és $\tau(A) = \pi(A) + \nu(A)$ egyenlőségek nyilvánvalóak az $a = a^+ - a^-$ és $|a| = a^+ - a^-$ összefüggésekből.

32. (i) Legyenek $A_1, \dots, A_n$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok, és tegyük fel, hogy $A = A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$. Ha $B \in \mathcal{A}|_A$, akkor $B \cap A_i \in \mathcal{A}|_{A_i}$ minden i-re (mert $\mathcal{A}$ háló), tehát

$$\vartheta(B) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta(B \cap A_i) \le \sum_{i=1}^{n} \pi(A_i).$$

Mivel ez minden $B \in \mathcal{A}|_A$-re igaz, ezért

$$\pi(A) = \sup\{\vartheta(B) \colon B \in \mathcal{A}|_A\} \le \sum_{i=1}^{n} \pi(A_i).$$

Az ellenkező irányú egyenlőtlenséget bizonyítandó feltehetjük, hogy $\pi(A) < \infty$. Ekkor $\pi(A_i)$ is véges minden i-re, hiszen $0 \le \pi(A_i) \le \pi(A)$. Legyen $\varepsilon < 0$ adott. Válasszunk olyan $B_i \in \mathcal{A}|_{A_i}$ halmazokat, hogy $\vartheta(B_i) > \pi(A_i) - \varepsilon/n$ teljesüljön. Ekkor $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n \in \mathcal{A}$ és $B \subset A$. Így

$$\pi(A) \ge \vartheta(B) > \sum_{i=1}^{n} \pi(A_i) - \varepsilon.$$

Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, ezért $\pi(A) \ge \sum_{i=1}^{n} \pi(A_i)$. Ezzel beláttuk, hogy π additív. Hasonlóan bizonyítható, hogy ν és τ is additívak.

(ii) Tegyük fel először, hogy $A \in \mathcal{A}$ és $\vartheta(A)$ véges. Ekkor

$$\begin{aligned}\pi(A) &= \sup\{\vartheta(B) \colon B \in \mathcal{A}|_A\} = \sup\{\vartheta(A) - \vartheta(A \setminus B) \colon B \in \mathcal{A}|_A\} = \\ &= \vartheta(A) - \inf\{\vartheta(A \setminus B) \colon B \in \mathcal{A}|_A\} = \vartheta(A) + \nu(A).\end{aligned}$$

Ebből világos, hogy $\vartheta(A) = \pi(A) - \nu(A)$, ha a jobb oldal értelmes. Ha viszont $\vartheta(A) = \infty$, akkor $\pi(A) = \infty$, és $\vartheta(A) = \pi(A) - \nu(A)$ ekkor is igaz (ha a jobb oldal értelmes). Ha pedig $\vartheta(A) = -\infty$, akkor $\nu(A) = \infty$, és $\vartheta(A) = \pi(A) - \nu(A)$, feltéve, hogy a jobb oldal értelmes.

(iii) Ha $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ és $A_1, \ldots, A_n$ diszjunkt részhalmazai A-nak, akkor $\sum_{i=1}^{n} |\vartheta(A_i)| = \vartheta(B) - \vartheta(C)$, ahol B azon A_i-k uniója, amelyekre $\vartheta(A_i) \ge 0$, C pedig azon A_i-k uniója, amelyekre $\vartheta(A_i) < 0$. Mivel $\vartheta(B) - \vartheta(C) \le \pi(A) + \nu(A)$, ebből következik, hogy $\tau(A) \le \pi(A) + \nu(A)$. Másrészt tetszőleges $B, C \in \mathcal{A}|_A$ halmazokra

$$\vartheta(B) - \vartheta(C) = \vartheta(B \setminus C) - \vartheta(C \setminus B) \le |\vartheta(B \setminus C)| + |\vartheta(C \setminus B)| \le \tau(A).$$

Így

$$\begin{aligned}\pi(A) + \nu(A) &= \sup\{\vartheta(B) \colon B \in \mathcal{A}|_A\} + \sup\{-\vartheta(C) \colon C \in \mathcal{A}|_A\} = \\ &= \sup\{\vartheta(B) - \vartheta(C) \colon B, C \in \mathcal{A}|_A\} \le \tau(A).\end{aligned}$$

33. Legyen $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, ahol $A, A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{P}^2(H)$, és az $A_1, \ldots, A_n$ téglák páronként diszjunktak. Be kell látnunk, hogy $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

Legyenek az A_i tégla csúcspontjai a_i, b_i, c_i, d_i, ahol a_i a bal alsó csúcspont, d_i pedig a jobb felső csúcspont. Legyenek továbbá az A tégla csúcspontjai a, b, c, d, ahol a a bal alsó csúcspont, d pedig a jobb felső csúcspont. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_f(A_i) = \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(b_i) - f(c_i) + f(d_i)). \tag{18}$$

Mivel az a pont valamelyik A_i téglának is bal alsó csúcspontja, ezért az $f(a)$ tag szerepel a jobb oldali összegben. Ugyanígy látható, hogy az $f(d), -f(b), -f(c)$ tagok is szerepelnek a jobb oldali összegben. Megmutatjuk, a többi tag kiesik.

Tekintsünk egy $f(a_i)$ tagot, ahol $a_i \neq a$. Mivel az A_i téglák páronként diszjunktak és az uniójuk A, ezért könnyen láthatóan a következő esetek valamelyike teljesül.

1. Az a_i pont három másik téglának is csúcspontja, méghozzá bal felső, jobb alsó és jobb felső csúcspontja. Így a (18) jobb oldalán szereplő összegben két tag $f(a_i)$-val egyenlő, két másik pedig $-f(a_i)$-val egyenlő, ezek tehát kiejtik egymást.

2. Az a_i pont egyetlen másik téglának is csúcspontja, méghozzá annak vagy a bal felső vagy a jobb alsó csúcspontja. Így a (18) jobb oldalán szereplő összegben egy tag $f(a_i)$-val, egy másik pedig $-f(a_i)$-val egyenlő, ezek tehát kiejtik egymást.

Ezzel beláttuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \mu_f(A_i) = f(a) - f(b) - f(c) + f(d) = \mu_f(A)$.

34. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \mu([a_1, x) \times [a_2, y)), & \text{ha } a_1 < x \le b_1 \text{ és } a_2 < y \le b_2, \\ 0, & \text{ha } x = a_1 \text{ vagy } y = a_2. \end{cases}$$

Belátjuk, hogy $\mu = \mu_f$. Legyen $[c_1, d_1) \times [c_2, d_2)$ tetszőleges eleme $\mathcal{P}^2(T)$-nek. Ekkor f definíciója szerint

$$\begin{aligned} f(d_1, d_2) &= \mu([a_1, d_1) \times [a_2, d_2)), \\ f(c_1, d_2) &= \mu([a_1, c_1) \times [a_2, d_2)), \\ f(d_1, c_2) &= \mu([a_1, d_1) \times [a_2, c_2)), \\ f(c_1, c_2) &= \mu([a_1, c_1) \times [a_2, c_2)). \end{aligned}$$

Ha itt az első egyenlőséghez hozzáadjuk a negyediket, majd az összegből kivonjuk a másodikat és a harmadikat, akkor – felhasználva azt is, hogy μ additív – azt kapjuk, hogy $\mu_f([c_1, d_1) \times [c_2, d_2)) = \mu([c_1, d_1) \times [c_2, d_2))$.

35. Tegyük fel (i)-et. Megmutatjuk, hogy a $g(x) = f(x, a_2)$ és $h(y) = f(a, y) -$

$f(a_1, b_1)$ függvények kielégítik a feltételeket. Valóban, tetszőleges $(x, y) \in T$-re

$$0 = \mu_f([a_1, x) \times [a_2, y)) = f(x, y) - f(a_1, y) - f(x, a_2) + f(a_1, a_2) = \\ = f(x, y) - h(y) - g(x),$$

tehát $f(x, y) = g(x) + h(y)$.

Ha $f(x, y) = g(x)+h(y)$, akkor μ_f definíciójából egyszerű behelyettesítéssel adódik, hogy $\mu_f(A) = 0$ minden $A \in \mathcal{P}^2(T)$-re.

36. Az *akkor* állítást a Lagrange-középértéktétel kétváltozós változatából vezetjük le. Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható a $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ tégla pontjaiban. Belátjuk, hogy van olyan $(u, v) \in T$ pont, hogy

$$\mu_f(T) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) \cdot (b_1 - a_1)(b_2 - a_2). \tag{19}$$

Valóban,

$$\mu_f(T) = f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2) - f(b_1, a_2) + f(a_1, a_2) = F(b_1) - F(a_1), \tag{20}$$

ahol $F(x) = f(x, b_2) - f(x, a_2)$ $(x \in [a_1, b_1])$. A Lagrange-középértéktétel szerint van olyan $u \in (a_1, b_1)$ pont, hogy

$$\frac{F(b_1) - F(a_1)}{b_1 - a_1} = F'(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, b_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(u, a_2) = G(b_2) - G(a_2), \tag{21}$$

ahol $G(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, y)$ $(y \in [a_2, b_2])$. Így ismét alkalmazva a Lagrange-középértéktételt kapunk egy $v \in (a_2, b_2)$ pontot, amelyre $G(b_2) - G(a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) \cdot (b_2 - a_2)$. Ha ezt összevetjük (20)-szal és (21)-gyel, akkor megkapjuk (19)-et.

Az (19) összefüggésből nyilvánvaló, hogy ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \geq 0$ G minden pontjában, akkor $\mu_f \geq 0$.

A másik irány nyilvánvaló a következő ismert állításból: ha f kétszer differenciálható az (u, v) pontban, akkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \lim_{h \to +0} \frac{\mu_f([u, u + h) \times [v, v + h))}{h^2}. \tag{22}$$

Lásd [7, 21.82. Lemma, 62. oldal].

37. (i) Legyen $A \in \mathcal{R}$ tetszőleges. A 21. feladat állítása szerint $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, ahol $A_1, \ldots, A_n$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok. Nyilvánvaló, hogy ha $\overline{\mu}$ a μ additív kiterjesztése $\mathcal{R}$-re, akkor

$$\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \tag{23}$$

Ebből következik, hogy ha van a feltételeknek megfelelő kiterjesztés, akkor az egyértelmű. A létezést bizonyítandó definiáljuk $\overline{\mu}(A)$-t a (23) képlettel. Belátjuk, hogy a definíció értelmes, azaz ha $A = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, ahol $B_1, \ldots, B_k$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j). \tag{24}$$

Mivel $\mathcal{A}$ félgyűrű és μ additív $\mathcal{A}$-n, ezért $\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_i \cap B_j)$ minden i-re, és $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j)$ minden j-re. Így

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j),$$

amivel (24)-et beláttuk. A fentiekből nyilvánvaló, hogy az így definiált $\overline{\mu}$ halmazfüggvény kiterjesztése μ-nek, és additív $\mathcal{R}$-en.

(ii) A feladat (i) állítása szerint feltehetjük, hogy $\mathcal{A}$ gyűrű. A 25. feladat jelöléseit fogjuk használni. Legyen $f \in L(\mathcal{A})$, és legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, melyekre $f(x) = a_i$, ha $x \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, és $f(x) = 0$, ha $x \in X \setminus A$, ahol $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Definiáljuk f „integrálját” az

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i)$$

képlettel. Megmutatjuk, hogy ez jóldefiniált. Ehhez azt kell belátni, hogy ha $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, melyekre $f(x) = b_j$, ha $x \in B_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, és $f(x) = 0$, ha $x \in X \setminus B$, ahol $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot \mu(B_j). \tag{25}$$

Az $A_i \cap B_j$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k)$ halmazok páronként diszjunktak és elemei $\mathcal{A}$-nak. Nyilvánvaló, hogy ha $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, akkor $a_i = b_j$. Továbbá, ha $A_i \setminus B \neq \emptyset$, akkor $a_i = 0$, és ha $B_j \setminus A \neq \emptyset$, akkor $b_j = 0$. Rögzített i-re μ addititvitása alapján

$$a_i \cdot \mu(A_i) = a_i \cdot \mu(A_i \cap B) + a_i \cdot \mu(A_i \setminus B) = a_i \cdot \mu(A_i \cap B),$$

hiszen $A_i \setminus B \neq \emptyset$ esetén $a_i = 0$. Így $a_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{k} a_i \cdot \mu(A_i \cap B_j)$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $b_j \cdot \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{n} b_j \cdot \mu(A_i \cap B_j)$ minden j-re. Mindezeket figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_i \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} b_j \cdot \mu(A_i \cap B_j) = $$
$$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_j \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot \mu(B_j).$$

Ezzel (25)-öt beláttuk. Nyilvánvaló, hogy az $f \mapsto \int_X f\,d\mu$ leképezés lineáris az $L(\mathcal{A})$ vektortérről $\mathbb{R}$-be.

Az $L(P(X))$ halmaz azokból az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényekből áll, amelyek értékkészlete véges. Világos, hogy $L(P(X))$ vektortér a pontonkénti összeadás és a konstanssal való szorzás műveleteivel, és hogy $L(\mathcal{A})$ altere $L(P(X))$-nek. Az algebra egy ismert tétele szerint bármely lineáris függvény kiterjeszthető egy altérről az egész térre. Így az $f \mapsto \int_X f\,d\mu$ leképezés kiterjeszthető az $L(\mathcal{A})$ vektortérről $L(P(X))$-re. Legyen M egy ilyen kiterjesztés, és legyen $\overline{\mu}(H) = M(\chi_H)$ minden $H \subset X$-re. Ekkor $\overline{\mu}$ kiterjesztése μ-nek. Ha ui. $A \in \mathcal{A}$, akkor $\chi_A \in L(\mathcal{A})$, és így $\overline{\mu}(A) = M(\chi_A) = \int_X \chi_A\,d\mu = \mu(A)$. A $\overline{\mu}$ halmazfüggvény nyilvánvalóan additív, hiszen $A \cap B = \emptyset$, $A, B \subset X$ esetén

$$\overline{\mu}(A \cup B) = M(\chi_{A\cup B}) = M(\chi_A + \chi_B) = M(\chi_A) + M(\chi_B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B).$$

38. Tekintsük először a $H = \mathbb{R}^2$ esetet. Legyen μ véges értékű és additív a $\mathcal{P}^2$ félgyűrűn. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \mu([0,x) \times [0,y)), & \text{ha } x,y > 0,\\ -\mu([x,0) \times [0,y)), & \text{ha } x < 0 < y,\\ \mu([x,0) \times [y,0)), & \text{ha } x,y < 0,\\ -\mu([0,x) \times [y,0)), & \text{ha } y < 0 < x,\\ 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0. \end{cases}$$

A 34. feladat megoldásának gondolatmenetének kis módosításával könnyű ellenőrizni, hogy $\mu_f = \mu$.

Most legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ tetszőleges, és legyen μ véges értékű és additív $\mathcal{P}^2(H)$-n. A 37. feladat állítása szerint μ kiterjeszthető egy $\overline{\mu}$ additív függvényként $P(\mathbb{R}^2)$-re. Szorítsuk meg ezt a kiterjesztést a $\mathcal{P}^2$ félgyűrűre. A már belátott állítás szerint van olyan $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, hogy $\mu_f = \overline{\mu}$ a $\mathcal{P}^2$ félgyűrűn. Ebből világos, hogy ha f-et megszorítjuk a H halmazra, akkor a kapott $f|_H$ függvényre teljesül $\mu_{f|_H} = \mu$.

39. Jelöljük $\mathcal{R}$-rel a $\mathcal{H}$ által generált gyűrűt. Ha ϑ kiterjeszthető $\mathcal{R}$-re additív halmazfüggvényként és $A, B \in \mathcal{H}$, akkor $\vartheta(A) = \vartheta(A \setminus B) + \vartheta(A \cap B)$ és $\vartheta(B) = \vartheta(B \setminus A) + \vartheta(A \cap B)$, tehát

$$\begin{aligned}\vartheta(A) + \vartheta(B) &= \vartheta(A \setminus B) + \vartheta(A \cap B) + \vartheta(B \setminus A) + \vartheta(A \cap B) = \\ &= \vartheta(A \cup B) + \vartheta(A \cap B).\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az (1) feltétel szükséges. Az elégségességre két bizonyítást adunk.

1. Tegyük fel, hogy $\vartheta(\emptyset) = 0$, és (1) fennáll minden $A, B \in \mathcal{H}$-ra. Legyen X olyan halmaz, amely tartalmazza $\mathcal{H}$ összes elemét. Egy $A \subset X$ halmaz karakterisztikus függvényét az X halmazra vonatkoztatva definiáljuk, tehát $\chi_A(x) = 1$, ha $x \in A$ és $\chi_A(x) = 0$, ha $x \in X \setminus A$.

Először azt fogjuk megmutatni, hogy ha $A_1, \ldots, A_n, C \in \mathcal{H}$, $A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset C$, $a_1, \ldots, a_n, a \in \mathbb{Z}$ és $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} = a\chi_C$, akkor $\sum_{i=1}^{n} a_i \vartheta(A_i) = a\vartheta(C)$. Ezt n szerinti indukcióval bizonyítjuk.

Legyen $n = 1$. Azt kell belátni, hogy ha $a_1 \chi_{A_1} = a\chi_C$, akkor $a_1\vartheta(A_1) = a\vartheta(C)$. Ha $a_1 = 0$, akkor $a = 0$ vagy $C = \emptyset$, és az állítás igaz. Hasonló a helyzet $a = 0$ esetén. Ha $a_1 \neq 0$ és $a \neq 0$, akkor $A_1 = C$, és vagy $A_1 = C = \emptyset$, vagy pedig $a_1 = a$. Az állítás mindkét esetben igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, és legyen $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \chi_{A_i} = a\chi_C$, ahol $A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1} \subset C$. Ekkor $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \chi_{A_i \cap A_{n+1}} = a\chi_{A_{n+1}}$ és $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i \cap A_{n+1}} = (a - a_{n+1})\chi_{A_{n+1}}$. Az indukciós feltevés szerint

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vartheta(A_i \cap A_{n+1}) = (a - a_{n+1})\vartheta(A_{n+1}). \tag{26}$$

Legyen $U^c = C \setminus U$ minden $U \subset C$-re. Tekintsük a $\mathcal{H}^c = \{U^c : U \subset C,\ U \in \mathcal{H}\}$ halmazrendszert. Ez háló, amelyen a $\xi(V) = \vartheta(C) - \vartheta(V^c)$ $(V \in \mathcal{H}^c)$ halmazfüggvényre teljesül $\xi(\emptyset) = 0$ és (1) minden $A, B \in \mathcal{H}^c$-re. Az alábbiakban a karakterisztikus függvényeknek a C halmazra való megszorítását tekintjük. Legyen $b = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) - a$. Ekkor $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \chi_{A_i^c} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(1-\chi_{A_i})$ egyenlő az azonosan b függvénnyel a C halmazon. Ebből azt kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \chi_{A_i^c \cap A_{n+1}^c} = b\chi_{A_{n+1}^c}$, tehát $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i^c \cap A_{n+1}^c} = (b - a_{n+1})\chi_{A_{n+1}^c}$. Így az indukciós feltevést ξ-re alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \xi(A_i^c \cap A_{n+1}^c) = (b - a_{n+1})\xi(A_{n+1}^c),$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\vartheta(C) - \vartheta(A_i \cup A_{n+1})\right) = (b - a_{n+1})(\vartheta(C) - \vartheta(A_{n+1})). \tag{27}$$

Vonjuk ki (26)-ból (27)-et, majd alkalmazzuk a (1) azonosságot. Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\vartheta(A_i) + \vartheta(A_{n+1}) - \vartheta(C)\right) = (a+b-2a_{n+1})\vartheta(A_{n+1}) - (b-a_{n+1})\vartheta(C),$$

ami átrendezve a bizonyítandó $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \vartheta(A_i) = a\vartheta(C)$ egyenlőséget adja.

Most rátérünk a feladat megoldására. Jelöljük $\mathcal{R}$-rel a $\mathcal{H}$ által generált gyűrűt. Ekkor minden $A \in \mathcal{R}$-re χ_A előállítható $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ alakban, ahol $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Ugyanis könnyen láthatóan az ilyen tulajdonságú A halmazok gyűrűt alkotnak. Legyen $\overline{\vartheta}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \vartheta(A_i)$. Belátjuk, hogy $\overline{\vartheta}$ definíciója értelmes, vagyis nem függ χ_A előállításától. Valóban, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{B_j}$, ahol $A_i, B_j \in \mathcal{H}$, akkor $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{k} (-b_j)\chi_{B_j} = 0 = 0 \cdot \chi_C$, ahol $C = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k$. A fent bizonyított állítás szerint ebből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vartheta(A_i) + \sum_{j=1}^{k} (-b_j)\vartheta(B_j) = 0,$$

azaz $\sum_{i=1}^{n} a_i \vartheta(A_i) = \sum_{j=1}^{k} b_j \vartheta(B_j)$. Nyilvánvaló, hogy $\overline{\vartheta}$ kiterjesztése ϑ-nek és additív.

2. A 6. feladat állítása szerint az $\mathcal{A} = \{A \setminus B : A, B \in \mathcal{H}\}$ halmazrendszer félgyűrű. A 37. feladat (i) állítása alapján elég belátni, hogy ϑ additívan kiterjeszthető az $\mathcal{A}$ félgyűrűre. Legyen $\overline{\vartheta}(A \setminus B) = \vartheta(A) - \vartheta(A \cap B)$ minden $A, B \in \mathcal{H}$ esetén. Megmutatjuk, hogy a definíció értelmes, azaz $A, B, C, D \in \mathcal{H}$, $A \setminus B = C \setminus D$ esetén

$$\vartheta(A) - \vartheta(A \cap B) = \vartheta(C) - \vartheta(C \cap D). \tag{28}$$

Ezt bizonyítandó tegyük fel először, hogy $A \subset C$. Ekkor az $A \setminus B = C \setminus D$ feltételből következik, hogy $A \cup (C \cap D) = C$ és $A \cap (C \cap D) = A \cap B$. Így (1) alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\vartheta(A) + \vartheta(C \cap D) = \vartheta(C) + \vartheta(A \cap B),$$

amit átrendezve megkapjuk (28)-at. Most tekintsük az általános esetet, amikor $A, B, C, D \in \mathcal{H}$ és $A \setminus B = C \setminus D$. Mivel

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$

tetszőleges halmazokra igaz, ezért a mi esetünkben

$$A \setminus B = C \setminus D = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

Itt $A \cap C \subset A$, tehát a már bizonyított állítás szerint

$$\vartheta(A) - \vartheta(A \cap B) = \vartheta(A \cap C) - \vartheta(A \cap C \cap (B \cup D)).$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$\vartheta(C) - \vartheta(C \cap D) = \vartheta(A \cap C) - \vartheta(A \cap C \cap (B \cup D)),$$

amiből megkapjuk (28)-at. Ezzel definiáltuk az $\overline{\vartheta}$ halmazfüggvényt az $\mathcal{A}$ félgyűrűn. Nyilvánvaló, hogy $\overline{\vartheta}$ kiterjesztése ϑ-nek.

Most megmutatjuk, hogy $\overline{\vartheta}$ additív $\mathcal{A}$-n. Először is belátjuk, hogy ha $A \in \mathcal{A}$ és $H \in \mathcal{H}$, akkor

$$\overline{\vartheta}(A) = \overline{\vartheta}(A \cap H) + \overline{\vartheta}(A \setminus H). \tag{29}$$

Valóban, legyen $A = B \setminus C$, ahol $B, C \in \mathcal{H}$. Feltehetjük, hogy $C \subset B$, mert különben C-t kicseréljük $B \cap C$-re. Ekkor $\overline{\vartheta}(A) = \vartheta(B) - \vartheta(C)$, $\overline{\vartheta}(A \cap H) = \vartheta(B \cap H) - \vartheta(C \cap H)$ és $\overline{\vartheta}(A \setminus H) = \vartheta(B) - \vartheta((C \cup H) \cap B)$. Így (29) bizonyításához azt kell belátni, hogy

$$\vartheta(B) - \vartheta(C) = \vartheta(B \cap H) - \vartheta(C \cap H) + \vartheta(B) - \vartheta((C \cup H) \cap B),$$

azaz
$$\vartheta(C)+\vartheta(B\cap H)=\vartheta(C\cap H)+\vartheta((C\cup H)\cap B).$$
Ez viszont az (1) azonosságból következik, hiszen $C\subset B$ alapján $C\cap(B\cap H)=C\cap H$ és $C\cup(B\cap H)=(C\cup H)\cap B$. Ezzel (29)-et beláttuk.

Legyen $A\in\mathcal{A}$ rögzített halmaz, és vezessük be a $H^1=H$ és $H^{-1}=A\setminus H$ jelölést. Belátjuk, hogy ha $H_1,\dots,H_n\in\mathcal{H}$, akkor
$$A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}=A\cap H_1^{\varepsilon_1}\cap\dots\cap H_n^{\varepsilon_n}\in\mathcal{H}$$
minden $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm1$-re. Valóban, ha $I=\{i\colon \varepsilon_i=1\}$ és $J=\{i\colon \varepsilon_i=-1\}$, akkor $K=\bigcap_{i\in I}H_i\in\mathcal{H}$ és $L=\bigcup_{i\in J}H_i\in\mathcal{H}$, hiszen $\mathcal{H}$ háló. Legyen $A=B\setminus C$, ahol $B,C\in\mathcal{H}$. Ekkor
$$A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}=(A\cap K)\setminus L=(B\cap K)\setminus(C\cup L)\in\mathcal{A}.$$
Megmutatjuk, hogy
$$\overline{\vartheta}(A)=\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm1}\overline{\vartheta}(H_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}).\tag{30}$$
Ez $n=1$-re igaz, hiszen $\overline{\vartheta}(A)=\overline{\vartheta}(A\cap H_1)+\overline{\vartheta}(A\setminus H_1)$ teljesül (29) szerint. Tegyük fel, hogy (30) igaz n-re, és legyenek $H_1,\dots,H_{n+1}$ tetszőleges $\mathcal{H}$-beli halmazok. Az indukciós feltevést felhasználva elég belátni, hogy ha K jelöli a $H_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ halmazok bármelyikét, akkor $\overline{\vartheta}(K)=\overline{\vartheta}(K\cap H_{n+1})+\overline{\vartheta}(K\setminus H_{n+1})$. Ez szintén (29)-ből következik, amivel (30)-at beláttuk.

Ebből $\overline{\vartheta}$ additivitása már egyszerűen látható. Tegyük fel ugyanis, hogy $A=A_1\cup\dots\cup A_n$, ahol $A,A_1,\dots,A_n\in\mathcal{A}$ és $A_1,\dots,A_n$ páronként diszjunktak. Legyen $A_i=B_i\setminus C_i$, ahol $B_i,C_i\in\mathcal{H}$ minden i-re. Jelöljük $\mathcal{B}$-vel az
$$A\cap B_1^{\varepsilon_1}\cap\dots\cap B_n^{\varepsilon_n}\cap C_1^{\eta_1}\cap\dots\cap C_n^{\eta_n}$$
alakú halmazok rendszerét, ahol $\varepsilon_i,\eta_i=\pm1$ minden i-re. Ekkor (30) szerint $\overline{\vartheta}(A)=\sum_{D\in\mathcal{B}}\overline{\vartheta}(D)$ és $\overline{\vartheta}(A_i)=\sum_{D\in\mathcal{B},D\subset A_i}\overline{\vartheta}(D)$ minden $i=1,\dots,n$-re, amiből nyilvánvaló, hogy $\overline{\vartheta}(A)=\sum_{i=1}^n\overline{\vartheta}(A_i)$.

40. Feltesszük, hogy (ii) nem igaz, és belátjuk, hogy ekkor (i) teljesül.

Legyen $A_1\in\mathcal{A}$ olyan halmaz, amelyre $\vartheta_1(A_1)\neq0$. Tegyük fel, hogy $n>1$, és hogy az $A_1,\dots,A_{n-1}$ halmazokat már definiáltuk. Legyen $B\in\mathcal{A}$ olyan halmaz, amelyre $\vartheta_n(B)\neq0$. Tekintsük a $B\cap C_1\cap\dots\cap C_{n-1}$ alakú halmazokat, ahol $C_i=A_i$ vagy $C_i=B\setminus A_i$ minden $i=1,\dots,n-1$-re. Ezek a halmazok diszjunktak és az uniójuk B, tehát van közöttük olyan, amelyen ϑ_n nem nulla. Válasszunk egy ilyen halmazt, és jelöljük A_n-nel. Világos, hogy minden $i < n$-re vagy $A_i \cap A_n = \emptyset$ vagy $A_i \supset A_n$.

Ezzel definiáltuk az A_n halmazokat minden n-re. A konstrukcióból világos, hogy $\vartheta_n(A_n) \neq 0$ minden n-re, továbbá minden $k < n$-re vagy $A_k \cap A_n = \emptyset$, vagy pedig $A_k \supset A_n$.

A Ramsey-tétel alkalmazásával kapunk egy $n_1 < n_2 < \ldots$ indexsorozatot úgy, hogy vagy $A_{n_i} \cap A_{n_j} = \emptyset$ minden $i < j$-re, vagy pedig $A_{n_1} \supset A_{n_2} \supset \ldots$. Az első esetben az (i) állítás igaz. Feltehetjük tehát, hogy $A_{n_1} \supset A_{n_2} \supset \ldots$.

A jelölés egyszerűsítése érdekében hagyjuk el az (n_i) sorozathoz nem tartozó indexeket, és írjunk A_{n_i} helyett A_i-t és ϑ_{n_i} helyett ϑ_i-t. Mivel az indirekt feltevés szerint a (ii) állítás nem igaz, van olyan k_1 index, hogy $\vartheta_{k_1}(A_1) = 0$. Ekkor a $B_1 = A_1 \setminus A_{k_1}$ halmazra $\vartheta_{k_1}(B_1) = \vartheta_{k_1}(A_1) - \vartheta_{k_1}(A_{k_1}) \neq 0$, mert $\vartheta_{k_1}(A_{k_1}) \neq 0$. Ismét az indirekt feltevés szerint van olyan $k_2 > k_1$ index, hogy $\vartheta_{k_2}(A_{k_1}) = 0$. Ekkor a $B_2 = A_{k_1} \setminus A_{k_2}$ halmazra $\vartheta_{k_2}(B_2) = \vartheta_{k_2}(A_{k_1}) - \vartheta_{k_2}(A_{k_2}) \neq 0$, mert $\vartheta_{k_2}(A_{k_2}) \neq 0$. Az eljárást folytatva kapjuk a $k_1 < k_2 < \ldots$ indexeket úgy, hogy $\vartheta_{k_{i+1}}(A_{k_i}) = 0$ minden i-re. Ekkor a $B_i = A_{k_i} \setminus A_{k_{i+1}}$ halmazok páronként diszjunktak, és $\vartheta_{k_i}(A_{k_i}) \neq 0$ minden i-re. Ezzel beláttuk, hogy (i) ebben az esetben is igaz.

41. (i) Legyen $G \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt halmaz. Ha $x \in G$, akkor van olyan $r > 0$, hogy $B(x, r) \subset G$. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_p)$, és legyenek a_i, b_i olyan racionális számok, melyekre $x_i - r/p < a_i < x_i < b_i < x_i + r/p$. Könnyen látható, hogy ekkor $x \in T \subset B(x, r) \subset G$, ahol $T = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$. Ezzel beláttuk, hogy G minden eleme lefedhető egy olyan racionális téglával, amely része G-nek. Ez éppen azt jelenti, hogy G egyenlő az általa tartalmazott racionális téglák egyesítésével.

(ii) Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ tetszőleges nyílt halmaz. Ha $x \in G$, akkor van olyan $r > 0$, hogy $B(x, r) \subset G$. Legyen $y \in \mathbb{R}^p$ olyan pont, amelyre $|y - x| < r/3$, és amelynek a koordinátái racionális számok. Ha $t \in (r/3, 2r/3) \cap \mathbb{Q}$, akkor $B(y, t)$ racionális gömb, és $x \in B(y, t) \subset B(x, r) \subset G$. Ebből világos, hogy a G által tartalmazott racionális gömbök egyesítése egyenlő G-vel.

42. (i) Könnyű belátni, hogy az $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ alakú téglák zártak. Legyen $T = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ tetszőleges tégla. Válasszunk szigorúan monoton növő $(b_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ sorozatokat, amelyekre $b_{i,1} > a_i$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_{i,n} \to b_i$ teljesül minden $i = 1, \ldots, p$-re. Ekkor

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left([a_1, b_{1,n}] \times \ldots \times [a_p, b_{p,n}] \right),$$

és így a T halmaz F_σ. Az előző (41.) feladat (i) állítása szerint minden nyílt halmaz előáll mint megszámlálhatóan sok tégla egyesítése, hiszen csak megszámlálhatóan sok racionális tégla van. Ha tehát $\mathcal{A}$ jelöli a G által tartalmazott racionális téglák rendszere által generált σ-gyűrűt, akkor $\mathcal{A}$ tartalmazza G nyílt részhalmazait. Így $\mathcal{B}(G) \subset \mathcal{A}$, hiszen $\mathcal{B}(G)$ a legszűkebb σ-gyűrű, amely tartalmazza G nyílt részhalmazait. Másrészt $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(G)$, hiszen minden tégla Borel-halmaz, $\mathcal{B}(G)$ σ-gyűrű, és $\mathcal{A}$ a legszűkebb σ-gyűrű, amely tartalmazza a G-beli téglákat. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{A} = \mathcal{B}(G)$.

A (ii) állítás bizonyítása hasonló.

43. (i) A 42. feladat megoldásában láttuk, hogy minden tégla F_σ. A 41. feladat (i) állítása szerint minden nyílt halmaz előáll mint megszámlálhatóan sok tégla uniója, és így minden nyílt halmaz F_σ.

A (ii) állítás nyilvánvaló (i)-ből és a De Morgan-azonosságból. A (iii) állítás nyilvánvaló (ii)-ből, a (iv) állítás pedig nyilvánvaló (iii)-ből és a De Morgan-azonosságból.

44. Tegyük fel, hogy $\mathbb{Q} \cap (a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, ahol $G_1, G_2, \ldots$ nyíltak. Legyen $\{r_1, r_2, \ldots\}$ a $\mathbb{Q} \cap (a,b)$ halmaz egy sorozatba rendezése. Legyen x_1 tetszőleges eleme G_1-nek. Mivel G_1 nyílt, létezik egy nemüres J_1 nyílt intervallum, amely része G_1-nek. Legyen I_1 olyan nem-elfajuló zárt intervallum J_1-ben, amely nem tartalmazza r_1-et. (Ilyen intervallumot úgy találhatunk, hogy veszünk J_1-ben két diszjunkt nem-elfajuló zárt intervallumot. Ezek közül legfeljebb az egyik tartalmazhatja r_1-et.) Válasszunk egy x_2 racionális számot I_1 belsejéből. Ekkor $x_2 \in G_2$, és így, mivel G_2 nyílt, létezik egy nemüres J_2 nyílt intervallum, amely része $G_2 \cap I_1$-nek. Legyen I_2 olyan nem-elfajuló zárt intervallum J_2-ben, amely nem tartalmazza r_2-t. Válasszunk egy x_3 racionális számot I_2 belsejéből, majd a fenti gondolatmenet ismétlésével válasszunk egy nem-elfajuló zárt $I_3 \subset J_2$ intervallumot, amely nem tartalmazza r_3-at. Az eljárást folytatva kapjuk az egymásba skatulyázott $I_1, I_2, \ldots$ zárt intervallumokat, amelyekre $I_n \subset G_n$ és $r_n \notin I_n$ minden n-re. A Cantor-axióma szerint $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Ha x eleme a metszetnek, akkor $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{Q}$, másrészt $x \neq r_n$ minden n-re. Ez ellentmondás, tehát $\mathbb{Q}$ nem lehet G_δ.

45. Az előző (44.) feladat állítása szerint $\mathbb{Q}$ nem G_δ. Másrészt $\mathbb{Q}$ nyilvánvalóan F_σ, hiszen megszámlálhatóan sok egyelemű halmaz, tehát megszámlálhatóan sok zárt halmaz uniója. Így $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ F_σ és nem G_δ.

Legyen $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $B = (1,2) \setminus \mathbb{Q}$ és $H = A \cup B$. Nyilvánvaló, hogy az A halmaz G_δ, és így $G_{\delta\sigma}$ is. Másrészt a B halmaz F_σ, tehát szintén $G_{\delta\sigma}$. Ebből következik, hogy $H = A \cup B$ szintén $G_{\delta\sigma}$.

Az A halmaz G_δ, és így $F_{\sigma\delta}$. Másrészt a B halmaz F_σ, tehát szintén $F_{\sigma\delta}$. Ezért $H = A \cup B$ szintén $F_{\sigma\delta}$. Ez abból következik, hogy két $F_{\sigma\delta}$ halmaz uniója szintén $F_{\sigma\delta}$. Valóban, ha $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ és $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, ahol A_n és B_n F_σ halmazok minden n-re, akkor

$$A \cup B = \bigcap_{n,m=1}^{\infty} (A_n \cup B_m),$$

és $A_n \cup B_m$ F_σ minden n, m-re.

A H halmaz nem lehet G_δ, mert akkor $A = H \cap (0,1)$ is az lenne. Holott $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ nem G_δ az előző (44.) feladat állítása szerint. A H halmaz F_σ sem lehet, mert akkor $B = H \cap [1,2]$ is az lenne. Azonban $H \cap [1,2] = (1,2) \setminus \mathbb{Q}$, és ha H F_σ lenne, akkor $\mathbb{Q} \cap (1,2) = (1,2) \setminus H$ G_δ lenne, holott nem az.

46. (i) Belátjuk, hogy a $H_c = \{x \colon \omega_f(x) < c\}$ halmaz nyílt minden $c > 0$-ra. Valóban, ha $x \in H_c$, akkor $\lim_{h \to 0+0} \omega_f((x-h, x+h)) < c$, és így van olyan $h_0 > 0$, hogy $\omega_f((x - h_0, x + h_0)) < c$. Belátjuk, hogy $(x - h_0, x + h_0) \subset H_c$. Legyen $y \in (x - h_0, x + h_0)$ tetszőleges. Ha $0 < k < \min(y - (x - h_0), x + h_0 - y)$, akkor $(y - k, y + k) \subset (x - h_0, x + h_0)$, tehát

$$\omega_f(y) \le \omega_f((y - k, y + k)) \le \omega_f((x - h_0, x + h_0)) < c.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha $x \in H_c$, akkor x-nek van olyan környezete, ami része H_c-nek. Tehát H_c nyílt halmaz.

Nyilvánvaló, hogy f akkor és csak akkor folytonos x-ben, ha $\omega_f(x) = 0$. Így f folytonossági pontjainak halmaza $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_{1/n}$, tehát G_δ halmaz.

(ii) Legyen $f \colon A \to \mathbb{R}$ rögzített függvény, és legyen $H_c = \{x \in A \colon \omega_f(x) < c\}$ minden $c > 0$-ra. Belátjuk, hogy minden c-re van olyan G_c nyílt halmaz, hogy $H_c = A \cap G_c$. Minden $x \in H_c$-re van olyan $r_x > 0$, hogy $\omega_f(A \cap B(x, r_x)) < c$. Az (i) állítást bizonyító okoskodás nyilvánvaló módosításával beláthatjuk, hogy $\omega_f(y) < c$ minden $y \in A \cap B(x, r_x)$-re. Ha tehát $G_c = \bigcup_{x \in H_c} B(x, r_x)$, akkor G_c olyan nyílt halmaz, amelyre $H_c = A \cap G_c$.

Mivel f akkor és csak akkor folytonos x-ben, ha $\omega_f(x) = 0$, ezért

$$C_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{1/n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap G_{1/n}) = A \cap U,$$

ahol $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{1/n}$, ami G_δ halmaz.

47. Legyen $f(x) = 0$, ha x irracionális, és legyen $f(p/q) = 1/q)$, ha p, q relatív prím egészek és $q > 0$. (Ez az ún. *Riemann-függvény*.) Ismeretes (és nem nehéz belátni), hogy f határértéke minden pontban nulla. Így f minden irracionális pontban folytonos, és minden racionális pontban szakad. Így f folytonossági pontjainak halmaza $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, amely, amint azt egy korábbi feladatban láttuk, nem F_σ.

48. Jelöljük $C(f)$-fel az f függvény folytonossági pontjainak halmazát. A 46. feladat állítása szerint $C(f)$ Borel-halmaz. Világos, hogy $D(f) \subset C(f)$. Jelöljük $f[x,y]$-nal az $(f(x) - f(y))/(x-y)$ differenciahányadost minden $x \neq y$-ra. Az f függvény akkor és csak akkor differenciálható az x pontban, ha a $\lim\limits_{y \to x} f[x,y]$ véges határérték létezik. A határértékre vonatkozó Cauchy-kritérium szerint ez pontosan akkor teljesül, ha minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $\delta > 0$, hogy $|f[x,y] - f[x,z]| < \varepsilon$ minden $y, z \in (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$-re. Jelöljük $A_{k,n}$-nel azon $x \in C(f)$ pontok halmazát, amelyekre teljesül, hogy $|f[x,y] - f[x,z]| \le 1/k$ minden $y, z \in (x - 1/n, x + 1/n) \setminus \{x\}$-re. Azt kaptuk, hogy

$$D(f) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_{k,n}. \tag{31}$$

Így elég megmutatni, hogy $A_{k,n}$ Borel-halmaz minden k-ra és n-re. Azt fogjuk belátni, hogy $A_{k,n}$ relatíve zárt részhalmaza $C(f)$-nek, azaz

$$A_{k,n} = C(f) \cap \operatorname{cl} A_{k,n} \tag{32}$$

minden $k, n \in \mathbb{N}^+$-ra. Az $A_{k,n} \subset C(f) \cap \operatorname{cl} A_{k,n}$ tartalmazás nyilvánvaló. Az $A_{k,n} \supset C(f) \cap \operatorname{cl} A_{k,n}$ tartalmazást bizonyítandó legyen $x \in C(f) \cap \operatorname{cl} A_{k,n}$ tetszőleges. Ekkor vannak olyan $x_i \in A_{k,n}$ pontok, hogy $x_i \to x$. Be kell látnunk, hogy $x \in A_{k,n}$. Legyenek $y, z \in (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$ tetszőleges pontok. Ekkor $x_i \to x$ alapján $y, z \in (x_i - \delta, x_i + \delta) \setminus \{x_i\}$ minden elég nagy i-re. Mivel $x_i \in A_{k,n}$, ezért minden elég nagy i-re $|f[x_i, y] - f[x_i, z]| \le 1/k$. Mivel pedig $x \in C(f)$, ezért $f(x_i) \to f(x)$, és így

$$|f[x,y] - f[x,z]| = \lim_{i \to \infty} |f[x_i, y] - f[x_i, z]| \le 1/k.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $x \in A_{k,n}$, amivel (32)-t is beláttuk.

Mivel $C(f)$ Borel-halmaz, ezért (32) szerint $A_{k,n}$ is, és így (31) szerint $D(f)$ is, és ezzel a feladatot megoldottuk. Egyébként a fenti gondolatmenet egy apró változtatásával az is belátható, hogy $D(f)$ $F_{\sigma\delta}$ halmaz. Ui. könnyen láthatóan

$$D(f) = C(f) \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \operatorname{cl} A_{k,n}.$$

Itt $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \mathrm{cl}\, A_{k,n}$ $F_{\sigma\delta}$ halmaz, $C(f)$ pedig G_δ, tehát szintén $F_{\sigma\delta}$. Így a metszetük, $D(f)$ ugyancsak $F_{\sigma\delta}$.

49. Legyen $A_{n,m,k} = \left\{ x \in [a,b] \colon \left| \sum_{i=n}^{m} f_i(x) \right| \le 1/k \right\}$ minden $n, m, k \in \mathbb{N}^+$-ra. A végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden $k \in \mathbb{N}^+$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $N \le n < m$-re $\left| \sum_{i=n}^{m} f_i(x) \right| \le 1/k$. Ez azt jelenti, hogy

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{N \le n < m} A_{n,m,k}.$$

Mivel az f_n függvények folytonosak, ezért a $\sum_{i=n}^{m} f_i(x)$ függvény is folytonos. Ebből egyszerűen adódik, hogy az $A_{n,m,k}$ halmaz zárt minden n, m, k-ra. Így a $\bigcap_{N \le n < m} A_{n,m,k}$ halmaz is zárt minden N-re és k-ra, az $\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{N \le n < m} A_{n,m,k}$ halmaz F_σ minden k-ra, tehát az A halmaz $F_{\sigma\delta}$.

50. Osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot 10^n egyenlő részre. Mindegyik I osztóintervallumra teljesül, hogy az I belsejében levő bármely két szám tizedestört alakjának első n jegye megegyezik. Ebből következik, hogy az A_n függvény konstans mindegyik osztóintervallum belsejében. Így tetszőleges a, b számokra az $\{x \in [0,1] \colon |A_n(x) - a| < b\}$ halmaz véges sok nyílt szakasz és véges sok pont uniója, következésképpen Borel-halmaz.

A határérték definíciójából következik, hogy

$$A = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{A_n(x)}{n} = \frac{1}{10} \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x : |A_n(x) - (n/10)| < n/k\}. \tag{33}$$

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy az A halmaz Borel.

51. Az előző (50.) feladat megoldásában láttuk, hogy minden n-re és k-ra az $A_{n,k} = \{x : |A_n(x) - (n/10)| < n/k\}$ halmaz véges sok szakasz és véges sok pont uniója. Jelölje $F_{n,k}$ az $A_{n,k}$ halmaz lezártját. Ekkor $F_{n,k} \setminus A_{n,k}$ része az $A_{n,k}$ halmazt alkotó szakaszok végpontjai halmazának, tehát $F_{n,k} \setminus A_{n,k}$ véges. Legyen

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} F_{n,k}.$$

Ekkor $\bigcap_{n=N}^{\infty} F_{n,k}$ zárt halmaz minden N-re és k-ra, az $\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} F_{n,k}$ halmaz F_σ minden N-re, tehát az F halmaz $F_{\sigma\delta}$. Mármost $F \setminus A$ megszámlálható, mert lefedhető az $F_{n,k} \setminus A_{n,k}$ véges halmazokkal, ahol n és k befutja a pozitív egészeket. Ebből következik, hogy A maga is $F_{\sigma\delta}$. Ugyanis minden megszámlálható halmaz F_σ, tehát $G_{\delta\sigma}$. Így $F \setminus A$ is $G_{\delta\sigma}$, tehát az $\mathbb{R} \setminus (F \setminus A)$ halmaz $F_{\sigma\delta}$. Mivel $A = F \cap (\mathbb{R} \setminus (F \setminus A))$ és két $F_{\sigma\delta}$ halmaz metszete szintén $F_{\sigma\delta}$, ezzel beláttuk, hogy A $F_{\sigma\delta}$.

52. Jelöljük A_n^i-vel azon $x \in (0,1)$ irracionális számok halmazát, amelyek tizedestört alakjában az n-edik jegy i. Nyilvánvaló, hogy $x \in A$ akkor és csak akkor, ha minden n-re igaz a következő implikáció:

ha $x \in (A_n^2 \cup A_n^3 \cup A_n^5 \cup A_n^7)$ és $x \in (A_{n+1}^4 \cup A_{n+1}^6 \cup A_{n+1}^8 \cup A_{n+1}^9)$, akkor van olyan $m > n+1$, hogy

$$x \in (A_m^2 \cap A_{m+1}^0 \cup A_{m+2}^1 \cup A_{m+3}^5 \cup A_{m+4}^1 \cup A_{m+5}^0 \cup A_{m+6}^2 \cup A_{m+7}^8).$$

Ha az itt szereplő négytagú uniókat B_n-nel, illetve C_n-nel, a fenti nyolctagú uniót pedig D_m-mel jelöljük, akkor tehát

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[((0,1) \setminus \mathbb{Q}) \setminus (B_n \cap C_n)) \cup \left(((0,1) \setminus \mathbb{Q}) \cap \bigcup_{m=n+2}^{\infty} D_m \right) \right].$$

Az A_n^i halmazokat úgy kapjuk, hogy felosztjuk a $[0,1]$ intervallumot 10^n egyenlő részre, a kapott osztóintervallumok közül néhánynak vesszük az unióját, és ezt elmetsszük $(0,1) \setminus \mathbb{Q}$-val. Ebből következik, hogy a B_n, C_n, D_m halmazok mindegyike csak egy-egy megszámlálható halmazban tér el egy zárt halmaztól. Az A halmaz tehát szintén csak egy megszámlálható halmazban tér el egy $F_{\sigma\delta}$ halmaztól, így ő maga is $F_{\sigma\delta}$.

(Megjegyzés: egy látszólag komplikált definícióval sem tudtunk kilépni az $F_{\sigma\delta}$ és a $G_{\delta\sigma}$ halmazok köréből. Érdemes megjegyezni, hogy az analízisben előforduló halmazok nagyon gyakran $F_{\sigma\delta}$ vagy $G_{\delta\sigma}$ halmazok.)

53. A 41. feladat (ii) állítása szerint $\mathcal{A}$ tartalmazza G nyílt részhalmazait. (Az üres halmazt is, hiszen ha B_1, B_2 diszjunkt gömbök G-ben, akkor $\emptyset = B_1 \cap B_2 \cap B_2 \cap \ldots \in \mathcal{A}$.) Legyen $\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R}^p \colon G \cap A \in \mathcal{A},\ G \setminus A \in \mathcal{A}\}$. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{B}$ olyan σ-algebra, amely tartalmazza $\mathbb{R}^p$ nyílt részhalmazait.

A definícióból nyilvánvaló, hogy $\emptyset \in \mathcal{B}$, és bármely $E \subset \mathbb{R}^p$ halmazra $E \in \mathcal{B} \Longrightarrow \mathbb{R}^p \setminus E \in \mathcal{B}$. Ha $A_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor $G \cap A_n \in \mathcal{A}$ és $G \setminus A_n \in \mathcal{A}$ minden n-re. Így

$$G \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G \cap A_n) \in \mathcal{A},$$

és

$$G \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G \setminus A_n) \in \mathcal{A},$$

tehát $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$. Ebből következik, hogy $\mathcal{B}$ σ-algebra. Ha ugyanis $A, B \in \mathcal{B}$, akkor $A \cup B = A \cup B \cup B \cup \ldots \in \mathcal{B}$, valamint $\mathbb{R}^p \setminus A \in \mathcal{B}$, tehát $A \setminus B = \mathbb{R}^p \setminus ((\mathbb{R}^p \setminus A) \cup B) \in \mathcal{B}$. Így $\mathcal{B}$ gyűrű, sőt algebra, hiszen $\mathbb{R}^p \in \mathcal{B}$. Mivel $A_1, A_2, \ldots \mathcal{B}$ esetén $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$, ezért $\mathcal{B}$ σ-algebra.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. Ekkor $G \cap U$ is nyílt, tehát $G \cap U \in \mathcal{A}$. Mivel az $\mathbb{R}^p \setminus U$ halmaz zárt, ezért G_δ a 43. feladat (ii) állítása szerint. Legyen $\mathbb{R}^p \setminus U = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, ahol U_n nyílt minden n-re. Ekkor

$$G \setminus U = G \cap (\mathbb{R}^p \setminus U) = G \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G \cap U_n) \in \mathcal{A},$$

hiszen $G \cap U_n$ nyílt minden n-re. Ezzel beláttuk, hogy $U \in \mathcal{B}$. Így $\mathcal{B}$ olyan σ-algebra, amely tartalmazza $\mathbb{R}^p$ nyílt részhalmazait. Ebből következik, hogy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{B}$. Ha tehát $B \subset G$ Borel, akkor $B \in \mathcal{B}$, és így $B = G \cap B \in \mathcal{A}$.

54. Két megoldást adunk.

1. Legyen $E = \bigcup \mathcal{F}$. Legyen $\mathcal{A}$ azon G racionális gömbök halmaza, amelyekhez vannak olyan $A, B \in \mathcal{F}$ halmazok, hogy $A \subsetneq B$, $A \cap G = \emptyset$ és $B \cap G \neq \emptyset$. Ekkor $\mathcal{A}$ megszámlálható; legyen $G_1, G_2, \ldots$ az $\mathcal{A}$ halmazrendszer elemeinek egy felsorolása. Válasszunk minden n-re olyan $A_n, B_n \in \mathcal{F}$ halmazokat, hogy $A_n \subsetneq B_n$, $A_n \cap G = \emptyset$ és $B_n \cap G \neq \emptyset$ teljesüljön. Ha $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = E$, akkor E F_σ, tehát a feladat állítása igaz.

Tegyük fel, hogy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq E$, és legyen $x \in E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Legyen $F \in \mathcal{F}$ olyan, hogy $x \in F$. Ekkor tetszőleges n-re $B_n \subset F$, hiszen $F \subset B_n$ lehetetlen $x \in F$ miatt.

Tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{F}$ és $F \subsetneq A$. Ekkor van olyan n, hogy $F \cap G_n = \emptyset$. Valóban, $\mathbb{R}^p \setminus F$ előáll racionális gömbök uniójaként, és ezek között van olyan, amely metszi A-t. Ha G ilyen gömb, akkor szükségképpen $G = G_n$ egy alkalmas n-re. Ez azonban lehetetlen, mert $B_n \subset F$ és $B_n \cap G_n \neq \emptyset$. Így $A \subset F$ minden $A \in \mathcal{F}$-re, tehát $\bigcup \mathcal{F} = F$. Mivel minden zárt halmaz automatikusan F_σ, ezzel a feladatot megoldottuk.

2. Ha az $E = \bigcup \mathcal{F}$ halmaz zárt, akkor nincs mit bizonyítani, hiszen minden zárt halmaz automatikusan F_σ. Feltehetjük tehát, hogy E nem zárt. Ekkor van olyan $x \in \mathbb{R}^p \setminus E$ pont, amelynek semmilyen környezete sem része $\mathbb{R}^p \setminus E$-nek. Ebből következik, hogy létezik egy $x_n \in E$ sorozat, amelyre $x_n \to x$. Válasszunk minden n-re egy olyan $A_n \in \mathcal{F}$ halmazt, amelyre $x_n \in A_n$. Megmutatjuk, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és legyen $y \in E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Legyen $A \in \mathcal{F}$ olyan, hogy $y \in A$. Az y pont választása folytán A nem lehet részhalmaza A_n-nak semmilyen n-re, mert akkor y eleme volna A_n-nak. Így $A_n \subset A$ minden n-re. Ezért $x_n \in A$ minden n-re. Mivel A zárt és $x_n \to x$, ebből következik, hogy $x \in A$. Ez azonban lehetetlen, hiszen $A \subset E$, és így $x \in E$ következne, ami ellentmond x választásának.

55. A megoldási ötlet jelöléseit használva elég belátni, hogy $E_0 \cup E_1 = F$. Legyen $E = E_0 \cup E_1$. Könnyű ellenőrizni (különválasztva azokat az eseteket, amikor k páros, illetve páratlan), hogy ha $(n_1, \ldots, n_k) \in F$ és $(n_1, \ldots, n_k, i) \in E$, valahányszor $(n_1, \ldots, n_k, i) \in F$, akkor $(n_1, \ldots, n_k) \in E$.

Tegyük fel, hogy $F \setminus E \neq \emptyset$, és legyen $x \in F \setminus E$. A fenti megfigyelés szerint ekkor x-nek van olyan x_1 folytatása, amely szintén eleme $F \setminus E$-nek. Így x_1-nek van olyan x_2 folytatása, amely szintén eleme $F \setminus E$-nek. Az eljárást folytatva kapunk egy olyan végtelen $(n_1, n_2, \ldots)$ sorozatot, hogy $(n_1, \ldots, n_k) \in F$ minden k-ra. Ez azonban ellentmond annak a feltételnek, hogy F jólfundált.

56. Ha F jólfundált fa, akkor nevezzük az F-hez tartozó leképezésnek azt az egyetlen $f\colon F \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ leképezést, amely kielégíti az előző (55.) feladatban leírt feltételeket. Jelöljük $\mathcal{A}$-val azon B Borel-halmazok rendszerét, amelyekre van olyan F jólfundált fa, amelyre $f(\emptyset) = B$, ahol f az F-hez tartozó leképezés. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$.

Adott i-re legyen $F = \{\emptyset, (i)\}$, ekkor F jólfundált fa. Világos, hogy az F-hez tartozó f leképezésre $f(\emptyset) = f(i) = A_i$, és így $A_i \in \mathcal{A}$.

Belátjuk, hogy ha $B_1, B_2 \ldots \in \mathcal{A}$, akkor a $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ halmaz is eleme $\mathcal{A}$-nak. Mivel $B_i \in \mathcal{A}$, van olyan F_i jólfundált fa, hogy $f_i(\emptyset) = B_i$, ahol f_i az F_i-hez tartozó leképezés.

Álljon F az üres halmazból, az egytagú (i) sorozatokból $(i = 1, 2, \ldots)$, valamint azokból az $(i, i, n_1, \ldots, n_k)$ sorozatokból, melyekre $i \in \mathbb{N}^+$ és $(n_1, \ldots, n_k) \in F_i$. Könnyű ellenőrizni, hogy F jólfundált fa.

Legyen $f(\emptyset) = B$, $f(i) = B_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ és $f(i, i, n_1, \ldots, n_k) = f_i(n_1, \ldots, n_k)$ minden $(n_1, \ldots, n_k) \in F$-re. Könnyű ellenőrizni, hogy f az F-hez tartozó leképezés. Ezzel beláttuk, hogy $B \in \mathcal{A}$.

Most belátjuk, hogy ha $B_1, B_2 \ldots \in \mathcal{A}$, akkor a $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ halmaz is eleme $\mathcal{A}$-nak. Legyen F_i és f_i mint fent.

Álljon F' az üres halmazból, az egytagú (1) sorozatból, valamint azokból az $(1, i, n_1, \ldots, n_k)$ sorozatokból, amelyekre $i \in \mathbb{N}^+$ és $(n_1, \ldots, n_k) \in F_i$. Könnyű ellenőrizni, hogy F' jólfundált fa.

Legyen $f'(\emptyset) = f'(1) = C$, $f'(1, i) = B_i$ és $f'(1, i, n_1, ..., n_k) = f_i(n_1, ..., n_k)$ minden i-re és $(n_1, \ldots, n_k) \in F$-re. Könnyű ellenőrizni, hogy f' az F'-höz tartozó leképezés. Ezzel beláttuk, hogy $C \in \mathcal{A}$.

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer tehát tartalmazza az A_i gömböket, és ha $B_1, B_2 \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$ és $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$. Így az 53. feladat állítása szerint $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{A}$. Mivel $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, így $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, és ezt kellett bizonyítani.

57. Az előző feladat szerint létezik egy injektív leképezés, amely a Borel-halmazok rendszerét beleképezi a fák halmazának egy részhalmazába, és így $P(\Sigma)$-ba. Mivel Σ (a természetes számokból álló véges sorozatok halmaza) megszámlálható, így $P(\Sigma)$ kontinuum számosságú, tehát a Borel-halmazok rendszerének számossága legfeljebb kontinuum. Másrészt $\mathbb{R}^p$ minden egyelemű részhalmaza Borel, így a kérdéses számosság legalább kontinuum.

58. Legyen $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B\}$, ahol $\emptyset \neq A \subsetneq B$. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{A}$ háló. Legyen $\mu(\emptyset) = \mu(B) = 0$ és $\mu(A) = 1$. Ekkor μ mérték, hiszen $\mathcal{A}$-ban csak az $X = X \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ típusú diszjunkt felbontások léteznek $(X \in \mathcal{A})$, és ezekre teljesül, hogy $\mu(X) = \mu(X) + 0 + 0 + \ldots$. Másrészt μ nem külső mérték, mert $A \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$, de $\mu(A) \leq \mu(B) + 0 + 0 + \ldots$ nem igaz.

59. Álljon az $\mathcal{A}$ halmazrendszer az $\mathbb{N}$ halmazból, az üres halmazból és az egyelemű $\{n\}$ halmazokból $(n \in \mathbb{N})$. Legyen $\mu(\emptyset) = 0$ és $\mu(A) = 1$ minden $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$ halmazra. Ekkor μ végesen additív, mert egyetlen $A \in \mathcal{A}$ halmaznak sincs nem triviális felbontása véges sok diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazra. A μ halmazfüggvény külső mérték. Valóban, legyen $A \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, ahol $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Ekkor $\mu(A) \leq 1 \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$ valahányszor az A_n halmazok között van nem üres. Ha viszont mindegyik A_n üres, akkor $A = \emptyset$, és az egyenlőtlenség akkor is igaz.

A μ halmazfüggvény nem mérték, mert $\mathbb{N} = \{0\} \cup \{1\} \cup \ldots$, de $1 \neq 1 + 1 + \ldots$.

60. Tegyük fel, hogy $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, ahol $A, A_1, A_2, \ldots$ elemei $\mathcal{A}$-nak, és az $A_1, A_2, \ldots$ halmazok páronként diszjunktak. Be kell látnunk, hogy $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$. Mivel $\mathcal{A}$ zárt a véges unióképzésre és μ additív, ezért $\mu(B_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$, ahol $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. A külső mérték-tulajdonságból és a $B_n \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ tartalmazásból kapjuk, hogy $\mu(B_n) \leq$

$\mu(A)$, tehát $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \le \mu(A)$ minden n-re. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \le \mu(A).$$

Másrészt ugyancsak a külső mérték-tulajdonságból kapjuk, hogy $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, tehát $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

61. (i) Legyen $\liminf_{n\to\infty} A_n = B$. A (3) egyenlőtlenség bizonyításához elég megmutatni, hogy ha $c > \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$, akkor $c \ge \mu(B)$. Tudjuk, hogy $B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$, ahol $B_N = \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Ekkor $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, ezért $\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(B_N)$.

Ha $c > \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$, akkor $c > \mu(A_n)$ végtelen sok n-re. Ebből nyilvánvaló, hogy $\mu(B_N) < c$ minden N-re. Így $\mu(B) \le c$, és ezt akartuk belátni.

(ii) Legyen $A_n = [0, 1/2)$, ha n páros, és $A_n = [1/2, 1)$, ha n páratlan. Ekkor $\liminf_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, tehát μ-nek a Lebesgue-mértéket választva (3) bal oldala nulla, míg a jobb oldala $1/2$.

62. (i) Tegyük fel, $\mu(X) < \infty$, ahol $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\limsup_{n\to\infty} A_n = X \setminus \liminf_{n\to\infty} (X \setminus A_n)$. Ha tehát az $X \setminus A_n$ halmazokra alkalmazzuk (3)-at, majd mindkét oldal értéket kivonjuk a véges $\mu(X)$ számból, akkor megkapjuk (4)-et.

(ii) Legyen $A_n = [n-1, n]$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra. Ekkor $\limsup_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, tehát μ-nek a Lebesgue-mértéket választva (4) bal oldala nulla, míg a jobb oldala 1.

63. A 0 pontban kezdve illesszünk egymáshoz $a_1, a_2, \ldots$ hosszúságú intervallumokat, amíg az 1-et elérjük. Ha ez az n-edik intervallumnál következik be, akkor az n-edik intervallumot 1-nél vágjuk le, majd ismét a 0 pontból kezdve illesszünk egymáshoz $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ hosszúságú intervallumokat, amíg az 1-et elérjük. Ha ez az m-edik intervallumnál következik be, akkor az m-edik intervallumot 1-nél vágjuk le, majd ismét a 0 pontból kezdve illesszünk egymáshoz $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ hosszúságú intervallumokat, amíg az 1-et elérjük, és ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig.

A kapott I_n intervallumokra teljesül $|I_n| \le a_n$ minden n-re. Mivel $[0, 1]$ minden pontja az I_n intervallumok közül végtelen soknak az eleme, így $\limsup_{n\to\infty} I_n =$

$[0,1]$.

64. Azt kell belátni, hogy $\mu(A)=0$, ahol $A=\limsup_{n\to\infty} A_n$. Ekkor $A=\bigcap_{N=1}^{\infty} B_N$, ahol $B_N=\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ $(N=1,2,\ldots)$. Mármost $\mu(B_N)\le\sum_{n=N}^{\infty}\mu(A_n)$. Mivel $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=n}^{\infty}\mu(A_n)\to 0$, ezért $\lim_{N\to\infty}\mu(B_N)=0$. Tekintve, hogy $\mu(A)\le\mu(B_N)$ minden N-re, ezért $\mu(A)=0$.

65. Mindkét állítás hamis. Legyen például μ a Lebesgue-mérték, és legyen $A_n=(0,1/n)$ minden n-re. Zárt intervallumokat is találhatunk: legyen $A_n=[1/(2n),1/n]$ minden n-re.

66. Legyen $H\subset X$ tetszőleges. Mivel $\overline{\mu}$ külső mérték, ezért $\overline{\mu}(H)\le\overline{\mu}(H\cap A)$ $+\overline{\mu}(H\setminus A)$, tehát elég belátni, hogy

$$\overline{\mu}(H)\ge\overline{\mu}(H\cap A)+\overline{\mu}(H\setminus A). \tag{34}$$

Ez nyilvánvaló, ha $\overline{\mu}(H)=\infty$, ezért feltehető $\overline{\mu}(H)<\infty$. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor vannak olyan $A_n\in\mathcal{P}$ halmazok, hogy $H\subset A_1\cup A_2\cup\ldots$ és $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\overline{\mu}(H)+\varepsilon$. Ekkor $\overline{\mu}(H\cap A)\le\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu}(A_n\cap A)$ és $\overline{\mu}(H\setminus A)\le\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu}(A_n\setminus A)$. Mivel A jól vágja ketté az A_n halmazokat, és mivel $\overline{\mu}$ kiterjesztése μ-nek, ezért $\overline{\mu}(A_n\cap A)+\overline{\mu}(A_n\setminus A)=\overline{\mu}(A_n)=\mu(A_n)$ minden n-re. Így

$$\overline{\mu}(H\cap A)+\overline{\mu}(H\setminus A)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\overline{\mu}(H)+\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezzel (34)-et beláttuk.

67. Tegyük fel, hogy $\mu\not\equiv 0$. Ekkor $0\ne\mu(\mathbb{R})\le\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu([n-1,n])$, tehát van olyan n, hogy $\mu([n-1,n])>0$. Így $\mu([n-1,n])=1$. Legyen $I_1=[n-1,n]$. Tegyük fel, hogy $k\ge 1$, és már definiáltuk az I_k korlátos, zárt intervallumot, amelyre $\mu(I_k)=1$. Felezzük el I_k-t. Ekkor a két félintervallum közül legalább az egyiknek a mértéke pozitív, tehát 1. Jelöljük I_{k+1}-gyel az egyik ilyen zárt félintervallumot. Ezzel az I_k intervallumokat minden k-ra definiáltuk.

Az $I_1\supset I_2\supset\ldots$ intervallumsorozatnak pontosan egy közös pontja van, hiszen $|I_k|\to 0$. Legyen $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k=\{x\}$. Mivel $I_1\supset I_2\supset\ldots$ és $\mu(I_1)<\infty$, ezért

$$\mu(\{x\})=\lim_{k\to\infty}\mu(I_k)=1.$$

Világos, hogy ha $x \in H \subset \mathbb{R}$, akkor $\mu(H) = 1$. Így $\mu(\mathbb{R}) = 1$, tehát $\mu(\mathbb{R}\setminus\{x\}) = 0$, amiből $\mu(H) = 0$ minden olyan H halmazra, amely nem tartalmazza x-et.

68. Tegyük fel, hogy μ_f mérték. Ekkor f monoton növő, hiszen μ_f nemnegatív, és így $f(b) - f(a) = \mu_f([a, b)) \geq 0$ minden $a, b \in I$, $a < b$-re. Belátjuk, hogy f balról folytonos. Ha (b_n) szigorúan növőleg b-hez tart, akkor $f(b_n) \to f(b)$. Valóban, ha (b_n) szigorúan növőleg b-hez tart, akkor a $[b_1, b_n)$ halmazok sorozata szintén növő és az uniójuk $[b_1, b)$, tehát, mivel μ_f mérték, így $\mu_f([b_1, b_n)) \to \mu_f([b_1, b))$, azaz $f(b_n) - f(b_1) \to f(b) - f(b_1)$. Ebből kapjuk, hogy $f(b_n) \to f(b)$, tehát f balról folytonos.

Most tegyük fel, hogy f monoton növő és balról folytonos. Megmutatjuk, hogy μ_f mérték. Mivel additív, ezért elég belátni, hogy külső mérték. Legyen $[a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$. Be kell látnunk, hogy

$$\mu_f([a, b)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f([a_n, b_n)). \tag{35}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ha I alulról korlátos, akkor terjesszük ki f-et $\mathbb{R}$-re úgy, hogy a $(-\infty, \min I]$ intervallumon konstans legyen. Mivel f balról folytonos, ezért vannak olyan $a < c < b$ és $c_n < a_n$ pontok, hogy $f(b) - f(c) < \varepsilon$ és $f(a_n) - f(c_n) < \varepsilon/2^n$ minden n-re. Ekkor

$$[a, c] \subset [a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, b_n).$$

Így a Borel-féle lefedési tétel szerint van olyan N, hogy

$$[a, c) \subset [a, c] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (c_n, b_n) \subset \bigcup_{n=1}^{N} [c_n, b_n).$$

Mivel μ_f additív és nemnegatív, ebből egyszerűen levezethető, hogy

$$\mu_f([a, c)) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu_f([c_n, b_n)).$$

Mármost $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a) < f(c) - f(a) + \varepsilon = \mu_f([a, c)) + \varepsilon$ és

$$\mu_f([c_n, b_n)) = f(b_n) - f(c_n) < f(b_n) - f(a_n) + \varepsilon/2^n = \mu_f([a_n, b_n)) + \varepsilon/2^n$$

minden n-re. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\mu_f([a,b)) < \mu_f([a,c)) + \varepsilon \le \sum_{n=1}^{N} \mu_f([c_n,b_n)) + \varepsilon < \sum_{n=1}^{N} ([a_n,b_n) + \varepsilon/2^n) + \varepsilon <$$
$$< \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f([a_n,b_n)) + 2\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezzel (35)-öt beláttuk.

A μ_f halmazfüggvény additív a $\mathcal{P}_I$ félgyűrűn, tehát akkor és csak akkor külső mérték, ha mérték. Így pontosan akkor lesz külső mérték, ha f monoton növő és balról folytonos.

69. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges. Tegyük fel először, hogy $0 \in H$. Ha a H halmazt lefedik az $[a_n, b_n)$ intervallumok, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}(f(b_n) - f(a_n)) \ge 1$, hiszen $f(b_n) - f(a_n) = 1$ valahányszor $0 \in [a_n, b_n)$. Mivel az $[a_n, b_n) = [n-1, n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ lefedőrendszerre a szumma értéke 1, ezért $\mu_f(H) = 1$, ha $0 \in H$. Ha viszont $0 \notin H$, akkor H-t lefedhetjük olyan intervallumrendszerrel, amelyik nem tartalmazza a nullát, tehát amelyre $\sum_{n=1}^{\infty}(f(b_n) - f(a_n)) = 0$. Ilyen lefedést szolgáltatnak az $[n-1, n)$ $(n = -1, -2, \ldots)$ és $[1/k, k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ intervallumok. Így $\mu_f(H) = 0$, ha $0 \notin H$.

70. A nullmértékű halmazok mindent jól vágnak ketté, tehát mérhetőek. Mivel a Borel-halmazok is mérhetőek, az *akkor* állítás világos.

Most tegyük fel, hogy H mérhető. Adott $\varepsilon > 0$-ra legyenek $[a_n, b_n)$ olyan intervallumok, melyek lefedik H-t, és melyekre $\sum_{n=1}^{\infty}(f(b_n) - f(a_n)) < \mu_f(H) + \varepsilon$. Mivel f balról folytonos, vannak olyan $c_n < a_n$ számok, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}(f(b_n) - f(c_n)) < \mu_f(H) + \varepsilon$. Ha $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(c_n, b_n)$, akkor G olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza H-t és amelyre $\mu_f(G) < \mu_f(H) + \varepsilon$. Mivel H mérhető, ezért $\mu_f(G \setminus H) < \varepsilon$.

Legyen G_n olyan nyílt halmaz, mely tartalmazza H-t és melyre $\mu_f(G_n \setminus H) < 1/n$. Ekkor $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ olyan G_δ halmaz, amely tartalmazza H-t, és amelyre $\mu_f(U \setminus H) = 0$. Mivel $[a,b) \setminus H$ is mérhető, van olyan V Borel-halmaz, amelyre $[a,b) \setminus H \subset V$ és $\mu_f(V \setminus ([a,b) \setminus H)) = 0$. Ekkor $W = [a,b) \setminus V$ olyan Borel-halmaz, amelyre $W \subset H$ és $\mu_f(H \setminus W) = 0$.

71. (i)$\Longrightarrow$(ii): Tegyük fel, hogy f balról folytonos és korlátos változású. Jelölje

$V(x)$ az f függvény totális variációját a $[\min I, x]$ intervallumon. Ekkor V és $V - f$ egyaránt monoton növő függvények I-n. Nem nehéz belátni, hogy ha f balról folytonos, akkor ugyanez igaz V-re is.

A 68. feladat állítása szerint μ_V és μ_{V-f} mértékek a $\mathcal{P}^1(I)$ félgyűrűn. Mivel végesek is, ezért $\mu_V - \mu_{V-f}$ előjeles mérték $\mathcal{P}^1(I)$-n. Nyilvánvaló, hogy $\vartheta_f = \mu_V - \mu_{V-f}$, tehát ϑ_f előjeles mérték $\mathcal{P}^1(I)$-n.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Ez ugyanúgy bizonyítható, mint a 68. feladat megoldásában. De többet is állíthatunk. Ha $x \in I$ és $x_n \in I$ egy szigorúan monoton növő x-hez tartó sorozat, akkor $\vartheta_f([x_1, x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([x_n, x_{n+1}))$. Amint azt az előjeles mérték definíciója után megjegyeztük, ebből következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([x_n, x_{n+1}))$ sor abszolút konvergens. Így $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \infty$. Azt kaptuk, hogy valahányszor az $x_n \in I$ sorozat szigorúan monoton növő, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \infty$.

A fenti megfigyelés felhasználásával könnyű olyan balról folytonos (sőt folytonos) f függvényt konstruálni, amelyre ϑ_f nem előjeles mérték $\mathcal{P}^1(I)$-n. Legyen $I = [-1, 0]$, legyen $f(x) = x \cdot \cos(1/x)$, ha $x \in [-1, 0)$, és legyen $f(0) = 0$. Ekkor f folytonos $[-1, 0]$-ban. Ha $x_n = -(n \cdot \pi)^{-1}$, akkor $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < 0$, de könnyen láthatóan $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_{n+1}) - f(x_n)| = \infty$. Így ϑ_f nem előjeles mérték $\mathcal{P}^1(I)$-n. Tehát az (ii)$\Longrightarrow$(iii) implikáció nem megfordítható.

Ha f balról folytonos az $I = [a, b]$ intervallumon és korlátos változású $[c, b]$-ben minden $a < c < b$-re, akkor ϑ_f előjeles mérték $\mathcal{P}^1(I)$-n. Tegyük fel ugyanis, hogy $[a_0, b_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$, ahol $a \le a_0 < b_0 \le b$ és az $[a_n, b_n)$ intervallumok páronként diszjunktak. Ekkor $a_0 \in [a_n, b_n)$ egy alkalmas n-re. Feltehetjük, hogy $a_0 \in [a_1, b_1)$. Ekkor szükségképpen $a_0 = a_1$. Mivel f balról folytonos és korlátos változású a $[b_1, b_0]$ intervallumon, ezért ϑ_f előjeles mérték a $\mathcal{P}^1([b_1, b_0])$ félgyűrűn. Mivel $[b_1, b_0) = \bigcup_{n=2}^{\infty} [a_n, b_n)$, ezért $\vartheta_f([b_1, b_0)) = \sum_{n=2}^{\infty} \vartheta_f([a_n, b_n))$, tehát $\vartheta_f([a_0, b_0)) = \vartheta_f([a_0, b_1)) + \sum_{n=2}^{\infty} \vartheta_f([a_n, b_n))$. Ezzel beláttuk, hogy ϑ_f előjeles mérték $\mathcal{P}^1(I)$-n.

Ha tehát konstruálunk egy f függvényt, amely folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, korlátos változású $[c, 1]$-ben minden $0 < c < 1$-re, de nem korlátos változású

$[0,1]$-en, akkor ezzel megmutatjuk, hogy az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikáció nem megfordítható. Ilyen függvény pl. az $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$ $(x \in (0,1])$, $f(0) = 0$ függvény.

72. Az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikációt már beláttuk az előző (71.) feladat megoldásában.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Tegyük fel (ii)-t, és legyen $\min I < x \le \max I$ adott. Tegyük fel, hogy f nem korlátos változású x egyetlen bal oldali környezetében sem. Legyen $x_1 \in I$, $x_1 < x$ tetszőleges. Mivel f nem korlátos változású $[x_1, x]$-ben, vannak olyan $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_1} < x$ pontok, hogy $\sum_{i=1}^{n_1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > 1$. Mivel f nem korlátos változású $[x_{n_1}, x]$-ben, vannak olyan $x_{n_1} < x_{n_1+1} < \ldots < x_{n_2} < x$ pontok, hogy $\sum_{i=n_1}^{n_2} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > 1$. Az eljárást folytatva kapjuk a szigorúan növő (x_n) sorozatot, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_{n+1}) - f(x_n)| = \infty$, ami ellentmond (ii)-nek.

(iii)$\Longrightarrow$(i): Ha (iii) igaz, akkor az előző (71.) feladat állítása szerint minden $\min I < x \le \max I$ pontnak van olyan bal oldali környezete, amelyben ϑ_f előjeles mérték. Legyen $[a_0, b_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$, ahol $a \le a_0 < b_0 \le b$ és az $[a_n, b_n)$ intervallumok páronként diszjunktak. Be kell látnunk, hogy

$$\vartheta_f([a_0, b_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([a_n, b_n)). \tag{36}$$

Világos, hogy $a_0 \in [a_n, b_n)$ egy alkalmas n-re. Feltehetjük, hogy $a_0 \in [a_1, b_1)$. Ekkor szükségképpen $a_0 = a_1$. Jelöljük S-sel azon $x \in [a_0, b_0]$ pontok halmazát, amelyekre teljesül, hogy

$$\vartheta_f([a_0, b_0) \cap [a_0, x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([a_n, b_n) \cap [a_0, x)). \tag{37}$$

Ha megmutatjuk, hogy $b_0 \in S$, akkor ezzel (36)-ot is beláttuk. Világos, hogy $[a_0, b_1] \subset S$. Legyen $\sup S = x_0$. Legyen $[x_0 - \delta, x_0]$ olyan olyan bal oldali környezete x_0-nak, amelyben ϑ_f előjeles mérték. Mivel $\sup S = x_0$, ezért van olyan $x_0 - \delta < x \le x_0$, hogy $x \in S$. Ekkor fennáll (37). Mivel ϑ_f előjeles mérték $\mathcal{P}^1([x, x_0])$-ban, ezért

$$\vartheta_f([a_0, b_0) \cap [x, x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_f([a_n, b_n) \cap [x, x_0)).$$

Ha ehhez hozzáadjuk (37)-et, akkor megkapjuk (37)-et $x = x_0$-ra. Ezzel beláttuk, hogy $x_0 \in S$. Most megmutatjuk, hogy $x_0 = b_0$. Tegyük fel, hogy $x_0 < b_0$.

Ekkor $x_0 \in [a_k, b_k)$ egy alkalmas k-ra. Világos, hogy ha (37) fennáll $x = x_0$-ra, akkor fennáll $x = b_k$-ra is, tehát $b_k \in S$. Ez azonban lehetetlen, mert $x_0 < b_k$ és $x_0 = \sup S$. Ezzel beláttuk, hogy $b_0 \in S$.

73. Belátjuk, hogy π külső mérték. Tegyük fel, hogy $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és $A \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Legyen $B_1 = A_1$ és $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$ minden $n > 1$-re. Ekkor tetszőleges $B \in \mathcal{A}|_A$ halmazra

$$\vartheta(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(B \cap B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n),$$

hiszen $B \cap B_n \subset B_n \subset A_n$ minden n-re. Ebből nyilvánvaló, hogy $\pi(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n)$, amivel beláttuk, hogy π külső mérték. Mivel π additív a 32. feladat állítása szerint, ezért π mérték.

Mármost ν megegyezik $-\vartheta$ pozitív részével, ezért ν is mérték. Végül, ismét a 32. feladat állítása szerint $\tau = \pi + \nu$, tehát τ is mérték.

74. Legyen $T \subset \mathbb{R}^p$ egy rögzített tégla, és jelöljük $\mathcal{C}$-vel azon $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ halmazok rendszerét, amelyekre $\vartheta(B \cap T) = \xi(B \cap T)$. A feltétel szerint $\mathcal{C}$ tartalmazza a $\mathcal{P}^p$ félgyűrűt (hiszen két tégla metszete tégla).

Nyilvánvaló, hogy ha $A, B \in \mathcal{C}$ diszjunkt halmazok, akkor $A \cup B \in \mathcal{C}$. Ezért $\mathcal{C}$ tartalmazza a $\mathcal{P}^p$ által generált $\mathcal{R}$ gyűrűt is.

Belátjuk, hogy $\mathcal{C}$ monoton osztály. Valóban, ha $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ a $\mathcal{C}$ halmazrendszer elemei és $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor

$$\vartheta(A \cap T) = \lim_{n\to\infty} \vartheta(A_n \cap T) = \lim_{n\to\infty} \xi(A_n \cap T) = \xi(A \cap T),$$

tehát $A \in \mathcal{C}$. Ugyanígy látható, hogy ha $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A_n \in \mathcal{C}$ minden n-re és $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor $\vartheta(A) = \xi(A)$, tehát $A \in \mathcal{C}$. (Itt fel kell használni, hogy $\vartheta(A \cap T)$ és $\xi(A \cap T)$ végesek minden $A \in \mathcal{C}$ halmazra, mert a feltétel szerint $\vartheta(T) = \xi(T) \in \mathbb{R}$.)

A 28. feladat állítása szerint $\mathcal{C}$ tartalmazza az $\mathcal{R}$ gyűrű által generált σ-gyűrűt, azaz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$-t. Ezzel beláttuk, hogy $\vartheta(A) = \xi(A)$ minden A korlátos Borel-halmazra. Mivel $\mathbb{R}^p$-ben minden Borel-halmaz előáll mint korlátos Borel-halmazok növő uniója, ezért $\vartheta(A) = \xi(A)$ minden A Borel-halmazra. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

A végességi feltétel nélkül az állítás nem igaz, még mértékekre sem. Legyen $\mu(A) = \infty$, ha $A \ne \emptyset$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\nu(A) = \infty$, ha A nem megszámlálható, és

$\nu(A) = 0$, ha A megszámlálható. Ekkor μ és ν mértékek $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$-n (valójában $P(\mathbb{R}^p)$-n), és $\mu(R) = \nu(R) \in \mathbb{R}$ minden $R \in \mathcal{P}^p$-re (valójában minden nem-megszámlálható R halmazra). Azonban μ és ν különböznek a megszámlálhatóan végtelen halmazokon. Másik példa: legyen $\mu(A) = |A|$, ha A véges, legyen $\mu(A) = \infty$, ha A végtelen, és legyen $\nu = 2 \cdot \mu$.

75. Jelöljük $\mathcal{A}$-val azon $A \in \mathcal{B}(G)$ halmazok rendszerét, amelyekre teljesül, hogy

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \colon F \subset A \text{ zárt}\}, \tag{38}$$

és

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \colon A \subset U \subset G \text{ nyílt}\}. \tag{39}$$

Jelöljük $\mathcal{G}$-vel G nyílt részhalmazainak rendszerét. Belátjuk, hogy $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$. Legyen $U \in \mathcal{G}$. Mivel minden nyílt halmaz F_σ, ezért $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, ahol F_n zárt minden n-re. Feltehetjük, hogy $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, mert különben F_n-et kicseréljük a $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ halmazra. Ekkor $\mu(F_n) \to \mu(U)$, tehát (38) teljesül $A = U$-val. Ugyanez nyilvánvaló (39)-re, tehát $U \in \mathcal{A}$.

Most belátjuk, hogy ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel $A_n \in \mathcal{A}$, ezért vannak olyan $F_n \subset A_n$ zárt halmazok, hogy $\mu(A_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^n$ minden n-re. Ekkor az $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ halmazra $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$, hiszen $A \setminus F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus F_n)$. Legyen $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Ekkor a K_n halmazok zártak, monoton növő halmazsorozatot alkotnak, és az uniójuk F. Így $\mu(K_n) \to \mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$, tehát elég nagy n-re $\mu(K_n) > \mu(A) - \varepsilon$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezzel beláttuk, hogy A-ra teljesül (38).

Mivel $A_n \in \mathcal{A}$, ezért vannak olyan $A_n \subset U_n \subset G$ nyílt halmazok, hogy $\mu(U_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$ minden n-re. Ekkor az $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ halmazra $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$, hiszen $U \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus A_n)$. Legyen $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Ekkor U nyílt, és $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$, amivel beláttuk, hogy A-ra teljesül (39). Tehát $A \in \mathcal{A}$.

Hasonló okoskodás adja, hogy ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Az 53. feladat állítása szerint $\mathcal{B}(G) \subset \mathcal{A}$. Mivel $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(G)$, így $\mathcal{A} = \mathcal{B}(G)$, és ezt kellett megmutatni.

76. A Hahn-tétel szerint van olyan $P \subset X$ halmaz, hogy P és $X \setminus P$ legalább egyike $\mathcal{A}$-ban van, és minden $A \in \mathcal{A}$-ra $\vartheta(A \cap P) \geq 0$ és $\vartheta(A \setminus P) \leq 0$. Ha ϑ-ról áttérünk $-\vartheta$-ra, akkor P és $X \setminus P$ szerepe felcserélődik. Ezért feltehetjük, hogy $P \in \mathcal{A}$. Ekkor

$$\vartheta(A) = \vartheta(A \cap P) + \vartheta(A \setminus P) \leq \vartheta(A \cap P) \leq \vartheta(A \cap P) + \vartheta(P \setminus A) = \vartheta(P)$$

minden $A \in \mathcal{A}$-ra, tehát ϑ felveszi a legnagyobb értékét P-ben.

Legyen ϑ értékkészletének infimuma m. Ekkor léteznek olyan $A_n \in \mathcal{A}$ halmazok, hogy $\vartheta(A_n) \to m$. Mivel

$$\vartheta(A_n) = \vartheta(A_n \cap P) + \vartheta(A_n \setminus P) \geq \vartheta(A_n \setminus P) \geq m$$

minden n-re, ezért $\vartheta(A_n \setminus P) \to m$.

A ϑ halmazfüggvény a $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} \colon A \cap P = \emptyset\}$ gyűrűn nempozitív és additív. Ezért itt ϑ monoton csökkenő: ha $A, B \in \mathcal{C}$ és $A \subset B$, akkor $\vartheta(A) \geq \vartheta(B)$, hiszen $\vartheta(B) = \vartheta(A) + \vartheta(B \setminus A) \leq \vartheta(A)$.

Ha tehát $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus P)$, akkor $\vartheta(A_n \setminus P) \geq \vartheta(B)$ minden n-re. Mivel $\vartheta(A_n \setminus P) \to m$ és $\vartheta(B) \geq m$, ezért $\vartheta(B) = m$. Tehát ϑ felveszi a legkisebb értékét B-ben. Ezzel (i)-et beláttuk.

Mivel ϑ additív az $\mathcal{A}$ gyűrűn, ezért nem veheti fel a ∞ és $-\infty$ értékek mindegyikét. Így ϑ maximuma és minimuma közül legalább egyik véges, tehát ϑ alulról vagy felülről korlátos. Ezzel (ii)-t is beláttuk.

77. Az előző (76.) feladat (i) állítása szerint vannak olyan $C, D \in \mathcal{A}$ halmazok, hogy $\vartheta(C) \leq \vartheta(H) \leq \vartheta(D)$ minden $H \in \mathcal{A}$-ra. Ekkor az $A = C \cup D$ halmaz kielégíti a feltételt. Legyen ugyanis $B \in \mathcal{A}$ olyan halmaz, amelyre $B \cap A = \emptyset$. Ha $\vartheta(B) > 0$, akkor $\vartheta(D \cup B) = \vartheta(D) + \vartheta(B) > \vartheta(D)$, hiszen $\vartheta(D)$ véges. Ez azonban ellentmond annak, hogy $\vartheta(D)$ a ϑ függvény maximális értéke. Ha pedig $\vartheta(B) < 0$, akkor $\vartheta(C \cup B) = \vartheta(C) + \vartheta(B) < \vartheta(C)$, hiszen $\vartheta(C)$ is véges. Ez ellentmond annak, hogy $\vartheta(C)$ a ϑ függvény minimális értéke. Ezért csak $\vartheta(B) = 0$ lehetséges.

78. Legyen $\mathcal{A} = \{H : H \subset \mathbb{Z} \text{ véges}\}$, és legyen $\mu(H)$ a H halmaz pozitív elemeinek száma mínusz H negatív elemeinek száma minden $H \in \mathcal{A}$-ra. Világos, hogy μ előjeles mérték $\mathcal{A}$-n. A μ előjeles mértéket sokféleképpen kiterjeszthetjük $P(X)$-re additívan. Legyen pl. $\mu(H) = \infty$ minden végtelen H-ra.

Másrészt világos, hogy μ nem terjeszthető ki $P(\mathbb{Z})$-re σ-additívan, hiszen ekkor $\mu(\mathbb{N}) = \infty$ és $\mu(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = -\infty$ teljesülne, holott μ nem veheti fel ∞ és $-\infty$ mindegyikét.

79. Tegyük fel, hogy ϑ alulról vagy felülről korlátos. Feltehetjük, hogy felülről korlátos, mert különben áttérünk a $-\vartheta$ halmazfüggvényre. Tegyük fel, hogy $\vartheta(A) \leq K$ minden $A \in \mathcal{A}$-ra. Ekkor $\pi \leq K$ mindenütt $\mathcal{A}$-n, tehát π véges. Így $\vartheta = \pi - \nu$ mindenütt $\mathcal{A}$-n.

Jelöljük az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűt $\mathcal{R}$-rel. Mivel π és ν mértékek, ezért kiterjeszthetők mértékként $\mathcal{R}$-re. Legyenek a kiterjesztések $\overline{\pi}$ és $\overline{\nu}$.

Legyen $B \in \mathcal{R}$ tetszőleges, belátjuk, hogy $\overline{\pi}(B) \leq K$. A 14. feladat szerint vannak olyan $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok, hogy $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Feltehetjük, hogy az A_i halmazok páronként diszjunktak, mert különben áttérünk az $A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$ halmazokra. Mivel $\overline{\pi}(B)$ mérték, ezért külső mérték, tehát

$$\overline{\pi}(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\pi}(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \overline{\pi}(A_n) = \lim_{N\to\infty} \overline{\pi}(A_1 \cup \ldots \cup A_N) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \pi(A_1 \cup \ldots \cup A_N) \leq K.$$

Itt az utolsó egyenlőség abból következik, hogy $A_1 \cup \ldots \cup A_N \in \mathcal{A}$ és $\overline{\pi}$ kiterjesztése π-nek. Ezzel beláttuk, hogy $\overline{\pi} \leq K$ mindenütt $\mathcal{A}$-n. Ezért $\overline{\pi} - \overline{\nu}$ mindenütt értelmes, és egy előjeles mértéket definiál $\mathcal{A}$-n, ami ϑ kiterjesztése.

Most tegyük fel, hogy ϑ kiterjeszthető előjeles mértékként az $\mathcal{R}$ σ-gyűrűre. Ekkor a Hahn-tétel következménye szerint a kiterjesztés vagy alulról, vagy felülről korlátos. Így ugyanez igaz kell, hogy legyen ϑ-ra is.

80. Jelölje $\mathcal{R}$ az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűt. Tegyük fel először, hogy az $A \in \mathcal{R}$ halmaz lefedhető egy véges ϑ-mértékű $\mathcal{A}$-beli halmazzal. Legyen $\mathcal{C}$ azon $B \in \mathcal{R}$ halmazok rendszere, amelyekre teljesül, hogy ϑ minden, előjeles mértékként $\mathcal{R}$-re való kiterjesztésének ugyanaz az értéke $B \cap A$-ban. Belátjuk, hogy $A \in \mathcal{C}$.

Mivel ϑ bármely két kiterjesztésének $\mathcal{A}$ minden elemében megegyezik az értéke, ezért $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{C}$ monoton osztály. (A monoton osztály fogalmát a 28. feladatban definiáltuk.) Tegyük fel, hogy a $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ halmazok elemei $\mathcal{C}$-nek, és legyen $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Mivel $B_n \in \mathcal{R}$ és $\mathcal{R}$ σ-gyűrű, ezért $B \in \mathcal{R}$. Legyenek ϑ_1 és ϑ_2 előjeles mértékek $\mathcal{R}$-en, melyek kiterjesztései ϑ-nak. Mivel $B_n \in \mathcal{C}$, ezért $\vartheta_1(B_n \cap A) = \vartheta_2(B_n \cap A)$ minden n-re. Tekintve, hogy $\vartheta_1(B_n \cap A)$ és $\vartheta_2(B_n \cap A)$ végesek (hiszen A lefedhető egy véges ϑ-mértékű $\mathcal{A}$-beli halmazzal), ezért

$$\vartheta_1(B \cap A) = \lim_{n\to\infty} \vartheta_1(B_n \cap A) = \lim_{n\to\infty} \vartheta_2(B_n \cap A) = \vartheta_2(B \cap A).$$

Ezzel beláttuk, hogy $B \in \mathcal{C}$. Ugyanígy bizonyítható, hogy ha a $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ halmazok elemei $\mathcal{C}$-nek, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$. Tehát $\mathcal{C}$ monoton osztály.

A 28. feladat állítása szerint $\mathcal{C}$ tartalmazza $\mathcal{R}$-et, tehát $\mathcal{C} = \mathcal{R}$. Így $A \in \mathcal{C}$, azaz az A-ra való kiterjesztés egyértelmű.

Most tegyük fel, hogy az $A \in \mathcal{R}$ halmaz lefedhető a véges ϑ-mértékű $A_n \in \mathcal{A}$ halmazokkal $(n = 1, 2, \ldots)$. Legyen $B_1 = A_1$ és $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$ $(n > 1)$.

Mivel $\mathcal{A}$ gyűrű, ezért $B_n \in \mathcal{A}$ minden n-re. Ha ϑ_1 előjeles mérték $\mathcal{R}$-en, amely kiterjesztése ϑ-nak, akkor $\vartheta_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_1(B_n \cap A)$. Mivel $B_n \cap A \subset A_n$ és $\vartheta(A_n)$ véges, így ϑ minden $\mathcal{R}$-re való kiterjesztésének ugyanaz az értéke $B_n \cap A$-ban minden n-re. Így ugyanez igaz A-ra is.

81. A megoldásban felhasználjuk az első kategóriájú halmaz fogalmát és az ún. kategória-tételt. Legyen (X, d) metrikus tér. A $H \subset X$ halmaz *első kategóriájú*, ha előáll megszámlálhatóan sok, sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként. A *kategória-tétel* azt állítja, hogy ha az (X, d) metrikus tér teljes, akkor a nemüres nyílt halmazok nem első kategóriájúak (lásd [6, I.7.1. Tétel]). A megoldásban arra lesz szükségünk, hogy $\mathbb{R}$ maga nem első kategóriájú az $(\mathbb{R}, d)$ teljes metrikus térben, ahol d a szokásos metrika: $d(x, y) = |x - y|$.

Jelölje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a számegyenes Borel-halmazainak σ-algebráját, és legyen $\mathcal{I} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\colon B \text{ első kategóriájú}\}$. Ekkor megszámlálhatóan sok $\mathcal{I}$-beli halmaz uniója is $\mathcal{I}$-ben van, és minden $\mathcal{I}$-beli halmaz bármely Borel-részhalmaza is $\mathcal{I}$-ben van. Mivel $\mathbb{R}$ nem első kategóriájú, ebből egyszerűen következik, hogy $\mathcal{A} = \mathcal{I} \cup \{\mathbb{R} \setminus B\colon B \in \mathcal{I}\}$ σ-algebra. Az is könnyen látható, hogy ha $\mu(B) = 0$ és $\mu(\mathbb{R} \setminus B) = 1$ minden $B \in \mathcal{I}$-re, akkor μ mérték $\mathcal{A}$-n. Megmutatjuk, hogy μ nem terjeszthető ki mértékként $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-re.

Tegyük fel, hogy ϑ mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-n, és kiterjesztése μ-nek. Ekkor $\vartheta(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}) = 1$, amiből következik, hogy ϑ véges értékű. Így

$$\lim_{k\to\infty} \vartheta((x - 1/k, x + 1/k)) = \vartheta(\{x\}) = \mu(\{x\}) = 0$$

minden $x \in \mathbb{R}$-re. Legyen $r_1, r_2, \ldots$ a racionális számok egy sorozatba rendezése. A fentiek szerint minden n-re van olyan $\delta_n > 0$, hogy $\vartheta((r_n - \delta_n, r_n + \delta_n)) < 1/2^{n+1}$. Legyen $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \delta_n, r_n + \delta_n)$. Ekkor G sűrű nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, és $\vartheta(G) < 1/2$. Így $F = \mathbb{R} \setminus G$ sehol sem sűrű zárt, és $\vartheta(F) > 1/2$. Ez azonban lehetetlen, mert minden sehol sem sűrű halmaz első kategóriájú, tehát $\vartheta(F) = \mu(F) = 0$. Ezzel beláttuk, hogy μ nem terjeszthető ki mértékként $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-re.

A fenti gondolatmenet kis módosításával belátjuk, hogy μ előjeles mértékként sem terjeszthető ki $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-re. Tegyük fel, hogy ϑ előjeles mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-n, és kiterjesztése μ-nek. Ekkor $\vartheta(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}) = 1$, amiből következik, hogy ϑ véges értékű. Így ϑ korlátos a Hahn-féle felbontási tétel szerint. Tudjuk, hogy $\vartheta = \pi - \nu$, ahol π és ν mértékek $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-n (l. a 32. és 73. feladatokat).

Mivel $\mu(\{x\}) = 0$, ezért a pozitív rész és a negatív rész definíciójából azonnal következik, hogy $\pi(\{x\}) = \nu(\{x\}) = 0$ minden x-re. Így

$$\lim_{k\to\infty} \pi((x - 1/k, x + 1/k)) = \pi(\{x\}) = 0$$

és

$$\lim_{k\to\infty} \nu((x-1/k, x+1/k)) = \nu(\{x\}) = 0$$

minden $x \in \mathbb{R}$-re. Legyen $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Minden n-re van olyan $\delta_n > 0$, hogy $\pi((r_n-\delta_n, r_n+\delta_n)) < 1/2^{n+2}$ és $\nu((r_n-\delta_n, r_n+\delta_n)) < 1/2^{n+2}$. Legyen $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n-\delta_n, r_n+\delta_n)$. Ekkor G sűrű nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, és $\vartheta(G) < 1/2$. Ebből ugyanúgy jutunk ellentmondásra, mint az előző esetben.

82. Megmutatjuk, hogy f balról folytonos $[a,b]$-ben. Legyen $a < c \le b$ és $\varepsilon > 0$ adott. Válasszunk egy N indexet úgy, hogy $\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| < \varepsilon$ teljesüljön. Ha δ elég kicsi, akkor a $(c-\delta, c)$ intervallum nem tartalmazza az $x_1, \ldots, x_N$ számok egyikét sem. Így $x \in (c-\delta, c)$ esetén

$$|f(c) - f(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| < \varepsilon,$$

tehát f balról folytonos c-ben. (Ugyanezzel a gondolatmenettel azt is meg lehet mutatni, hogy f jobbról folytonos minden $x \in [a,b) \setminus \{x_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$ pontban, de erre nem lesz szükségünk.)

Tetszőleges $a \le u < v \le b$-re

$$|f(v) - f(u)| = \left| \sum_{u \le x_n < v} u_n \right| \le \sum_{u \le x_n < v} |u_n|.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy ha $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ tetszőleges felosztás, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \le \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

tehát f korlátos változású.

A 71. feladat állítása szerint ϑ_f előjeles mérték a $\mathcal{P}^1([a,b])$ félgyűrűn. Mivel korlátos, ezért a 79. feladat állítása szerint ϑ_f kiterjeszthető előjeles mértékként a generált σ-gyűrűre, ami nem más mint az $[a,b)$ intervallum Borel-halmazainak $\mathcal{B}([a,b))$ rendszere. (Az utóbbi állítás ugyanúgy bizonyítható, mint a 41. feladat állítása.) Jelöljük ϑ-val a kapott előjeles mértéket.

Legyen $g(x_n) = u_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, és legyen $g(x) = 0$, ha $x \in [a,b] \setminus \{x_i \colon i = 1, 2, \ldots\}$. Belátjuk, hogy $\vartheta(H) = \sum\{g(x) \colon x \in H\}$ minden $H \in \mathcal{B}([a,b))$-re.

Legyen $\xi(H) = \sum\{g(x)\colon x \in H\}$ minden $H \in \mathcal{B}([a,b))$-re. Nyilvánvaló, hogy ξ mérték $\mathcal{P}^1([a,b])$-n, és hogy megegyezik ϑ_f-fel $\mathcal{P}^1([a,b])$ elemein. Mivel ϑ_f véges értékű, ezért egyértelműen terjeszthető ki $\mathcal{P}^1([a,b])$-ről $\mathcal{B}([a,b))$-re előjeles mértékként (lásd a 80. feladatot). Ezért $\mathcal{B}([a,b))$ elemein $\vartheta = \xi$.

83. Két megoldást adunk. A megoldásokban szereplő halmazokról mind feltesszük, illetve állítjuk, hogy elemei $\mathcal{A}$-nak. Ezért az $\mathcal{A}$-hoz való tartozást külön nem jelöljük és nem említjük.

1. Legyen μ értékkészletének szuprémuma s. Belátjuk, hogy μ értékkészlete a $[0,s]$ intervallum. Azt fogjuk belátni, hogy ha $0 < a < \mu(B)$, akkor van olyan A, amelyre $A \subset B$ és $\mu(A) = a$. Ebből azonnal következik, hogy μ értékkészlete tartalmazza a $[0,s)$ intervallumot. Ha ugyanis $0 < a < s$ tetszőleges, akkor van olyan B, hogy $a < \mu(B)$. Másrészt nyilvánvaló, hogy μ felveszi az s értéket, hiszen ha A_n olyan halmazok, melyekre $\mu(A_n) \to s$, akkor $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = s$.

Először is vegyük észre, hogy ha $0 < \mu(C)$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $A \subset C$, hogy $0 < \mu(A) < \varepsilon$. Valóban, a feltétel szerint van olyan $A_0 \subset C$ halmaz, hogy $0 < \mu(A_0) < \mu(C)$. Így $\mu(A_0) < \infty$. Ismét felhasználva a feltételt, találunk egy olyan $D \subset A_0$ halmazt, amelyre $0 < \mu(D) < \mu(A_0)$. Ekkor D és $A_0 \setminus D$ mindketten pozitív mértékűek, és legalább az egyikük mértéke $\le \mu(A_0)/2$. Legyen A_1 ez a halmaz (vagy az egyik, ha kettő van). Az eljárást A_1-re megismételve kapunk egy $A_2 \subset A_1$ halmazt, amelyre $0 < \mu(A_2) \le \mu(A_1)/2 \le \mu(A_0)/4$. Az eljárást folytatva kapjuk az A_n halmazokat minden n-re, és világos, hogy ha n elég nagy, akkor $0 < \mu(A_n) < \varepsilon$ teljesülni fog.

Legyenek $B \in \mathcal{A}$ és $0 < a < \mu(B) < \infty$ adottak. Legyen m_1 a $\{\mu(H)\colon H \subset B,\ \mu(H) < a)\}$ halmaz szuprémuma. A fentiek szerint $m_1 > 0$. Így választhatunk egy $A_1 \subset B$ halmazt, amelyre $m_1/2 < \mu(A_1) < a$. Legyen m_2 a $\{\mu(H)\colon H \subset B \setminus A_1,\ \mu(H) < a - \mu(A_1)\}$ halmaz szuprémuma. Ekkor $m_2 > 0$, tehát választhatunk egy $A_2 \subset B \setminus A_1$ halmazt, amelyre $m_2/2 < \mu(A_2) < a - \mu(A_1)$. Az eljárást folytatva kapjuk az A_n halmazokat és a pozitív m_n számokat minden n-re, melyekre teljesül, hogy $A_1, A_2, \ldots$ páronként diszjunkt részhalmazai B-nek, és $m_n/2 < \mu(A_n)$ valamint $\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) < a$ minden n-re. Így a $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sor konvergens (hiszen a véges), tehát $\mu(A_n) \to 0$ és $m_n \to 0$.

Legyen $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, belátjuk, hogy $\mu(A) = a$. Tegyük fel, hogy $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < a$, és legyen $\eta = a - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Mivel $\mu(A) < a < \mu(B)$, ezért $\mu(B \setminus A) > 0$. Mint láttuk, ebből következik, hogy van olyan $C \subset B \setminus A$ halmaz, amelyre $0 < \mu(C) < \eta$. Ekkor $C \subset B \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ és $\mu(C) < a - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i)$ minden n-re , ezért m_n definíciója szerint $m_n \ge \mu(C)$. Ez azonban ellentmond annak, hogy $m_n \to 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\mu(A) = a$.

2. Legyen μ értékkészletének szuprémuma s. A Zorn-lemmából következik, hogy létezik egy olyan $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ halmazrendszer, amely maximális arra a tulajdonságra nézve, hogy bármely két $A, B \in \mathcal{F}$ halmazra $\mu(A \setminus B) = 0$ vagy $\mu(B \setminus A) = 0$. Legyen $I = \{\mu(A)\colon A \in \mathcal{F}\}$. Megmutatjuk, hogy $I = [0, s]$. Először is belátjuk, hogy I zárt halmaz. Azt kell belátnunk, hogy ha $c_n \in I$ és $c_n \to c$, akkor $c \in I$. Ez nyilvánvaló, ha $c_n = c$ végtelen sok n-re. Feltehetjük tehát, hogy $c_n \neq c$ minden elég nagy n-re. Egy részsorozat kiválasztása után feltehetjük, hogy c_n szigorúan monoton.

Legyen $c_n = \mu(A_n)$, ahol $A_n \in \mathcal{F}$. Ha a c_n sorozat szigorúan monoton növő, akkor $\mu(A_n) < \mu(A_{n+1})$, tehát $\mu(A_n \setminus A_{n+1}) = 0$ minden n-re. Az A_n halmazokat egy nullmértékű halmazzal megváltoztatva feltehető, hogy $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. Legyen $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Ekkor $A \in \mathcal{F}$, mert különben hozzávehetnénk $\mathcal{F}$-hez, és így volna egy $\mathcal{F}$-nél szigorúan bővebb olyan halmazrendszer, amelyben bármely két $C, D \in \mathcal{F}$ halmazra $\mu(C \setminus D) = 0$ vagy $\mu(C \setminus D) = 0$ teljesül. Ez azonban lehetetlen, mert $\mathcal{F}$ maximális volt erre a tulajdonságra nézve. Így $A \in \mathcal{F}$ és

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} c_n = c,$$

tehát $c \in I$. A bizonyítás hasonló, ha a c_n sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ekkor a $B = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ halmazra teljesül $B \in \mathcal{F}$, továbbá

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Az utolsó lépéshez szükség van arra a feltételre, hogy $\mu(A_n)$ véges, ha n elég nagy. Ez abból következik, hogy $c_2 < c_1$, tehát $\mu(A_2) = c_2 < \infty$.

Ezzel beláttuk, hogy I zárt. Nyilvánvaló, hogy $0 \in I$, és azt is láttuk az előző megoldás elején, hogy $s \in I$. Ha $I \neq [0, s]$, akkor van olyan (a, b) nyílt intervallum, hogy $a, b \in I$ és $(a, b) \cap I = \emptyset$. Legyen $a = \mu(A)$ és $b = \mu(B)$, ahol $A, B \in \mathcal{F}$. Ekkor szükségképpen $\mu(A \setminus B) = 0$. Az A, B halmazokat egy nullmértékű halmazzal megváltoztatva feltehető, hogy $A \subset B$.

A feladat feltétele szerint van olyan $C \subset B \setminus A$ halmaz, amelyre $0 < \mu(C) < \mu(B \setminus A) = b - a$. Ekkor $\mu(A \cup C) \in (a, b)$, tehát $A \cup C \notin \mathcal{F}$. Ez azonban lehetetlen, mert az $A \cup C$ halmazt hozzávéve $\mathcal{F}$-hez ellentmondásba kerülünk $\mathcal{F}$ maximalitásával.

84. Először feltesszük, hogy létezik páronként diszjunkt atomoknak egy A_1, A_2, $\ldots$ sorozata, amely $\mathcal{A}$ minden elemét lefedi. Legyen $\mu(A_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, és legyen $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Ekkor $X \in \mathcal{A}$, tehát a feltevés szerint $\mu(X) < \infty$, és így $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subset X$, tehát

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) < \infty.$$

Mivel $\mu(A \cap A_n) = 0$ vagy $\mu(A \cap A_n) = a_n$ minden n-re, ezért $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, ahol $\varepsilon_n = 0, 1$ minden n-re.

Ezzel beláttuk, hogy μ értékkészlete egyenlő a $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ számok halmazával, ahol $\varepsilon_n = 0, 1$ minden n-re. Jelöljük K-val azon $x \in [0, 1]$ számok halmazát, amelyek tizedestört-alakjában minden jegy 0 vagy 1. Könnyen látható, hogy K a $[0, 1]$ intervallum egy zárt részhalmaza. Ha $x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \in K$, akkor legyen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$. Ezzel definiáltunk egy $f\colon K \to \mathbb{R}$ függvényt. Könnyű ellenőrizni, hogy f folytonos. Valóban, ha $x, y \in K$ és $|x - y| < 10^{-N}$, akkor x és y első N tizedesjegye megegyezik, tehát

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{n>N} a_n,$$

ami tetszőlegesen kicsi lehet, ha N elég nagy. Így f folytonos, tehát az $F = f(K)$ halmaz korlátos és zárt. Mivel μ értékkészlete egyenlő az F halmazzal, a feladat állítását ebben a speciális esetben beláttuk.

Most tekintsük az általános esetet. Legyen μ véges mérték az $\mathcal{A}$ σ-gyűrűn. Ha $\mathcal{A}$-ban nincs atom, akkor minden $A \in \mathcal{A}$-ra, ha $\mu(A) > 0$, akkor van olyan $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ halmaz, hogy $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Amint azt az előző (83.) feladatban láttuk, ekkor μ értékkészlete egy zárt intervallum.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$-ban van atom. Adott n-re csak véges sok páronként diszjunkt és $1/n$-nél nagyobb mértékű atom létezhet. Ha ugyanis végtelen sok lenne, akkor véve közülük megszámlálhatóan végtelen sokat, ezek uniójának a mértéke végtelen lenne, ami lehetetlen. Ha tehát veszünk páronként diszjunkt atomoknak egy maximális rendszerét, melyek mértéke 1-nél nagyobb, majd minden n-re veszünk páronként diszjunkt atomoknak egy maximális rendszerét, melyek mértéke az $(1/(n+1), 1/n]$ intervallumba esik, akkor az így kapott atomok egy véges vagy végtelen $A_1, A_2, \ldots$ sorozatba rendezhetők. Világos, hogy minden atom egyenlő az A_n halmazok valamelyikével egy nullmértékű halmaztól eltekintve.

Legyen $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Legyen továbbá $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A}\colon A \subset X\}$ és $\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{A}\colon A \cap X = \emptyset\}$. Amint azt a megoldás elején láttuk, μ értékkészlete az $\mathcal{A}_1$ σ-gyűrűn egy F korlátos és zárt halmaz. Az $\mathcal{A}_2$ σ-gyűrűben nincs atom, tehát μ értékkészlete az $\mathcal{A}_2$ σ-gyűrűn egy véges $[0, s]$ intervallum. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\mu(A) = \mu(A \cap X) + \mu(A \setminus X)$, és itt $A \cap X \in \mathcal{A}_1$ és $A \setminus X \in \mathcal{A}_2$. Így μ értékkészlete $\mathcal{A}$-n egyenlő az

$$F + [0, s] = \{a + b \colon a \in F,\ b \in [0, s]\}$$

halmazzal, ami szintén korlátos és zárt.

Az állítás tetszőleges mértékre általában nem igaz. Legyen $\mathcal{A} = P(\mathbb{N}^+)$, és legyen $\mu(H) = \sum_{n \in H} (1 + (1/n))$ minden $H \subset \mathbb{N}^+$-ra. Ekkor μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Azonban μ értékkészlete nem zárt, mert tartalmazza az $1 + (1/n)$ számokat minden n-re, de nem tartalmazza 1-et.

85. Legyen $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, ahol $A_1, A_2, \ldots$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok. Be kell látnunk, hogy

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{40}$$

Adott k-ra

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \geq \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \mu_n(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

Mivel ez minden k-ra igaz, ezért $\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Tegyük fel, hogy $\mu(A) > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, és legyen $a = \mu(A) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) > 0$. Ebből úgy fogunk ellentmondásra jutni, hogy belátjuk a következőt: vannak olyan diszjunkt $B_k \subset A$ halmazok, melyekre $\mu(B_k) \geq a/2$ minden $k = 1, 2, \ldots$-ra.

Minden k-ra létezik egy n_k index úgy, hogy $|\mu_n(A) - \mu(A)| < a/4$ és

$$|\mu_n(A_1 \cup \ldots \cup A_k) - \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k)| < a/4,$$

valahányszor $n \geq n_k$. Ha tehát $n \geq n_k$, akkor

$$\begin{aligned}
\mu_n(A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots) &= \mu_n(A) - \mu_n(A_1 \cup \ldots \cup A_k) > \\
&> \mu(A) - \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) - a/2 \geq \\
&\geq \mu(A) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - a/2 = a/2.
\end{aligned}$$

Így létezik egy n-től függő $m > k$ index, amelyre

$$\mu_n(A_{k+1} \cup \ldots \cup A_m) > a/2.$$

A fentieket $k = 1$-re alkalmazva kapjuk az n_1 és m_1 indexeket úgy, hogy $\mu_{n_1}(C_1) > a/2$, ahol $C_1 = A_1 \cup \ldots \cup A_{m_1}$. A fenti okoskodást $k = m_1 + 1$-re alkalmazva kapjuk az $n_2 > n_1$ és $m_2 > m_1$ indexeket úgy, hogy $\mu_{n_2}(C_2) > a/2$, ahol $C_2 = A_{m_1+1} \cup \ldots \cup A_{m_2}$. Ezt ismételve kapjuk az $n_3 > n_2$ és $m_3 > m_2$ indexeket úgy, hogy $\mu_{n_3}(C_3) > a/2$, ahol $C_3 = A_{m_2+1} \cup \ldots \cup A_{m_3}$ és így tovább.

Legyen B a C_i halmazok közül bármely végtelen soknak az uniója. Ekkor $\mu_n(B) > a/2$ végtelen sok n-re, tehát $\mu(B) \geq a/2$. Nyilvánvaló, hogy végtelen sok páronként diszjunkt ilyen B halmazt kaphatunk. Ez azonban lehetetlen, mert μ nemnegatív és additív halmazfüggvény és $\mu(A) < \infty$, tehát A-nak legfeljebb véges sok ilyen részhalmaza lehet. Ez ellentmondás, amivel a (40) egyenlőséget beláttuk.

Ha μ végességének feltételét elhagyjuk, akkor az állítás nem feltétlenül igaz. Legyen $\mathcal{A} = P(\mathbb{N}^+)$, és legyen $\mu_n(H) = 0$, ha $H \subset \{1, \ldots, n\}$ és $\mu_n(H) = \infty$ egyébként. Ekkor μ_n mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Másrészt a $\mu(H) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(H)$ limesz létezik minden $H \subset \mathbb{N}^+$-ra, mégpedig $\mu(H) = 0$, ha H véges, és $\mu(H) = \infty$, ha H végtelen. Világos, hogy μ nem mérték.

86. Ha (i) igaz, akkor $\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_A$ μ-m.m. A 3. feladat állítását felhasználva azt kapjuk, hogy a $\limsup_{n\to\infty} A_n$, $\liminf_{n\to\infty} A_n$ és A halmazok karakterisztikus függvényei μ-m.m. egyenlőek. Így ezen halmazok csak nullmértékű halmazban térnek el egymástól, azaz (ii) igaz.

A fenti okoskodás lépéseinek megfordításával kapjuk az (ii)$\Longrightarrow$(i) implikációt.

87. Ha $d(A, B) = 0$, akkor $A = B$ a megállapodás szerint. Nyilvánvaló, hogy $d(A, B) = d(B, A) \geq 0$ minden $A, B \in \mathcal{A}^{<\infty}$-re. A háromszög-egyenlőtlenség a könnyen igazolható

$$(A \Delta B) \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$$

tartalmazásból következik. Ezzel beláttuk, hogy $(\mathcal{A}^{<\infty}, d)$ metrikus tér.

A teljességet bizonyítandó tegyük fel először, hogy $d(A_n, A_{n+1}) < 1/2^{n+1}$ minden n-re. Megmutatjuk, hogy az (A_n) sorozat konvergál a $B = \limsup_{n\to\infty} A_n$ halmazhoz. Legyen $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Ekkor $B_n \in \mathcal{A}^{<\infty}$ minden n-re, ugyanis

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_n) + \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_{i+1} \setminus A_i) \leq \mu(A_n) + \sum_{i=n}^{\infty} 1/2^{i+1} < \infty.$$

A fenti egyenlőtlenség azt is mutatja, hogy $d(A_n, B_n) = \mu(B_n \setminus A_n) < 1/2^n$ minden n-re.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, $\mu(B_1) < \infty$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$, ezért $\mu(B_n) \to \mu(B)$. Így van olyan n_0, hogy $d(B_n, B) = \mu(B_n \setminus B) < \varepsilon/2$, ha $n > n_0$. Ekkor

$$d(A_n, B) \le d(A_n, B_n) + d(B_n, B) < 2^{-n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ha $n > \max(n_0, n_1)$, ahol $2^{-n_1} < \varepsilon/2$. Ezzel beláttuk, hogy $A_n \to B$.

Most legyen (A_i) egy tetszőleges Cauchy-sorozat. Ekkor minden n-re van olyan i_n, hogy $d(A_i, A_j) < 2^{-n-1}$ minden $i, j \ge i_n$-re. Feltehetjük, hogy az i_n sorozat szigorúan monoton növő. Ekkor az A_{i_n} halmazok olyan részsorozatot képeznek, amelyre $d(A_{i_n}, A_{i_{n+1}}) < 2^{-n-1}$ minden n-re. Mint láttuk, ebből következik, hogy az (A_{i_n}) sorozat konvergál egy $B \in \mathcal{A}^{<\infty}$ halmazhoz.

Ebből következik, hogy a teljes (A_n) sorozat konvergál B-hez. Ugyanis tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra válasszunk olyan N-et, hogy $d(A_i, A_j) < \varepsilon/2$ teljesüljön minden $i, j \ge N$-re. Ha $k > N$, akkor minden elég nagy n-re

$$d(A_k, B) \le d(A_k, A_{i_n}) + d(A_{i_n}, B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

88. Az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikáció nem igaz. Tekintsük a következő ellenpéldát. Legyen A_n az $[(i-1)/k, i/k]$ intervallumok egy felsorolása, ahol $k \in \mathbb{N}^+$ és $1 \le i \le k$. Ekkor $\lambda(A_n) \to 0$, tehát a $(\mathcal{A}^{<\infty}, d)$ metrikus térben $A_n \to \emptyset$. Másrészt $\limsup_{n\to\infty} A_n = [0,1]$, tehát (ii) nem igaz.

Az (ii)$\Longrightarrow$(i) implikáció sem igaz. Tekintsük $\mathbb{R}$-et a Lebesgue-mértékkel, és legyen $A_n = (n-1, n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ekkor $\limsup_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, tehát A_n majdnem konvergál az üres halmazhoz. Másrészt A_n nem tart az üres halmazhoz a $(\mathcal{A}^{<\infty}, d)$ térben, hiszen $d(A_n, \emptyset) = \lambda(A_n) = 1$ minden n-re.

89. Legyen $\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{A}$ és $\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{A}$. Ekkor a feltétel szerint az $\underline{A}, A, \overline{A}$ halmazok csak nullmértékű halmazban térnek el egymástól. Mivel

$$A \setminus \underline{A} = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (A \setminus A_n),$$

ezért a $B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} (A \setminus A_n)$ halmazok metszete a nullmértékű $A \setminus \underline{A}$ halmaz. Mármost $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ és $\mu(B_1) \le \mu(A) < \infty$, ezért $\mu(B_k) \to 0$. Így $A \setminus A_k \subset B_k$ alapján $\mu(A \setminus A_k) \to 0$.

Másrészt

$$\overline{A} \setminus A = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right) \setminus A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (A_n \setminus A).$$

Így a $C_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} (A_n \setminus A)$ halmazok metszete a nullmértékű $\overline{A} \setminus A$ halmaz. Mármost $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ és $\mu(C_1) \le \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) < \infty$, ezért $\mu(C_k) \to 0$. Így $A_k \setminus A \subset C_k$ alapján $\mu(A_k \setminus A) \to 0$.

Tekintve, hogy

$$d(A_n, A) = \mu((A_n \setminus A) \cup (A \setminus A_n)) \le \mu(A_n \setminus A) + \mu(A \setminus A_n),$$

ezért $d(A_n, A) \to 0$, azaz $A_n \to A$ a $(\mathcal{A}^{<\infty}, d)$ metrikus térben.

90. A Borel–Cantelli-lemma (64. feladat) szerint $\mu(C) = 0$, ahol C jelöli azon pontok halmazát, amelyek végtelen sok $A_n \Delta A_{n+1}$ halmaznak elemei. Legyen $\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{A}$ és $\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{A}$. Ha $x \notin C$, akkor $x \notin A_n \Delta A_{n+1}$ minden elég nagy n-re. Ez azt jelenti, hogy csak két eset lehetséges: x csak véges sok A_n-nek eleme, vagy pedig véges sok kivételével mindnek eleme. Így $x \notin \overline{A} \setminus \underline{A}$. Ezzel beláttuk, hogy $\overline{A} \setminus \underline{A} \subset C$, tehát $\overline{A} \setminus \underline{A}$ nullmértékű.

Így A_n majdnem konvergál az $\overline{A}$ halmazhoz. A feladat megoldásához még be kell látni, hogy $\overline{A} \in \mathcal{A}^{<\infty}$, azaz $\mu(\overline{A})) < \infty$.

Nyilvánvaló, hogy

$$\overline{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_1 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \Delta A_{n+1}),$$

tehát

$$\mu(\overline{A}) \le \mu(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu((A_n \Delta A_{n+1}) < \infty.$$

91. Tudjuk, hogy a 40. feladat (i) és (ii) állításai közül legalább az egyik igaz. Azt kell megmutatnunk, hogy (i)-ből következik (ii), feltéve, hogy a ϑ_n halmazfüggvények előjeles mértékek.

Legyenek tehát $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ olyan páronként diszjunkt halmazok, amelyekre $\vartheta_{n_i}(A_i) \ne 0$ minden i-re, ahol $n_1 < n_2 < \ldots$, és tegyük fel, hogy (ii) nem igaz.

A jelölés egyszerűsítése érdekében hagyjuk el az (n_i) sorozathoz nem tartozó ϑ_n előjeles mértékeket, és írjunk ϑ_{n_i} helyett ϑ_i-t. Vagyis legyen $\vartheta_n(A_n) \ne 0$ minden n-re, ahol $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, Mivel $\vartheta_1(A_1) \neq 0$, ezért vagy van egy legnagyobb olyan i, amelyre $\vartheta_1(A_i) \neq 0$, vagy pedig $\vartheta_1(A_i) \neq 0$ végtelen sok i-re teljesül. Az utóbbi esetben $\vartheta_1(A_i)$ azonos előjelű lesz végtelen sok i-re. Így mindkét esetben kiválaszthatunk egy olyan $k_1 < k_2 < \ldots$ indexsorozatot, amelyre $\vartheta_1(A_{k_1}) \neq 0$, és vagy $\vartheta_1(A_{k_i}) = 0$ minden $i > 1$-re, vagy pedig $\vartheta_1(A_{k_1})$ és $\vartheta_1(A_{k_i})$ azonos előjelűek minden $i > 1$-re. A k_2 indexet elég nagynak választva azt is feltehetjük, hogy $\vartheta_{k_i}(A_{k_1}) = 0$ minden $i > 1$-re. Ugyanis – tekintve, hogy a feltevésünk szerint (ii) nem igaz –, $\vartheta_n(A_{k_1}) = 0$ teljesül minden elég nagy n-re, tehát elég nagy k_2-t véve ez a feltétel teljesülni fog.

Mivel $\vartheta_{k_2}(A_{k_2}) \neq 0$, ezért vagy van egy legnagyobb olyan i, amelyre $\vartheta_{k_2}(A_{k_i}) \neq 0$, vagy pedig $\vartheta_{k_2}(A_{k_i}) \neq 0$ végtelen sok i-re teljesül. Az utóbbi esetben $\vartheta_{k_2}(A_{k_i})$ azonos előjelű lesz végtelen sok i-re. Így mindkét esetben kiválaszthatunk egy olyan $k_{m_1} < k_{m_2} < \ldots$ indexsorozatot, amelyre $\vartheta_{k_2}(A_{k_{m_1}}) \neq 0$, és vagy $\vartheta_{k_2}(A_{k_{m_i}}) = 0$ minden $i > 1$-re, vagy pedig $\vartheta_{k_2}(A_{k_{m_1}})$ és $\vartheta_{k_2}(A_{k_{m_i}})$ azonos előjelűek minden $i > 1$-re. A k_{m_2} indexet elég nagynak választva azt is feltehetjük, hogy $\vartheta_{k_{m_i}}(A_{k_{m_1}}) = 0$ minden $i > 1$-re.

Az eljárást folytatva kapjuk indexeknek két szigorúan monoton növő sorozatát: $p_1 < p_2 < \ldots$ és $q_1 < q_2 < \ldots$ a következő tulajdonságokkal. Minden i-re $\vartheta_{p_i}(A_{q_i}) \neq 0$, $\vartheta_{p_j}(A_{q_i}) = 0$ minden $i < j$-re, továbbá vagy $\vartheta_{p_i}(A_{q_j}) = 0$ minden $j > i$-re, vagy pedig $\vartheta_{p_i}(A_{q_i})$ és $\vartheta_{p_i}(A_{q_j})$ azonos előjelűek minden $j > i$-re.

Legyen $A = A_{q_1} \cup A_{q_2} \cup \ldots$. Világos, hogy $\vartheta_{p_i}(A) \neq 0$ minden i-re. Ez lehetetlen, hiszen feltettük, hogy (ii) nem igaz. Ezzel beláttuk, hogy (ii) igaz, amivel a feladatot megoldottuk.

92. Belátjuk, hogy egyik ϑ_h sem azonosan nulla. Valóban, legyen $h = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i}$, ahol $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$. Ekkor $\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \vartheta_h(A_i) = 1$, hiszen $\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} = 1 \cdot h$. Így $\vartheta_h(A_1), \ldots, \vartheta_h(A_k)$ legalább egyike nem nulla.

Tegyük fel, hogy $\vartheta_{h_1}, \vartheta_{h_2}, \ldots$ mindegyike σ-additív. A 91. feladat állítása szerint van olyan $A \in \mathcal{A}$, hogy $\vartheta_{h_i}(A) \neq 0$ végtelen sok i-re. Ez azonban lehetetlen, hiszen χ_A előállításában csak véges sok báziselem szerepel nem-nulla együtthatóval, és $\vartheta_{h_i}(A)$ csak akkor lehet nullától különböző, ha χ_A előállításában a h_i báziselem együtthatója nem nulla. Ez ellentmondás, amivel a feladatot megoldottuk.

93. Először belátjuk, hogy ha $M_1, \ldots, M_n$ páronként diszjunkt mérhető halmazok $\mathbb{R}^p$-ben és $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$, akkor $\lambda(H \cap M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(H \cap M_i)$ bármely $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazra. Ezt n szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1$ eset nyilvánvaló. Ha $n > 1$, és az állítás $(n-1)$-re igaz, akkor felhasználva, hogy M_n

mindent jól vág ketté, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lambda(H\cap M) &= \lambda(H\cap M_n)+\lambda((H\cap M)\setminus M_n) = \\ &= \lambda(H\cap M_n)+\lambda\left(H\cap(M_1\cup\ldots\cup M_{n-1})\right) = \\ &= \lambda(H\cap M_n)+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda(H\cap M_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda(H\cap M_i).\end{aligned}$$

A feladat állítására rátérve vegyük észre, hogy λ külső mérték, tehát $\lambda(H\cap M)\le \sum_{i=1}^{\infty}\lambda(H\cap M_i)$. Másrészt

$$\lambda(H\cap M)\ge \lambda(H\cap(M_1\cup\ldots\cup M_n)) = \sum_{i=1}^{n}\lambda(H\cap M_i)$$

minden n-re, tehát $\lambda(H\cap M)\ge \sum_{i=1}^{\infty}\lambda(H\cap M_i)$.

94. A $\lambda(A)\le k(A)$ egyenlőtlenség minden A halmazra igaz, hiszen $\lambda(A)$ egy olyan számhalmaz infimuma, amely bővebb annál a halmaznál, amelynek $k(A)$ az infimuma. Így elég a $k(A)\le\lambda(A)$ egyenlőtlenséget igazolni.

Legyen $\varepsilon>0$ adott. Válasszunk olyan $T_1,T_2,\ldots$ téglákat, melyekre $A\subset T_1\cup T_2\subset\ldots$ és $\sum_{n=1}^{\infty}t(T_i)<\lambda(A)+\varepsilon$. A T_i téglákat kicsit megnövelve kaphatunk olyan nyílt T_i' téglákat, melyekre $T_i\subset T_i'$ és $t(T_i')<t(T_i)+\varepsilon/2^i$. Ekkor a T_i' nyílt téglák is lefedik A-t, tehát A kompaktsága miatt van olyan n, hogy $A\subset T_1'\cup\ldots\cup T_n'$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$k(A)\le\sum_{i=1}^{n}t(T_i')<\sum_{i=1}^{n}t(T_i)+\varepsilon<\lambda(A)+2\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, így $k(A)\le\lambda(A)$.

95. Tegyük fel, hogy A Jordan-mérhető. A $k(H)\le k(H\cap A)+k(H\setminus A)$ egyenlőtlenség minden H-ra és A-ra igaz, tehát elég a $k(H)\ge k(H\cap A)+k(H\setminus A)$ egyenlőtlenséget igazolni. Legyen $\varepsilon>0$ adott. Válasszunk olyan $T_1,\ldots,T_n$ téglákat, melyekre $H\subset T_1\cup\ldots\cup T_n$ és $\sum_{i=1}^{n}t(T_i)<k(H)+\varepsilon$. Ekkor a $T_i\cap A$ halmazok Jordan-mérhetőek és lefedik $H\cap A$-t, ezért $k(H\cap A)\le$

$\sum_{i=1}^{n} t(T_i \cap A)$. Hasonlóan, a $T_i \setminus A$ halmazok Jordan-mérhetőek és lefedik $H \setminus A$-t, ezért $k(H \setminus A) \le \sum_{i=1}^{n} t(T_i \setminus A)$. Így

$$\begin{aligned} k(H \cap A) + k(H \setminus A) &\le \sum_{i=1}^{n} t(T_i \cap A) + \sum_{i=1}^{n} t(T_i \setminus A) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t(T_i \cap A) + t(T_i \setminus A)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} t(T_i) < k(H) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért $k(H) \ge k(H \cap A) + k(H \setminus A)$.

Most tegyük fel, hogy $k(H) = k(H \cap A) + k(H \setminus A)$ minden H halmazra. Legyen H egy A-t tartalmazó tégla. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor $k(H \setminus A) = t(H) - b(A)$. Ebből azt kapjuk, hogy $t(H) = k(A) + (t(H) - b(A))$, tehát $k(A) = b(A)$, vagyis A Jordan-mérhető.

96. Ha $\lambda(H) = \infty$, akkor mind a három egyenlőség nyilvánvaló, hiszen $H \subset \mathbb{R}^p$, és $\mathbb{R}^p$ nyílt. Így feltehetjük, hogy $\lambda(H) < \infty$.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és válasszunk olyan $A_n \in \mathcal{P}^p$ téglákat, amelyek lefedik H-t és a térfogataik összege $< \lambda(H) + \varepsilon$. Az A_n tégla oldalait kicsit megnövelve kaphatunk egy olyan B_n téglát, amelyik A_n-et a belsejében tartalmazza, és amelyre $\lambda(B_n) < \lambda(A_n) + \varepsilon/2^n$. Ekkor a $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} B_n$ nyílt halmaz tartalmazza H-t, és a mértéke legfeljebb

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda(A_n) + \varepsilon/2^n) < (\lambda(A) + \varepsilon) + \varepsilon = \lambda(A) + 2\varepsilon.$$

Ebből világos, hogy $\lambda(H) = \inf\{\lambda(G) : H \subset G,\ G \text{ nyílt}\}$.

Ebből az is nyilvánvaló, hogy $\lambda(H) = \inf\{\lambda(A) : H \subset A,\ A \in \mathcal{L}\}$, hiszen minden nyílt halmaz mérhető.

A fentiek szerint vannak olyan H-t tartalmazó G_n nyílt halmazok, melyekre $\lambda(G_n) < \lambda(H) + 1/n$. Ekkor $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ olyan G_δ halmaz, amely szintén tartalmazza H-t, és amelyre $\lambda(V) = \lambda(H)$. Mivel minden Borel-halmaz mérhető, így $\lambda(H) = \min\{\lambda(A) : H \subset A,\ A \in \mathcal{L}\}$.

97. Legyenek $A_n \subset H$ olyan mérhető halmazok, melyekre $\lambda(A_n) \to \underline{\lambda}(H)$, és legyen $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Világos, hogy $A \subset H$ mérhető, és $\lambda(A) = \underline{\lambda}(H)$.

98. Ha $A \subset H$ mérhető, akkor

$$\lambda(A) = \lambda(E) - \lambda(E \setminus A) \le \lambda(E) - \lambda(E \setminus H),$$

hiszen $E \setminus H \subset E \setminus A$. Mivel $\underline{\lambda}(H)$ a $\lambda(A)$ számok halmazának szuprémuma, ahol A befutja H mérhető részhalmazait, ezért $\underline{\lambda}(H) \le \lambda(E) - \lambda(E \setminus H)$.

Most legyen $E \setminus H \subset A \subset E$ mérhető. Ekkor

$$\lambda(A) = \lambda(E) - \lambda(E \setminus A) \ge \lambda(E) - \underline{\lambda}(H),$$

hiszen $E \setminus A$ mérhető és része H-nak. Mivel $\lambda(E \setminus H)$ a $\lambda(A)$ számok halmazának infimuma, ahol A befutja az $E \setminus H$-t tartalmazó mérhető halmazokat, ezért $\lambda(E \setminus H) \ge \lambda(E) - \underline{\lambda}(H)$. Így $\underline{\lambda}(H) \ge \lambda(E) - \lambda(E \setminus H)$, és a két egyenlőtlenségből adódik $\underline{\lambda}(H) = \lambda(E) - \lambda(E \setminus H)$.

99. A $\lambda(H) \le k(H)$ egyenlőtlenség abból következik, hogy $\lambda(H)$ egy olyan számhalmaz infimuma, amely bővebb annál a halmaznál, amelynek $k(H)$ az infimuma.

Az $\underline{\lambda}(H) \le \lambda(H)$ egyenlőtlenség nyilvánvaló $\underline{\lambda}(H)$ definíciójából. Ha H-ban felveszünk véges sok egymásba nem nyúló téglát, akkor ezek uniója mérhető, tehát a térfogatösszegük ugyanaz, mint az uniójuk Lebesgue-mértéke. Így $\underline{\lambda}(H)$ egy olyan számhalmaz szuprémuma, amely bővebb annál a halmaznál, amelynek $b(H)$ a szuprémuma, tehát $b(H) \le \underline{\lambda}(H)$.

100. Ha H mérhető, akkor $\underline{\lambda}(H) = \lambda(H)$ nyilvánvaló $\underline{\lambda}(H)$ definíciójából.

Ha viszont $\underline{\lambda}(H) = \lambda(H)$, akkor a 96. feladat állítása szerint van olyan mérhető $A \subset H$ halmaz, hogy $\lambda(A) = \underline{\lambda}(H) = \lambda(H)$. Ekkor H korlátosságából $\lambda(H) < \infty$, tehát $\lambda(H \setminus A) = \lambda(H) - \lambda(A) = 0$, ezért $\lambda(H \setminus A) = 0$. Így $H \setminus A$ mérhető, tehát $H = A \cup (H \setminus A)$ is mérhető.

101. Tegyük fel először, hogy $\lambda(A) < \infty$. A 96. feladat megoldásában láttuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan G nyílt halmaz, hogy $A \subset G$ és $\lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon$. Mivel A mérhető, ebből következik, hogy $\lambda(A) + \varepsilon > \lambda(G) = \lambda(A) + \lambda(G \setminus A)$, tehát $\lambda(G \setminus A) < \varepsilon$, hiszen a szereplő mértékek végesek. Ha A tetszőleges Lebesgue-mérhető halmaz, akkor a fentiek szerint minden n-re vannak olyan G_n nyílt halmazok, hogy $A \cap B(0, n) \subset G_n$, és $\lambda(G_n \setminus (A \cap B(0, n))) < \varepsilon/2^n$. Legyen $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Ekkor G nyílt, és $A \subset G$. Mivel a $G \setminus A$ halmazt lefedik a $G_n \setminus (A \cap B(0, n))$ halmazok, ezért $\lambda(G \setminus A) < \varepsilon$.

Az $\mathbb{R}^p \setminus A$ halmaz mérhető, ezért a fentiek szerint van olyan H nyílt halmaz, hogy $\mathbb{R}^p \setminus A \subset H$ és $\lambda(H \setminus (\mathbb{R}^p \setminus A)) < \varepsilon$. Ekkor $F = \mathbb{R}^p \setminus H$ zárt, $F \subset A$, és

$\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$, hiszen $A \setminus F = H \setminus (\mathbb{R}^p \setminus A)$. Világos, hogy az F és G halmazok kielégítik (i) feltételeit ε helyett 2ε-nal. Ezzel (i)-et beláttuk.

Legyen V_n olyan nyílt halmaz, hogy $A \subset V_n$, és $\lambda(V_n \setminus A) < 1/n$. Ekkor a $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ halmaz G_δ, tartalmazza A-t, és $\lambda(V \setminus A) \le \lambda(V_n \setminus A) < 1/n$ minden n-re, tehát $\lambda(V \setminus A) = 0$.

Az $\mathbb{R}^p \setminus A$ halmaz szintén mérhető, ezért a fentiek szerint van olyan W G_δ halmaz, hogy $\mathbb{R}^p \setminus A \subset W$, és $\lambda(W \setminus (\mathbb{R}^p \setminus A)) = 0$. Ekkor az $U = \mathbb{R}^p \setminus W$ halmaz F_σ, $U \subset A$, és $\lambda(A \setminus U) = 0$. Így $V \setminus U = (V \setminus A) \cup (A \setminus U)$ alapján $\lambda(V \setminus U) = 0$, amivel (ii)-t is beláttuk.

102. A 96. feladat állítása szerint vannak olyan B_n mérhető halmazok, melyekre $H_n \subset B_n$ és $\lambda(H_n) = \lambda(B_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Legyen $A_n = B_n \cap B_{n+1} \cap \ldots$ minden n-re. Ekkor az A_n halmazok mérhetőek, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, továbbá $H_n \subset A_n$ és $\lambda(H_n) = \lambda(A_n)$ minden n-re. Legyen $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Ekkor $H \subset A$, tehát

$$\lambda(H) \le \lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(H_n) \le \lambda(H), \tag{41}$$

hiszen $H_n \subset H$ minden n-re. Így (41)-ben mindenütt egyenlőség áll.

103. (i) Legyen $r_1, r_2, \ldots$ a racionális számok egy sorozatba rendezése, és jelöljük G-vel az $\bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - 2^{-n-2}\varepsilon, r_n + 2^{-n-2}\varepsilon)$ halmazt. A G halmaz kielégíti a feltételeket. Valóban, G nyílt, és $\mathbb{Q} \subset G$ miatt mindenütt sűrű, továbbá $\lambda(G) \le \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon/2$.

(ii) Legyen G az (i)-ben $\varepsilon = 1$-hez konstruált halmaz. Ekkor $G \cap (0,1)$ korlátos és nyílt. Mivel $G \cap (0,1)$ sűrű $[0,1]$-ben, ezért $k(G \cap (0,1)) = 1$. Másrészt $\lambda(G \cap (0,1)) \le \lambda(G) < 1$.

(iii) Legyen G olyan mindenütt sűrű nyílt halmaz, amelyre $\lambda(G) < 1$, és legyen $F = [0,1] \setminus G$. Ekkor F zárt és a belseje üres, hiszen ha I egy nem-elfajuló intervallum F-ben, akkor $I \subset [0,1]$ és $G \cap I \ne \emptyset$, tehát I nem lehet része F-nek, ami ellentmondás. Mivel pedig $[0,1] \subset G \cup F$ miatt $1 = \lambda([0,1]) \le \lambda(G) + \lambda(F)$, ezért $\lambda(F) \ge 1 - \lambda(G) > 0$.

104. A 66. feladat állítása szerint egy A halmaz akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha $\mathcal{P}^p$ minden elemét jól vágja ketté. Legyen $T = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ és $P = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$. Ekkor $\lambda(T \setminus P) = 0$. Ugyanis $T \setminus P = B_1 \cup \ldots \cup B_p$, ahol $B_i = T \cap \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \colon x_i = b_i\}$. A B_i halmazok nullmértékűek, mert lefedhetők tetszőlegesen kis térfogatú téglákkal. Így $\lambda(T \setminus P) = 0$. Ebből nyilvánvaló, hogy egy halmaz akkor és csak akkor vágja jól ketté a T halmazt, amikor a P halmazt. Tehát egy halmaz akkor és csak akkor vágja jól ketté $\mathcal{P}^p$ elemeit, amikor a zárt tengelypárhuzamos téglákat.

105. Legyen $A_n = A \cap [n, n+1)$. Mivel A jól vágja ketté az $[n, n+1)$ intervallumot, ezért $\lambda(A_n) + \lambda([n, n+1) \setminus A_n) = 1$. Mármost a 98. feladat állítása szerint $\underline{\lambda}(A_n) = 1 - \lambda([n, n+1) \setminus A_n) = \lambda(A_n)$, tehát a 100. feladat állítása szerint A_n mérhető. Mivel ez minden n-re igaz, ezért $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ is mérhető.

106. Az A_n halmazokat indukcióval definiáljuk. Legyen $A_1 = [0, c]$. Legyen $n \geq 1$, és tegyük fel, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ halmazokat már definiáltuk, és teljesülnek a következők: mindegyik A_i véges sok szakasz uniója, $\lambda(A_i) = c$ és $\lambda(A_i \cap A_j) < c^2$ minden $1 \leq i < j \leq n$-re, továbbá $\lambda(A_1 \cup \ldots \cup A_n) < 1$.

Az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok a $[0, 1]$ intervallumot a $B_1, \ldots, B_{2^n}$ diszjunkt részhalmazokra osztják úgy, hogy mindegyik A_i halmaz néhány B_j halmaz uniója. (A B_j halmazokat úgy kapjuk, hogy vesszük az $A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}$ halmazokat, ahol $\varepsilon_i = \pm 1$ minden i-re. Itt az $A_i^1 = A_i$ és $A_i^{-1} = [0, 1] \setminus A_i$ rövidítéseket használjuk.) Világos, hogy mindegyik B_j is véges sok szakasz uniója.

Az $[0, 1] \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ halmaz egyike a B_j halmazoknak; feltehetjük, hogy egyenlő a B_{2^n} halmazzal.

Legyen $\lambda(B_j) = b_j$ $(j = 1, \ldots, 2^n)$. Ekkor tehát $b_{2^n} > 0$. Minden j-re válasszunk egy $C_j \subset B_j$ halmazt, amely véges sok szakasz uniója, és amelyre $\lambda(C_j) = c \cdot b_j$. Ekkor az $A = C_1 \cup \ldots \cup C_{2^n}$ halmaz mértéke c, és mindegyik A_i-vel vett metszetének a mértéke c^2. A C_j halmazokat úgy módosítjuk, hogy ha $j < 2^n$ és $b_j > 0$, akkor egy olyan $C_j' \subset B_j$ halmazt veszünk, amelyre $\lambda(C_j') = c \cdot b_j - \eta$, ahol η egy olyan kis pozitív szám, amelyre $2^n \cdot \eta < b_{2^n}$. Ekkor választhatunk egy olyan $C_{2^n}' \subset B_{2^n}$ halmazt, amelyre $\lambda(C_{2^n}') = c \cdot b_{2^n} + k \cdot \eta$, ahol k jelöli azon $j < 2^n$ indexek számát, amelyre $b_j > 0$.

Legyen $A_{n+1} = C_1' \cup \ldots \cup C_{2^n}'$. A konstrukcióból világos, hogy $\lambda(A_{n+1}) = c$, $\lambda(A_i \cap A_{n+1}) < c^2$ minden $i \leq n$-re, valamint $\lambda([0, 1] \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1})) < 1$. Az eljárást folytatva kapjuk az A_n halmazokat minden n-re.

107. Legyen C azon c számok halmaza, amelyekre $H + c$ nem részhalmaza az irracionális számok halmazának. Ha tehát $c \in C$, akkor van olyan $x \in H$, hogy $x + c = r \in \mathbb{Q}$. Így C minden eleme előáll $-x + r$ alakban, ahol $x \in H$ és $r \in \mathbb{Q}$. Más szóval, C lefedhető a $(-H) + r$ halmazokkal, ahol $r \in \mathbb{Q}$. Mivel H nullmértékű, ezért $-H$ és annak minden eltoltja is az. Azt kaptuk, hogy C lefedhető megszámlálhatóan sok nullmértékű halmaz uniójával, tehát C maga is nullmértékű.

Így $\mathbb{R} \setminus C \neq \emptyset$. Ha $c \notin \mathbb{R} \setminus C$, akkor C definíciójának értelmében $H + c \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

108. Jelöljük a kérdéses halmazt N-nel. Világos, hogy ha q pozitív egész, akkor minden $x \in \mathbb{R}$-re csak véges sok olyan p egész szám van, amelyre $|x - (p/q)| <$

$1/q^3$. (Nevezetesen legfeljebb két ilyen p van, ha $q = 1$, és legfeljebb egy ilyen p van, ha $q > 1$.) Ezért ha egy x számra végtelen sok p/q racionális számra teljesül $|x - (p/q)| < 1/q^3$, akkor ezen racionális számok között végtelen sok különböző nevezőjű kell, hogy legyen.

Legyen q pozitív egész. Jelöljük A_q-val azon $x \in [0,1]$ számok halmazát, melyekre $|x - (p/q)| < 1/q^3$ valamely $p \in \mathbb{Z}$-re. Ekkor $A_q \subset \bigcup_{p=0}^{q} [(p/q) - 1/q^3, (p/q) + 1/q^3]$, tehát $\lambda(A_q) \le 2(q+1)/q^3 \le 4q/q^3 = 4/q^2$. Mivel $\sum_{q=1}^{\infty} 4/q^2 < \infty$, ezért a Borel–Cantelli-lemma (64. feladat) szerint azon $x \in [0,1]$ számok halmaza, amelyek végtelen sok A_q-nak elemei, nullmértékű. Más szóval, az $N \cap [0,1]$ halmaz nullmértékű. Nyilvánvaló, hogy bármely adott $n \in \mathbb{Z}$-re $N \cap [n-1, n]$ az $N \cap [0,1]$ halmaz eltolt példánya, és így nullmértékű. Ebből következik, hogy N maga is nullmértékű.

109. Jelöljük az $\{x \in [a,b]\colon\ f'(x) = 0\}$ halmazt N-nel. Be kell látnunk, hogy $\lambda(f(N)) = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Jelöljük H_n-nel azon $x \in N$ pontok halmazát, melyekre $|f(y) - f(x)| \le \varepsilon \cdot |y - x|$, valahányszor $|y - x| < 1/n$. Világos, hogy $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$ és $H_1 \cup H_2 \cup \ldots = N$.

Ha I az $[a,b]$ intervallum egy $1/n$-nél rövidebb részintervalluma, akkor $|f(y) - f(x)| \le \varepsilon \cdot |y - x| \le \varepsilon \cdot |I|$ minden $x, y \in H_n \cap I$-re. Más szóval, az $f(H_n \cap I)$ halmaz bármely két elemének a távolsága legfeljebb $\varepsilon \cdot |I|$. Így $f(H_n \cap I)$ szuprémumának és infimumának a távolsága is legfeljebb $\varepsilon \cdot |I|$, tehát $f(H_n \cap I)$ lefedhető egy legfeljebb $\varepsilon \cdot |I|$ hosszúságú intervallummal. Bontsuk fel $[a,b]$-t véges sok $1/n$-nél rövidebb részintervallumra. Ezek összhossza $b - a$, tehát a fentiek szerint az $f(H_n)$ halmaz lefedhető egy legfeljebb $\varepsilon \cdot (b - a)$ összhosszúságú véges intervallumrendszerrel. Így $\lambda(f(H_n)) \le \varepsilon \cdot (b - a)$.

Mivel $f(H_1) \subset f(H_2) \subset \ldots$ és $f(H_1) \cup f(H_2) \cup \ldots = f(N)$, ezért a 102. feladat állítása szerint $\lambda(f(N)) \le \varepsilon \cdot (b - a)$. Mivel ez minden ε-ra igaz, így $\lambda(f(N)) = 0$.

110. Jelöljük M_n-nel azon $x \in M$ pontok halmazát, melyekre $|f(x)| < n$, továbbá $f(y) > f(x)$ valahányszor $x < y < x + 1/n$. Világos, hogy $M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$, így elég belátni, hogy M_n nullmértékű minden n-re. Ehhez elég belátni, hogy $M_n \cap [c,d]$ nullmértékű minden n-re és minden $1/n$-nél rövidebb $[c,d]$ intervallumra.

Rögzítsük n-et és $[c,d]$-t, és legyen $H = M_n \cap [c,d]$. Ekkor f szigorúan monoton növő a H halmazon, hiszen $x, y \in H$ és $x < y$ esetén $x < y < x + 1/n$, tehát $f(y) - f(x) > 0$. Továbbá M_n definíciója szerint $|f(x)| < n$ minden $x \in H$-ra. Legyen $A = f(H)$, és jelöljük $f|_H$ inverzét g-vel. Ekkor $A \subset [-n, n]$ és $H = g(A)$. Legyen $u = \inf A$ és $v = \sup A$. Terjesszük ki g-t az (u, v)

intervallumra monoton növő függvényként a

$$g(y) = \sup\{g(z)\colon z \le y,\ z \in A\}$$

képlettel. Mivel $f'(x) = \infty$ minden $x \in H$-ra, ezért könnyen látható, hogy $g'(y) = 0$ teljesül A minden olyan pontjában, amelyben g folytonos, tehát megszámlálhatóan sok ponttól eltekintve minden $y \in A$-ban. Így az előző (109.) feladat állítása szerint $\lambda(H) = \lambda(g(A)) = 0$.

111. Azt fogjuk belátni, hogy az N halmaz megszámlálható. Legyen $N_k = \{x \in N\colon f(x) < k\}$. Ekkor $N = N_1 \cup N_2 \cup \ldots$, tehát elég belátni, hogy N_k megszámlálható minden k-ra.

Az N_k halmaz minden pontja izolált. Valóban, ha az x pont minden környezetében van N_k-nak végtelen sok pontja, akkor (tekintve, hogy ezekben a pontokban f értéke kisebb, mint k) f limesze x-ben nem lehet végtelen. Így ekkor $x \notin N$, tehát $N_k \subset N$ alapján $x \notin N_k$.

Mármost, ha egy H halmaz minden pontja izolált, akkor H megszámlálható. Ugyanis minden $x \in H$-ra vannak olyan $p, q \in \mathbb{Q}$ számok, hogy $p < x < q$ és $H \cap (p, q) = \{x\}$. Világos, hogy H különböző pontjaihoz különböző (p, q) párok tartoznak. Mivel a (p, q) $(p, q \in \mathbb{Q})$ párok halmazának számossága megszámlálható, ezért H is megszámlálható.

112. Jelöljük $\omega_f(x)$-szel az f függvény oszcillációját az $x \in [a, b]$ pontban, azaz legyen

$$\omega_f(x) = \lim_{h\to 0+0} \left(\sup_{[x-h,x+h]\cap[a,b]} f - \inf_{[x-h,x+h]\cap[a,b]} f \right).$$

Nyilvánvaló, hogy f akkor és csak akkor folytonos x-ben, ha $\omega_f(x) = 0$.

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-ben. Belátjuk, hogy minden $\delta > 0$-ra az $E_\delta = \{x \in [a, b]\colon \omega_f(x) > \delta\}$ halmaz Lebesgue-mértéke nulla. Ismeretes, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $F\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztás, amelyre $\Omega_F(f) < \varepsilon$. Itt $\Omega_f(f)$ az F felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg, azaz $\Omega_f(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, ahol $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$ és $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$. Legyen $\delta > 0$ rögzített, és jelöljük I-vel azon i indexek halmazát, amelyekre $(x_{i-1}, x_i) \cap E_\delta \ne \emptyset$. Világos, hogy $i \in I$ esetén $M_i - m_i \ge \delta$, tehát

$$\varepsilon > \Omega_F(f) \ge \sum_{i\in I} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \ge \sum_{i\in I} \delta \cdot (x_i - x_{i-1}) \ge \delta \cdot \lambda(E_\delta),$$

hiszen az $[x_{i-1}, x_i]$ $(i \in I)$ intervallumok véges sok pont kivételével lefedik az E_δ halmazt. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, ezért $\lambda(E_\delta) = 0$. Mármost f szakadási pontjainak halmaza $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. A fentiek szerint ez a halmaz nullmértékű.

Most tegyük fel, hogy f szakadási pontjainak halmaza nullmértékű. Ekkor $\lambda(E_\delta) = 0$ minden $\delta > 0$-ra. Az f függvényről feltettük, hogy korlátos; legyen $|f| \le K$. Az f függvény integrálhatóságához elég belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan F felosztás, amelyre $\Omega_F(f) < \varepsilon$.

Legyen $\delta = \varepsilon/(2(b-a))$. Könnyű ellenőrizni, hogy az E_δ halmaz korlátos és zárt. Ezért a 94. feladat állítása szerint $k(E_\delta) = \lambda(E_\delta)$, tehát $k(E_\delta) = 0$. Így vannak olyan $U_1, \dots, U_k$ nyílt intervallumok, amelyek összhossza kisebb, mint $\varepsilon/(4K)$, és amelyek lefedik E_δ-t. Ha $t \in [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_j$, akkor $\omega_f(t) < \delta$, tehát van olyan $h_t > 0$, hogy

$$\sup_{[t-h_t, t+h_t] \cap [a,b]} f - \inf_{[t-h_t, t+h_t] \cap [a,b]} f < \delta.$$

A $J_t = (t-h_t, t+h_t)$ $\left(t \in [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_j\right)$ és $U_1, \dots, U_k$ nyílt intervallumok lefedik $[a,b]$-t, tehát Borel tétele szerint közülük véges sok is lefedi $[a,b]$-t. Tegyük fel, hogy $J_{t_1}, \dots, J_{t_m}, U_1, \dots, U_k$ lefedik $[a,b]$-t, és legyen $F\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ olyan felosztás, amelynek az osztópontjai között szerepelnek az $J_{t_1}, \dots, J_{t_m}, U_1, \dots, U_k$ intervallumok végpontjai. Ekkor minden i-re (x_{i-1}, x_i) részhalmaza a $J_{t_1}, \dots, J_{t_m}, U_1, \dots, U_k$ intervallumok valamelyikének.

Jelöljük S-sel azon i indexek halmazát, amelyekre (x_{i-1}, x_i) részhalmaza az $U_1, \dots, U_k$ intervallumok valamelyikének. Világos, hogy

$$\sum_{i \in S} (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{j=1}^{k} |U_j| < \varepsilon/(4K).$$

Másrészt $i \notin S$ esetén (x_{i-1}, x_i) része valamelyik J_{t_ν} intervallumnak, tehát $M_i - m_i \le \delta$. Mivel $M_i - m_i \le 2K$ minden i-re, ezért

$$\begin{aligned} \Omega_F(f) &= \sum_{i \in S} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \notin S} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \\ &\le 2K \cdot \sum_{i \in S} (x_i - x_{i-1}) + \delta \cdot \sum_{i \notin S} (x_i - x_{i-1}) < \\ &< 2K \cdot (\varepsilon/(4K)) + \delta \cdot (b-a) = (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ez bizonyítja, hogy f Riemann-integrálható.

113. Legyen $f(x) = \lambda(H \cap [0,x])$ minden $x \in [0,1]$-re. Ekkor f folytonos $[0,1]$-en. Valóban, ha $0 \le x < y \le 1$, akkor

$$H \cap [0,x] \subset H \cap [0,y] \subset (H \cap [0,x])) \cup [x,y],$$

tehát $f(x) \leq f(y) \leq f(x) + (y - x)$. Így $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$ minden $x, y \in [0,1]$-re, tehát f folytonos (sőt Lipschitz).

A feladat annak a bizonyítását kívánja, hogy f felveszi az $f(1)/2$ értéket $[0,1]$-ben. Ez nyilvánvaló a Bolzano-tételből, hiszen $0 \leq f(1)/2 \leq f(1)$.

114. Először feltesszük, hogy H zárt, és $\lambda(H \cap [0,\infty)) > 0$. Belátjuk, hogy az $f(x) = 0$ $(x < 0)$, $f(x) = \lambda(H \cap [0,x])$ $(x \geq 0)$ függvény megfelel. Az előző (113.) feladat megoldásában láttuk, hogy f Lipschitz. A $\lambda(H \cap [0,\infty)) > 0$ feltételből következik, hogy f értékkészlete egy nem-elfajuló I intervallum, mégpedig $I = [0,a]$, ha $\lambda(H \cap [0,\infty)) = a < \infty$, illetve $I = [0,\infty)$, ha $\lambda(H \cap [0,\infty)) = \infty$. Megmutatjuk, hogy $f(H) = I$.

Mivel $f(x) = 0$ minden $x < 0$-ra, ezért elég megmutatni, hogy ha $y \in I$ és $y > 0$, akkor van olyan $x_0 \in H$, hogy $f(x_0) = y$. Legyen $x_0 = \inf\{x > 0 \colon f(x) = y\}$. Ekkor f folytonossága alapján $f(x_0) = y$. Így x_0 a legkisebb olyan szám, amelyben f felveszi az y értéket. Ha $x < x_0$, akkor tehát $f(x) < f(x_0)$, és így $\lambda([x, x_0)) > 0$. Következésképpen $H \cap [x, x_0) \neq \emptyset$ minden $x < x_0$-ra. Mivel H zárt, ebből következik, hogy $x_0 \in H$.

Most legyen H tetszőleges Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű halmaz. Ekkor van olyan n, hogy $\lambda(H \cap [n, n+1]) > 0$. A H halmazt n-nel eltolva feltehetjük, hogy $n = 0$. (Ha H egy eltoltját Lipschitz-függvénnyel intervallumra tudjuk képezni, akkor nyilván ugyanez H-ra is igaz.) Mivel $\lambda(H \cap [0,1]) > 0$, ezért van olyan $F \subset H \cap [0,1]$ zárt halmaz, hogy $\lambda(F) > 0$. Legyen $f(x) = 0$, ha $x < 0$, és $f(x) = \lambda(F \cap [0,x])$, ha $x \geq 0$. A fentiekben beláttuk, hogy $f(F) = I$, ahol $I = [0, \lambda(F)]$, és egyszersmind I megegyezik f értékkészletével. Mivel $F \subset H$, ezért $f(H) = I$, amivel a feladatot megoldottuk.

115. Feltehetjük, hogy A mérhető. Ekkor az A halmaz jól vágja ketté az $X \cup Y$ halmazt, ezért

$$\lambda(X \cup Y) = \lambda(X \cup Y) \cap A) + \lambda(X \cup Y) \setminus A) = \lambda(X) + \lambda(Y).$$

116. A $\operatorname{cl} X$ és $\mathbb{R}^p \setminus \operatorname{cl} X$ halmazok mérhetőek (hiszen Borel-halmazok), diszjunktak, továbbá $X \subset \operatorname{cl} X$ és $Y \subset \mathbb{R}^p \setminus \operatorname{cl} X$. Így az állítás az előző (115.) feladat állításából következik.

117. Feltehetjük, hogy A mérhető. Ekkor az A halmaz jól vágja ketté a B és $A \cup B$ halmazok mindegyikét, ezért

$$\lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(B \setminus A)$$

és

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda((A \cup B) \setminus A) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A).$$

Így

$$\begin{aligned} \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) &= (\lambda(A) + \lambda(B \setminus A)) + \lambda(A \cap B) = \\ &= \lambda(A) + (\lambda(B \setminus A) + \lambda(A \cap B)) = \lambda(A) + \lambda(B). \end{aligned}$$

118. Mivel C jól vágja ketté A és B mindegyikét, ezért

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap C) + \lambda(A \setminus C) \leq \lambda(B \cap C) + \lambda(B \setminus C) = \lambda(B) = \lambda(A).$$

Így $\lambda(A \cap C) + \lambda(A \setminus C) = \lambda(B \cap C) + \lambda(B \setminus C)$. Mivel $\lambda(A \cap C) \leq \lambda(B \cap C)$, $\lambda(A \setminus C) \leq \lambda(B \setminus C)$ és az összes szereplő mennyiség véges (hiszen $\lambda(B) < \infty$), így szükségképpen $\lambda(A \cap C) = \lambda(B \cap C)$.

119. Tegyük fel először, hogy $\lambda(H) < \infty$. A 96. feladat állítása szerint van olyan A mérhető halmaz, hogy $H \subset A$ és $\lambda(H) = \lambda(A)$. Ekkor az előző (118.) feladat állítása szerint A kielégíti a feltételt.

Most legyen H tetszőleges. Bontsuk fel $\mathbb{R}^p$-t megszámlálhatóan sok diszjunkt mérhető és véges mértékű halmaz egyesítésére. Legyen pl. $M_1 = B(0,1)$ és $M_n = B(0,n) \setminus B(0,n-1)$ minden $n \geq 2$-re. Ekkor $\lambda(H \cap M_n) < \infty$, tehát vannak olyan mérhető A_n halmazok, hogy $H \cap M_n \subset A_n$ és $\lambda((H \cap M_n) \cap B) = \lambda(A_n \cap B)$ minden mérhető B halmazra. Nyilván feltehetjük, hogy $A_n \subset M_n$ minden n-re. Ekkor az A_n halmazok páronként diszjunktak. Legyen $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Ekkor A mérhető és $H \subset A$. Tetszőleges mérhető B halmazra

$$\lambda(H \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((H \cap M_n) \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n \cap B) = \lambda(A \cap B).$$

Itt az első egyenlőség a 93. feladat állításából következik.

120. Legyen A a H halmaz mérhető burka. Legyen $C \subset A \setminus H$ mérhető. Ekkor $\lambda(C) = \lambda(A \cap C) = \lambda(H \cap C) = 0$.

Most tegyük fel, hogy az A halmaz kielégíti a feladatban megfogalmazott feltételeket. Legyen a H halmaz mérhető burka M. Ekkor $\lambda(A \setminus M) = 0$, hiszen $A \setminus M \subset A \setminus H$ és $A \setminus M$ mérhető. Mivel M a H halmaz mérhető burka, ezért – amint azt már beláttuk – $M \setminus H$ nem tartalmaz pozitív mértékű mérhető halmazt. Így $\lambda(M \setminus A) = 0$. Tehát $\lambda(A \setminus M) = \lambda(M \setminus A) = 0$, és így $\lambda(M \cap B) = \lambda(A \cap B)$ minden mérhető B halmazra, amiből nyilvánvaló, hogy A is mérhető burka H-nak.

121. Elég belátni, hogy $(A \cup B) \setminus (H \cup K)$ nem tartalmaz pozitív mértékű mérhető halmazt. Tegyük fel, hogy $C \subset (A \cup B) \setminus (H \cup K)$ mérhető és pozitív mértékű. Ekkor $C \subset A \cup B$, és így $C \cap A$ és $C \cap B$ legalább egyike pozitív mértékű. Tegyük fel, hogy $\lambda(C \cap A) > 0$. Ekkor $C \cap A$ egy mérhető és pozitív mértékű részhalmaza $A \setminus H$-nak, hiszen $C \cap (H \cup K) = \emptyset$. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy H mérhető burka A.

122. Legyen H, illetve K mérhető burka A, illetve B. Ekkor, mint láttuk, $H \cup K$ mérhető burka $A \cup B$. Így

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(H) + \lambda(K) = \lambda(H \cup K) = \lambda(A \cup B) < \infty.$$

Ebből következik, hogy $\lambda(A \cap B) = 0$. Így $\lambda(A \cap K) = 0$, tehát $A \setminus (A \cap K)$ olyan mérhető halmaz, amely tartalmazza H-t és diszjunkt K-tól.

123. Mivel $\lambda(A) < \infty$, ezért választhatunk olyan I_n téglákat, amelyekre $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} t(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon/2$. Válasszunk egy olyan N indexet, amelyre $\sum_{n=N+1}^{\infty} t(I_n) < \varepsilon/2$, és legyen $E = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$. Legyen $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Ekkor $\lambda(G \setminus A) < \varepsilon/2$ és $\lambda(G \setminus E) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} t(I_n) < \varepsilon/2$. Mivel

$$E \Delta A = (E \setminus A) \cup (A \setminus E) \subset (G \setminus A) \cup (G \setminus E),$$

tehát $\lambda(E \Delta A) < \varepsilon$.

124. Jelöljük $\mathcal{A}$-val azon $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazok rendszerét, amelyekre teljesül, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan E halmaz, amely véges sok intervallum uniója, és $\mu(A \Delta E) < \varepsilon$. Ekkor $\mathcal{A}$ monoton osztály. Valóban, legyen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ és $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ekkor $\mu(A) < \infty$ alapján minden ε-hoz van olyan n, hogy $\mu(A) - \mu(A_n) < \varepsilon/2$. Mivel $A_n \in \mathcal{A}$, ezért van olyan E halmaz, amely véges sok intervallum uniója, és $\mu(A_n \Delta E) < \varepsilon/2$. Így $\mu(A \Delta E) < \varepsilon$, ami mutatja, hogy $A \in \mathcal{A}$. Ugyanígy látható (ismét felhasználva μ végességét), hogy ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ és $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor $A \in \mathcal{A}$.

Jelöljük $\mathcal{R}$-rel a $\mathcal{P}^1$ félgyűrű által generált gyűrűt, vagyis azoknak a halmazoknak a rendszerét, amelyek előállnak véges sok diszjunkt $[a, b)$ típusú intervallum uniójaként. Mivel $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$, ezért a 28. feladat állítása szerint $\mathcal{A}$ tartalmazza az $\mathcal{R}$ által generált σ-gyűrűt, ami egyenlő $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak rendszerével. Vagyis minden Borel-halmaz eleme $\mathcal{A}$-nak, ami éppen a feladat állítása.

125. Tegyük fel először, hogy $\lambda(A) < \infty$, és válasszunk olyan I_n intervallumokat, amelyekre $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < 1{,}01 \cdot \lambda(A)$. Ekkor $\lambda(I_n \cap A) > 0{,}99 \cdot |I_n|$ teljesül legalább egy n-re. Ugyanis, ha ez nem igaz, akkor $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap A)$ alapján

$$\lambda(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n \cap A) \le 0{,}99 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < 0{,}99 \cdot 1{,}01 \cdot \lambda(A) < \lambda(A),$$

ami lehetetlen.

Ha $\lambda(A) = \infty$, akkor $\lambda(A) \le \sum_{n-\infty}^{\infty} \lambda([n-1, n) \cap A)$, és így van olyan n, hogy $\lambda([n-1, n) \cap A) > 0$. Mivel $\lambda([n-1, n) \cap A) \le 1$, ezért a fentiek szeint van olyan I intervallum, hogy $\lambda(I \cap ([n-1,n) \cap A) > 0{,}99 \cdot |I|$, tehát $\lambda(I \cap A) > 0{,}99 \cdot |I|$.

126. Legyenek I, J olyan intervallumok, amelyekre $\lambda(I \cap A) > 0{,}99 \cdot |I|$ és $\lambda(J \cap B) > 0{,}99 \cdot |J|$. Az I, J intervallumok végpontjait kicsit megnövelve feltehetjük, hogy $|I|$ és $|J|$ racionális számok. Legyenek n, m olyan pozitív egészek, amelyekre $|I|/|J| = n/m$.

Legyen $I = I_1 \cup \ldots \cup I_n$, ahol $I_1, \ldots, I_n$ egymásba nem nyúló azonos hosszúságú intervallumok. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i \cap A) = \lambda(I \cap A) > 0{,}99 \cdot |I| = 0{,}99 \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i|,$$

amiből következik, hogy $\lambda(I_i \cap A) > 0{,}99 \cdot |I_i|$ teljesül legalább egy i-re.

Legyen $J = J_1 \cup \ldots \cup J_m$, ahol $J_1, \ldots, J_m$ egymásba nem nyúló azonos hosszúságú intervallumok. Ekkor $\lambda(J_j \cap B) > 0{,}99 \cdot |J_j|$ teljesül legalább egy j-re. Világos, hogy $|I_i| = |J_j|$, amivel a feladatot megoldottuk.

127. A 126. feladat állítása szerint vannak olyan I, J intervallumok, hogy $|I| = |J| = s > 0$ és $\lambda(A \cap I) > 2s/3$, $\lambda(B \cap J) > 2s/3$. Legyen $I = J + c$. Legyen $A_1 = A \cap I$ és $B_1 = B \cap J$, ekkor az A_1 és B_1 halmazok közül legalább az egyik mérhető. Belátjuk, hogy $c < d < c + s/3$ esetén $(B_1 + d) \cap A_1 \neq \emptyset$.

Először is $A_1 \cup (B_1 + d) \subset I \cup (J + d) = I \cup (I + (d - c))$. Mivel $I \cup (I + (d - c))$ egy olyan intervallum, amely rövidebb $|I| + s/3 = 4s/3$-nál, ezért $\lambda(A_1 \cup (B_1 + d)) < 4s/3$. Így a 117. feladat állításának felhasználásával

$$\begin{aligned} 4s/3 < \lambda(A_1) + \lambda(B_1 + d) = \lambda(A_1 \cup (B_1 + d)) + \lambda(A_1 \cap (B_1 + d)) \leq \\ \leq 4s/3 + \lambda(A_1 \cap (B_1 + d)), \end{aligned}$$

tehát $\lambda(A_1 \cap (B_1 + d)) > 0$. Így $A_1 \cap (B_1 + d) \neq \emptyset$. Ha $x \in A_1 \cap (B_1 + d)$, akkor $x - d \in B_1$, tehát $d = x - (x - d) \in A_1 - B_1 \subset A - B$. Ezzel beláttuk, hogy $A - B$ tartalmazza a $(c, c + s/3)$ intervallumot.

128. Az 123. feladat szerint minden n-re van olyan A_n halmaz, amely véges sok tégla uniója, továbbá $d(A_n, A) < 1/n^2$. Ekkor (iii) nyilvánvalóan teljesül. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} d(A_n, A_{n+1}) < \infty$ is igaz, tehát a 90. feladat állítása szerint (ii) is teljesül.

129. Legyen $B = \mathbb{R} \setminus A$, és tegyük fel, hogy $\lambda(A) > 0$ és $\lambda(B) > 0$. Ekkor az 127. feladat állítása szerint $A - B$ tartalmaz nem-elfajuló intervallumot. Így $A - B$ tartalmaz racionális számokat is. Legyen $r \in (A - B) \cap \mathbb{Q}$. Ekkor $r = x - y$, ahol $x \in A$ és $y \in B$. Ebből $y = x - r \in A$, ami lehetetlen.

130. Legyen $B = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$. Világos, hogy minden $x \in B$ és $r \in \mathbb{Q}$ esetén $x + r \in B$. Így az előző (129.) feladat szerint vagy B, vagy a komplementere nullmértékű. Azonban $A \subset B$ és $\lambda(A) > 0$, tehát $\lambda(B) > 0$, és így $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = 0$. Ez éppen a feladat állítása.

131. Tegyük fel, hogy $0 < \lambda(A) < 1$. Jelöljük D-vel a 10-hatvány nevezőjű racionális számok halmazát. Mivel D megszámlálható, ezért $B = ([0,1] \setminus A) \setminus D$ és $A' = A \setminus D$ pozitív mértékű mérhető halmazok. Így a 127. feladat szerint $B - A'$ tartalmaz szakaszt. Mivel D mindenütt sűrű, ezért $B - A'$ tartalmaz D-beli számot. Legyen $d = x - y$, ahol $x \in B$ és $y \in A'$. Ekkor $x = y + d$.

Tegyük fel, hogy d tizedestört-alakjában az n-edik jegy után minden jegy nulla. Ekkor az y és $x = y + d$ számok tizedesjegyei megegyeznek az $(n+1)$-edik jegytől kezdve. Ez azonban lehetetlen, hiszen $y \in A$, de $x \notin A$.

132. Először belátjuk, hogy ha ϑ felvesz negatív értéket, akkor nem korlátos alulról. Legyen $\vartheta(A) < 0$. Ekkor van olyan korlátos halmaz is, amelyen ϑ negatív, ui. $\vartheta(A \cap B(0,n)) \to \vartheta(A)$, ha $n \to \infty$, és így $\vartheta(A \cap B(0,n)) < 0$, ha n elég nagy. Ha $\vartheta(B) < 0$, ahol B korlátos, akkor a B halmaznak véve n diszjunkt eltolt példányának unióját, olyan halmazokat kapunk, amelyekben ϑ értéke $n \cdot \vartheta(B)$. Ebből világos, hogy ϑ nem korlátos alulról. Ugyanígy bizonyítható, hogy ha ϑ felvesz pozitív értéket, akkor nem korlátos felülről.

Mivel ϑ vagy alulról vagy felülről korlátos az 76. feladat szerint, ezért vagy $\vartheta \geq 0$, vagy pedig $\vartheta \leq 0$ mindenütt. Feltehetjük, hogy $\vartheta \geq 0$, mert különben áttérünk a $-\vartheta$ halmazfüggvényre. Tehát feltehetjük, hogy ϑ mérték.

Mivel $\vartheta([0,1]^p)$ véges, ezért $\vartheta([0,1)^p)$ is véges. Ha $\vartheta([0,1)^p) = 0$, akkor ϑ azonosan nulla, mert $\mathbb{R}^p$ lefedhető $[0,1)^p$ megszámlálhatóan sok eltolt példányával. Így feltehetjük, hogy $\vartheta([0,1)^p) > 0$, és egy pozitív számmal való beszorzás után azt is feltehetjük, hogy $\vartheta([0,1)^p) = 1$. Belátjuk, hogy ekkor ϑ megegyezik a Lebesgue-mértékkel a Borel-halmazokon.

Mivel $[0,1)^p$ előáll a $[0,1/n)^p$ kocka n^p darab diszjunkt eltoltjának uniójaként, ezért $\vartheta([0,1/n)^p) = 1/n^p$ minden n-re. Ha a_i, b_i racionális számok, melyek közös nevezője n, akkor az $R = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ halmaz előáll mint a $[0,1/n)^p$ kocka $t(R)/n^p$ darab diszjunkt eltolt példányának uniója, tehát $\vartheta(R) = t(R)$. A ϑ halmazfüggvény monotonitását felhasználva ebből azonnal adódik, hogy $\vartheta(R) = t(R)$ minden $R \in \mathcal{P}^p$ téglára igaz. Mivel t egyértelműen terjed ki mértékként a Borel-halmazokra, ezért $\vartheta = \lambda$ a Borel-halmazokon.

133. A megoldási ötlet szerint elég megadni eltolás-invariáns σ-ideálokat $\mathbb{R}$-en, ekkor mindegyikhez tartozik egy eltolás-invariáns mérték $P(\mathbb{R})$-en. Ilyenek például $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$; $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{R} \colon A \text{ megszámlálható}\}$; $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{R} \colon A \text{ nullmértékű}\}$; $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{R} \colon A \text{ első kategóriájú}\}$. (Egy halmazt akkor nevezünk első kategóriájúnak, ha előáll megszámlálhatóan sok, sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként. Egy halmaz sehol sem sűrű, ha nincs olyan nem-elfajuló intervallum, amelyben sűrű.)

További példák: Legyen $\mathcal{I}$ azon $A \subset \mathbb{R}$ halmazok rendszere, amelyek lefedhetők egy adott A_0 halmaz megszámlálhatóan sok eltoltjával. Az A_0 halmaznak persze olyannak kell lennie, hogy megszámlálhatóan sok eltoltja ne fedje le $\mathbb{R}$-et. Ez teljesül, ha pl. A_0 megszámlálható, nullmértékű vagy első kategóriájú.

Az összes eddigi példától különbözik a számosságmérték, amelyre $\mu(A) = |A|$, ha A véges és $\mu(A) = \infty$, ha A végtelen.

134. Legyen G olyan nemüres nyílt halmaz, amelyre $\vartheta(G)$ véges. Ekkor ϑ a G halmaz minden részhalmazán is véges. Legyen $[a, b] \subset G$ egy nem-elfajuló intervallum, ekkor tehát $\vartheta([a, b])$ is véges.

Megmutatjuk, hogy van olyan $E \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre (i) E-nek létezik végtelen sok páronként diszjunkt $[a, b]$-beli eltoltja, valamint (ii) E-nek létezik megszámlálhatóan sok eltoltja, amelyek lefedik $\mathbb{R}$-et.

Definiáljuk $\mathbb{R}$-en a $\sim$ relációt a következőképpen: tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$-re legyen $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Q}$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció, amelynek az ekvivalencia-osztályai az $\{x + r \colon r \in \mathbb{Q}\}$ alakú halmazok, ahol $x \in \mathbb{R}$. Mivel mindegyik ekvivalencia-osztály sűrű $\mathbb{R}$-ben, így a kiválasztási axióma felhasználásával mindegyik ekvivalencia-osztályból kiválaszthatunk egy olyan elemet, amely a $[0, (b - a)/2]$ intervallumbe esik. Legyen E a kiválasztott elemek halmaza; belátjuk, hogy E rendelkezik a fenti (i) és (ii) tulajdonságokkal.

Az E halmaznak racionális számokkal való eltoltjai páronként diszjunktak. Azaz ha $r, s \in \mathbb{Q}$ és $r \neq s$, akkor $(E + r) \cap (E + s) = \emptyset$. Valóban, ha $x \in (E + r) \cap (E + s)$, akkor $x - r$ és $x - s$ mindketten elemei E-nek. Ez azonban lehetetlen, mert $x - r \sim x - s$, holott E mindegyik ekvivalencia-osztályból csak egyetlen elemet tartalmaz.

Így az $E+(a+1/n)$ halmazok páronként diszjunktak. Legyen $n_0 > 2/(b-a)$. Ekkor az $E+(a+1/n)$ $(n \geq n_0)$ halmazok páronként diszjunktak és részei $[a, b]$-nek, hiszen $E \subset [0, (b - a)/2]$. Ezzel (i)-et beláttuk.

Az $E+r$ $(r \in \mathbb{Q})$ halmazok lefedik $\mathbb{R}$-et. Valóban, tetszőleges x-re van olyan $y \in E$ elem, amelyet az x-et tartalmazó ekvivalencia-osztályból választottunk. Ekkor $r = x - y \in \mathbb{Q}$, tehát $x = y + r \in E + r$.

Ha $F \subset E$, akkor ϑ eltolás-invarianciája miatt $\vartheta(F) = \vartheta(F+r)$ minden r-re. Ha $\vartheta(F) > 0$, akkor

$$\vartheta\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \vartheta(F + 1/n)\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \vartheta(F) = \infty.$$

Mivel $F + 1/n \subset E + 1/n \subset [a, b]$ minden $n \geq n_0$-ra, ebből következik, hogy $\vartheta([a, b]) = \infty$, ami lehetetlen, mert $\vartheta([a, b])$ véges. Ugyanígy látható, hogy $\vartheta(F) < 0$ is lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy $\vartheta(F) = 0$ minden $F \subset E$ halmazra.

Az eltolás-invariancia miatt ebből következik, hogy $\vartheta(F) = 0$ minden olyan F halmazra, amely lefedhető E egy eltoltjával. Tudjuk, hogy $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (E + r)$.

Így tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ halmazra

$$\vartheta(A) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \vartheta(A \cap (E + r)) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} 0 = 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy ϑ azonosan nulla.

135. Ha A nem Lebesgue-mérhető, akkor nincs mit bizonyítani. Ezért feltehetjük, hogy A Lebesgue-mérhető. A 130. feladat állítása szerint $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = 0$, ahol $B = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (A + r)$. Legyen E tetszőleges nem Lebesgue-mérhető halmaz. Ekkor van olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy az $(A + r) \cap E$ halmaz nem mérhető. Ellenkező esetben ugyanis $B \cap E = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} ((A + r) \cap E)$ is mérhető lenne. De ekkor $E = (B \cap E) \cup (E \setminus B)$ is mérhető lenne, hiszen $E \setminus B$ nullmértékű. Ez lehetetlen, tehát $(A+r) \cap E$ nem mérhető egy alkalmas r-re. Ekkor $E' = [(A+r) \cap E] - r = A \cap (E - r)$ sem mérhető.

136. Az (i) egyenlőtlenség általában nem igaz. Legyen U tetszőleges nem-mérhető halmaz. Ekkor van olyan V halmaz, amelyet nem vág jól ketté, azaz $\lambda(V) < \lambda(V \cap U) + \lambda(V \setminus U)$. Legyen $H = U \cap V$ és $K = V \setminus U$. Ekkor $H \cap K = \emptyset$, tehát

$$\begin{aligned}\lambda(H \cup K) + \lambda(H \cap K) = \lambda(V) + 0 < \lambda(V \cap U) + \lambda(V \setminus U) = \\ = \lambda(H) + \lambda(K).\end{aligned}$$

A (ii) állítás igaz. Legyen H, illetve K mérhető burka A, illetve B. Ekkor

$$\begin{aligned}\lambda(H \cup K) + \lambda(H \cap K) \le \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \\ = \lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(H) + \lambda(K).\end{aligned}$$

137. Jelöljük $\mathcal{M}$-mel azoknak a halmazoknak a rendszerét, amelyek előállnak véges sok racionális gömb uniójaként. Ekkor $\mathcal{M}$ megszámlálható. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{M}$ mindenütt sűrű $\mathcal{L}^{<\infty}$-ben.

Legyen $A \in \mathcal{L}^{<\infty}$ és $\varepsilon > 0$ adott. Legyen G olyan nyílt halmaz, amelyre $A \subset G$ és $\lambda(G \setminus A) < \varepsilon/2$. (Lásd a 101. feladat (i) állítását.) Ekkor $G = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$, ahol $B_1, B_2, \ldots$ racionális gömbök (lásd a 41. feladat (ii) állítását). Ekkor $M_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n \in \mathcal{M}$ minden n-re. Mivel $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ és $M_1 \cup M_2 \cup \ldots = G$, ezért $\lambda(M_n) \to \lambda(G)$. Legyen n olyan index, amelyre $\lambda(G \setminus M_n) < \varepsilon/2$. Ekkor

$$d(A, M_n) \le d(A, G) + d(G, M_n) = \lambda(G \setminus A) + \lambda(G \setminus M_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{M}$ mindenütt sűrű $\mathcal{L}^{<\infty}$-ben.

138. Tegyük fel, hogy f mérhető, és legyen $\mathcal{C} = \{B \subset \mathbb{R} \colon f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Belátjuk, hogy $\mathcal{C}$ olyan σ-gyűrű, amely tartalmazza a nyílt halmazokat. Ha $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{C}$, akkor $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$ és

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A},$$

tehát $\mathcal{C}$ σ-gyűrű.

Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$-re $(-\infty, c)$ és (c, ∞) elemei $\mathcal{C}$-nek, hiszen $f^{-1}((-\infty, c)) = A(f < c) \in \mathcal{A}$ és $f^{-1}((c, \infty)) = A(f > c) \in \mathcal{A}$. Mivel $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$, ezért a nyílt intervallumok elemei $\mathcal{C}$-nek. Mivel pedig $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálhatóan sok nyílt intervallum uniójaként, így $\mathcal{C}$ tartalmazza a nyílt halmazokat.

A legszűkebb, nyílt halmazokat tartalmazó σ-gyűrű a Borel-halmazok rendszere, ezért $\mathcal{C}$ tartalmazza a Borel-halmazokat. Ezzel beláttuk, hogy ha f mérhető, akkor $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazra.

A megfordítás nyilvánvaló, hiszen $A(f < c) = f^{-1}((-\infty, c))$, és $(-\infty, c)$ Borel-halmaz minden c-re.

139. Legyen s egyszerű. Ekkor $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, ahol $A_1, \ldots, A_n$ mérhető halmazok, melyek mindegyikén s konstans. Nyilvánvaló, hogy minden $c \in \mathbb{R}$-re az $A(s < c)$ halmaz üres vagy egyenlő az A_i halmazok közül néhánynak az uniójával. Így s mérhető. Triviális, hogy s értékkészlete véges.

Most tegyük fel, hogy s mérhető és az értékkészlete véges. Legyen $s(A) = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Ekkor $A_i = A(s = c_i) \in \mathcal{A}$, hiszen s mérhető. Nyilvánvaló, hogy $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, és hogy s konstans az A_i halmazok mindegyikén, tehát s egyszerű.

140. Azon $x \in A$ pontok halmaza, amelyekben az $f_n(x)$ számsorozat monoton növő, egyenlő a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(f_n \le f_{n+1})$ halmazzal, ami eleme $\mathcal{A}$-nak. Ugyanígy látható, hogy azon $x \in A$ pontok halmaza, amelyekben az $f_n(x)$ számsorozat monoton csökkenő, szintén eleme $\mathcal{A}$-nak. Így e két halmaz uniója is eleme $\mathcal{A}$-nak.

141. Mivel az $A(f_n = c)$ halmaz mérhető minden n-re és minden $c \in \mathbb{R}$-re, ezért a $C_n = \{x \in A \colon f_n(x) \text{ racionális}\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A(f_n = r)$ halmaz szintén mérhető. Ha P jelöli a prímszámok halmazát, akkor

$$B = \bigcap_{p \in P} \left((A \setminus C_p) \cup (A \setminus C_{p^2})\right).$$

Ebből világos, hogy $B \in \mathcal{A}$.

142. Legyen $\mathcal{A}$ olyan σ-gyűrű és $A \in \mathcal{A}$ olyan halmaz, amelynek minden egyelemű részhalmaza mérhető, de A nem minden részhalmaza mérhető. (Legyen pl. X nem-megszámlálható, és legyen $\mathcal{A} = \{A \subset X \colon A \text{ megszámlálható}\}$.) Ha $B \subset A$ és $B \notin \mathcal{A}$, akkor χ_B nem mérhető. Másrészt $\chi_B = \sup\{\chi_x \colon x \in B\}$, és χ_x mérhető minden $x \in A$-ra.

143. Tegyük fel, hogy minden mérhető függvény majdnem konstans A-n. Ha $B \in \mathcal{A}$ és $B \subset A$, akkor χ_B mérhető, tehát majdnem konstans A-n. Legyen $c \in \overline{\mathbb{R}}$ olyan, hogy $\mu(A(\chi_B \neq c)) = 0$. Ha $c = 0$, akkor $\mu(B) = 0$, hiszen B pontjaiban $\chi_B \neq 0$. Ha viszont $c \neq 0$, akkor $\mu(A \setminus B) = 0$, hiszen $A \setminus B$ pontjaiban $\chi_B = 0$. Ezzel beláttuk, hogy A atom.

Most tegyük fel, hogy A atom, és legyen f mérhető A-n. Belátjuk, hogy f majdnem konstans A-n. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$-re az $A(f < a)$, $A(f = a)$, $A(f > a)$ halmazok diszjunkt mérhető részhalmazai A-nak, melyek uniója A. Mivel A atom, ezért e három halmaz közül kettő nullmértékű.

Tekintsük a $C = \{a \in \mathbb{R} \colon \mu(A(f > a)) = 0\}$ halmazt. Ha $C = \emptyset$, akkor $\mu(A(f \leq a)) = 0$ minden $a \in \mathbb{R}$-re. Ekkor $A(f < \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f \leq n)$ nullmértékű, tehát a feladat állítása teljesül $c = \infty$-re.

Ha $C \neq \emptyset$ és nem korlátos alulról, akkor $\mu(A(f > a_n)) = 0$ egy alkalmas $a_n \to -\infty$ sorozatra. Így $A(f > -\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f > -a_n)$ nullmértékű, tehát a feladat állítása teljesül $c = -\infty$-re.

Végül legyen $C \neq \emptyset$ és alulról korlátos. Belátjuk, hogy a feladat állítása teljesül $c = \inf C$-re. Legyenek $a_n \in C$ és $b_n \notin C$ c-hez tartó sorozatok. Ekkor $A(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f > a_n)$ és $A(f < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f < b_n)$ nullmértékű halmazok, tehát $\mu(A(f \neq c)) = 0$.

144. Legyen az $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvény korlátos és mérhető, és legyen $\varepsilon > 0$ adott. Tegyük fel, hogy $f(A) \subset [-K, K]$. Ekkor az $A_i = A((i-1) \cdot \varepsilon \leq f < i \cdot \varepsilon)$ halmazok mérhetőek minden i-re, és közülük véges sok lefedi A-t. Legyen $s(x) = (i-1) \cdot \varepsilon$ minden $x \in A_i$-re és minden olyan i-re, amelyre $A_i \neq \emptyset$. Világos, hogy s egyszerű, és $|f - s| < \varepsilon$ mindenütt A-n. Ezzel (i)-et beláttuk.

Legyen $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvény mérhető, ahol $\mu(A) < \infty$, és legyen $\varepsilon > 0$ adott. Az $A_n = A(-n < f < n)$ halmazok mérhetőek, az uniójuk A, és $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, tehát $\mu(A_n) \to \mu(A)$. Mivel $\mu(A) < \infty$ a feltevés szerint, ezért van olyan n, hogy $\mu(A \setminus A_n) < \varepsilon$. Legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in A_n$, és legyen $g(x) = 0$, ha $x \in A \setminus A_n$. Nyilvánvaló, hogy g korlátos és mérhető. Így (i) szerint van olyan s egyszerű függvény, hogy $|s - g| < \varepsilon/2$ mindenütt A-n. Ekkor

$A(|f-s|>\varepsilon)\subset A(f\neq g)$, tehát $\mu(A(|f-s|>\varepsilon))<\varepsilon$. Ezzel (ii)-t is beláttuk.

145. Az F függvény monotonitása nyilvánvaló. Ha a t_n számsorozat szigorúan monoton növő és $t_n\to t$, akkor az $A(f<t_n)$ halmazok monoton növő sorozatot alkotnak, melyek uniója $A(f<t)$. Ebből következik, hogy $F(t_n)\to F(t)$. Ez bizonyítja a balról folytonosságot. Ugyanígy adódik, hogy $\lim_{t\to\infty} F(t)=\mu(A)$. Ha a t_n számsorozat szigorúan monoton csökkenő és $t_n\to-\infty$, akkor az $A(f<t_n)$ halmazok monoton csökkenő sorozatot alkotnak, melyek metszete üres, mert feltettük, hogy f véges értékű. Mivel $\mu(A)<\infty$, ezért $F(t_n)\to 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\lim_{t\to-\infty} F(t)=0$.

Ha a t_n számsorozat szigorúan monoton csökkenő és $t_n\to t$, akkor az $A(f<t_n)$ halmazok monoton csökkenő sorozatot alkotnak, melyek metszete $A(f\le t)$. Így $F(t_n)\to\mu(A(f\le t))$. Ebből következik, hogy F jobb oldali határértéke t-ben $\mu(A(f\le t))$. Az F függvény akkor és csak akkor lesz jobbról folytonos a t pontban, ha $\mu(A(f\le t))=F(t)=\mu(A(f<t))$, azaz ha $\mu(A(f=t))=0$.

146. A Borel–Cantelli-lemma (64. feladat) szerint μ-m.m. $x\in A$-hoz van olyan n_0, hogy minden $n\ge n_0$-ra $x\notin A(|f_n-f|>1/n)$, azaz $|f_n(x)-f(x)|\le 1/n$. Minden ilyen x-re $f_n(x)\to f(x)$, és ezt kellett belátni.

147. A megoldás azon az észrevételen alapszik, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ egy pozitív tagú divergens sor, akkor vannak olyan I_n intervallumok $[0,1]$-ben, hogy $|I_n|\le a_n$ minden n-re, és amelyek együttesen minden $x\in[0,1)$ pontot végtelen sokszor lefednek. Ilyen intervallumokat a 63. feladatban konstruáltunk. A fenti konstrukció alkalmazható az $a_n=1/(2n)$ sorozatra, hiszen $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)=\infty$. Így olyan $I_n\subset[0,1]$ intervallumokat kapunk, amelyekre $|I_n|<1/n$ minden n-re, és amelyek együttesen minden $x\in[0,1)$ pontot végtelen sokszor lefednek. Ha μ a Lebesgue-mérték, $A=[0,1]$, $f\equiv 0$ és $f_n=\chi_{I_n}$ minden n-re, akkor $\mu(A(|f_n-f|>1/n^2))=|I_n|<1/n$ minden $n>1$-re, de $f_n(x)\to f(x)$ semmilyen x pontban nem teljesül.

148. Legyen f_n olyan folytonos függvény, hogy $f_n(x)=0$, ha $x\in\{0\}\cup[1/n,1]$, és $\max_{[0,1/n]} f=1$ $(n=1,2,\ldots)$. Világos, hogy $f_n\to 0$ pontonként $[0,1]$-en. Ha $A\subset[0,1]$ sűrű $[0,1]$-ben, akkor a konvergencia nem egyenletes A-n, hiszen mindegyik f_n felvesz $1/2$-nél nagyobb értéket A-n. Ha N nullmértékű, akkor $[0,1]\setminus N$ sűrű, tehát a konvergencia nem egyenletes $[0,1]\setminus N$-en.

149. Legyen $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ahol $A_n\in\mathcal{A}$ véges mértékű minden n-re. A Jegorov-tétel szerint minden k-ra van olyan $B_{n,k}\subset A_n$ mérhető halmaz, hogy

$\mu(A_n \setminus B_{n,k}) < 1/k$, és a konvergencia egyenletes $B_{n,k}$-n. Legyen C_1, C_2, $\ldots$ a $B_{n,k}$ halmazok egy felsorolása. Ekkor $N = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ nullmértékű, hiszen $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$ nullmértékű minden n-re.

150. Jelöljük X-szel a pozitív egészekből álló, monoton növő és végtelenhez tartó sorozatok halmazát. Legyen $\mathcal{A} = P(X)$, és legyen μ a számosságmérték $P(X)$-en. Ha $x = (k_1, k_2, \ldots) \in X$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor legyen $f_n(x) = 1/i$, ahol i a legkisebb olyan index, amelyre $n \le k_i$. (Ilyen index van, mert $k_n \to \infty$ minden $(k_1, k_2, \ldots) \in X$-re.) Ekkor az f_n függvénysorozat pontonként nullához tart X-en.

Tegyük fel, hogy a $C \subset X$ halmazon a konvergencia egyenletes. Ekkor minden i-re van olyan N_i, hogy $f_n(x) < 1/i$ minden $x \in C$ és $n \ge N_i$ esetén. Ebből következik, hogy ha $x = (k_1, k_2, \ldots) \in C$, akkor $k_i < N_i$ minden i-re. Ugyanis $f_{k_i}(x) \ge 1/i$, holott $k_i \ge N_i$-ből $f_{k_i}(x) < 1/i$ következne. Ha tehát egy $C \subset X$ halmazon a konvergencia egyenletes, akkor van olyan $(N_1, N_2, \ldots)$ sorozat, hogy $k_i < N_i$ minden $(k_1, k_2, \ldots) \in C$ sorozatra, és minden i-re.

Megmutatjuk, hogy ha $X = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$, akkor a konvergencia nem lehet egyenletes mindegyik halmazon. Ha ugyanis a konvergencia egyenletes volna mindegyik halmazon, akkor volnának olyan (N_i^n) sorozatok $(n = 1, 2, \ldots)$, hogy ha $(k_1, k_2, \ldots) \in C_n$, akkor $k_i < N_i^n$ minden i-re.

Ez azonban lehetetlen, mert ha a monoton növő és végtelenhez tartó (k_i) sorozatot úgy választjuk, hogy $k_n > N_n^n + 1$ teljesüljön minden n-re, akkor az $x = (k_1, k_2, \ldots)$ sorozat egyik C_n halmaznak sem lehet eleme. Ha ugyanis $x \in C_n$, akkor $k_n < N_n^n$ nem teljesül.

Mivel a számosságmérték szerint minden nullmértékű halmaz üres, ezért nincs olyan $X = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, felbontás, amelyre $\mu(N) = 0$ és a konvergencia egyenletes mindegyik C_i halmazon.

151. Feltehetjük, hogy f monoton növő. Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $A(f < c) \ne \emptyset$, akkor legyen $b = \sup A(f < c)$. Könnyű belátni, hogy $A(f < c) = A \cap (-\infty, b)$ vagy $A(f < c) = A \cap (-\infty, b]$. Így $A(f < c)$ mindkét esetben Borel-halmaz.

152. Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $x \in A(f < c)$, akkor f folytonossága miatt van olyan $\delta_x > 0$, hogy $A \cap B(x, \delta_x) \subset A(f < c)$. Ebből következik, hogy $A(f < c) = A \cap G$, ahol $G = \bigcup_{x \in A} B(x, \delta_x)$. Mivel G nyílt, ezért $A(f < c)$ Borel-halmaz. Ez minden $c \in \mathbb{R}$-re igaz, tehát f Borel-mérhető.

153. Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot 10^n egyenlő részre. Mindegyik I osztóintervallumra teljesül, hogy az I belsejében levő bármely két szám tizedestört alakjának első n jegye megegyezik. Ebből következik, hogy az A_n függvény konstans mindegyik osztóintervallum belsejében. Így az A_n függvény lépcsősfüggvény, és akkor ugyanez igaz az $f_n = A_n/n$ függvényre is. Tehát f_n Borel-mérhető minden n-re, ezért $\limsup_{n\to\infty} f_n$ szintén Borel-mérhető.

154. Legyen f az előző (153.) feladatban konstruált függvény. Ekkor f a $[0,1]$ intervallum minden részintervallumában felvesz minden $[0,1]$-beli értéket. Valóban, legyen $0 < a < b < 1$ és $c \in [0,1]$ adott. Válasszunk olyan $a_1, \dots, a_n$ tizedesjegyeket, hogy $a < 0{,}a_1 \dots a_n$ és $0{,}a_1 \dots a_n + 10^{-n} < b$ teljesüljön. Könnyen látható, hogy az $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ tizedesjegyeket megválaszthatjuk úgy, hogy f értéke az $x = 0{,}a_1 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots$ pontban éppen c legyen. Írjunk ui. az n-edik jegy után 7-es jegyeket mindaddig, amíg a 7-esek aránya nem lesz nagyobb c-nél. Amint az arány nagyobb, mint c, írjunk 7-től különböző jegyeket addig, amíg az arány c alá nem megy. Ezután ismét írjunk 7-eseket stb. Könnyen látható, hogy az így konstruált x számra $f(x) = c$. Mivel $a < x < b$, ezzel az állítást beláttuk.

Legyen $A = \{x \in [0,1] \colon 0 < f(x) < 1\}$. Mivel f Borel-mérhető, ezért A Borel-halmaz. Legyen $g(x) = \operatorname{tg}((f(x) - (1/2)) \cdot \pi)$, ha $x \in A$, és legyen $g(x) = 0$, ha $x \in [0,1] \setminus A$. Nyilvánvaló, hogy a g függvény $[0,1]$ minden részintervallumában felvesz minden értéket. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$-re és $x \in A$-ra $g(x) < c \iff f(x) < (1/2) + (\operatorname{arctg} c)/\pi$. Mivel f Borel-mérhető, ezért az $\{x \colon g(x) < c\}$ halmaz Borel minden c-re, és ebből könnyen adódik, hogy g is Borel-mérhető.

155. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ adott. Megmutatjuk, hogy az $f \colon A \to \mathbb{R}$ függvényt egyértelműen meghatározzák az $A(f < r)$ $(r \in \mathbb{Q})$ halmazok. Valóban, tegyük fel, hogy egy $g \colon A \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy $A(g < r) = A(f < r)$ minden $r \in \mathbb{Q}$-ra. Ekkor $g \equiv f$. Ha ugyanis $f(x) \neq g(x)$ valamely $x \in A$-ra, akkor $A(g < r) \neq A(f < r)$ minden olyan $r \in \mathbb{Q}$-ra, amely $f(x)$ és $g(x)$ között van.

Legyen (r_n) a racionális számok egy sorozatba rendezése. Minden $f \in \mathcal{F}_b$ függvényhez rendeljük hozzá azt az $A_0, A_1, \dots$ halmazsorozatot, amelyre A_0 egyenlő f értelmezési tartományával, és $A_n = A_0(f < r_n)$ minden $n = 1, 2, \dots$-re. A fentiek szerint különböző $\mathcal{F}_b$-beli függvényekhez különböző halmazsorozatokat rendeltünk hozzá.

Az 57. feladat szerint $\mathbb{R}^p$-nek kontinuum sok Borel-részhalmaza van. Mivel az $A_0, A_1, \dots$ halmazsorozatok minden tagja Borel, ezért ezen halmazsorozatok száma legfeljebb $c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{F}_b$ számossága legfeljebb kontinuum. Mivel $\mathcal{F}_b$ számossága legalább kontinuum (hiszen a konstans függvények elemei $\mathcal{F}_b$-nek), ezért $\mathcal{F}_b$ számossága pontosan kontinuum.

156. A megoldási ötlet gondolatát alkalmazva azonnal adódik, hogy

$$A = \bigcap_{r\in\mathbb{Q},\ r\geq 0} (([a,b]\setminus A_r)\times\mathbb{R})\cup([a,b]\times[0,r]).$$

Ha f Borel-mérhető, akkor az A_r, $([a,b]\setminus A_r)\times\mathbb{R}$, $[a,b]\times[0,r]$ halmazok mindegyike Borel-mérhető minden r-re, tehát ugyanez igaz A-ra.

Most tegyük fel, hogy A Borel. Be kell látni, hogy ekkor f Borel-mérhető, vagyis hogy az $E_c=\{x\in[a,b]\colon f(x)\geq c\}$ halmaz Borel minden $c\in\mathbb{R}$-re. Nyilvánvaló, hogy $x\in E_c \iff (x,c)\in A$ minden $x\in[a,b]$-re. Így E_c megegyezik az $A^c=\{x\colon (x,c)\in A\}$ szekcióval. Ezért elég annyit belátni, hogy ha $B\subset\mathbb{R}^2$ Borel, akkor a B^c szekció (mint $\mathbb{R}$ részhalmaza) is Borel. Legyen $c\in\mathbb{R}$ rögzített, és legyen $\mathcal{A}$ azon $B\subset\mathbb{R}^2$ halmazok rendszere, amelyekre B^c Borel. Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathcal{A}$ olyan σ-gyűrű, amely tartalmazza a nyílt halmazokat. Így $\mathcal{A}$ minden síkbeli Borel-halmazt is tartalmaz, amivel az állítást beláttuk.

157. A Dirichlet-függvény majdnem mindenütt egyenlő az azonosan 0 függvénnyel, de sehol sem folytonos. Így (ii)$\not\Longrightarrow$(i). Ha $a<c<b$, akkor a $\chi_{[a,c]}$ függvény egyetlen pont kivételével folytonos, de nincs olyan $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $f=g$ majdnem mindenütt. Így (i)$\not\Longrightarrow$(ii). Tehát egyik állításból sem következik a másik.

158. Legyen $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Belátjuk, hogy az $A_c=\{x\in[a,b]\colon f(x)<c\}$ halmaz Lebesgue-mérhető. Legyen f szakadási pontjainak halmaza D. Ekkor a feltevés szerint $\lambda(D)=0$. Minden $x\in A_c\setminus D$ pontban $f(x)<c$ és f folytonos x-ben. Így van olyan $\delta_x>0$, hogy $f(y)<c$ minden $y\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$-re. Ez azt jelenti, hogy $(x-\delta_x,x+\delta_x)\subset A_c$ minden $x\in A_c\setminus D$-re. Jelöljük G-vel az $\bigcup\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\colon x\in A_c\setminus D\}$ halmazt. Ekkor G nyílt, és $G\subset A_c$. Másrészt $A_c\setminus D\subset G$, tehát $A_c\setminus G\subset D$, és így $\lambda(A_c\setminus G)=0$. Ebből következik, hogy $A_c=G\cup(A_c\setminus G)$ Lebesgue-mérhető.

159. Legyen $A\subset[a,b]$ sehol sem sűrű, zárt és pozitív mértékű halmaz (lásd a 103. feladatot). Ekkor az $f=\chi_A$ függvény Lebesgue-mérhető, mert A Lebesgue-mérhető. Legyen $E\subset[a,b]$ tetszőleges nullmértékű halmaz. Ekkor $A\setminus E\neq\emptyset$. Ha $x\in A\setminus E$, akkor f megszorítása az $[a,b]\setminus E$ halmazra nem folytonos x-ben. Ez abból következik, hogy $f(x)=1$, de x minden környezetében van olyan nyílt intervallum, amelyen f nulla. Egy ilyen nyílt intervallumból E-t elhagyva még mindig maradnak olyan pontok, amelyekben f értéke nulla, tehát $f|_{[a,b]\setminus E}$ nem folytonos x-ben.

160. Először belátjuk, hogy ha $A\subset[a,b]$ Lebesgue-mérhető, akkor minden $\varepsilon>0$-ra van olyan $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy $\lambda(\{x\in[a,b]\colon \chi_A(x)\neq$

$g(x)\}) < \varepsilon$. Ugyanis a 123. feladat állítása szerint van olyan B halmaz, amely véges sok szakasz uniója, és amelyre $\lambda(A\Delta B) < \varepsilon$. Ekkor $g = \chi_B$ lépcsősfüggvény, és nyilván kielégíti a feltételt, hiszen

$$\{x \in [a, b] \colon \chi_A(x) \neq g(x)\} \subset A\Delta B.$$

Most belátjuk, hogy ha $s\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egyszerű függvény, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy $\lambda(\{x \in [a, b] \colon s(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Legyen $s_n = c_i$ az A_i halmazon, ahol $A_1, \ldots, A_k$ diszjunkt Lebesgue-mérhető halmazok, melyek uniója $[a, b]$. A fentiek szerint minden $i = 1, \ldots, k$-ra van olyan g_i lépcsősfüggvény, hogy $\lambda(\{x \in [a, b] \colon \chi_{A_i}(x) \neq g_i(x)\}) < \varepsilon/k$. Legyen $g = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot g_i$. Ekkor g is lépcsősfüggvény. Világos, hogy ha $s(x) \neq g(x)$, akkor van olyan i, hogy $\chi_{A_i}(x) \neq g_i(x)$. Így $\lambda(\{x \in [a, b] \colon s(x) \neq g(x)\}) < k \cdot \varepsilon/k = \varepsilon$.

A 144. feladat (ii) állítása szerint van olyan $s\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egyszerű függvény, hogy $\lambda(\{x \in [a, b] \colon |f(x) - s(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon/2$. Legyen g olyan lépcsősfüggvény, hogy $\lambda(\{x \in [a, b] \colon g(x) \neq s(x)\}) < \varepsilon/2$. Ekkor $\lambda(\{x \in [a, b] \colon |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$.

161. Az előző (160.) feladat szerint minden n-re van olyan $g_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy $\lambda(\{x \in [a, b] \colon |f(x) - g_n(x)| > 1/n\}) < 1/n^2$. Így a 146. feladat állítása szerint $g_n \to f$ λ-m.m.

162. Tegyük fel először, hogy $f = \chi_B$, ahol $B \subset A$ mérhető. A 101. feladat állítása szerint van olyan F zárt halmaz és olyan G nyílt halmaz, hogy $F \subset B \subset G$ és $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$.

Létezik olyan $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $\chi_F \leq g \leq \chi_G$. Ilyen például a

$$g(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^p \setminus G)}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^p \setminus G) + \operatorname{dist}(x, F)}$$

függvény, ahol $\operatorname{dist}(x, H)$ jelöli az x pontnak a H halmaztól való távolságát. Ugyanis könnyű belátni, hogy adott H halmazra a $\operatorname{dist}(x, H)$ függvény folytonos (sőt Lipschitz) $\mathbb{R}^p$-n. Így a fent definiált g függvény mindenütt folytonos. (Vegyük észre azt is, hogy a g-t definiáló tört nevezője mindenütt pozitív, mert F és $\mathbb{R}^p \setminus G$ diszjunkt zárt halmazok, tehát nincs olyan x, amelynek mindkettőtől nulla a távolsága.) Könnyen látható, hogy $\{x \in A \colon \chi_B(x) \neq g(x)\} \subset G \setminus F$, ezért $\lambda(A((\chi_B \neq g)) < \varepsilon$.

Most legyen f egyszerű függvény. Ekkor $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{B_i}$, ahol $B_i \subset A$ Lebesgue-mérhető halmaz minden $i = 1, \ldots, n$-re. Legyenek $g_1, \ldots, g_n$ olyan folytonos függvények, melyekre $\lambda(A(\chi_{B_i} \neq g_i)) < \varepsilon/n$. Ha $g = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$, akkor nyilván $\lambda(A(f \neq g)) < \varepsilon$.

Most legyen $f\colon A \to \mathbb{R}$ tetszőleges mérhető függvény. A 144. feladat (ii) állítása szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan s egyszerű függvény A-n, amelyre $\mu(A(|f - s| > \varepsilon)) < \varepsilon/2$. A fentiek szerint van olyan $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\lambda(A(s \neq g)) < \varepsilon/2$. Ekkor $\lambda(|f - g| > \varepsilon) < \varepsilon$, amivel a feladatot megoldottuk.

163. Az előző (162.) feladat állítása szerint minden n-re van olyan $g_n\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\lambda(A_n) < 1/n^2$, ahol

$$A_n = \{x \in B(0, n)\colon (|f(x) - g_n(x)| > 1/n\}.$$

A Borel–Cantelli-lemma (64. feladat) szerint majdnem minden $x \in \mathbb{R}^p$ pont csak véges sok A_n-nek eleme. Minden ilyen pontban minden elég nagy n-re $|f(x) - g_n(x)| < 1/n$ (hiszen $x \in B(0, n)$ minden elég nagy n-re). Így $g_n \to f$ majdnem mindenütt. Ezzel (i)-et beláttuk.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Bontsuk fel $\mathbb{R}^p$-t az egymásba nem nyúló $K_1, K_2, \ldots$ kockák egyesítésére. A Jegorov-tétel szerint minden i-re van olyan $E_i \subset K_i$ halmaz, hogy $\lambda(E_i) < \varepsilon/2^i$, és a $g_n \to f$ konvergencia egyenletes a $K_i \setminus E_i$ halmazon. Így f folytonos a $K_i \setminus E_i$ halmazra megszorítva. Legyen $E = \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cup \partial K_i)$. Ekkor $\lambda(E) < \varepsilon$, hiszen $\lambda(\partial(K_i)) = 0$ minden i-re. Nyilvánvaló, hogy f folytonos az $\mathbb{R}^p \setminus E$ halmazra megszorítva.

164. Két megoldást adunk.

1. Az $A(f = \infty)$ és $A(f = -\infty)$ halmazok Lebesgue-mérhetőek. Így a 101. feladat állítása szerint léteznek olyan U és V G_δ halmazok, hogy $A(f = \infty) \subset U$ és $A(f = -\infty) \subset V$, valamint az $U \setminus A(f = \infty)$ és $V \setminus A(f = -\infty)$ halmazok nullmértékűek. Legyen $B = A \setminus (U \cup V)$, és definiáljuk a $g\colon A \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen: $g(x) = f(x)$, ha $x \in B$, $g(x) = \infty$, ha $x \in U \cap A$ és $g(x) = -\infty$, ha $x \in (V \setminus U) \cap A$. Ekkor $g = f$ majdnem mindenütt. Világos, hogy ha $h\colon B \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető és $h = g$ majdnem mindenütt B-n, akkor a h függvényt az $U \cap A$ halmazon végtelennek, a $(V \setminus U) \cap A$ halmazon pedig mínusz végtelennek definiálva olyan Borel-mérhető függvényt kapunk, amely majdnem mindenütt egyenlő f-fel A-n.

Feltehetjük tehát, hogy f véges értékű. Terjesszük ki f-et $\mathbb{R}^p$-re Lebesgue-mérhető függvényként (legyen pl. $f(x) = 0$ minden $x \notin A$-ra). A 163. feladat (ii) állításából következik, hogy vannak olyan E_n halmazok, hogy $\lambda(E_n) < 1/n$ és f folytonos $A \setminus E_n$-en minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Az E_n halmazt lefedhetjük egy $1/n$-nél kisebb mértékű nyílt halmazzal. Így feltehető, hogy E_n nyílt minden n-re.

Legyen $B_n = A \setminus E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, ekkor B olyan Borel-halmaz, amelyre $A \setminus B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, tehát $A \setminus B$ nullmértékű. Legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in B$ és $g(x) = 0$, ha $x \in A \setminus B$. Világos, hogy $f = g$ majdnem mindenütt A-n.

Mivel f folytonos a B_n halmazra megszorítva, ezért a 152. feladat állítása szerint $f|_{B_n}$ Borel-mérhető. Ha tehát $c \in \mathbb{R}$, akkor $B_n(f < c)$ Borel-halmaz minden n-re. Így

$$B(g < c) = B(f < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(f < c)$$

is Borel-halmaz minden c-re. Mivel $A(g < c) = B(g < c)$, ha $c \le 0$, illetve $A(g < c) = B(g < c) \cup (A \setminus B)$, ha $c > 0$, ezért $A(g < c)$ Borel-mérhető minden $c \in \mathbb{R}$-re, tehát g Borel-mérhető.

2. Az $A_r = \{x \in A\colon f(x) < r\}$ halmaz Lebesgue-mérhető minden r-re. A 101. feladat állítása szerint minden r-re létezik egy V_r G_δ halmaz úgy, hogy $A_r \subset V_r$, és $\lambda(V_r \setminus A_r) = 0$. Így az $N = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (V_r \setminus A_r)$ halmaz nullmértékű. Ismét felhasználva a 101. feladat állítását, kapunk egy W halmazt, amely G_δ, nullmértékű és tartalmazza N-et.

Legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in A \setminus W$, és $g(x) = 0$, ha $x \in A \cap W$. Belátjuk, hogy g Borel-mérhető, és $f = g$ majdnem mindenütt. Az utóbbi állítás nyilvánvaló a g függvény definíciójából. Legyen $B_r = \{x \in A \setminus W\colon g(x) < r\}$ minden $r \in \mathbb{R}$-re. Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor

$$B_r = \{x \in A \setminus W\colon f(x) < r\} = A_r \setminus W = V_r \setminus W,$$

hiszen $V_r \setminus A_r \subset W$. Így B_r két G_δ halmaz különbsége, tehát Borel (és $G_{\delta\sigma}$). Mivel $g = 0$ a $A \cap W$ halmazon, ezért az $A(g < r)$ halmaz egyenő B_r-rel, ha $r \le 0$, illetve $B_r \cup (A \cap W)$-vel, ha $r > 0$. Tehát $A(g < r)$ is Borel. Ha $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $A(g < c)$ az $A(g < r)$ halmazok uniója, ahol r befutja a c-nél kisebb racionális számokat. Így $A(g < c)$ is Borel minden c-re, tehát g Borel-mérhető.

165. Legyen először A kompakt, és f folytonos. Minden $z \in f(A)$-ra legyen $\phi(z)$ a legkisebb olyan $x \in A$, amelyre $f(x) = z$. Megmutatjuk, hogy $B = \phi(f(A))$ kielégíti a feltételeket. Világos, hogy f a B halmazt kölcsönösen egyértelműen $f(A)$-ra képezi. Csak azt kell belátnunk, hogy B mérhető. Ha $x \in A \setminus B$, akkor van olyan $y \in A$, hogy $y < x$ és $f(y) = f(x)$. Jelöljük F_n-nel azon $x \in A$ pontok halmazát, melyekre van olyan $y \in A$, $y \le x - 1/n$, hogy $f(y) = f(x)$. Könnyű belátni, hogy F_n zárt halmaz minden n-re. Mivel $B = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, ezért B Borel-halmaz, tehát mérhető.

Most tekintsük az általános esetet. A 163. feladat (ii) állításából következik, hogy vannak mérhető $A_n \subset A$ halmazok úgy, hogy $A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ nullmértékű, és $f|_{A_n}$ folytonos minden n-re. Tudjuk, hogy mindegyik A_n tartalmaz azonos mértékű F_σ halmazt (lásd a 101. feladatot). Bontsuk fel ezeket az F_σ halmazokat megszámlálhatóan sok kompakt halmaz egyesítésére. Azt kapjuk, hogy vannak olyan $K_1, K_2, \ldots$ kompakt halmazok A-ban, hogy $N = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ nullmértékű, és $f|_{K_n}$ folytonos minden n-re. Így $f(K_n)$ is kompakt minden n-re.

Legyen $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n)$. Ekkor $L \subset f(A)$, és $f^{-1}(f(A) \setminus L) \subset N$. Válasszunk minden $y \in f(A) \setminus L$-hoz egy $x \in N$-et, amelyre $f(x) = y$. Ezen x pontok egy $N' \subset N$ halmazt alkotnak, amelyet f kölcsönösen egyértelműen $f(A) \setminus L$-re képez. Mivel N' nullmértékű, ezért mérhető. Ha belátjuk, hogy van olyan $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ mérhető halmaz, amelyet f kölcsönösen egyértelműen L-re képez, akkor a feladat állítását beláttuk, mert ekkor $N' \cup E$ olyan mérhető halmaz, amelyet f kölcsönösen egyértelműen $f(A)$-ra képez.

Már beláttuk, hogy minden n-re van olyan $E_n \subset K_n$ mérhető halmaz, melyet f kölcsönösen egyértelműen $f(K_n)$-ra képez. Legyen $L_n = f(K_n) \setminus \bigcup_{i<n} f(K_i)$. Ekkor L_n Borel-halmaz. Így $f^{-1}(L_n) \cap K_n$ is Borel-halmaz, hiszen f folytonos K_n-re megszorítva. Legyen

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap f^{-1}(L_n)).$$

Ekkor E olyan mérhető halmaz, melyet f kölcsönösen egyértelműen $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n) = L$-re képez.

166. Legyen P az f függvény periódusainak halmaza. Nyilvánvaló, hogy $a \in P$ esetén $n \cdot a \in P$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra. A feltétel szerint P tartalmaz akármilyen kicsi pozitív számokat. Ebből egyszerűen következik, hogy P mindenütt sűrű $\mathbb{R}$-ben.

Legyen $A_c = \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) < c\}$. Ekkor $x + a \in A_c$ minden $x \in A_c$ és $a \in P$ esetén. A 129. feladat megoldásának gondolatmenetét alkalmazva ebből azt kapjuk, hogy $\lambda(A_c) = 0$ vagy $\lambda(\mathbb{R} \setminus A_c) = 0$. (A feladat megoldásának gondolatmenete minden változtatás nélkül érvényes $\mathbb{Q}$ helyett tetszőleges mindenütt sűrű halmazra is.) Az állítás a Steinhaus-tételből (127. feladat) is következik. Ui. A_c és $\mathbb{R} \setminus A_c$ mérhető halmazok. Ha mindketten pozitív mértékűek, akkor a Steinhaus-tétel szerint az $A_c - (\mathbb{R} \setminus A_c)$ halmaz tartalmaz szakaszt, és így tartalmazza f egy periódusát is. Ez azonban lehetetlen, mert ha $a = x - y$, ahol $x \in A_c$ és $y \in \mathbb{R} \setminus A_c$, akkor $f(x) \neq f(y)$, tehát a nem lehet periódus.

Azt kaptuk tehát, hogy $\lambda(A_c) = 0$ vagy $\lambda(\mathbb{R} \setminus A_c) = 0$ minden $c \in \mathbb{R}$-re. Ez azt jelenti, hogy az $A(f < c)$ és $A(f \geq c)$ halmazok egyike nullmértékű minden c-re.

Legyen C azon $c \in \mathbb{R}$ számok halmaza, melyekre $\lambda(A_c) = 0$. Ha $C = \emptyset$, akkor $\lambda(A(f \geq c)) = 0$ minden $c \in \mathbb{R}$-re, tehát $f = -\infty$ majdnem mindenütt. Ez azonban lehetetlen, mert feltettük, hogy f véges értékű.

Ha $C \neq \emptyset$ és nem korlátos felülről, akkor $\mu(A(f < c_n)) = 0$ egy alkalmas $c_n \to \infty$ sorozatra. Így $f = \infty$ majdnem mindenütt, ami szintén lehetetlen.

Tehát $C \neq \emptyset$ és felülről korlátos. Belátjuk, hogy $f = d$ majdnem mindenütt, ahol $d = \sup C$. Legyenek $a_n \in C$ és $b_n \notin C$ d-hez tartó sorozatok. Ekkor $A(f < d) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f < a_n)$ és $A(f > d) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f \geq b_n)$ nullmértékű halmazok, tehát $\lambda(A(f \neq d)) = 0$.

167. Be kell látni, hogy $A(g \circ f < c) \in \mathcal{A}$ minden c-re. Ez abból következik, hogy g Borel-mérhető, ezért a $B = \{y \in \mathbb{R} \colon g(y) < c\}$ halmaz Borel. Így a 138. feladat állítása szerint $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, tehát $A(g \circ f < c) = f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

168. Először konstruálunk egy differenciálható és szigorúan monoton $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely egy pozitív mértékű halmazt nullmértékűbe képez. A 103. feladat szerint van olyan zárt $F \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre $\operatorname{int} F = \emptyset$ és $\lambda(F) > 0$. Ekkor a $\operatorname{dist}(x, F)$ függvény (az x pontnak az F halmaztól vett távolsága) mindenütt folytonos és nemnegatív. Legyen $f(x) = \int_0^x \operatorname{dist}(t, F)\, dt$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ekkor f mindenütt differenciálható és monoton növő. Mivel F sehol sem sűrű, ezért $\operatorname{dist}(x, F) > 0$ egy mindenütt sűrű nyílt halmazon, és ebből egyszerűen következik, hogy f szigorúan monoton növő.

Ha $x \in F$, akkor $\operatorname{dist}(x, F) = 0$, tehát $f'(x) = \operatorname{dist}(x, F) = 0$. Így a 109. feladat állítása szerint $f(F)$ nullmértékű. Legyen $E \subset F$ nem-mérhető halmaz. (Ilyen van a 135. feladat állítása szerint.) Ekkor $f(E) \subset f(F)$, tehát $f(E)$ nullmértékű. Legyen $g = \chi_{f(E)}$, ekkor g nyilván Lebesgue-mérhető.

Azonban $g \circ f$ nem Lebesgue-mérhető, hiszen $g \circ f = \chi_E$.

169. (i) Jelölje I_n a Cantor-halmaz kiegészítő intervallumainak sorozatát $(n = 1, 2, \ldots)$. Világos, hogy tetszőleges $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $g \circ f$ konstans az I_n intervallumok mindegyikén. Ezért minden $c \in \mathbb{R}$-re az $A_c = \{x \in \mathbb{R} \colon g \circ f(x) < c\}$ halmaz előáll mint az I_n intervallumok közül néhány (esetleg végtelen sok) uniója, plusz a Cantor-halmaz egy részhalmaza. Mivel a Cantor-halmaz minden részhalmaza Lebesgue-mérhető (mert nullmértékű), ebből következik, hogy A_c Lebesgue-mérhető.

(ii) Az állítás nem igaz. Jelöljük C-vel a Cantor-halmazt. Az 57. feladat szerint $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak rendszere kontinuum számosságú. Mivel C-nek több, mint kontinuum sok részhalmaza van, ezért van olyan $H \subset C$ halmaz, amely nem Borel. Feltehetjük, hogy H nem tartalmazza C egyetlen kiegészítő intervallumának egyetlen végpontját sem. Ugyanis ezen végpontok halmaza megszámlálható, tehát elhagyva őket H-ból a maradék halmaz sem lehet Borel.

Legyen $g = \chi_{f(H)}$. Belátjuk, hogy $g \circ f$ nem Borel-mérhető. Legyen $K = \{x \in \mathbb{R} \colon g \circ f(x) > 0\}$. Könnyen látható, hogy $x \in K \iff f(x) \in f(H) \iff x \in H$, mert a H-ra kirótt feltételből következik, hogy $f^{-1}(f(H)) = H$. Így $K = H$, tehát K nem Borel, és $g \circ f$ nem Borel-mérhető.

170. Tegyük fel, hogy $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető, és az értékkészlete megszámlálható. Belátjuk, hogy $g \circ f$ Borel-mérhető minden $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

Legyen f értékkészlete a megszámlálható M halmaz. Ekkor $f^{-1}(\{x\})$ Borel-halmaz minden $x \in M$-re. Tetszőleges g függvényre a $g \circ f$ függvény konstans az $f^{-1}(\{x\})$ halmazok mindegyikén. Így bármely $c \in \mathbb{R}$-re az $\{x \in \mathbb{R} \colon (g \circ f)(x) < c\}$ halmaz az $f^{-1}(\{x\})$ halmazok közül néhánynak (esetleg végtelen soknak, de mindenképpen megszámlálhatóan soknak) az uniója. Ebből következik, hogy $\{x \in \mathbb{R} \colon (g \circ f)(x) < c\}$ Borel-halmaz minden c-re, tehát $g \circ f$ Borel-mérhető.

Most belátjuk, hogy a fent megfogalmazott feltétel szükséges is. Ha $g \circ f$ Borel-mérhető minden g függvényre, akkor ez a $g(x) = x$ függvényre is igaz, tehát f Borel-mérhető.

Jelöljük f értékkészletét Y-nal, és tegyük fel, hogy Y nem megszámlálható. Mivel f Borel-mérhető, ezért ekkor Y kontinuum számosságú (lásd a II.7.9. Tételt és a II.9.2. Következményt követő megjegyzést a [6] jegyzetben). A 155. feladat állítása szerint az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvények halmaza kontinuum számosságú. Így ezen függvények értékkészleteinek halmaza is kontinuum számosságú, tehát van olyan $H \subset \mathbb{R}$ halmaz, amely nem értékkészlete egyetlen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvénynek sem. Mivel Y kontinuum számosságú, ezért van olyan $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $g(Y) = H$. Ekkor a $g \circ f$ függvény értékkészlete H, tehát $g \circ f$ nem lehet Borel-mérhető.

171. Tegyük fel, hogy f Lebesgue-mérhető, és van olyan $N \subset \mathbb{R}$ nullmértékű halmaz úgy, hogy az f függvénynek az $\mathbb{R} \setminus N$ halmazra való megszorításának az értékkészlete megszámlálható. Az előző (170.) feladat megoldásának gondolatmenetét alkalmazva könnyű belátni, hogy tetszőleges $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre a $g \circ f$ függvény Lebesgue-mérhető.

Most belátjuk, hogy ez a feltétel szükséges is. Ha $g \circ f$ Lebesgue-mérhető minden g függvényre, akkor ez a $g(x) = x$ függvényre is igaz, tehát f Lebesgue-mérhető. Belátjuk, hogy az $f|_{\mathbb{R} \setminus N}$ megszorítás értékkészlete megszámlálható egy alkalmas N nullmértékű halmazra. Ezt bizonyítandó feltehetjük, hogy f Borel-mérhető. Ui. f-et egy nullmértékű halmazon megváltoztatva sem a feltétel (vagyis hogy $g \circ f$ Lebesgue-mérhető minden g függvényre), sem pedig az állítás (vagyis hogy $f|_{\mathbb{R}\setminus N}$ értékkészlete megszámlálható egy alkalmas N nullmértékű halmazra) nem változik. Mivel f Lebesgue-mérhető, ezért a 164. feladat szerint egy alkalmas nullmértékű halmazon megváltoztathatjuk úgy, hogy Borel-mérhető legyen.

Legyen tehát f Borel-mérhető függvény, amelyre teljesül, hogy $g \circ f$ Lebesgue-mérhető minden g függvényre. Tegyük fel, hogy $f|_{\mathbb{R}\setminus N}$ értékkészlete nem megszámlálható tetszőleges N nullmértékű halmazra. Ezt feltéve konstruálunk egy $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre a $g \circ f$ függvény nem Lebesgue-mérhető, ellentétben a feltevéssel.

A 155. feladat állítása szerint az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvények halmaza kontinuum számosságú. Így ezen függvények értékkészleteinek $\mathcal{E}$ halmaza is kontinuum számosságú. Nyilvánvaló, hogy ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ Borel és $h \colon A \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető, akkor $h(A) \in \mathcal{E}$, hiszen h-t kiterjeszthetjük $\mathbb{R}$-re Borel-mérhető függvényként úgy, hogy az értékkészlete ne változzon (legyen $h(x) = c$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus A$-ra, ahol $c \in h(A)$).

Tekintsük azon (N, H) párok halmazát, amelyekre N egy nullmértékű Borel-halmaz és $H \in \mathcal{E}$. Ezen párok halmaza kontinuum számosságú. Legyen (N_α, H_α) $(\alpha < \kappa)$ ezen párok egy transzfinit felsorolása, ahol κ a legkisebb kontinuum számosságú rendszám. A g függvényt úgy fogjuk megkonstruálni, hogy minden $\alpha < \kappa$-ra

$$(g \circ f)(\mathbb{R} \setminus N_\alpha) \neq H_\alpha \tag{42}$$

teljesüljön. Ez biztosítani fogja, hogy $g \circ f$ nem Lebesgue-mérhető. Ha ugyanis $g \circ f$ Lebesgue-mérhető lenne, akkor a 164. feladat szerint volna olyan N nullmértékű Borel-halmaz, amelyre $(g \circ f)|_{\mathbb{R}\setminus N}$ Borel-mérhető, és így a $H = (g \circ f)(\mathbb{R} \setminus N)$ halmazra $H \in \mathcal{E}$ teljesülne. Azonban $(N, H) = (N_\alpha, H_\alpha)$ valamely α-ra, és ez ellentmond (42)-nek.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus N_0$ és $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Legyen $g(f(x_0)) = y_0$, ha $y_0 \notin H_0$, és $g(f(x_0)) = y_0 + 1$, ha $y_0 \in H_0$. Legyen $\alpha < \kappa$, és tegyük fel, hogy az x_β és y_β számokat már definiáltuk minden $\beta < \alpha$-ra. A feltétel szerint $f(\mathbb{R} \setminus N_\alpha)$ nem megszámlálható. Ezért $f(\mathbb{R} \setminus N_\alpha)$ kontinuum számosságú, mert $f(\mathbb{R} \setminus N_\alpha) \in \mathcal{E}$, és $\mathcal{E}$ minden eleme vagy megszámlálható, vagy kontinuum számosságú. (Lásd a II.7.9. Tételt és a II.9.2. Következményt követő megjegyzést a [6] jegyzetben.) Így választhatunk egy olyan $x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus N_\alpha$ pontot, amelyre $f(x_\alpha) \neq f(x_\beta)$ minden $\beta < \alpha$-ra. Legyen

$$y_\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{y_\beta + k \colon \beta < \alpha,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\})$$

tetszőleges, és legyen $g(f(x_\alpha)) = y_\alpha$, ha $y_\alpha \notin H_\alpha$, és $g(f(x_\alpha)) = y_\alpha + 1$, ha $y_\alpha \in H_\alpha$.

Az eljárást folytatva definiáljuk az $x_\alpha, y_\alpha, g(f(x_\alpha))$ számokat minden $\alpha < \kappa$-ra. Definiáljuk g-t nullának az $\mathbb{R} \setminus \{f(x_\alpha) \colon \alpha < \kappa\}$ halmaz minden pontjában. Ezzel a g függvényt mindenütt definiáltuk.

Belátjuk, hogy (42) teljesül minden α-ra. Valóban, a konstrukcióból világos, hogy ha $y_\alpha \in H_\alpha$, akkor $g \circ f$ sehol sem veszi fel az y_α értéket, ha viszont $y_\alpha \notin H_\alpha$, akkor $g(f(x_\alpha)) = y_\alpha$. Ebből (42) nyilvánvaló.

172. Világos, hogy ha f konstans, akkor $f \circ g$ is konstans, tehát Lebesgue-mérhető minden $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

Most tegyük fel, hogy $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem konstans. Legyen $f(a) \neq f(b)$ valamely $a, b \in \mathbb{R}$-re, és legyen $H \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges nem Lebesgue-mérhető halmaz. Ha $g(x) = a$, ha $x \in H$ és $g(x) = b$, ha $x \notin H$, akkor $f \circ g$ nem Lebesgue-mérhető, mert $\{x \in \mathbb{R} \colon (f \circ g)(x) = f(a)\} = H$.

173. A megoldás során jelentse a *mérhető* szó a Borel-mérhető, ill. a Lebesgue-mérhető kifejezések bármelyikét (de végig ugyanazt).

(i) Jelöljük A_+-szal azon $x \in A$ pontok halmazát, amelyek jobb oldali torlódási pontjai A-nak. Ekkor $D^+ f$ értelmezési tartománya A_+. Mivel $A \setminus A_+$ megszámlálható, ezért A_+ mérhető, ha A mérhető.

Rögzítsünk egy c valós számot. Belátjuk, hogy $A_+(D^+ f \le c)$ mérhető, ha A mérhető.

Legyen $A_{n,k}$ azon $x \in A_+$ pontok halmaza, melyekre $f(y) - f(x) \le (c + (1/k)) \cdot (y - x)$ minden $x < y < x + 1/n$, $y \in A$ pontra. Ekkor $A_+(D^+ \le c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,k}$. Így elég belátni, hogy $A_{n,k}$ mérhető, ha A mérhető.

Ez abból következik, hogy $A_{n,k}$ relatíve zárt A_+-ban, azaz $x_i \in A_{n,k}$, $x_i \to x \in A_+$ esetén $x \in A_{n,k}$. Valóban, legyen $x < y < x + 1/n$ és $y \in A$. Ekkor $x_i < y < x_i + 1/n$ minden elég nagy i-re. Mivel $x_i \in A_{n,k}$, ezért $f(y) - f(x_i) \le (c + (1/k)) \cdot (y - x_i)$ minden elég nagy i-re. Mármost a feltétel szerint f folytonos A-n, ezért

$$f(y) - f(x) = \lim_{i\to\infty} (f(y) - f(x_i)) \le \lim_{i\to\infty} (c + (1/k)) \cdot (y - x_i) = (c + (1/k)) \cdot (y - x).$$

Ezzel tulajdonképpen azt láttuk be, hogy $A_{n,k} = A \cap \mathrm{cl}\, A_{n,k}$. Így $A_{n,k}$ az A_+ halmaznak egy zárt halmazzal való metszete. Ebből világos, hogy $A_{n,k}$ mérhető, ha A mérhető.

A többi Dini-derivált mérhetősége ugyanígy bizonyítható. Ezzel (i)-et beláttuk.

(ii) Jelöljük A_1-gyel azon $x \in A$ pontok halmazát, amelyek torlódási pontjai A-nak, és amelyekben a véges $f'(x) = \lim_{y\to x,\ y \in A} (f(y) - f(x))/(y - x)$ határérték létezik. Azt kell belátni, hogy ha A mérhető, akkor A_1 is mérhető, és f' mérhető

A_1-en. Világos, hogy f folytonos A_1-re megszorítva, tehát $A_1 \subset C_f$. A 46. feladat (ii) állítása szerint ha A mérhető, akkor ugyanez igaz C_f-re is.

Jelöljük C'_f-vel a C_f halmaz kétoldali torlódási pontjainak halmazát. Tudjuk, hogy $C_f \setminus C'_f$ megszámlálható (l. a 38. oldalt). A már bizonyított (i) állítás szerint f Dini-deriváltjai mérhetőek a C'_f halmazon. Így az

$$A_2 = \{x \in C'_f \colon D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) \in \mathbb{R}\}$$

halmaz szintén mérhető. Mármost A_1 csak egy megszámlálható halmazzal bővebb A_2-nél, ezért A_1 is mérhető.

174. Mivel $f^+(x) = c_n^+$ és $f^-(x) = c_n^-$ minden n-re, ezért könnyen láthatóan $\int_A f^+ \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \mu(A_n)$ és $\int_A f^- \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \mu(A_n)$. Így az $\int_A f \, d\mu$ integrál akkor és csak akkor létezik, ha $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \mu(A_n)$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \mu(A_n)$ legalább egyike véges, és az integál értéke akkor és csak akkor véges, ha mindkét összeg véges, azaz ha $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu(A_n)$ abszolút konvergens.

175. Nyilvánvaló, hogy $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$. Ezért a nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatósága szerint

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

176. Legyen $a_i = \mu(A_i)$ és $a_{i,j} = \mu(A_i \cap A_j)$. Nyilvánvaló, hogy $\int_X \chi_{A_i} \, d\mu = a_i$ és $\int_X \chi_{A_i} \chi_{A_j} \, d\mu = a_{i,j}$ minden $1 \le i, j \le n$-re. Legyen $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$. Ekkor

$$\int_X f^2 \, d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} + 2 \cdot \sum_{i<j} \chi_{A_i \cap A_j} \right) d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i + 2 \cdot \sum_{i<j} a_{i,j}.$$

A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$\int_X f \, d\mu \le \sqrt{\int_X f^2 \, d\mu} \cdot \sqrt{\int_X 1 \, d\mu} = \sqrt{\int_X f^2 \, d\mu},$$

azaz $\int_X f^2\,d\mu \ge \left(\int_X f\,d\mu\right)^2$. Ezt a fentiekkel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n a_i + 2\cdot\sum_{i<j} a_{i,j} \ge \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\cdot\sum_{i<j} a_i a_j,$$

azaz

$$\sum_{i<j} a_{i,j} \ge \sum_{i<j} a_i a_j - b, \tag{43}$$

ahol $b = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (a_i - a_i^2)$. Az $1 \le i < j \le n$ párok száma $n(n-1)/2$, ezért (43)-ból következik, hogy legalább egy $i < j$ párra $a_{i,j} \ge a_i a_j - \frac{b}{n(n-1)/2}$. Mivel $x - x^2 \le 1/4$ minden $x \in [0,1]$-re, ezért $b \le n/8$, $\frac{b}{n(n-1)/2} \le \frac{1}{4(n-1)}$, tehát legalább egy $i < j$ párra $a_{i,j} \ge a_i a_j - 1/(4(n-1))$.

177. A megoldási ötletben láttuk, hogy olyan példát kell konstruálnunk, amelyben $[0,1]$ (majdnem) minden pontja a halmazok közül pontosan $n/2$-nek eleme. Ebből máris adódik, hogy n páros szám kell, hogy legyen; páratlan n-re ilyen példa nincs (mert akkor (16)-ban nem állhat egyenlőség).

Legyen n páros. A megkonstruálandó halmazok $[0,1]$-et 2^n diszjunkt részre osztják. Ezek az $A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}$ halmazok, ahol $\varepsilon_i = \pm 1$ minden i-re, ahol $A_i^1 = A_i$ és $A_i^{-1} = [0,1] \setminus A_i$. Mivel minden pont a halmazok közül pontosan $n/2$-nek eleme, ezért csak azok az $A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}$ lesznek nem-üresek, amelyekre az ε_i-k között pontosan $n/2$ egyenlő 1-gyel. Ezek száma $\binom{n}{n/2}$. Ezért kézenfekvő, hogy $[0,1]$-et osszuk fel $\binom{n}{n/2}$ egyenlő részintervallumra, és a részeket feleltessük meg azoknak az n hosszúságú ± 1-sorozatoknak, amelyekben pontosan $n/2$ tag egyenlő 1-gyel. Legyen minden $i = 1, \ldots, n$-re A_i azon részek uniója, amelyekre teljesül, hogy a résznek megfeleltetett n hosszúságú ± 1-sorozatnak az i-edik tagja 1.

Belátjuk, hogy ez a rendszer kielégíti a feltételeket. Az A_i halmaz $\binom{n-1}{(n/2)-1}$ db $1/\binom{n}{n/2}$ hosszúságú intervallum uniója. Így A_i mértéke $\binom{n-1}{(n/2)-1}/\binom{n}{n/2} = 1/2$ minden i-re. Ha $i \ne j$, akkor $A_i \cap A_j$ azoknak a részintervallumoknak az uniója, amelyekre teljesül, hogy a megfelelő n hosszúságú ± 1-sorozatnak az i-edik és a j-edik tagja is 1. Így $A_i \cap A_j$ mértéke

$$\frac{\binom{n-2}{(n/2)-2}}{\binom{n}{n/2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n-1)}.$$

178. Legyen $k > 1/(4\varepsilon_1)$. A 176. feladat állítása szerint az A_n halmazok közül bármely k között van kettő, amelyek metszetének a mértéke nagyobb, mint

$c^2 - \varepsilon_1$. A Ramsey-tétel szerint ebből következik, hogy az A_n halmazok közül kiválaszthatunk végtelen sokat úgy, hogy a kiválasztott halmazok közül bármely kettő metszetének a mértéke nagyobb, mint $c^2 - \varepsilon_1$. Legyenek ezek az $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ halmazok, ahol $n_1 < n_2 < \ldots$. Az okoskodást megismételve az $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ halmazok sorozatára, egy olyan részsorozatot kapunk, amelyek közül bármely kettő metszetének a mértéke nagyobb, mint $c^2 - \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Legyenek ezek az $A_{m_1}, A_{m_2}, \ldots$ halmazok, ahol $m_1 < m_2 < \ldots$ az $(n_1, n_2, \ldots)$ sorozat részsorozata. Ezekre megismételve az okoskodást kapjuk az $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ halmazokat, és így tovább. Ekkor az $A_{n_1}, A_{m_1}, A_{p_1}, \ldots$ sorozat nyilvánvalóan kielégíti a követelményeket.

179. Tegyük fel (i)-et. A feltételt az azonosan 1 függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Ha $A \in \mathcal{A}$ felülről korlátos, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} \chi_A = 0$. Így a feltétel szerint $\int_{\mathbb{R}} \chi_A \, d\mu = 0$, tehát $\mu(A) = 0$. Tehát ekkor (ii) igaz.

Most tegyük fel (ii)-t. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, amelyre $\lim\limits_{x\to\infty} f = c \in \mathbb{R}$. Ekkor minden $n \geq 1$-re az $\{x\colon |f(x) - c| \geq 1/n\}$ felülről korlátos, tehát a feltétel szerint $\mu(\{x\colon |f(x) - c| \geq 1/n\}) = 0$. Mivel ez minden n-re igaz, ebből következik, hogy $\mu(\{x\colon f(x) \neq c\}) = 0$, azaz $f = c$ μ-m.m. Így a $\mu(\mathbb{R}) = 1$ feltétel alkalmazásával kapjuk, hogy $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \lim\limits_{x\to\infty} f$. Ezzel (i)-et beláttuk.

180. Két megoldást adunk. **1.** Legyen $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$. A nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatósága szerint

$$\int_A g \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f_n - f| \, d\mu < \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty.$$

Így g integrálható, tehát véges μ-m.m. Ha egy x pontban g véges, akkor a g-t definiáló sor konvergens, tehát a tagjai nullához tartanak. Ezért minden ilyen pontban $f_n(x) - f(x) \to 0$.

2. Legyen $A_n = A(|f_n - f| > 1/\sqrt{n})$. Ekkor az $\int_A |f_n - f| \, d\mu < 1/n^2$ feltételből adódóan $\mu(A_n) < 1/n^{3/2}$. Mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2} < \infty$, ezért a Borel–Cantelli-lemma első állítása szerint (64. feladat) μ-m.m. x ponthoz van olyan n_0, hogy $n \geq n_0$ esetén $x \notin A_n$, azaz $|f_n(x) - f(x)| \leq 1/\sqrt{n}$. Világos, hogy minden ilyen pontban $f_n(x) \to f(x)$.

181. Tegyük fel először, hogy $a = 0$. Ekkor $\int_X f_i f_j \, d\mu = 0$ minden $i \neq j$-re. Legyen $|f_n| \leq K$ minden n-re. Legyen $g_n = (f_1 + \ldots + f_n)/n$. Be kell látnunk, hogy $g_n \to 0$ μ-m.m. Mivel

$$\int_X g_n^2\,d\mu = \int_X \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2 + 2\cdot\sum_{1\le i<j\le n} f_i f_j}{n^2}\,d\mu = \int_X \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{n^2}\,d\mu \le \frac{K^2}{n}$$

minden n-re, ezért a 180. feladat (kissé módosított) állítása szerint $g_{n^2}^2 \to 0$, azaz $g_{n^2} \to 0$ μ-m.m.

Megmutatjuk, hogy ha egy x pontban $g_{n^2}(x) \to 0$, akkor $g_n(x) \to 0$. Valóban, ha $n^2 \le k < (n+1)^2$, akkor

$$\begin{aligned} g_k - g_{n^2} &= \frac{f_1+\ldots+f_k}{k} - \frac{f_1+\ldots+f_{n^2}}{n^2} = \\ &= \frac{(n^2-k)\cdot(f_1+\ldots+f_{n^2}) + n^2\cdot(f_{n^2+1}+\ldots+f_k)}{n^2k}. \end{aligned}$$

Mivel $0 \le k-n^2 \le 2n$ és $|f_i| \le K$ minden i-re, ezért

$$|g_k - g_{n^2}| \le \frac{2n\cdot n^2\cdot K}{n^2k} + \frac{n^2\cdot 2n\cdot K}{n^2k} \le \frac{2K}{n} + \frac{2K}{n} = \frac{4K}{n}.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} g_{n^2}(x) = 0$, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = 0$. Így $g_k \to 0$ μ-m.m., amivel az $a = 0$ esetet elintéztük.

Ha $a \in [0,1]$ tetszőleges, akkor a $h_n = f_n - a$ függvényekre teljesül $|h_n| \le K + a$, $\int_X h_n\,d\mu = 0$ és $\int_X h_n h_m\,d\mu = 0$ minden $n \ne m$-re. Az utóbbi azért igaz, mert

$$\begin{aligned} \int_X h_n h_m\,d\mu &= \int_X (f_n-a)(f_m-a)\,d\mu = \\ &= \int_X f_n f_m\,d\mu - a\cdot\int_X f_m\,d\mu - a\cdot\int_X f_n\,d\mu + a^2 = \\ &= a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 0. \end{aligned}$$

Így a már bizonyított állítás szerint $(h_1+\ldots+h_n)/n \to 0$ μ-m.m., amiből azonnal adódik, hogy $(f_1+\ldots+f_n)/n \to a$ μ-m.m.

182. Legyen $f_n = \chi_{A_n}$ minden n-re. Ekkor $\int_X f_n\,d\mu = \mu(A_n) = a$ és $\int_X f_n f_m\,d\mu = \mu(A_n \cap A_m) = a^2$ minden $n \ne m$-re. Mivel az f_n függvények közös korlát alatt vannak X-en, ezért az előző (181.) feladat állítása szerint $\lim\limits_{n\to\infty} (f_1(x)+\ldots+f_n(x))/n = a$ μ-m.m. $x \in X$-re. Könnyen látható, hogy $f_1(x)+\ldots+f_n(x) = A_n(x)$, és így $A_n(x)/n \to a$ μ-m.m. x-re.

183. Jelölje H_n azon $x \in [0,1]$ számok halmazát, amelyek q alapú számrendszerbeli felírásában az n-edik jegy s. Könnyű ellenőrizni, hogy H_n-et úgy kaphatjuk meg, hogy a $[0,1]$ intervallumot q^{n-1} egyenlő részre osztjuk, és az osztóintervallumok mindegyikéből kiválasztjuk egy alkalmas q-ad részét. Így $\lambda(H_n) = 1/q$ minden n-re. Ha $n < m$, akkor a $H_n \cap H_m$ halmazt úgy kaphatjuk meg, hogy a H_n halmazt alkotó $1/q^n$ hosszúságú intervallumok mindegyikéből kiválasztjuk egy alkalmas q-ad részét. Így $\lambda(H_n \cap H_m) = q^{n-1}/q^{n+1} = 1/q^2$ minden $n \neq m$-re. Ezért az előző (182.) feladat állítása szerint, ha megszámoljuk, hogy az x pont a $H_1, \ldots, H_n$ halmazok közül hánynak eleme, akkor a kapott $A_n(X)$ számra teljesül, hogy $A_n(x)/n \to 1/q$ m.m. x-re. Mivel nyilvánvalóan $A_n(x) = B_n(x)$, ezzel a feladatot megoldottuk.

184. Legyen $f_n = \chi_{A_n}$ minden n-re. Azt kell belátni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \infty$ μ-m.m. $x \in X$-re.

Legyen $a_n = \mu(A_n)$ és $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ minden n-re. Belátjuk, hogy

$$\int_X (f_1 + \ldots + f_n - s_n)^2 \, d\mu = s_n - \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{44}$$

Valóban, $f_i^2 = f_i$ és $\int_X f_i \, d\mu = a_i$ minden i-re, továbbá

$$\int_X f_i f_j \, d\mu = \mu(A_i \cap A_j) = \mu(A_i) \cdot \mu(A_j)$$

minden $i \neq j$-re, tehát (44) bal oldala

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j + s_n^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} a_i s_n =$$
$$= s_n + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + s_n^2 - 2 s_n^2 = s_n - \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Legyen $B_n = X(|f_1 + \ldots + f_n - s_n| > s_n/2)$. Ekkor (44) alapján

$$s_n > \int_{B_n} (f_1 + \ldots + f_n - s_n)^2 \, d\mu \ge \frac{1}{4} s_n^2 \cdot \mu(B_n),$$

tehát $\mu(B_n) < 4/s_n$. A feltétel szerint $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$, azaz $s_n \to \infty$. Legyenek $n_1 < n_2 < \ldots$ olyan indexek, melyekre $s_{n_k} > k^2$. Ekkor $\sum_{k=1}^{\infty} 4/s_{n_k} < \infty$, tehát $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n_k}) < \infty$. Így a Borel–Cantelli-lemma első állítása szerint (64.

feladat) μ-m.m. $x \in X$-re $x \notin B_n$ teljesül végtelen sok n-re. Minden ilyen pontban $f_1(x) + \ldots + f_n(x) \ge s_n/2$, amivel beláttuk, hogy μ-m.m. $x \in X$-re $f_1(x) + \ldots + f_n(x) \ge s_n/2$ teljesül végtelen sok n-re. Így μ-m.m. $x \in X$-re $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \infty$, és ezt kellett belátni.

185. Legyen $B_n = X \setminus A_n$ minden n-re. Ekkor $\mu(B_i \cap B_j) = \mu(B_i) \cdot \mu(B_j)$ teljesül minden $i \ne j$-re. Valóban,

$$\begin{aligned}\mu(A_i \cap B_j) &= \mu(A_i \setminus A_j) = \mu(A_i) - \mu(A_i \cap A_j) = \\ &= \mu(A_i) - \mu(A_i) \cdot \mu(A_j) = \mu(A_i) \cdot \mu(B_j)\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\mu(B_i \cap B_j) &= \mu(B_j \setminus A_i) = \mu(B_j) - \mu(B_j \cap A_i) = \\ &= \mu(B_j) - \mu(A_i) \cdot \mu(B_j) = \mu(B_j) \cdot \mu(B_i).\end{aligned}$$

Így a Borel–Cantelli-lemma szerint (64. és 184. feladatok) $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} B_n\right)$ értéke 0 vagy 1 aszerint, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$ vagy $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \infty$.

Mivel $\liminf_{n\to\infty} A_n = X \setminus \limsup_{n\to\infty} B_n$, ezért $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)$ értéke 0 vagy 1 aszerint, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \mu(A_n)) = \infty$ vagy $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \mu(A_n)) < \infty$.

186. Legyen $A_k = \{x \in [0,1]\colon f(x) = k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Egy $x \in [0,1]$ szám akkor és csak akkor eleme A_k-nak, ha x első $k-1$ tizedesjegye között nincs 1-es, és a k-adik tizedesjegye 1-es. Az 50. feladat megoldásának gondolatemenete szerint A_k véges sok nyílt szakasz és véges sok pont uniója. Azon k hosszúságú sorozatok száma, amelyekben az első $k-1$ tag mindegyike a $0, 2, \ldots, 9$ jegyek valamelyike, a k-adik tag pedig 1, egyenlő 9^{k-1}-gyel. Így $\lambda(A_k) = 9^{k-1}/10^k$. Ebből

$$\int_0^1 f\,d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{9^{k-1}}{10^k} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (9/10)^{k-1}.$$

Az utóbbi összeget a következőképpen határozhatjuk meg. Ismeretes, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ minden $x \in (-1,1)$-re. A hatványsor tagonként deriválható $(0,1)$-ben, tehát $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = 1/(1-x)^2$ minden $x \in (-1,1)$-re. Így $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (9/10)^{k-1} = 100$, és $\int_0^1 f\,d\lambda = 10$.

187. Jelöljük $f_n(x)$-szel az $x \in [0,1]$ szám tizedestört alakjának n-edik tizedesjegyét. Ekkor f_n lépcsősfüggvény, amely konstans az $[(i-1)/10^n, i/10^n]$ intervallum belsejében minden $i = 1, \ldots, 10^n$-re. Könnyen látható, hogy f_n ezen intervallumok egytizedében veszi fel a $0, \ldots, 9$ értékek mindegyikét. Így

$$\int_0^1 f_n \, d\lambda = 10^{-1} \cdot (1 + \ldots + 9) = 45/10.$$

Nyilvánvaló, hogy a feladatban megadott függvény $\sum_{n=1}^{\infty} f_{i_n} \cdot 10^{-n}$. Így f Lebesgue-mérhető, és a nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatósága szerint

$$\int_0^1 f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 10^{-n} f_{i_n} \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{45}{10^{n+1}} = \frac{45}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{2}.$$

188. Jelöljük $f_n(x)$-szel az $x \in [0,1]$ szám tizedestört alakjának n-edik tizedesjegyét. Amint azt az előző (187.) feladat megoldásában láttuk, $\int_0^1 f_n \, d\lambda = 45/10$. Ebből nyilvánvaló, hogy $\int_{[0,1]\times[0,1]} f_n(x) \, d\lambda_2 = 45/10$. A feladatban megadott függvény

$$f(x,y) = \frac{f_1(x)}{10} + \frac{f_1(y)}{10^2} + \frac{f_2(x)}{10^3} + \frac{f_2(y)}{10^4} + \ldots.$$

Így f Lebesgue-mérhető, és a nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatósága szerint

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f \, d\lambda_2 = \frac{45}{10} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = \frac{1}{2}.$$

189. Jelöljük $g_n(x)$-szel az $x \in [0,1]$ szám kettes számrendszerbeli alakjának n-edik jegyét. Ekkor f lépcsősfüggvény, amely konstans az $[(i-1)/2^n, i/2^n]$ intervallum belsejében minden $i = 1, \ldots, 10^n$-re, és f ezen intervallumok felében 0-t vesz fel, a többi intervallumban pedig 1-et. Így $\int_0^1 g_n \, d\lambda = 1/2$. Nyilvánvaló, hogy a feladatban megadott függvény $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot 10^{-n}$. Így a nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatósága szerint

$$\int_0^1 f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 10^{-n} g_n \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 10^{n+1}} = \frac{1}{18}.$$

190. Tegyük fel először, hogy f korlátos, és legyen $|f| \le K$, ahol $K > 0$. A 160. feladat állítása szerint van olyan $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy $\lambda(A) < \varepsilon/4K$, ahol $A = \{x \in [a,b]\colon |f(x) - g(x)| > \varepsilon/2(b-a)\}$. Feltehetjük, hogy $|g| \le K$, mert különben helyettesítjük g-t a $\min(\max(g, -K), K)$ függvénnyel. Ekkor

$$\int_a^b |f-g|\,d\lambda = \int_A |f-g|\,d\lambda + \int_{[a,b]\setminus A} |f-g|\,d\lambda \le$$
$$\le 2K\cdot\lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot\lambda([a,b]\setminus A) < \varepsilon.$$

Most legyen $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges Lebesgue-integrálható függvény. Legyen $f_n(x) = f(x)$, ha $|f(x)| \le n$, és legyen $f_n(x) = 0$ egyébként. Ekkor $|f - f_n| \le f$ és $|f - f_n| \to 0$ pontonként. Így a nagy Lebesgue-tétel szerint $\int_a^b |f - f_n| d\lambda \to 0$. Adott $\varepsilon > 0$-hoz válasszunk egy olyan n-et, hogy $\int_a^b |f - f_n| d\lambda < \varepsilon/2$ teljesüljön. Mivel f_n korlátos, ezért van olyan g lépcsősfüggvény, amelyre $\int_a^b |f_n - g| d\lambda < \varepsilon/2$. Ekkor $\int_a^b |f - g| d\lambda < \varepsilon$, amivel az állítást beláttuk.

191. Legyen először $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ olyan korlátos mérhető függvény, amely eltűnik a $B(0,r)$ gömbön kívül. Legyen $|f| \le K$. Az 162. feladat állítása szerint van olyan $h\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\lambda(C) < \varepsilon$, ahol $C = \{x \in B(0,r)\colon |f(x) - h(x)| > \varepsilon\}$. Nyilván feltehetjük, hogy $|h| \le K$. Ekkor

$$\int_{B(0,r)} |f-h|\,d\lambda = \int_C |f-h|\,d\lambda + \int_{B(0,r)\setminus C} |f-h|\,d\lambda <$$
$$< 2K\cdot\lambda(C) + \lambda(B(0,r))\cdot\varepsilon = M\cdot\varepsilon,$$

ahol $M = 2K + \lambda(B(0,r))$. Legyen $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely egyenlő h-val a $B(0,r)$ gömbön, egyenlő nullával a $B(0, r+\varepsilon)$ gömbön kívül, és $|g| \le K$ mindenütt. Az $A = B(0, r+\varepsilon) \setminus B(0,r)$ halmaz mértéke kisebb, mint $R\cdot\varepsilon$, ahol R csak p-től és r-től függ. Ezért

$$\int_A |f-g|\,d\lambda \le 2K\cdot R\cdot\varepsilon,$$

amiből $\int_{\mathbb{R}^p} |f-g|\,d\lambda \le L\cdot\varepsilon$, ahol L nem függ ε-tól. Mivel ε tetszőleges volt, ezzel az állítást ebben a speciális esetben beláttuk.

Végül legyen $f\colon \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges Lebesgue-integrálható függvény. Legyen $f_n(x) = f(x)$, ha $|x| \le n$ és $|f(x)| \le n$, és legyen $f_n(x) = 0$ egyébkent.

Ekkor $|f - f_n| \le f$, és $|f - f_n| \to 0$ pontonként. Így a nagy Lebesgue-tétel szerint $\int_{\mathbb{R}^p} |f - f_n| d\lambda \to 0$. Adott $\varepsilon > 0$-hoz válasszunk egy olyan n-et, hogy $\int_{\mathbb{R}^p} |f - f_n| d\lambda < \varepsilon$ teljesüljön. Mivel f_n korlátos és eltűnik $B(0, n)$-en kívül, ezért van olyan g folytonos függvény, hogy $\int_{\mathbb{R}^p} |f_n - g|\, d\lambda < \varepsilon$. Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}^p} |f - g|\, d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^p} |f - f_n|\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}^p} |f_n - g|\, d\lambda < 2\varepsilon.$$

192. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és legyen $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan lépcsősfüggvény, amelyre $\int_a^b |f - g|\, d\lambda < \varepsilon$. (Ilyen g létezését állítja a 190. feladat.) Ekkor a $G(x) = \int_a^x g\, d\lambda$ függvény folytonos $[a, b]$-n, és $|F(x) - G(x)| < \varepsilon$ minden $x \in [a, b]$-re. Ez azt jelenti, hogy F egyenletesen megközelíthető folytonos függvényekkel, tehát maga is folytonos.

193. Legyen $\int_a^b f\, dx = I$. Tudjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $F:\ a = x_0 < \ldots < x_n = b$ felosztás, hogy $S_F - I < \varepsilon$. Itt $S_F = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$, ahol $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$. Legyen $g(x) = M_i$, ha $x \in [x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, és legyen $g(b) = f(b)$. Ekkor s lépcsősfüggvény, $f \le g$, és $\int_a^b (g - f)\, dx = S_F - I < \varepsilon$.

Vannak tehát olyan g_n lépcsősfüggvények, melyekre $\int_a^b |g_n - f|\, dx < 1/n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. A 180. feladat szerint ekkor $g_n \to f$ m.m. $[a, b]$-n, és így f Lebesgue-mérhető. Mivel korlátos is, ezért Lebesgue-integrálható, és

$$\int_a^b f\, d\lambda = \int_a^b f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n\, dx = \int_a^b f\, dx.$$

194. Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható. Tudjuk, hogy minden n-re van olyan $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\int_a^b |f - f_n|\, d\lambda < 1/n$. Legyen $a \le c_n \le b$ olyan, hogy

$$\int_a^b f_n \cdot g\, d\lambda = g(a) \cdot \int_a^{c_n} f_n\, d\lambda + g(b) \cdot \int_{c_n}^b f_n\, d\lambda. \qquad (45)$$

Egy részsorozat kiválasztása után feltehető, hogy a c_n sorozat konvergens. Legyen $c_n \to c$. Belátjuk (7)-et. Ehhez elég megmutatni, hogy $n \to \infty$ esetén (45) bal oldala tart (7) bal oldalához, (45) jobb oldala pedig tart (7) jobb oldalához. Az első állítás nyilvánvaló f_n választása alapján. Most megmutatjuk, hogy $\int_a^{c_n} f_n\,d\lambda \to \int_a^c f\,d\lambda$. Ez abból következik, hogy

$$\left|\int_a^{c_n} f_n\,d\lambda - \int_a^c f\,d\lambda\right| \le \left|\int_a^{c_n} f_n\,d\lambda - \int_a^{c_n} f\,d\lambda\right| + \left|\int_a^{c_n} f\,d\lambda - \int_a^c f\,d\lambda\right|.$$

Mármost $\int_a^{c_n} f_n\,d\lambda \to \int_a^{c_n} f\,d\lambda$ nyilvánvaló f_n választása alapján, $\int_a^{c_n} f\,d\lambda \to \int_a^c f\,d\lambda$ pedig a 192. feladat állítása. Ezzel beláttuk, hogy $\int_a^{c_n} f_n\,d\lambda \to \int_a^c f\,d\lambda$. Hasonlóan látható, hogy $\int_{c_n}^b f_n\,d\lambda \to \int_c^b f\,d\lambda$. Így (45) jobb oldala tart (7) jobb oldalához, amivel (7)-et beláttuk.

195. A 156. feladat megoldásában láttuk, hogy

$$A = \bigcap_{r\in\mathbb{Q},\ r\ge 0} \left(\left(\left([a,b]\setminus A_r\right)\times\mathbb{R}\right)\cup\left([a,b]\times[0,r]\right)\right),$$

ahol $A_r = \{x \in [a,b]\colon f(x) \le r\}$. Ha f Lebesgue-mérhető, akkor az A_r, $([a,b]\setminus A_r)\times\mathbb{R}$, $[a,b]\times[0,r]$ halmazok mindegyike Lebesgue-mérhető minden r-re, tehát ugyanez igaz A-ra is.

Most tegyük fel, hogy A Lebesgue-mérhető. Ekkor a χ_A függvénynek létezik az integrálja $\mathbb{R}^2$-en. Tetszőleges $x \in [a,b]$-re

$$\int_{\mathbb{R}} (\chi_A)_x\,d\lambda = \lambda(\{y\in\mathbb{R}\colon (x,y)\in A\}) = \lambda([0,f(x)]) = f(x).$$

A Fubini-tétel szerint az $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} (\chi_A)_x\,d\lambda$ függvénynek létezik a Lebesgue-integrálja $\mathbb{R}$-en. Így ez a függvény Lebesgue-mérhető $\mathbb{R}$-en. Mivel ennek a függvénynek az $[a,b]$ intervallumra való megszorítása f, ezért f Lebesgue-mérhető $[a,b]$-n.

196. Legyen $F \subset [a,b]$ sehol sem sűrű, zárt és pozitív Lebesgue-mértékű halmaz (lásd a 103. feladatot). Ekkor χ_F Borel-mérhető, tehát Lebesgue-mérhető és korlátos. A χ_F függvény egy $[a,b]$-ben sűrű halmazon (nevezetesen az $[a,b]\setminus F$ halmazon) nulla értéket vesz fel. Ez igaz akkor is, ha χ_F-t egy tetszőleges nullmértékű halmazon megváltoztatjuk, ugyanis az $[a,b]\setminus F$ halmaz $[a,b]$ minden részintervallumában pozitív mértékű. Tehát ha $f = \chi_F$ m.m., akkor f alsó integrálja nulla. Ha f Riemann-integrálható lenne, akkor az integrálja nulla lenne.

Ekkor a Lebesgue-integrálja is nulla lenne a 193. feladat szerint, holott $\int_a^b f\,d\lambda = \int_a^b \chi_F\,d\lambda = \lambda(F) > 0$.

197. Legyen I_n a $[0,1]$ intervallum racionális végpontú részintervallumainak egy sorozatba rendezése. Minden n-re válasszunk ki egy $J_n \subset I_n$ részintervallumot, amelyre $|J_n| < 1/n^2$. Ekkor a Borel–Cantelli-lemma első állítása szerint (64. feladat) m.m. $x \in [0,1]$ pont csak véges sok J_n-nek eleme.

Legyen $f_n = |J_n|^{-1} \cdot \chi_{J_n}$ minden n-re. Ekkor f_n nemnegatív és Lebesgue-mérhető függvény $[0,1]$-en, amelyre $\int_{I_n} f_n\,d\lambda = 1$. Az $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvény szintén nemnegatív, Lebesgue-mérhető, és $\int_a^b f\,d\lambda = \infty$ minden $0 \le a < b \le 1$-re. Ugyanis minden $0 \le a < b \le 1$-re végtelen sok I_n intervallum része $[a,b]$-nek, tehát a nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatósága szerint $\int_a^b f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,d\lambda = \infty$, hiszen a végtelen sorban végtelen sok tag 1-gyel egyenlő.

Mivel m.m. $x \in [0,1]$ pont csak véges sok J_n-nek eleme, ezért m.m. x pontra az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ végtelen sorban csak véges sok pozitív tag van. Így f m.m. pontban véges. Azokban a pontokban, ahol $f = \infty$, változtassuk az f függvény értékét nullára. Ezzel egy mindenütt véges értékű függvényt kaptunk, amelynek az integrálja továbbra is végtelen minden intervallumban, hiszen f-et csak egy nullmértékű halmazon változtattuk meg.

198. Rögzítsünk egy $a < c_n < b$, $c_n \to b$ sorozatot, és legyen $f_n(x) = f(x)$, ha $a \le x \le c_n$, és legyen $f_n(x) = 0$, ha $c_n < x \le b$. A 193. feladat szerint

$$\int_a^b f_n\,d\lambda = \int_a^b f_n\,dx \tag{46}$$

minden n-re. Ha $f \ge 0$, akkor a monotonkonvergencia-tétel szerint (46) bal oldala tart $\int_a^b f\,d\lambda$-hoz, míg a jobb oldal tart az $\int_a^b f_n\,dx$ improprius integrálhoz. Ezzel (i)-et beláttuk.

Tegyük fel, hogy f Lebesgue-integrálható $[a,b]$-n. Ekkor $|f|$ is Lebesgue-integrálható $[a,b]$-n, tehát a monotonkonvergencia-tétel szerint $\int_a^{c_n} |f|\,d\lambda \to \int_a^c |f|\,d\lambda$. Mivel f Riemann-integrálható $[a,c_n]$-en, ezért $|f|$ is Riemann-integrálható $[a, c_n]$-en minden n-re. Így $n \to \infty$ esetén

$$\int_a^{c_n} |f|\,dx = \int_a^{c_n} |f|\,d\lambda \to \int_a^b |f|\,d\lambda.$$

Mivel ez minden $c_n < b$, $c_n \to b$ sorozatra igaz, ezért az $\int_a^b |f|\,dx$ improprius integrál konvergens (és az értéke $\int_a^b |f|\,d\lambda$).

Most tegyük fel, hogy az $\int_a^b |f|\,dx$ improprius integrál konvergens, és az értéke I. Ekkor a már bizonyított (i) állítás szerint $|f|$ Lebesgue-integrálható $[a, b]$-n.

Mivel $|f_n| \le |f|$, ezért (46)-ból a nagy Lebesgue-tétel szerint kapjuk, hogy $\int_a^b f\,d\lambda = \int_a^b f\,dx$.

199. Legyen $N_k = \{x \in N\colon f(x) < k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, és $N_\infty = \{x \in N\colon f(x) = \infty\}$. Ekkor $N = N_\infty \cup N_1 \cup N_2 \cup \ldots$, tehát elég belátni, hogy N_k nullmértékű minden $k \le \infty$-re.

A 111. feladat megoldásában láttuk, hogy N_k megszámlálható, tehát nullmértékű minden $k < \infty$-re. Mivel f integrálható, ezért az N_∞ halmaz szintén nullmértékű.

200. Legyen

$$g(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{|x|}, & \text{ha } 0 < |x| \le 1,\\ \infty, & \text{ha } x = 0, \text{ és}\\ 0, & \text{ha } |x| > 1.\end{cases}$$

Ekkor g Lebesgue-integrálható $\mathbb{R}$-en, és $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$. Legyen $r_1, r_2, \ldots$ a racionális számok egy sorozatba rendezése, és legyen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot g(x - r_n)$ $(x \in \mathbb{R})$. A nemnegatív tagú sorok tagonkénti integrálhatóságából nyilvánvaló, hogy f Lebesgue-integrálható, és hogy f-nek minden racionális pontban ∞ a határértéke.

201. Jelölje C a Cantor-halmazt. Legyen $f(x) = \infty$, ha $x \in C$, és legyen $f(x) = \operatorname{dist}(x, C)^{-1/3}$, ha $x \notin C$. Világos, hogy f határértéke a Cantor-halmaz minden pontjában ∞. Belátjuk, hogy f Lebesgue-integrálható.

Ha (a, b) a Cantor-halmaz egy kiegészítő intervalluma, akkor $f(x) = (x-a)^{-1/3}$, ha $a < x \le (a+b)/2$, és $f(x) = (b-x)^{-1/3}$, ha $(a+b)/2 \le x < b$. Így f integrálja (a, b)-n

$$2 \cdot \int_a^{(a+b)/2} (x-a)^{-1/3}\,dx = \Big[3 \cdot (x-a)^{2/3}\Big]_a^{(a+b)/2} = 3 \cdot 2^{-2/3} \cdot (b-a)^{2/3}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 f\,d\lambda = 3\cdot 2^{-2/3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(1/3^n)^{2/3},$$

hiszen C-nek 2^n darab $1/3^n$ hosszúságú kiegészítő intervalluma van minden n-re. Mivel $3^{2/3} > 2$, ezért a jobb oldalon álló végtelen sor konvergens, tehát f integrálható.

202. Legyen $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$ egy tetszőleges felosztás, és legyen $A_i = A(y_{i-1} \le f < y_i)$ $(i = 1,\ldots,n)$. Mivel $y_{i-1} \le f(x) < y_i$ minden $x \in A_i$-re, ezért $y_{i-1}\cdot\mu(A_i) \le \int_{A_i} f\,d\mu \le y_i\cdot\mu(A_i)$ minden i-re. Összeadva az egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\cdot\mu(A_i) \le \int_A f\,d\mu \le \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\mu(A_i). \tag{47}$$

Ha a felosztás finomabb δ-nál, azaz ha $y_i - y_{i-1} < \delta$ minden i-re, akkor (47)-ben a két összeg különbsége kisebb, mint $\delta\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) = \delta\cdot\mu(A)$. Ha tehát $\delta < \varepsilon/\mu(A)$, akkor mindkét összeg ε-nál jobban megközelíti f integrálját A-n. Ezzel (i)-et beláttuk.

Az $\int_c^d y\,d\phi$ Riemann–Stieltjes-integrál létezik, mert az y függvény folytonos és ϕ monoton. Mivel $\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot(\phi(y_i)-\phi(y_{i-1}))$, ezért (ii) azonnal adódik (i)-ből és a Stieltjes-integrál definíciójából.

A Stieltjes-integrálokra vonatkozó parciális integrálás képlete szerint

$$\begin{aligned}\int_c^d y\,d\phi &= [y\cdot\phi(y)]_c^d - \int_c^d \phi\,dy = \\ &= d\cdot\phi(d) - \int_c^d (\mu(A) - \mu(A(f\ge y)))\,dy = \\ &= c\cdot\mu(A) + \int_c^d \mu(A(f\ge y))\,dy.\end{aligned}$$

Ezt (ii)-vel összevetve megkapjuk (iii)-at.

203. Legyen $A_n = A(1/n \le f < n)$. Ha van olyan n, hogy $\mu(A_n) = \infty$, akkor $\int_A f\,d\mu = \infty$, hiszen $f \ge 1/n$ a végtelen mértékű $A_n \subset A$ halmazon. Mivel

$\mu(A(f \geq x)) = \infty$ minden $x \in [0, 1/n]$-re, ezért $\int_0^\infty \mu(A(f \geq x))\, dx = \infty$. Ekkor tehát az állítás igaz.

Így feltehetjük, hogy $\mu(A_n) < \infty$ minden n-re. Ekkor az előző (202.) feladat (ii) állítását A helyett A_n-nel és a $[c, d) = [0, n)$ választással alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_{A_n} f\, d\mu = \int_0^n \mu(A_n(f \geq x))\, dx. \tag{48}$$

A bal oldal az $\int_A \chi_{A_n} \cdot f\, d\mu$ integrállal egyenlő, ami a monotonkonvergencia-tétel szerint tart $\int_A f\, d\mu$-höz, ha $n \to \infty$.

A (48) egyenlőség jobb oldalán álló integrál egyenlő az $\int_0^n \mu(A_n(f \geq x))\, d\lambda$ Lebesgue-integrállal a 193. feladat állítása szerint. Rögzített $x \geq 0$-ra az $A_n(f \geq x)$ halmazsorozat monoton növő, és az uniója $A(f \geq x)$. Így $\mu(A_n(f \geq x))$ növőleg konvergál $\mu(A(f \geq x))$-hez, tehát a $\chi_{[0,n)} \cdot \mu(A_n(f \geq x))$ függvénysorozat monoton növőleg tart a $\mu(A(f \geq x))$ függvényhez.

Így a monotonkonvergencia-tétel szerint a (48) jobb oldalán álló integrál tart $\int_0^\infty \mu(A(f \geq x))\, d\lambda$-hoz, ami egyenlő $\int_0^\infty \mu(A(f \geq x))\, dx$-szel. Ezzel az állítást beláttuk.

204. Mivel $A = A(f > 0) = \bigcup_{n=1}^\infty A(f > 1/n)$, ezért van olyan n, hogy $\mu(A(f > 1/n)) > 0$. Így

$$\int_A f\, d\mu \geq \int_{A(f>1/n)} f\, d\mu \geq \frac{1}{n} \cdot \mu(A(f > 1/n)) > 0.$$

Ha $\mu(A)$ nem σ-véges, akkor van olyan n, hogy $\mu(A(f > 1/n)) = \infty$. Így

$$\int_A f\, d\mu \geq \int_{A(f>1/n)} f\, d\mu \geq \frac{1}{n} \cdot \mu(A(f > 1/n)) = \infty.$$

205. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Ez azt jelenti, hogy a $B = A(f > 0)$ és $C = A(f < 0)$ halmazok pozitív mértékűek. Az előző (204.) feladat állítása szerint $\int_B f\, d\mu > 0$ és $\int_C f\, d\mu < 0$. Ebből

$$\int_A f\, d\mu = \int_B f\, d\mu + \int_C f\, d\mu < \int_B f\, d\mu = \int_B |f|\, d\mu \leq \int_A |f|\, d\mu$$

és

$$\int_A f\, d\mu = \int_B f\, d\mu + \int_C f\, d\mu > \int_C f\, d\mu = -\int_C |f|\, d\mu \geq -\int_A |f|\, d\mu.$$

Így $\left|\int_A f\,d\mu\right| < \int_A |f|\,d\mu$, ami ellentmond a feltételnek.

206. Ha f korlátos és $|f| \le K$, akkor $\delta = \varepsilon/K$ megfelel, hiszen ha $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) < \delta$, akkor $\int_B |f|\,d\mu \le \int_B K\,d\mu = K \cdot \mu(B) < \varepsilon$.

Most legyen $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges integrálható függvény. Legyen $f_n(x) = |f(x)|$, ha $|f(x)| \le n$, és legyen $f_n(x) = 0$ egyébként. Ekkor $|f_n| \le |f|$ és $f_n \to |f|$ μ-m.m. A-n. Így a nagy Lebesgue-tétel szerint $\int_A f_n\,d\mu \to \int_A |f|\,d\mu$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Válasszunk egy olyan n-et, amelyre $\left|\int_A |f|\,d\mu - \int_A f_n\,d\mu\right| < \varepsilon/2$. Mivel $|f_n| \le n$, ezért $\delta = \varepsilon/(2n)$ megfelel a feltételnek: ha $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) < \delta$, akkor

$$\int_B |f|\,d\mu \le \frac{\varepsilon}{2} + \int_B f_n\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

207. Mivel $|f_n - f| \to 0$ pontonként A-n, és $|f_n - f| \le 2s$ minden n-re, ahol s integrálható A-n, ezért a nagy Lebesgue-tétel szerint $\int_A |f_n - f|\,d\mu \to \int_A 0\,d\mu = 0$.

208. Tegyük fel először, hogy f nemnegatív egyszerű függvény. Legyen $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ az X halmaz felbontása diszjunkt mérhető halmazokra, és legyen $f(x) = c_i \ge 0$ minden $x \in A_i$ és $i = 1, \ldots, n$ esetén. Ha van olyan i, hogy $c_i = 0$ és $\mu(A_i) > 0$, akkor

$$\int_X \log f\,d\mu \le \log\left(\int_X f\,d\mu\right) \tag{49}$$

igaz, mert a bal oldal $-\infty$. Ha ilyen i nincs, akkor f-et egy nullmértékű halmazon megváltoztatva (ami nem változtatja meg a (49)-ben szereplő integrálok értékét) feltehetjük, hogy $c_i > 0$ minden i-re. Azt kell belátni, hogy

$$\sum_{i=1}^n \log c_i \cdot \mu(A_i) \le \log\left(\sum_{i=1}^n c_i \cdot \mu(A_i)\right).$$

Ez azonnal következik a $\log x$ függvény konkávitásából. Legyen ui. $\mu(A_i) = a_i$. Ekkor $a_i \ge 0$ és $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, tehát a konkávitás Jensen-féle feltétele szerint

$$\log\left(\sum_{i=1}^n a_i c_i\right) \ge \sum_{i=1}^n a_i \cdot \log c_i,$$

és éppen ezt akartuk belátni.

Most legyen f olyan mérhető függvény, amelyre $f \geq \delta > 0$ mindenütt X-en. Legyenek $\delta \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$ egyszerű függvények, melyek pontonként tartanak f-hez X-en. Ekkor $\log \delta \leq \log s_1 \leq \log s_2 \leq \dots$ egyszerű függvények, melyek pontonként tartanak $\log f$-hez X-en. Már beláttuk, hogy

$$\int_X \log s_n \, d\mu \leq \log \left(\int_X s_n \, d\mu \right)$$

minden n-re. A monotonkonvergencia-tételt alkalmazva ebből azonnal adódik (49).

Végül legyen f tetszőleges nemnegatív mérhető függvény X-en. Ha $\int_X f \, d\mu = \infty$, akkor (49) igaz (feltéve, hogy a bal oldal értelmes), mert a jobb oldal ∞. Feltehetjük tehát, hogy $\int_X f \, d\mu < \infty$. Legyen $f_n = \max(f, 1/n)$. Ekkor f_n monoton csökkenőleg és pontonként tart f-hez, és $\log f_n$ monoton csökkenőleg és pontonként tart $\log f$-hez. Mivel $f_n \leq f + (1/n)$, ezért $\int_X f_n \, d\mu < \infty$. Tudjuk, hogy

$$\int_A \log f_n \, d\mu \leq \log \left(\int_A f_n \, d\mu \right) \tag{50}$$

minden n-re. Mivel $\int_X f_1 \, d\mu < \infty$, ezért a monotonkonvergencia-tétel szerint $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$. Így $n \to \infty$ esetén (50) jobb oldala tart (49) jobb oldalához. Másrészt (50) jobb oldala minden n-re kisebb, mint ∞, tehát ugyanez igaz a bal oldalra is. Így a monotonkonvergencia-tétel szerint $\int_X \log f_n \, d\mu \to \int_X \log f \, d\mu$. Vagyis $n \to \infty$ esetén (50) bal oldala tart (49) bal oldalához, tehát (49) igaz.

209. Mivel $\log f \leq f$ mindenütt és $\int_A f \, d\mu \leq 1 < \infty$, ezért az $\int_A \log f \, d\mu$ integrál létezik. Legyen az értéke I. Ha $I = -\infty$, akkor az állítás igaz. Így feltehetjük, hogy $I > -\infty$. Mivel $\int_A f \, d\mu \leq 1$, ezért az $A(f \geq 1/2)$ halmaz mértéke legfeljebb 2. Másrészt $\int_A \log f \, d\mu > -\infty$, ezért az $A(f \leq 1/2)$ halmaz mértéke véges. Így $\mu(A) < \infty$.

Ha $\mu(A) = 0$, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldala nulla. Feltehetjük tehát, hogy $0 < \mu(A)$.

Tekintsük az $(A, \mathcal{A}_A, \nu)$ valószínűségi mértékteret, ahol $\nu(B) = \mu(B)/\mu(A)$ minden $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ halmazra. Könnyen látható, hogy tetszőleges $g \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$

függvényre $\int_A g\,d\nu = \mu(A)^{-1} \cdot \int_A g\,d\mu$, valahányszor az integrálok léteznek. Az előző (208.) feladat állítása szerint $\int_A \log f\,d\nu \le \log\left(\int_A f\,d\nu\right)$, vagyis

$$\frac{1}{\mu(A)} \cdot \int_A \log f\,d\mu \le \log\left(\int_A f\,d\mu\right) - \log \mu(A). \tag{51}$$

Mivel $\int_A f\,d\mu \le \int_X f\,d\mu = 1$, ezért (51) jobb oldala legfeljebb $-\log \mu(A)$. Ha beszorzunk $\mu(A)$-val, megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

210. Legyen $\int_A f\,d\mu = I$ és $\int_A g\,d\mu = J$. Könnyű ellenőrizni, hogy ha $a^2 + b^2 = 1$, és az (f, g) párt az $(af + bg, bf - ag)$ párral helyettesítjük, akkor az I és J értékek megváltoznak ugyan, de a bizonyítandó egyenlőtlenség egyik oldala sem változik. Legyen $a = I/\sqrt{I^2 + J^2}$ és $b = J/\sqrt{I^2 + J^2}$, ha $I^2 + J^2 \neq 0$, illetve legyen $a = 1$ és $b = 0$, ha $I = J = 0$. Ekkor a $g_1 = bf - ag$ függvény integrálja nulla, tehát

$$\left|\int_A f_1\,d\mu + i \cdot \int_A g_1\,d\mu\right| = \left|\int_A f_1\,d\mu\right| \le \int_A |f_1|\,d\mu \le \int_A |f_1 + i \cdot g_1|\,d\mu$$

minden függvényre, így az $f_1 = af + bg$ függvényre is.

211. Legyen $\int_A f^2\,d\mu = I$, $\int_A g^2\,d\mu = J$, $\int_A fg\,d\mu = K$. Feltehetjük, hogy f nem majdnem mindenütt nulla, azaz hogy $I > 0$. Tekintsük az

$$\int_A (tf - g)^2\,d\mu = It^2 - 2Kt + J \tag{52}$$

azonosságot. Ha $IJ = K^2$, akkor (52) jobb oldala eltűnik a $t = K/I$ pontban. Ekkor a bal oldal is eltűnik, ami csak úgy lehetséges, ha $g = tf$ μ-m.m. pontban.

212. A feladat állítása nyilván igaz akkor, ha $f = 0$ μ-majdnem mindenütt vagy $g = 0$ μ-majdnem mindenütt. Így feltehetjük, hogy ez nem így van, azaz $I = \int_A f^p\,d\mu > 0$ és $J = \int_A g^q\,d\mu > 0$. A függvényeket egy-egy pozitív konstanssal beszorozva (ami nem változtatja meg sem a feltételt, sem a bizonyítandó állítást), feltehető, hogy $I = J = 1$.

Mivel $p^{-1} + q^{-1} = 1$, ezért a $\log x$ függvény konkávitása miatt

$$\log(fg) = p^{-1} \log f^p + q^{-1} \log g^q \le \log(p^{-1} f^p + q^{-1} g^q),$$

azaz $fg \le p^{-1} f^p + q^{-1} g^q$ mindenütt A-n. Ezt A-n integrálva azt kapjuk, hogy $\int_A fg\,d\mu \le 1$. Mivel a feltétel szerint itt egyenlőség áll, ezért $fg = p^{-1} f^p +$

$q^{-1}g^q$ μ-m.m. A-n. Azonban ha $a, b \geq 0$ és $ab = p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$, akkor szükségképpen $a^p = b^q$. Ugyanis ellenkező esetben a $\log x$ függvény szigorú konkávitása miatt $ab < p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$ állna. Ezzel beláttuk, hogy (az $I = J = 1$ feltétel mellett) $f^p = g^q$ μ-m.m.

213. Az állítást először karakterisztikus függvényekre ellenőrizzük. Legyen $f = \chi_A$, ahol A Borel. Mivel $\chi_A(x+t) = \chi_{A-x}(t)$, ezért azt kell belátni, hogy az $x \mapsto \mu(A - x)$ függvény Borel-mérhető.

Legyen $A = [a, b)$, és legyen $\phi(x) = \mu([a, b) - x)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Tegyük fel először, hogy $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$. Ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $\mu([a-\delta, b+\delta)) < \mu([a, b))+\varepsilon$ és $\mu([a+\delta, b-\delta)) > \mu([a, b))-\varepsilon$. Ugyanis az $[a-1/n, b+1/n)$ intervallumok egymásba vannak skatulyázva és a metszetük $[a, b]$, ezért a mértékük tart $\mu([a, b]) = \mu([a, b))$-hez. Itt felhasználtuk a μ mérték végességét, valamint azt a feltételt, hogy az a és b pontok mértéke nulla. Így van olyan n, hogy $\mu([a - 1/n, b + 1/n)) < \mu([a, b)) + \varepsilon$. Ugyanígy látható, hogy $\mu([a + 1/n, b - 1/n)) > \mu([a, b)) - \varepsilon$ egy alkalmas n-re.

Ha $|x| < \delta$, akkor

$$[a + \delta, b - \delta) \subset [a, b) - x \subset [a - \delta, b + \delta),$$

tehát $\mu([a, b)) - \varepsilon \leq \mu([a, b) - x) \leq \mu([a, b)) + \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy a ϕ függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban, feltéve, hogy $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$. Ugyanígy bizonyítható, hogy tetszőleges $[a, b)$ intervallum esetén a ϕ függvény bármely olyan x_0 pontban folytonos, amelyre az $x_0 + a$ és $x_0 + b$ pontok mértéke nulla.

Könnyen látható, hogy a $\{x\colon \mu(\{x\}) > 0\}$ halmaz megszámlálható. Ebből következik, hogy a ϕ függvény megszámlálhatóan sok pont kivételével folytonos. Legyen E a ϕ függvény szakadási pontjainak halmaza. Ekkor ϕ folytonos az $\mathbb{R} \setminus E$ halmazon, tehát itt Borel-mérhető a 152. feladat állítása szerint. Mivel E megszámlálható, ezért ϕ Borel-mérhető $\mathbb{R}$-en is.

Jelöljük $\mathcal{R}$-rel a $\mathcal{P}^1$ félgyűrű által generált gyűrűt, vagyis azoknak a halmazoknak a rendszerét, amelyek előállnak véges sok diszjunkt $[a, b)$ típusú intervallum uniójaként. Ha $A \in \mathcal{R}$ és $A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, ahol az $[a_i, b_i)$ intervallumok diszjunktak, akkor $\mu(A - x) = \sum_{i=1}^{n} \mu([a_i, b_i) - x)$. Mivel az $x \mapsto \mu([a_i, b_i) - x)$ függvények Borel-mérhetőek, ezért az $x \mapsto \mu(A - x)$ függvény is Borel-mérhető.

Jelöljük $\mathcal{A}$-val azon Borel-mérhető A halmazok rendszerét, amelyekre az $x \mapsto \mu(A - x)$ függvény Borel-mérhető. Mint láttuk, $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$.

Az $\mathcal{A}$ rendszer monoton osztály. Valóban, legyen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ és $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ekkor $\mu(A_n - x) \to \mu(A - x)$ minden x-re. Mivel az $x \mapsto \mu(A_n - x)$ függvények Borel-mérhetőek, ugyanez igaz a limeszükre, vagyis az $x \mapsto \mu(A - x)$ függvényre is. Így $A \in \mathcal{A}$. Ugyanígy látható, hogy ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ és $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor $A \in \mathcal{A}$.

Mivel $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$, ezért a 28. feladat állítása szerint $\mathcal{A}$ tartalmazza az $\mathcal{R}$ által generált σ-gyűrűt, ami egyenlő $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak rendszerével. Vagyis minden Borel-halmaz eleme $\mathcal{A}$-nak, tehát $x \mapsto \mu(A - x)$ Borel-mérhető minden Borel-halmazra.

Most legyen f Borel-mérhető egyszerű függvény. Ha $f = \sum_{i=1}^{n} c_I \cdot \chi_{A_i}$, akkor $\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\, d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(A_i - x)$ minden x-re, amiből nyilvánvaló, hogy az $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\, d\mu(t)$ függvény Borel-mérhető.

Végül legyen f tetszőleges korlátos Borel-mérhető függvény. A 144. feladat állítása szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan s Borel-mérhető egyszerű függvény, amelyre $|f - s| < \varepsilon$. Ekkor

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\, d\mu - \int_{\mathbb{R}} s(x+t)\, d\mu \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - s(x+t)|\, d\mu \le \varepsilon \cdot \mu(\mathbb{R})$$

minden x-re. Tehát a $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\, d\mu(t)$ függvény $\varepsilon \cdot \mu(\mathbb{R})$ pontossággal megközelíthető a Borel-mérhető $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} s(x+t)\, d\mu(t)$ függvénnyel. Ezért ϕ előáll mint Borel-mérhető függvények egyenletesen konvergens sorozatának a limesze, és így maga is Borel-mérhető.

214. Olyan μ mértéket és olyan F zárt halmazt fogunk konstruálni, melyekre $\mu(F) = 1$, $\mu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$, és van olyan $x_n \to 0$ sorozat, hogy $(F - x_n) \cap F = \emptyset$ minden n-re. Ekkor a $\phi(x) = \mu(F - x)$ függvényre $\phi(0) = 1$ és $\phi(x_n) = 0$ minden n-re, tehát ϕ nem folytonos a nulla pontban.

Ismeretes, hogy bármely nem-megszámlálható B Borel-halmazhoz van olyan f bijekció B és $[0, 1]$ között, amely az inverzével együtt Borel-mérhető. Ha már tudjuk, hogy ilyen f bijekció létezik, akkor definiálhatunk egy valószínűségi mértéket B Borel-részhalmazain: az $A \subset B$ Borel-halmaz mértéke legyen $\lambda(f(A))$. Az $f(A) \subset [0, 1]$ halmaz Borel, mert f inverze Borel-mérhető. Nyilvánvaló, hogy az így definiált halmazfüggvény mérték.

Az f bijekció létezését ilyen általánosságban nem bizonyítjuk, csak abban a speciális esetben, amely a feladat megoldásához szükséges. Legyen F azon $x \in [0, 1]$ számok halmaza, amelyeknek tizedestört alakjában csak a 0 és 1 jegyek szerepelnek. Ha $x \in F$ és $x \in [0, 1]$ tízes számrendszerbeli alakja $0,a_1a_2\ldots$, akkor legyen $f(x) = 0,a_1a_2\ldots$ kettes számrendszerben leolvasva.

Ekkor f monoton az F halmazon, és $f(F) = [0, 1]$. Az $f\colon F \to [0, 1]$ leképezés nem bijekció, mert a kettőhatvány-nevezőjű racionális számok (a 0 és az

1 kivételével) kétszer állnak elő képként. Ezért van egy $E \subset F$ megszámlálható halmaz úgy, hogy f szigorúan monoton az $F \setminus E$ halmazon, és bijekció $F \setminus E$ és $[0,1]$ között. Legyen $f|_{F\setminus E}$ inverze g. Ekkor g monoton $[0,1]$-en, tehát Borel-mérhető a 151. feladat állítása szerint. Ha tehát $A \subset F \setminus E$ Borel, akkor $g^{-1}(A) = f(A)$ is Borel.

Így az $F \setminus E$ halmaz Borel-részhalmazain létezik egy ν valószínűségi mérték: legyen $\nu(A) = \lambda(f(A))$ minden $A \subset F \setminus E$ Borel-halmazra. A ν mértéket könnyen kiterjeszthetjük $\mathbb{R}$ Borel-részhalmazaira: legyen $\mu(A) = \nu(A \cap (F \setminus E))$ minden $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazra. Ekkor μ valószínűségi mérték $\mathbb{R}$ Borel-részhalmazain, $\mu(F) = 1$, $\mu(\{x\}) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, és $\mu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$.

Nyilvánvaló, hogy ha $x_n = 2/10^n$, akkor $(F + x_n) \cap F = \emptyset$, tehát $F \cap (F - x_n) = \emptyset$ minden n-re. Ezzel a feladatot megoldottuk.

215. Tegyük fel először, hogy f lépcsősfüggvény. Legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ olyan felosztás, hogy $f(x) = c_i$ minden $x \in (x_{i-1}, x_i)$-re $(i = 1, \ldots, k)$. Ekkor $n \to \infty$ esetén

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx = c_i \cdot \frac{\cos(nx_{i-1}) - \cos(nx_i)}{n} \to 0,$$

amiből nyilvánvaló, hogy $\int_a^b f(x) \cdot \sin(nx)\, d\lambda \to 0$.

Legyen $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrálható, és legyen $\varepsilon > 0$ adott. A 190. feladat (i) állítása szerint van olyan $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy $\int_a^b |f - g|\, dx < \varepsilon/2$. Nyilvánvaló, hogy

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \sin(nx)\, dx - \int_a^b g(x) \cdot \sin(nx)\, dx \right| < \varepsilon/2$$

minden n-re. A már bizonyított állítás szerint $\int_a^b g(x) \cdot \sin(nx)\, d\lambda \to 0$, ezért van olyan n_0, hogy $\left| \int_a^b g(x) \cdot \sin(nx)\, dx \right| < \varepsilon/2$ minden $n > n_0$-ra. Ekkor $\left| \int_a^b f(x) \cdot \sin(nx)\, dx \right| < \varepsilon$ minden $n > n_0$-ra, amivel az állítást beláttuk.

216. Először belátjuk, hogy ha $t > 0$, és g korlátos és mérhető függvény a $[ta, tb]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b g(tx)\, d\lambda = \frac{1}{t} \cdot \int_{at}^{bt} g(x)\, d\lambda. \tag{53}$$

Tegyük fel, hogy $g = \chi_A$, ahol $A \subset [ta, tb]$ mérhető. Ekkor $g(tx) = \chi_{A/t}(x)$, tehát azt kell belátni, hogy $\lambda(A/t) = \lambda(A)/t$. Ez abból következik, hogy ha

A lefedhető egy s összhosszúságú intervallumrendszerrel, akkor A/t lefedhető egy s/t összhosszúságú intervallumrendszerrel, és így $\lambda(A/t) \le \lambda(A)/t$. Megfordítva, ha A/t lefedhető egy s összhosszúságú intervallumrendszerrel, akkor A lefedhető egy $s \cdot t$ összhosszúságú intervallumrendszerrel, és így $\lambda(A) \le \lambda(A) \cdot t$.

A fentiekből rögtön adódik, hogy (53) akkor is igaz, ha g egyszerű függvény. Végül, ha g korlátos és Lebesgue-mérhető, akkor alkalmazzuk a 144. feladat állítását. Eszerint g egyenletesen megközelíthető egyszerű függvényekkel, amiből (53) világos.

Most rátérünk a feladat megoldására. Legyen $\int_0^1 g\, d\lambda = I$. Mivel g periodikus 1 szerint, ezért könnyen látható, hogy az intergálja minden 1 hosszúságú intervallumon I-vel egyenlő. Tekintsük először azt az esetet, amikor $I = 0$. Legyen $G(x) = \int_0^x g(u)\, d\lambda$. Ekkor G periodikus 1 periódussal, és folytonos a 192. feladat szerint. Így G korlátos. Legyen $|G| \le K$. Ha $f \equiv c$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor (53) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f(x) \cdot g(tx)\, d\lambda = \frac{c}{t} \cdot \int_{at}^{bt} g\, d\lambda = \frac{c}{t} \cdot (G(bt) - G(at)).$$

Ebből $\left|\int_a^b f(x) \cdot g(tx)\, d\lambda\right| \le 2cK/t$, és így $\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot g(tx)\, d\lambda = 0$. Ezzel (8)-at a konstans f esetére beláttuk (feltéve, hogy $I = 0$).

Ebből világos, hogy (8) akkor is igaz, ha f lépcsősfüggvény. Valóban, tegyük fel, hogy $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, és $f(x) = c_i$ minden $x \in (x_{i-1}, x_i)$-re és $i = 1, \ldots, n$-re. A fentiek szerint $\lim_{t\to\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cdot g(tx)\, d\lambda = 0$ minden $i = 1, \ldots, n$-re, tehát $\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot g(tx)\, d\lambda = 0$.

Ha f Lebesgue-integrálható $[a,b]$-n, akkor a 190. feladat állítása szerint adott $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy h lépcsősfüggvény úgy, hogy $\int_a^b |f - h|\, d\lambda < \varepsilon$. Ekkor

$$\left|\int_a^b f(x) \cdot g(tx)\, d\lambda - \int_a^b h(x) \cdot g(tx)\, d\lambda\right| < \varepsilon \cdot K.$$

Mivel $\lim_{t\to\infty} \int_a^b h(x) \cdot g(tx)\, d\lambda = 0$, ezért $\left|\int_a^b f(x) \cdot g(tx)\, d\lambda\right| < \varepsilon \cdot K + \varepsilon$, ha t elég nagy. Mivel ε tetszőleges volt, ezzel beláttuk, hogy $\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot g(tx)\, d\lambda = 0$. Tehát (8) igaz minden f Lebesgue-integrálható függvényre, feltéve, hogy $I = 0$.

Az általános eset ebből azonnal következik. Ha ugyanis g-hez hozzáadunk egy I konstanst, akkor (8) mind a két oldala ugyanazzal a számmal, nevezetesen

$I \cdot \int_a^b f\,d\lambda$-val változik. Tehát (8) az általános esetben is igaz.

217. Feltehetjük, hogy A és B F_σ halmazok, hiszen egy-egy nullmértékű halmaz elhagyásával ez elérhető, és a nullmértékű halmazok elhagyása nem befolyásolja az A, B és $A \cap (B+x)$ halmazok mértékét. Legyen $H = \{(x,y) \colon y \in A \cap (B+x)\}$. Ekkor H szintén F_σ halmaz. Ha ugyanis $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ és $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$, ahol az A_i és B_j halmazok mindegyike korlátos és zárt, akkor $H_{i,j} = \{(x,y) \colon y \in A_i \cap (B_j + x)\}$ szintén korlátos és zárt minden i,j-re, és H ezek uniója. Így H Lebesgue-mérhető.

A H_x szekció egyenlő $A \cap (B+x)$-szel. Így a Fubini-tétel szerint

$$\lambda_2(H) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(A \cap (B+x))\,d\lambda. \tag{54}$$

A H^y szekció azon x-ek halmaza, melyekre $y \in A \cap (B+x)$. Tehát $H^y = \emptyset$, ha $y \notin A$ és $H^y = (-B) + y$, ha $y \in A$. Így a Fubini-tétel szerint

$$\lambda_2(H) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(H^y)\,d\lambda(y) = \int_A \lambda(H^y)\,d\lambda(y) = \lambda(A)\lambda(B).$$

Ezt (54)-vel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(A \cap (B+x))\,d\lambda = \lambda(A)\lambda(B). \tag{55}$$

Ha $\lambda(A), \lambda(B) > 0$, akkor az integrál értéke pozitív, tehát van olyan x, hogy $\lambda(A \cap (B+x)) > 0$. Ezzel (i)-et beláttuk.

Ha $A, B \subset [0,1]$, akkor $A \cap (B+x) = \emptyset$ minden $x \notin [-1,1]$-re. Így az (55) bal oldalán álló integrál egyenlő az $\int_{-1}^{1} \lambda(A \cap (B+x))\,d\lambda$ integrállal. Mivel az integrál értéke $\lambda(A)\lambda(B)$, kell, hogy legyen olyan x, amelyre $\lambda(A \cap (B+x)) \ge \lambda(A)\lambda(B)/2$. Ezzel (ii)-t is beláttuk.

A (iii) állítást bizonyítandó legyen $0 < a < 1/2$ és $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített. Osszuk fel az $[a, 1-a]$ intervallumot n egyenlő részre, és vegyük minden második osztóintervallum egyesítését. Legyen az így kapott halmaz A, és legyen $B = [0,a] \cup [1-a, 1]$. Ekkor $x \ge 0$ esetén $A \cap (B+x) \subset A \cap [x, x+a]$, és így $\lambda(A \cap (B+x)) \le (a/2) + (a/n)$. Hasonlóan, ha $x < 0$, akkor $A \cap (B+x) \subset A \cap [1-a+x, 1+x]$, és ismét azt kapjuk, hogy $\lambda(A \cap (B+x)) \le (a/2) + (a/n)$. Mivel $\lambda(A)\lambda(B) = \frac{1-2a}{2} \cdot 2a = (1-2a) \cdot a$, ezért

$$\frac{(a/2) + (a/n)}{\lambda(A)\lambda(B)} = \frac{(a/2) + (a/n)}{(1-2a) \cdot a} = \frac{1}{2 \cdot (1-2a)} + \frac{1}{(1-2a)n}.$$

Látható, hogy ez az érték tetszőlegesen közel lehet $1/2$-hez, ha a kicsi és n nagy.

218. Jelöljük C-vel azon $c \in \mathbb{R}$ számok halmazát, amelyeket f egynél több pontban vesz fel. Legyenek a_c, b_c olyan pontok, melyekre $a_c < b_c$ és $f(a_c) =$

$f(b_c) = c$ minden $c \in C$-re. Könnyen látható, hogy az (a_c, b_c) $(c \in C)$ intervallumok páronként diszjunktak. Így a C halmaz megszámlálható. Legyen $V = \bigcup_{c \in C} f^{-1}(\{c\})$. A 151. feladat állítása szerint f^{-1} Borel-mérhető. Így $f^{-1}(\{c\})$ Borel minden c-re, tehát a V halmaz Borel. Ezért az $U = A \setminus V$ halmaz is Borel. Nyilvánvaló, hogy f szigorúan monoton az U halmazon.

Könnyű belátni, hogy ha a g függvény monoton növő az $X \subset \mathbb{R}$ halmazon, akkor g kiterjeszthető monoton növő függvényként egy X-et tartalmazó intervallumra. Legyen ugyanis $h(x) = \sup\{g(y) \colon y \le x,\ y \in X\}$ minden x-re. Ekkor h monoton növő, kiterjesztése g-nek, és azon pontok halmaza, amelyeken h véges értékű egy X-et tartalmazó intervallum.

Legyen g az f^{-1} függvény monoton kiterjesztése az $f(U)$ halmazról egy J intervallumra. A 151. feladat állítása szerint g Borel-mérhető. Ezért $g^{-1}(U) = f(U)$ Borel. Mivel $f(V) = C$ megszámlálható és $A = U \cup V$, ezért $f(A)$ is Borel.

219. (i) Ha $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$, akkor $f(H) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [f(a_n), f(b_n)]$, és így $\lambda(f(H)) \le \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n))$. Mivel ez minden lefedésre igaz, ezért $\lambda(f(H)) \le \mu_f(H)$.

A (ii) állítás bizonyításához először belátjuk, hogy $\mu_f(\{x\})$ egyenlő f ugrásával x-ben minden $x \in [a, b)$-re. Ugyanis

$$\begin{aligned}\mu_f(\{x\}) &= \lim_{n\to\infty} \mu_f([x, x+1/n)) = \lim_{n\to\infty} (f(x+1/n) - f(x)) = \\ &= f(x+0) - f(x).\end{aligned}$$

Speciálisan, ha f folytonos x-ben, akkor $\mu_f(\{x\}) = 0$. Ha tehát f jobbról is folytonos H pontjaiban, akkor $\mu_f(\{x\}) = 0$ minden $x \in H$-ra.

Tegyük fel, hogy f konstans az (a, b) nyílt intervallumon. Belátjuk, hogy ekkor $\mu_f((a, b)) = 0$. Valóban, ha $x_0 = b > x_1 > \ldots$ egy szigorúan csökkenő és a-hoz tartó sorozat, akkor $\mu_f([x_n, b)) = f(b) - f(x_n) = 0$ minden $n \ge 1$-re, és így $\mu_f((a, b)) = 0$, hiszen $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, b)$.

Szükségünk lesz még a következő állításra. Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ halmaz Lebesgue-féle külső mértéke egyenlő azon $\sum_{n=1}^{\infty} (d_n - c_n)$ összegek infimumával, ahol az $[c_n, d_n)$ intervallumok egy megszámlálható halmaz híján lefedik A-t, és $c_n, d_n \in A$ minden n-re.

Legyen $\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ az A halmaz egy tetszőleges, nyílt intervallumokkal való lefedése. Ha $A \cap (a_n, b_n)$ legfeljebb egyelemű, akkor az (a_n, b_n) intervallumot hagyjuk el a lefedésből. Tegyük fel, hogy $A \cap (a_n, b_n)$ legalább kételemű, és legyen $\alpha = \inf A \cap (a_n, b_n)$ és $\beta = \sup A \cap (a_n, b_n)$. Ha $\alpha, \beta \in A$, akkor cseréljük ki az (a_n, b_n) intervallumot az $[\alpha, \beta)$ intervallumra. Ha $\alpha \in A$ és $\beta \notin A$, akkor válasszunk egy szigorúan monoton növő $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ sorozatot, amelyre $x_k \to \beta$ és $x_k \in A$ minden k-ra, és cseréljük ki az (a_n, b_n) intervallumot az $[x_{k-1}, x_k)$ intervallumok rendszerére. Járjunk el hasonlóan, ha $\alpha \notin A$ és $\beta \in A$. Végül, ha $\alpha \notin A$ és $\beta \notin A$, akkor válasszunk egy $a \in A \cap (a_n, b_n)$ pontot és a szigorúan monoton $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ és $a = y_0 > y_1 > y_2 > \ldots$ sorozatokat, amelyekre $x_k, y_k \in A$ minden k-ra, valamint $x_k \to \beta$ és $y_k \to \alpha$, majd cseréljük ki az (a_n, b_n) intervallumot az $[x_{k-1}, x_k)$ és $[y_k, y_{k-1})$ intervallumok rendszerére. Könnyű ellenőrizni, hogy az így kapott intervallumok egy megszámlálható halmaz híján lefedik A-t, és az összhosszuk legfeljebb $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$, ami tetszőlegesen közel lehet $\lambda(A)$-hoz.

Most rátérünk (ii) bizonyítására. Legyen $H \subset [u, v)$, és tegyük fel, hogy f jobbról folytonos a H halmaz pontjaiban. (i) alapján elég belátni, hogy $\mu_f(H) \le \lambda(f(H))$.

Ha f konstans egy (a, b) intervallumon, akkor, mint láttuk, $\mu_f((a, b)) = 0$. Ha tehát (a, b)-t kivonjuk H-ból, akkor $\mu_f(H)$ értéke nem változik. És $\lambda(f(H))$ értéke sem változik, hiszen a kivonás eredményeképpen $f(H)$ csak egy ponttal lett kevesebb. Ha (a, b) valamelyik végpontja eleme H-nak, akkor azt is hagyjuk el H-ból. Ezzel szintén nem változtatjuk meg $\mu_f(H)$ értékét, mert $\mu_f(\{x\}) = 0$ minden $x \in H$-ra. Csak megszámlálhatóan sok olyan nem-elfajuló intervallum van, amelyen f konstans. Ha tehát ezen intervallumok mindegyikét kivonjuk H-ból, akkor ezzel sem $\mu_f(H)$, sem $\lambda(f(H))$ értékét nem változtatjuk meg. Feltehetjük tehát, hogy f szigorúan monoton növő H-n.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mint láttuk, léteznek $[c_n, d_n)$ intervallumok, amelyek összhossza kisebb, mint $\lambda(f(H)) + \varepsilon$, egy megszámlálható halmaz híján lefedik $f(H)$-t, valamint $c_n, d_n \in f(H)$ minden n-re. Legyen $c_n = f(a_n)$ és $d_n = f(b_n)$, ahol $a_n, b_n \in H$. Mivel f szigorúan monoton növő H-n, ezért az $[a_n, b_n)$ intervallumok egy megszámlálható halmaz híján lefedik H-t. Felhasználva, hogy H minden pontjának μ_f-mértéke nulla, ebből azt kapjuk, hogy

$$\mu_f(H) \le \sum_{n=1}^{\infty}(f(b_n) - f(a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty}(d_n - c_n) < \lambda(f(H)) + \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\mu_f(H) \le \lambda(H)$, amivel (ii)-t beláttuk.

A (iii) állítás nyilvánvaló (ii)-ből, felhasználva, hogy $\mu_f(\{x\}) = f(x + 0) - f(x)$ minden x-re.

220. Legyen H mérhető μ_f-re nézve. A 70. feladat szerint $H = B \cup N$, ahol B Borel és $\mu_f(N) = 0$. A 218. feladat állítása szerint $f(B)$ Borel. Mivel az előző (219.) feladat (i) állítása szerint $\lambda(f(N)) = 0$, ezért $f(H) = f(B) \cup f(N)$ Lebesgue-mérhető.

Tegyük fel, hogy f szigorúan monoton növő, és legyen $f(H)$ Lebesgue-mérhető. Ekkor $f(H) = B \cup N$, ahol B Borel és $\lambda(N) = 0$. A 218. feladat állítása szerint $f^{-1}(B)$ Borel. Mivel $H = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(N)$, ezért H mérhetőségéhez elég belátni, hogy $f^{-1}(N)$ mérhető μ_f-re nézve. Legyen f szakadási pontjainak halmaza D. Ekkor D megszámlálható. Az előző (219.) feladat (ii) állítása szerint $\mu_f(H \setminus D) = \lambda(f(H \setminus D)) = 0$, tehát $H \setminus D$ mérhető μ_f-re nézve. Mivel D megszámlálható, ezért $H = (H \setminus D) \cup (H \cap D)$ szintén mérhető μ_f-re nézve.

221. A megoldási ötletet használva az 168. feladat megoldásában már konstruáltunk egy függvényt a megkövetelt tulajdonságokkal.

222. Legyen $f : [0, 1] \to [0, 1]$ olyan szigorúan monoton folytonos függvény, amely egy pozitív mértékű A halmazt nullmértékű halmazba képez. (Lásd az előző (221.) feladatot.) Legyen f értékkészlete $[a, b]$, és jelöljük g-vel f inverzét. Ekkor g folytonos $[a, b]$-n.

Tudjuk, hogy A-nak van olyan H részhalmaza, amely nem Lebesgue-mérhető (lásd a 135. feladatot). Ekkor $f(H) \subset f(A)$, tehát $f(H)$ nullmértékű, és így mérhető. Másrészt $g(f(H)) = H$ nem mérhető.

223. Legyen $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely egy pozitív mértékű A halmazt nullmértékű halmazba képez (lásd a 221. feladatot). Terjesszük ki f-et folytonosan $\mathbb{R}$-re (legyen pl. f konstans a $(-\infty, a]$ és $[b, \infty)$ félegyeneseken). A 222. feladat megoldásában láttuk, hogy van olyan N nullmértékű halmaz, amelyre $f^{-1}(N)$ nem Lebesgue-mérhető.

224. Legyen H_k azon $x \in H$ pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy $|f(y) - f(x)| \le k \cdot |y - x|$ minden $y \in H$, $|y - x| < 1/k$ esetén. Mivel f lokálisan Lipschitz, ezért $H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots$. Így elég belátni, hogy $f(H_k)$ nullmértékű minden k-ra.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Fedjük le H_k-t ε-nál kisebb össztérfogatú téglákkal. A téglákat kicsit megnövelve feltehető, hogy az éleik hosszúsága racionális. Ekkor mindegyiket felbonthatjuk egymásba nem nyúló kockákra. Végül is azt kaptuk, hogy H_k lefedhető egy ε-nál kisebb össztérfogatú K_n kockasorozattal. A kockákat szükség esetén tovább osztva feltehetjük, hogy K_n átmérője kisebb, mint $1/k$ minden n-re.

Legyen K_n élhossza a_n. Ha $x, y \in H_k \cap K_n$, akkor $|y - x| < 1/k$, tehát $|f(y) - f(x)| \le k \cdot |y - x| \le k \cdot a_n \cdot \sqrt{p}$. Így $f(H_k \cap K_n)$ átmérője legfeljebb $k\sqrt{p} \cdot a_n$. Ezért $f(H_k \cap K_n)$ belefoglalható egy $k\sqrt{p} \cdot a_n$ élhosszú kockába. Ebből

$$\lambda(f(H_k)) \le \sum_{n=1}^{\infty} (k\sqrt{p} \cdot a_n)^p = (k\sqrt{p})^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < (k\sqrt{p})^p \cdot \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\lambda(f(H_k)) = 0$.

225. Tudjuk, hogy $H = A \cup N$, ahol A F_σ és N nullmértékű (lásd a 101. feladatot). Belátjuk, hogy $f(A)$ F_σ. Mivel A F_σ, ezért előáll mint megszámlálhatóan sok zárt halmaz uniója. Ezen zárt halmazok mindegyikét előállíthatjuk megszámlálhatóan sok korlátos zárt halmaz uniójaként. A feltételből nyilvánvalóan következik, hogy f folytonos H-n. Így f minden korlátos zárt halmazt korlátos zárt halmazba képez, tehát A-t F_σ halmazba képezi.

Mivel $f(N)$ nullmértékű az előző (224.) feladat állítása szerint, ebből $f(H) = f(A) \cup f(N)$ alapján következik, hogy $f(H)$ is Lebesgue-mérhető.

226. Belátjuk, hogy az állítás pontosan akkor igaz, ha $p \le q$. Legyen $p \le q$, legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ Lebesgue-mérhető, és tegyük fel, hogy az $f : H \to \mathbb{R}^q$ leképezés Lipschitz. Ekkor $H = A \cup N$, ahol A F_σ és N nullmértékű (lásd a 101. feladatot). Belátjuk, hogy $f(A)$ F_σ, és $f(N)$ nullmértékű. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy $f(H)$ Lebesgue-mérhető.

Az előző (225.) feladat megoldásának gondolatmenete változtatás nélkül alkalmazható annak bizonyítására, hogy $f(A)$ F_σ.

Tegyük fel, hogy $|f(y) - f(x)| \le k \cdot |y - x|$ minden $x, y \in H$-ra. A 224. feladat megoldásának gondolatmenetét és jelöléseit alkalmazva látható, hogy N lefedhető egy olyan kockasorozattal, amelynek az össztérfogata $< \varepsilon$. Ha az n-edik kocka élhossza a_n, akkor $f(N)$ lefedhető egy olyan kockasorozattal, amelyben az n-edik kocka élhossza legfeljebb $k\sqrt{p} \cdot a_n$. Ha $\varepsilon < 1$, akkor $a_n < 1$ minden n-re. Így $a_n^q \le a_n^p$ minden n-re, tehát

$$\lambda(f(N)) \le \sum_{n=1}^{\infty} (k\sqrt{p} \cdot a_n)^q \le (k\sqrt{p})^q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < (k\sqrt{p})^q \cdot \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\lambda(f(N)) = 0$.

Most legyen $p > q$. Legyen $E \subset \mathbb{R}^q$ tetszőleges nem Lebesgue-mérhető halmaz. Belátjuk, hogy van olyan $H \subset \mathbb{R}^p$ nullmértékű halmaz és olyan $f\colon H \to \mathbb{R}^q$ Lipschitz-leképezés, hogy $f(H) = E$.

Az $L = \{(x_1, \ldots, x_p)\colon x_{q+1} = \ldots = x_p = 0\}$ altér nullmértékű $\mathbb{R}^p$-ben. Legyen $H = E \times \{e\}$, ahol e az a $p - q$ dimenziós vektor, amelynek minden koordinátája nulla. Ekkor $H \subset L$, tehát H nullmértékű. Legyen $f(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_q)$ minden $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$-re. Ekkor f Lipschitz $\mathbb{R}^p$-n, hiszen $|f(y) - f(x)| \le |y - x|$ minden $x, y \in \mathbb{R}^p$-re. Másrészt $f(H) = E$, tehát a Lebesgue-mérhető H halmaz képe nem Lebesgue-mérhető.

227. Elég belátni, hogy $\lambda(f(H)) \le (K + \varepsilon) \cdot (\lambda(H) + \varepsilon)$ minden $\varepsilon > 0$-ra. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Jelöljük H_n-nel azon $x \in H$ pontok halmazát, amelyekre teljesül, hogy $|f(y) - f(x)| \le (K + \varepsilon) \cdot (y - x)$ minden $y \in H \cap (x, x + 1/n)$-re.

Ekkor $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = H$. Valóban, ha $x \in H$ jobb oldali torlódási pontja H-nak, akkor a $|D^+f(x)|, |D_+f(x)| \le K$ feltételből következik, hogy $x \in H_n$, ha n elég nagy. Ha $x \in H$ nem jobb oldali torlódási pontja H-nak, akkor $x \in H_n$, ha $H \cap (x, x+1/n) = \emptyset$, tehát szintén minden elég nagy n-re.

Így $\lim_{n\to\infty} \lambda(H_n) = \lambda(H)$ (lásd a 102. feladatot). Mivel $f(H_1) \subset f(H_2) \subset \ldots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(H_n) = f(H)$, ezért $\lim_{n\to\infty} \lambda(f(H_n)) = \lambda(f(H))$. Így elég belátni, hogy $\lambda(f(H_n)) \le (K+\varepsilon)\cdot(\lambda(H_n)+\varepsilon)$ minden n-re.

Fedjük le H_n-et az $I_1, I_2, \ldots$ $1/n$-nél rövidebb intervallumokkal úgy, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \lambda(H_n) + \varepsilon$ teljesüljön. Ha $I_k \cap H \ne \emptyset$, akkor $\lambda(f(H_n \cap I_k)) \le (K+\varepsilon)\cdot|I_k|$. Valóban, ha $x, y \in H_n \cap I_k$ és $x < y$, akkor $y - x < 1/n$, tehát $|f(x) - f(y)| \le (K+\varepsilon)\cdot(y-x) \le (K+\varepsilon)\cdot|I_k|$. Így az $f(H_n \cap I_k)$ halmaz bármely két pontjának a távolsága legfeljebb $(K+\varepsilon)\cdot|I_k|$. Ezért az $f(H_n \cap I_k)$ halmaz lefedhető egy legfeljebb $(K+\varepsilon)\cdot|I_k|$ hosszúságú intervallummal, tehát a Lebesgue-féle külső mértéke sem lehet ennél nagyobb. Mármost

$$\lambda(f(H_n)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f(H_n \cap I_k)) \le \sum_{k=1}^{\infty} (K+\varepsilon)\cdot|I_k| < (K+\varepsilon)\cdot(\lambda(H_n)+\varepsilon),$$

amivel a feladatot megoldottuk.

228. Jelöljük H torlódási pontjainak halmazát H'-vel. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel f' mérhető a H' halmazon a 173. feladat (ii) állítása szerint, ezért a $H_n = \{x \in H' : (1+\varepsilon)^n \le f'(x) < (1+\varepsilon)^{n+1}\}$ halmaz mérhető minden $n \in \mathbb{Z}$-re. Az előző (227.) feladat állítása szerint

$$\lambda(f(H_n)) \le (1+\varepsilon)^{n+1}\cdot\lambda(H_n) = (1+\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon)^n\cdot\lambda(H_n) \le (1+\varepsilon)\cdot\int_{H_n} f'\,d\lambda.$$

Legyen $H_+ = \{x \in H' : f' > 0\}$. Ekkor $H_+ = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} H_n$, ezért $f(H_+) \le (1+\varepsilon)\cdot\int_{H_+} f'\,d\lambda$. Ugyanígy kapjuk, hogy $f(H_-) \le (1+\varepsilon)\cdot\int_{H_-} |f'|\,d\lambda$, ahol $H_- = \{x \in H' : f' < 0\}$.

Ha $H_0 = \{x \in H' : f' = 0\}$, akkor $\lambda(f(H_0)) = 0$ a 109. feladat állítása szerint. Így

$$\begin{aligned} \lambda(f(H)) &= \lambda(f(H_+) \cup \lambda(f(H_-) \le \\ &\le (1+\varepsilon)\cdot\int_{H_+} f'\,d\lambda + (1+\varepsilon)\cdot\int_{H_-} |f'|\,d\lambda = \\ &= (1+\varepsilon)\cdot\int_H |f'|\,d\lambda. \end{aligned}$$

229. Feltehetjük, hogy $K > 0$. Jelöljük H torlódási pontjainak halmazát H'-vel.

Legyen Y azon értékek halmaza, amelyeket f több, mint egyszer vesz fel. Legyenek $a_y < b_y$ olyan pontok H-ban, melyekre $f(a_y) = f(b_y) = y$. Könnyen látható, felhasználva f monotonitását, hogy az (a_y, b_y) $(y \in Y)$ intervallumok páronként diszjunktak. Így Y megszámlálható.

Legyen $y \in Y$. Mivel f az $f^{-1}(\{y\})$ halmaz pontjaiban konstans, ezért $f' = 0$ az $f^{-1}(\{y\}) \cap H'$ halmaz pontjaiban. Azonban $f' \geq K > 0$ mindenütt $H \cap H'$-n, ezért $f^{-1}(\{y\}) \subset H \setminus H'$. Így $f^{-1}(\{y\})$ megszámlálható.

Ezzel beláttuk, hogy az $\bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\})$ halmaz megszámlálható. Hagyjuk el H-ból ezt a halmazt. Ezzel sem $f(H)$, sem pedig H mértékét nem változtatjuk meg.

Feltehetjük tehát, hogy f szigorúan monoton növő H-n. Egy nullmértékű halmaz elhagyása után (amely $\lambda(H)$ értékét nem változtatja meg, $\lambda(f(H))$ értékét pedig nem növeli) azt is feltehetjük, hogy H Borel. Ekkor $f(H)$ is Borel a 218. feladat állítása szerint. Ha $x \in H \cap H'$, akkor $0 < K \leq f'(x) < \infty$, ezért f^{-1} differenciálható az $f(x)$ pontban, és itt a deriváltja $1/f'(x) \in (0, 1/K]$. Így a 227. feladat állítása szerint

$$\lambda(H) = \lambda(f^{-1}(f(H))) \leq (1/K) \cdot \lambda(f(H)),$$

azaz $\lambda(f(H)) \geq K \cdot \lambda(f(H))$.

230. A 228. feladat szerint elég belátni, hogy $\lambda(f(H)) \geq \int_H f' \, d\lambda$. Feltehetjük, hogy H Borel, mert különben elhagyunk H-ból egy alkalmas nullmértékű halmazt (amely az integrál értékét nem változtatja meg, $\lambda(f(H))$ értékét pedig nem növeli). Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és legyen H_n, mint a 228. feladat megoldásában. Ekkor az $f(H_n)$ halmaz Borel minden n-re a 218. feladat állítása szerint. Ha $n \neq m$, akkor $f(H_n) \cap f(H_m)$ megszámlálható. Valóban, legyen $y \in f(H_n) \cap f(H_m)$, és legyen $y = f(x) = f(x')$, ahol $x \in H_n$ és $x' \in H_m$. Mivel $H_n \cap H_m = \emptyset$, ezért $x \neq x'$, tehát $f^{-1}\{y\}$ legalább kételemű. De f monoton, ezért azon y-ok Y halmaza, amelyeket f több mint egy pontban vesz fel, megszámlálható. Ugyanis Y azon értékek halmaza, amelyeket f a konstans szakaszain vesz fel, és ezen szakaszok halmaza megszámlálható.

Tehát az $f(H_n)$ halmazok Borel-halmazok, és közülük bármely kettőnek a metszete megszámlálható, így nullmértékű. Ebből következik, hogy

$$\lambda(f(H)) \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda(f(H_n)),$$

hiszen $f(H) \supset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f(H_n)$. A 229. feladat állítása szerint

$$\lambda(f(H_n)) \geq (1+\varepsilon)^n \cdot \lambda(H_n) = (1+\varepsilon)^{-1} \cdot (1+\varepsilon)^{n+1} \cdot \lambda(H_n) \geq$$
$$\geq (1+\varepsilon)^{-1} \cdot \int_{H_n} f'\, d\lambda.$$

Ezért

$$\lambda(f(H)) \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(f(H_n)) \geq (1+\varepsilon)^{-1} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{H_n} f'\, d\lambda =$$
$$= (1+\varepsilon)^{-1} \cdot \int_{H(f'>0)} f'\, d\lambda = (1+\varepsilon)^{-1} \cdot \int_H f'\, d\lambda.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\lambda(f(H)) \geq \int_H f'\, d\lambda$.

231. Tetszőleges $a \leq x < y \leq b$-re jelöljük az $(f(y) - f(x))/(y - x)$ differenciahányadost $f[x, y]$-nal.

Belátjuk, hogy U nyílt. Legyen $x \in U$ tetszőleges. Ekkor van olyan $x < y < b$, hogy $f[x, y] > m$. Világos, hogy ha f folytonos x-ben, akkor $f[z, y] > m$ az x pont egy V környezetének minden z pontjára, és ekkor $V \subset U$. Az f függvény mindenképpen jobbról folytonos x-ben, tehát x egy alkalmas jobb oldali V_+ környezetére teljesül, hogy $V_+ \subset U$. Ha f balról szakad x-ben, akkor f monotonitása miatt van olyan bal oldali V_- környezete x-nek, hogy $f[z, x] > m$ minden $x \in V_-$-ra, tehát $V_- \subset U$. Ezzel beláttuk, hogy x egy környezete része U-nak. Ez minden $x \in U$-ra igaz, tehát U nyílt.

Legyen (u, v) az U nyílt halmaz egy komponense. Belátjuk, hogy $f[u, v] \geq m$. Elég belátni, hogy $f[x, v] \geq m$ minden $x \in (u, v)$-re, hiszen f jobb oldali folytonossága szerint ebből következik $f[u, v] \geq m$.

Legyen $x \in (u, v)$ adott, és legyen $H = \{y \in (x, b) : f[x, y] \geq m\}$. Mivel $x \in U$, ezért $H \neq \emptyset$. Legyen $z = \sup H$, ekkor az f függvény monotonitásából következik, hogy $f[x, z] \geq m$. Ha $z < v$, akkor $z \in U$, tehát $f[z, y] > m$ egy alkalmas $z < y$-ra. De ekkor $f[x, y] > m$, ami ellentmond annak, hogy z felső korlátja H-nak. Tehát $z \geq v$. Ha $z = v$, akkor, mint láttuk, $f[x, v] \geq m$. Ha viszont $z > v$, akkor $v \notin U$ alapján $f[v, z] \leq m$, és ezt $f[x, z] \geq m$-mel összevetve azt kapjuk, hogy $f[x, v] \geq m$.

232. Tetszőleges g függvényre jelöljük $g[x, y]$-nal a $(g(y) - g(x))/(y - x)$ differenciahányadost.

Belátjuk, hogy ha f értékeit a szakadási pontokban a jobb oldali határértékre változtatjuk, akkor ezzel D^+f értéke f folytonossági pontjaiban nem változik. Valóban, legyen $\overline{f}(x) = \lim_{y\to x+0} f(y)$ minden $a \leq x < b$-re. Tegyük fel, hogy f

folytonos x-ben. Mivel $\overline{f}(x) = f(x)$ és $\overline{f}(y) \geq f(y)$ minden y-ra, ezért $\overline{f}[x,y] \geq f[x,y]$ minden $y > x$-re, tehát $D^+\overline{f}(x) \geq D^+f(x)$.

Legyen $v \in \overline{\mathbb{R}}$ olyan (kiterjesztett) valós szám, hogy $D^+f(x) < v$. Ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy $f[x,y] < v$ minden $x < y < x+\delta$-ra. Így

$$D^+\overline{f}(x) = \lim_{z \to y+0} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq v,$$

hiszen $f[x,z] < v$ minden $x < z < x+\delta$-ra. Így $D^+\overline{f}(x) \leq v$ valahányszor $D^+f(x) < v$, tehát szükségképpen $D^+\overline{f}(x) \leq D^+f(x)$. Feltehetjük tehát, hogy f jobbról folytonos. Jelöljük az $\{x \in (a,b) \colon D^+f(x) > m\}$ halmazt $\{D^+f > m\}$-mel.

Legyen $U = \{x \in (a,b) : \exists y \in (x,b),\ f[x,y] > m\}$. Ekkor $\{D^+f > m\} \subset U$. Legyenek U komponensei (u_i, v_i). Az előző (231.) feladatban láttuk, hogy $f[u_i, v_i] \geq m$ minden i-re. Így

$$\lambda(\{D^+f > m\}) \leq \sum_i (v_i - u_i) \leq \frac{1}{m} \sum_i (f(v_i) - f(u_i)) \leq (f(b) - f(a))/m.$$

233. Legyenek $I_1, I_2, \ldots$ olyan intervallumok, melyek lefedik $f(A)$-t. Legyen $J_n = f^{-1}(I_n)$, ekkor $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Ha $c, d \in J_n,\ c < d$, akkor az előző (232.) feladat állítása szerint

$$\lambda(A \cap [c,d]) \leq \lambda(\{D^+f > m\} \cap [c,d]) \leq (f(d) - f(c))/m \leq |I_n|/m,$$

tehát $m \cdot \lambda(A \cap J_n) \leq |I_n|$ minden n-re. Ebből

$$\sum_n |I_n| \geq m \cdot \sum_n \lambda(A \cap J_n) \geq m \cdot \lambda(A),$$

és tekintve, hogy ez minden I_n lefedőrendszerre igaz, ezért $\lambda(f(A)) \geq m \cdot \lambda(A)$.

234. Mivel f monoton növő, ezért $0 \leq D_+f(x) \leq D^+f(x)$ minden x-re. Így a 227. feladat állítása szerint, ha $A \subset [a,b]$ Lebesgue-mérhető és $D^+f(x) \leq K$ minden $x \in A$-ra, akkor $\lambda(f(H)) \leq K \cdot \lambda(H)$. Ebből a 228. feladat megoldásában követett gondolatmenet adja, hogy $\lambda(f(A)) \leq \int_A D^+f\, d\lambda$.

Az 233. feladat állításából pedig a 230. feladat megoldásában követett gondolatmenet adja, hogy $\lambda(f(A)) \geq \int_A D^+f\, d\lambda$.

A többi Dini-derivált esete visszavezethető D^+f-re. Ugyanis $D_+f = -D^+(-f)$, amiből következik, hogy a $\lambda(f(A)) = \int_A D^+f\, d\lambda$ képletben D^+f-et kicserélhetjük D_+f-re. Ha pedig $g(x) = f(-x)$, akkor $D^-f(x) = -D_+g(-x)$ és $D_-f(x) = -D^+g(-x)$, tehát a képlet a D^-f és D_-f Dini-deriváltakra is igaz.

235. Legyen f a Cantor-függvény, és legyen A a Cantor-halmaz. Ekkor $f(A) = [0,1]$, tehát $\lambda(f(A)) = 1$, míg $\int_A D^+f\,d\lambda = 0$, hiszen A nullmértékű.

236. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elégségességet bizonyítandó tegyük fel, hogy $\mu(f^{-1}(T)) = \nu(T)$ minden T téglára.

Legyen $\xi(A) = \mu(f^{-1}(A))$ minden $A \subset \mathbb{R}^p$ Borel-halmazra. Könnyen látható, hogy ξ mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$-n. Mivel $\xi(T) = \nu(T) \in \mathbb{R}$ minden T téglára, ezért a 74. feladat állítása szerint $\xi(A) = \nu(A)$ minden A Borel-halmazra. Más szóval $\mu(f^{-1}(A)) = \nu(A)$ minden A Borel-halmazra, azaz f mértéktartó.

237. Az előző (236.) feladat szerint elég belátni, hogy $\mu(f^{-1}([a,b))) = F(b) - F(a) = \mu_F([a,b))$ minden $a < b$-re. Ez pedig nyilvánvaló F definíciójából.

238. Ha $g = \chi_A$, ahol $A \in \mathcal{A}_2$, akkor (10) bal oldala $\mu_2(A)$, a jobb oldala pedig $\mu_1(f^{-1}(A))$. Ezek egyenlőek, mert f mértéktartó. Így (10) igaz akkor, ha g egy mérhető halmaz karakterisztikus függvénye. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy akkor is igaz, ha g egyszerű függvény. Most legyen g nemnegatív mérhető X_2-n. Ekkor vannak olyan $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots$ egyszerű függvények, amelyek pontonként tartanak g-hez. A (10) egyenlőség igaz az s_n függvények mindegyikére, ezért a monotonkonvergencia-tétel alkalmazásával azonnal adódik, hogy g-re is igaz.

Ha g tetszőleges mérhető, akkor alkalmazzuk (10)-et a nemnegatív g^+ és g^- függvényekre. A két egyenlőség bal oldalainak különbsége akkor és csak akkor értelmes, ha a jobb oldalak különbsége értelmes. Így (10) bal oldala akkor és csak akkor létezik, ha a jobb oldal létezik, és ekkor egyenlőek.

239. Vegyük észre, hogy a 237. feladat szerint f mértéktartó az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérről az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_F)$ mértéktérbe. Ha (10)-et alkalmazzuk a $g(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ választással, akkor megkapjuk a feladat állítását.

240. Legyen $X_1 = \{a\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X_1\}$, $\mu_1(\emptyset) = 0$, $\mu_1(X_1) = 1$, $X_2 = \{b,c\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X_2\}$, $\mu_2(\emptyset) = 0$, $\mu_2(X_2) = 1$. Ekkor $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ mértékterek.

Legyen $f(a) = b$. Ekkor $f\colon X_1 \to X_2$ mértéktartó leképezés, hiszen $f^{-1}(X_2) = X_1$, és így $\mu_1(f^{-1}(X_2)) = 1 = \mu_2(X_2)$. Legyen $g(b) = 0$ és $g(c) = 1$. Ekkor $\int_{X_2} g\,d\mu_2$ nem létezik, mert nincs olyan mérhető $h\colon X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, hogy $g = h$ teljesülne μ_2-m.m. X_2-n. De az $\int_{X_1} (g \circ f)\,d\mu_1$ integrál létezik, mert $g \circ f \equiv 0$ X_1-en.

241. Legyen $\mu(A) = \lambda(A \cap [0,1))$ minden $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazra. Nyilványvaló, hogy μ mérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain. Belátjuk, hogy f mértéktartó a $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$ mértéktérről az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ mértéktérbe.

A 236. feladat állítása szerint ehhez elég belátni, hogy $\lambda(f^{-1}(I)) = \mu(I)$, azaz $\lambda(f^{-1}(I \cap [0,1))) = \lambda(I \cap [0,1))$ minden I intervallumra. Ha I intervallum és $I \cap [0,1) \neq \emptyset$, akkor $I \cap [0,1) = [u,v)$, ahol $0 \le u < v \le 1$.

Azt kell tehát belátni, hogy $\lambda(f^{-1}([u,v))) = v-u$ minden $0 \le u < v \le 1$-re. Mivel

$$f^{-1}([u,v)) \cap [a_i, b_i) = [a_i + u(b_i - a_i), a_i + v(b_i - a_i)),$$

ezért $\lambda(f^{-1}([u,v)) \cap [a_i, b_i)) = (v-u) \cdot (b_i - a_i)$ minden i-re. Ebből

$$\lambda(f^{-1}([u,v))) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(f^{-1}([u,v)) \cap [a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} (v-u) \cdot (b_i - a_i) = v-u,$$

hiszen $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = 1$. Ezzel beláttuk, hogy f mértéktartó a $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$ mértéktérről az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ mértéktérbe. Mivel f $[0,1)$-be képez, ebből nyilvánvalóan következik, hogy f mértéktartó a $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$ mértéktérről önmagába.

242. Legyen $[a_i, b_i) = [(i-1)/n, i/n)$ minden $i = 1, \ldots, n$-re. Nyilvánvaló, hogy $x \in [a_i, b_i)$ esetén $\{nx\} = nx - (i-1) = (x - a_i)/(b_i - a_i)$. Ezért az állítás az előző (241.) feladat állításának speciális esete.

243. A 236. feladat állítása szerint elég belátni, hogy $\lambda(f^{-1}([u,v))) = v-u$ minden $u < v$-re.

Minden $y \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}(\{y\}) = \{(y + \sqrt{y^2+4})/2, y - \sqrt{y^2+4})/2\}$. Az f függvény szigorúan monoton növő a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ félegyenesek mindegyikén. Ezért $u < v$ esetén

$$\begin{aligned} f^{-1}([u,v)) = &[u - \sqrt{u^2+4})/2, v - \sqrt{v^2+4})/2) \cup \\ &\cup [u + \sqrt{u^2+4})/2, v + \sqrt{v^2+4})/2). \end{aligned}$$

Ebből azonnal adódik, hogy $\lambda(f^{-1}([u,v))) = v-u$ minden $u < v$-re.

244. Borel-mérhető függvényekre az állítás nyilvánvaló az előző (243.) és a 238. feladat állításából.

Most legyen $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-mérhető. Ekkor a 164. feladat állítása szerint létezik egy $g\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-mérhető függvény, amely egyenlő f-fel majdnem mindenütt. Legyen $A = \{x\colon f(x) \neq g(x)\}$, ekkor tehát A nullmértékű.

Legyen $B = \{x\colon f(x - (1/x)) \neq g(x - (1/x))\}$. Ekkor $B = h^{-1}(A)$, ahol $h(x) = x - (1/x)$. Ebből egyszerűen adódik, hogy $B = \phi(A) \cup \psi(A)$, ahol $\phi(x) = (x + \sqrt{x^2+4})/2$ és $\psi(x) = (x - \sqrt{x^2+4})/2$. Mivel A nullmértékű és

ϕ, ψ differenciálható függvények, ezért a 228. feladat állítása szerint $\lambda(B) = 0$. Így $f(x - (1/x)) = g(x - (1/x))\}$ majdnem mindenütt.

Ha tehát (11)-ben f-et g-vel helyettesítjük, akkor egyik oldal sem változik (illetve nem létezik, ha f-re sem létezett). Mivel pedig (11) a Borel-mérhető g-re teljesül, így f-re is teljesül.

245. Tetszőleges $0 \le u < v \le 1$-re

$$\mu((u,v)) = \int_u^v \frac{dx}{1+x} = \log(1+v) - \log(1+u) = \log\left(\frac{1+v}{1+u}\right).$$

Ha $0 \le a < b \le 1$, akkor

$$f^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+a}, \frac{1}{n+b}\right),$$

tehát

$$\mu(f^{-1}((a,b))) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1+1/(n+b)}{1+1/(n+a)}\right). \tag{56}$$

A jobb oldalon álló összeget a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\sum_{n=1}^{N} \log(1+1/(n+a)) = \sum_{n=1}^{N} (\log(n+1+a) - \log(n+a)) = \\ = \log(N+1+a) - \log(1+a)$$

és hasonlóan, $\sum_{n=1}^{N} \log(1+1/(n+b)) = \log(N+1+b) - \log(1+b)$. Ezért az (56) jobb oldalán álló összeg értéke

$$\lim_{N\to\infty} (\log(N+1+a) - \log(1+a) - \log(N+1+b) + \log(1+b)) = \\ = \lim_{N\to\infty} \log\left(\frac{N+1+a}{N+1+b}\right) - \log\left(\frac{1+a}{1+b}\right) = \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

Ezzel beláttuk, hogy $\mu(f^{-1}((a,b))) = \mu((a,b))$. Mivel minden pont f általi ősképe megszámlálható, tehát μ szerint nullmértékű, ezért $\mu(f^{-1}([a,b))) = \mu([a,b))$ minden $0 \le a < b \le 1$-re. Így f mértéktartó a 236. feladat állítása szerint.

246. Az $f+g$ és $c \cdot f$ függvényekre vonatkozó állítás nyilvánvaló. Mivel f, g korlátos változásúak, ezért korlátosak is $[a,b]$-ben. Tegyük fel, hogy $|f|, |g| \le K$.

Legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ tetszőleges felosztás. Ekkor

$$\begin{aligned}
&|f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| = \\
&\quad = |f(x_i)\cdot(g(x_i) - g(x_{i-1})) + g(x_{i-1})\cdot(f(x_i) - f(x_{i-1}))| \le \\
&\quad \le |f(x_i)|\cdot|g(x_i) - g(x_{i-1})| + |g(x_{i-1})|\cdot|f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \\
&\quad \le K\cdot|g(x_i) - g(x_{i-1})| + K\cdot|f(x_i) - f(x_{i-1})|
\end{aligned}$$

minden $i = 1, \ldots, n$-re. Így

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \le \\
&\qquad \le K\cdot\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| + K\cdot\sum_{i=1}^{n}|g(x_i) - g(x_{i-1})| \le \\
&\qquad \le K\cdot V(f;[a,b]) + K\cdot V(g;[a,b]).
\end{aligned}$$

Mivel ez minden felosztásra igaz, ezért $V(f\cdot g;[a,b]) \le K\cdot V(f;[a,b]) + K\cdot V(g;[a,b]) < \infty$, tehát $f\cdot g$ korlátos változású.

247. Jelölje $V(f;[a,b])$ az f függvény totális variációját az $[a,b]$ intervallumon. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n egyenlő részre, és legyen az így kapott felosztás $F_n : a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_n^n = b$. Legyen $m_i^n = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]\}$ és $M_i^n = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]\}$, és legyenek $u_i^n, v_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ olyan pontok, melyekre $f(u_i^n) = m_i^n$, $f(v_i^n) = M_i^n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Jelöljük F_n^*-gal azt a felosztást, amit úgy kapunk, hogy F_n-hez hozzávesszük az u_i^n, v_i^n pontokat minden i-re. Ha f-nek az F_n, illetve F_n^* felosztásokhoz tartozó variációs összege V_n, illetve V_n^*, akkor $n \to \infty$ esetén $V_n \to V(f;[a,b])$ és $V_n^* \to V(f;[a,b])$. Jelöljük k_i^n-vel az $f([x_{i-1}^n, x_i^n))$ szakasz karakterisztikus függvényét minden $1 \le i < n$-re, továbbá legyen k_n^n az $f([x_{n-1}^n, x_n^n])$ szakasz karakterisztikus függvénye. Ha $N_n = \sum_{i=1}^{n} k_i^n$, akkor $N_n(y)$ egyenlő az F_n felosztás azon osztóintervallumainak számával, amelyekben f felveszi az y értéket. Ebből egyszerűen következik, hogy $n \to \infty$ esetén N_n pontonként N-hez tart, és így N Borel-mérhető. Mivel

$$|f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n)| \le M_i^n - m_i^n = |f(v_i^n) - f(u_i^n)| = \int_{-\infty}^{\infty} k_i^n(y)\,dy,$$

így $V_n \le \int_{-\infty}^{\infty} N_n(y)\,dy \le V_n^*$ minden n-re. Az is könnyen látható, hogy az N_{2^n} függvénysorozat monoton növő. Ha tehát $n \to \infty$, akkor a monotonkonvergencia-tétel szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} N_{2^n}(y)\,dy = V(f;[a,b]).$$

248. A rövidség kedvéért írjunk $f_{\alpha,\beta}$ helyett f-et. Nyilvánvaló, hogy f folytonosan differenciálható $[c,1]$-ben minden $0<c<1$-re. Ezért f akkor és csak akkor differenciálható $[0,1]$-ben, ha a 0 pontban differenciálható, azaz ha $f(x)/x$-nek létezik a véges limesze $x \to 0+0$ esetén. Mivel $\beta<0$, ezért $\sin\left(x^\beta\right)$ minden -1 és 1 közötti értéket felvesz 0 minden jobb oldali környezetében. Így $\alpha \le 1$ esetén $f(x)/x = x^{\alpha-1} \cdot \sin\left(x^\beta\right)$-nek nem létezik a jobb oldali határértéke 0-ban. Ha viszont $\alpha>1$, akkor a limesz 0, mert $\sin\left(x^\beta\right)$ korlátos. Így az (i) kérdésre a válasz $\alpha>1$.

Ha $x>0$, akkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}\sin\left(x^\beta\right) + \beta x^{\alpha+\beta-1}\cos\left(x^\beta\right) = \\ &= x^{\alpha+\beta-1}\cdot\left[\beta\cos\left(x^\beta\right) + \alpha x^{-\beta}\sin\left(x^\beta\right)\right]. \end{aligned} \tag{57}$$

Mivel $\beta<0$, ezért van olyan $x_0>0$, hogy $|f'(x)| < 2|\beta|\cdot x^{\alpha+\beta-1}$ minden $0<x<x_0$-ra. Ha $\alpha+\beta>0$, akkor tehát az $\int_0^1 |f'|\,dx$ improprius integrál konvergens. Ebből következik, hogy f korlátos változású. Ugyanis minden $0<c<d\le 1$-re

$$|f(d)-f(c)| = \left|\int_c^d f'\,dx\right| \le \int_c^d |f'|\,dx,$$

tehát bármely $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ felosztásra a variációs összeg legfeljebb $|f(x_1)| + \int_{x_1}^1 |f'|\,dx \le 1 + \int_0^1 |f'|\,dx$.

Most belátjuk, hogy ha $\alpha+\beta\le 0$, akkor f nem korlátos változású. Legyen $x_k = (k\pi + (\pi/2))^{1/\beta}$ $(k=0,1,\ldots)$. Ekkor $\beta<0$ miatt $1>x_1>x_2>\ldots$, és $\sin x_k^\beta = (-1)^k$ minden k-ra. Így

$$\sum_{k=1}^K |f(x_k)-f(x_{k-1})| \ge \sum_{k=1}^K x_k^\alpha > \sum_{k=1}^K ((k+1)\pi)^{\alpha/\beta}.$$

Ha $\alpha+\beta\le 0$, akkor $\alpha/\beta \ge -1$, tehát a fenti összeg végtelenhez tart, ha $K\to\infty$. Így $\alpha+\beta\le 0$ esetén f nem korlátos változású. Vagyis a (ii) kérdésre a válasz $\alpha+\beta>0$.

Ha $\alpha+\beta\ge 1$, akkor (57)-ből következik, hogy f' korlátos $(0,1]$-ben, tehát ekkor f Lipschitz. Ha viszont $\alpha+\beta<1$, akkor szintén (57) felhasználásával könnyű ellenőrizni, hogy f' nem korlátos $(0,1]$-ben, ekkor tehát f nem lehet Lipschitz. Így a (iii) kérdésre a válasz $\alpha+\beta\ge 1$.

Ha f folytonosan differenciálható, akkor a deriváltja korlátos, tehát $\alpha+\beta \geq 1$. Az (57) egyenlőségből látható, hogy f' nem folytonos 0-ban, ha $\alpha+\beta=1$, és folytonos 0-ban, ha $\alpha+\beta>1$. Tehát a (iv) kérdésre a válasz $\alpha+\beta>1$.

249. Jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(\{y\})$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y)=\infty$, ha $f^{-1}(\{y\})$ végtelen. A 247. feladat állítása szerint az N függvény Borel-mérhető $\mathbb{R}$-en, és $\int_{\mathbb{R}} N\,d\lambda$ egyenlő az f függvény totális variációjával az $[a,b]$ intervallumon. Ha f totális variációja véges, akkor N integrálható $\mathbb{R}$-en. Következésképpen N m.m. véges értékű. Ezzel beláttuk az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikációt.

Most tegyük fel (ii)-t. Legyen f értékkészlete $[m,M]$, és legyen $A_n=\{y\in[m,M]\colon N(y)\leq n\}$. Ekkor A_n mérhető minden n-re, és $A_1\subset A_2\subset\ldots$. Az $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ halmaz azon $y\in[m,M]$ pontok halmaza, melyekre $N(y)$ véges, tehát $\lambda([m,M]\setminus A)=0$. Így $\lambda(A_n)\to M-m$. Legyen $\varepsilon>0$ adott. Ekkor van olyan n, hogy $\lambda([m,M]\setminus A_n)<\varepsilon$. Ha tehát $Y=[m,M]\setminus A_n$, akkor $\lambda(Y)<\varepsilon$, és f minden $y\notin Y$ értéket legfeljebb n-szer vesz fel. Ezzel beláttuk a (ii)$\Longrightarrow$(iii) implikációt. A (iii)$\Longrightarrow$(ii) implikáció nyilvánvaló.

Legyen $f(1/2n)=1/n$, $f(1/(2n-1))=0$ $(n=1,2,\ldots)$, legyen $f(0)=0$, és legyen f lineáris az $[1(k+1),1/k]$ intervallumokon minden $k=1,2,\ldots$-re. Ekkor f folytonos $[0,1]$-ben, a 0 kivételével minden értéket csak véges sokszor vesz fel, de nem korlátos változású.

250. (i) Legyen $a\leq x<y\leq b$. Ekkor $V(y)-V(x)=V(f;[x,y])\geq |f(y)-f(x)|$. Ebből egyrészt $V(y)-V(x)\geq f(y)-f(x)$, azaz $V(y)-f(y)\geq V(x)-f(x)$ minden $x<y$-ra, tehát $V-f$ monoton növő. Másrészt $V(y)-V(x)\geq -f(y)+f(x)$, azaz $V(y)+f(y)\geq V(x)+f(x)$ minden $x<y$-ra, tehát $V+f$ is monoton növő.

(ii) Legyen $a\leq x<y\leq b$. Tetszőleges $x=x_0<x_1<\ldots<x_n=y$ felosztásra

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}|(g(x_i)-g(x_{i-1}))-(h(x_i)-h(x_{i-1})|\leq$$
$$\leq\sum_{i=1}^{n}((g(x_i)-g(x_{i-1}))+(h(x_i)-h(x_{i-1}))=$$
$$=g(y)-g(x)+h(y)-h(x).$$

Mivel ez minden felosztásra igaz, ezért

$$V(f;[x,y])=V(y)-V(x)\leq g(y)-g(x)+h(y)-h(x),$$

azaz $g(x)+h(x)-V(x)\leq g(y)+h(y)-V(y)$. Ez azt jelenti, hogy az $g+h-V$

függvény monoton nő $[a,b]$-ben. Legyen $n=(g+h-V)/2$. Ekkor $g=f+h=f+(2n-g+V)$, amiből $g=n+(V+f)/2$ és $h=g-f=n+(V-f)/2$.

251. Legyen $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ egy tetszőleges felosztás. Ekkor

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} g\,d\lambda\right|\le\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g|\,d\lambda,$$

és így

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g|\,d\lambda=\int_a^b|g|\,d\lambda.$$

Ez minden felosztásra igaz, ezért $V(f;[a,b])\le\int_a^b|g|\,d\lambda$. Mivel pedig az integrál véges, ezért f korlátos változású.

Most belátjuk, hogy $V(f;[a,b])\ge\int_a^b|g|\,d\lambda$. Legyen $\varepsilon>0$ adott. Tudjuk, hogy van olyan ϕ lépcsősfüggvény $[a,b]$-n, hogy $\int_a^b|g-\phi|\,d\lambda<\varepsilon$ (l. a 190. feladatot). Legyen $\Phi(x)=\int_a^x\phi(x)\,dx$ minden $x\in[a,b]$-re. Könnyű ellenőrizni, hogy a $V(\Phi;[a,b])=\int_a^b|\phi|\,d\lambda$ egyenlőség minden konstans ϕ függvényre, és így minden lépcsősfüggvényre is igaz. Mármost

$$|V(f;[a,b])-V(\Phi;[a,b])|\le V(f-\Phi;[a,b])\le\int_a^b|g-\phi|\,d\lambda<\varepsilon,$$

ahol az utolsó előtti egyenlőtlenség a feladat már bizonyított állításából következik. Így

$$\begin{aligned}V(f;[a,b])&\ge V(\Phi;[a,b])|-\varepsilon=\int_a^b|\phi|\,d\lambda-\varepsilon\ge\\&\ge\int_a^b|g|\,d\lambda-\int_a^b|g-\phi|\,d\lambda-\varepsilon>\int_a^b|g|\,d\lambda-2\varepsilon.\end{aligned}$$

Mivel ez minden $\varepsilon>0$-ra igaz, ezért $V(f;[a,b])\ge\int_a^b|g|\,d\lambda$.

252. Legyen $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ egy tetszőleges felosztás. A 228. feladat állításának felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le\lambda(f([x_{i-1},x_i]))\le\int_{[x_{i-1},x_i]}|f'|\,d\lambda.$$

Így
$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \int_{[a,b]} |f'| \, d\lambda.$$
Mivel ez minden felosztásra igaz, ezért $V(f;[a,b]) \le \int_{[a,b]} |f'| \, d\lambda$.

253. Legyen $f(x) = 0$ minden $x \in [-1,0]$-ra, és $f(x) = x^2 \cdot \sin x^{-3/2}$ minden $x \in (0,1]$-re. Megmutatjuk, hogy f differenciálható és korlátos változású $[-1,1]$-ben, de a $V(x) = V(f;[-1,x])$ függvény nem differenciálható a 0 pontban.

Az, hogy f differenciálható és korlátos változású $[0,1]$-ben, nyilvánvaló a 248. feladatból. Mivel f jobb oldali deriváltja a nulla pontban 0, ezért f differenciálható $[-1,1]$-ben. Világos, hogy f korlátos változású ugyanitt.

Legyen $x_k = (k\pi + (\pi/2))^{-2/3}$ $(k = 0,1,\ldots)$. Ekkor $1 > x_1 > x_2 > \ldots$ és $\sin(x_k^{-3/2}) = (-1)^k$ minden k-ra. Így minden $1 \le k < K$-ra
$$V(x_k) = V(f;[-1,x_k]) \ge \sum_{n=k+1}^{K} |f(x_n) - f(x_{n-1})| \ge$$
$$\ge \sum_{n=k+1}^{K} x_{n-1}^2 > \sum_{n=k+1}^{K} (n\pi)^{-4/3}.$$
Mivel ez minden K-ra igaz, ezért $V(x_k) \ge \pi^{-4/3} \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-4/3}$. Mármost
$$\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-4/3} > \int_{k+1}^{\infty} x^{-4/3} dx = 3 \cdot (k+1)^{-1/3} \ge 3 \cdot (2k)^{-1/3} > k^{-1/3},$$
tehát $V(x_k) \ge \pi^{-4/3} k^{-1/3}$. Ebből $\frac{V(x_k)}{x_k} > \frac{(k\pi)^{2/3}}{\pi^{4/3} k^{1/3}} \to \infty$, ha $k \to \infty$, és így V nem differenciálható 0-ban.

254. Az állítás nem igaz. Legyen f az előző (253.) feladat megoldásában konstruált függvény. Tegyük fel, hogy $f = g - h$, ahol g és h monoton és differenciálható függvények $[-1,1]$-en. Mivel f nem monoton, ezért g és h mindketten monoton növőek vagy monoton csökkenőek. Feltehetjük, hogy g és h monoton növőek $[-1,1]$-en. A 250. feladat szerint van olyan $n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, hogy $g = \frac{V+f}{2} + n$. Tudjuk, hogy van olyan $x_k \to 0$, $x_k > 0$ sorozat, hogy $V(x_k)/x_k \to \infty$. Ekkor
$$\frac{g(x_k) - g(0)}{x_k} = \frac{V(x_k)}{2x_k} + \frac{f(x_k) - f(0)}{2x_k} + \frac{n(x_k) - n(0)}{x_k} \ge$$
$$\ge \frac{V(x_k)}{2x_k} + \frac{f(x_k) - f(0)}{2x_k} \to \infty + f'(0)/2.$$

Így g nem differenciálható 0-ban, ami ellentmondás.

255. Az $f+g$ és $c\cdot f$ függvények abszolút folytonossága nyilvánvaló. Mivel f,g abszolút folytonosak, ezért folytonosak, és így korlátosak $[a,b]$-ben. Tegyük fel, hogy $|f|,|g|\le K$. Legyen $\varepsilon>0$ adott. Mivel az f és g függvények abszolút folytonosak, létezik egy $\delta>0$ szám a következő tulajdonsággal: ha $[a_1,b_1],\dots,[a_n,b_n]$ egymásba nem nyúló intervallumok, melyekre $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$ és $\sum_{i=1}^{n}|g(b_i)-g(a_i)|<\varepsilon$. Így ekkor

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|\le\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)|\cdot|g(b_i)-g(a_i)|+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}|g(a_i)|\cdot|f(b_i)-f(a_i)|\le K\cdot\varepsilon+K\cdot\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ez bizonyítja, hogy $f\cdot g$ is abszolút folytonos.

256. Legyenek $[a_1,b_1],\dots,[a_n,b_n]$ egymásba nem nyúló intervallumok, melyekre $0\le a_1\le b_1\le a_2\le b_2\le\dots a_n\le b_n\le 1$ és $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$. Meg kell becsülnünk az $S=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{b_i}-\sqrt{a_i})$ összeget.

Legyen $0<a<1$. Mivel $(\sqrt{x})'=1/2\sqrt{x}\le 1/2\sqrt{a}$ minden $a\le x\le 1$-re, ezért $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le(1/2\sqrt{a})\cdot|x-y|$ minden $x,y\in[a,1]$-re.

Feltehetjük, hogy az $a=a_k$ egy alkalmas k-ra. Ha ugyanis ez nem igaz, és a az egyik intervallum belső pontja, akkor az intervallumot a-nál kettévágjuk. Egyébként a rendszerhez hozzáveszünk egy rövid $[a,a+\eta]$ intervallumot úgy, hogy az intervallumok továbbra is egymásba nem nyúlóak legyenek, és az összhosszuk továbbra is kisebb legyen, mint δ. Legyen tehát $a=a_k$. Ekkor $\sum_{i=1}^{k-1}(\sqrt{b_i}-\sqrt{a_i})\le\sqrt{a}$, és

$$\sum_{i=k}^{n}(\sqrt{b_i}-\sqrt{a_i})\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot(b_i-a_i)\le\frac{\delta}{2\sqrt{a}}.$$

Így $S\le\sqrt{a}+(\delta/2\sqrt{a})$.

Ha tehát $\varepsilon>0$ adott, akkor a-t $(\varepsilon/2)^2$-nek, δ-t pedig $\varepsilon^2/2$-nek választva $S\le\varepsilon$ teljesülni fog. Így $\delta=\varepsilon^2/2$ jó válaszás.

257. Jelöljük V_x-szel f totális variációját $[a,x]$-ben. Belátjuk, hogy $\lim_{x\to a+0}V_x=0$. A V_x függvény monoton növő. Ha $\lim_{x\to a+0}V_x=0$ nem igaz, akkor $\lim_{x\to a+0}V_x=$

$c > 0$, és $V_x \geq c$ minden $a < x \leq b$-re. Az f függvény a pontbeli folytonossága alapján válaszhatunk egy $\eta > 0$ számot úgy, hogy $|f(x) - f(a)| < c/4$ minden $a \leq x < a + \eta$-ra.

Legyen $a < y_0 < a + \eta$ rögzített. Mivel $V_{y_0} > c/2$, létezik egy $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = y_0$ felosztás, amelyre $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > c/2$. Mivel $|f(x_1) - f(a)| < c/4$, ezért $\sum_{i=2}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > c/4$. Legyen $y_1 = x_1$. A fenti okoskodást megismételve kapunk egy $a < y_2 < y_1$ számot és az $[y_2, y_1]$ intervallumnak egy felosztását, amelyhez tartozó variációs összeg $> c/4$. Az eljárást folytatva kapjuk az $y_0 > y_1 > \ldots$ számokat úgy, hogy minden k-ra az $[y_{k+1}, y_k]$ intervallumnak van olyan felosztása, amelyhez tartozó variációs összeg $> c/4$. Ha egyesítjük az első k ilyen felosztást, akkor egy olyan felosztást kapunk, amelyhez tartozó variációs összeg $> kc/4$. Így azt kapjuk, hogy f totális variációja $[a, b]$-ben végtelen, ami ellentmond a feltételnek. Ezzel beláttuk, hogy $\lim_{x \to a+0} V_x = 0$.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. A fentiek szerint van olyan $a < d < b$, hogy $V_d < \varepsilon/2$. Mivel f abszolút folytonos $[d, b]$-ben, van olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ egymásba nem nyúló intervallumok $[d, b]$-ben, melyekre $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon/2$.

Belátjuk, hogy erre a δ-ra teljesül, hogy ha $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ egymásba nem nyúló intervallumok $[a, b]$-ben, melyekre $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Feltehetjük, hogy $a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots a_n \leq b_n \leq b$. Megismételve az előző (256.) feladat megoldásának gondolatmenetét azt is feltehetjük, hogy $d = a_k$ egy alkalmas k-ra. Ekkor $\sum_{i=1}^{k-1} |f(b_i) - f(a_i)| \leq V_d < \varepsilon/2$ és $\sum_{i=k}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon/2$ a δ szám választása miatt. Így $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$, amivel az állítást beláttuk.

Mivel ε tetszőleges volt, ezzel beláttuk, hogy f abszolút folytonos $[a, b]$-ben.

258. Legyen C a Cantor-halmaz és f a Cantor-függvény. Legyen $\delta > 0$ adott. Mivel a Cantor-halmaz nullmértékű és kompakt, ezért lefedhető véges sok δ-nál kisebb összhosszúságú intervallummal. Feltehetjük, hogy az intervallumok egymásba nem nyúlóak, mert diszjunktáljuk őket, majd a kapott intervallumoknak vesszük a lezártját. Vannak tehát olyan $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ egymásba nem nyúló intervallumok, melyekre $C \subset \cup_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, és $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$. Mivel f monoton növő, ezért

$$\bigcup_{i=1}^{n}[f(a_i), f(b_i)] \supset f(C) = f([0,1]) = [0,1],$$

tehát $\sum_{i=1}^{n}(f(b_i) - f(a_i)) \geq 1$. Ezzel beláttuk, hogy hogy $\varepsilon = 1$-hez nincs jó δ, és így a Cantor-függvény nem abszolút folytonos.

259. A rövidség kedvéért írjunk $f_{\alpha,\beta}$ helyett f-et. Ha f nem korlátos változású, akkor van olyan $x_1 > x_2 > \ldots > 0$ sorozat, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n) - f(x_{n+1})| = \infty$ (l. a 248. feladat megoldását). Nyilvánvaló, hogy ekkor f nem lehet abszolút folytonos. (Később látni fogjuk, hogy minden abszolút folytonos függvény korlátos változású, lásd a 268. feladatot.) Tehát f csak akkor lehet abszolút folytonos, ha korlátos változású. Így a 257. feladat állításából következik, hogy f akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha korlátos változású. A 248. feladat állítása szerint ennek pontos feltétele $\alpha + \beta > 0$.

Még be kell látnunk, hogy f' akkor és csak akkor Lebesgue-integrálható $[0,1]$-ben, ha $\alpha + \beta > 0$. A a 257. feladat megoldásában láttuk, hogy ha $\alpha + \beta > 0$, akkor az $\int_0^1 |f'|, \, dx$ improprius integrál konvergens, ekkor tehát f' Lebesgue-integrálható. Most belátjuk, hogy ha $\alpha + \beta \leq 0$, akkor f' nem Lebesgue-integrálható $[0,1]$-ben. Ha $x^\beta \in [2k\pi, 2k\pi + \pi/3]$, akkor $\cos x^\beta \geq 1/2$. Mivel $x^{-\beta} \to 0$, ha $x \to 0+0$, ezért (57) szerint $|f'(x)| \geq x^{\alpha+\beta-1} \cdot |\beta|/4$, ha k elég nagy. Legyen $I_k = [(2k\pi + \pi/3)^{1/\beta}, (2k\pi)^{1/\beta}]$. Ekkor $|I_k| \geq \gamma \cdot k^{(1/\beta)-1}$, ahol γ egy csak β-tól függő pozitív konstans. Így

$$\int_{I_k} |f'| \, dx \geq (2k\pi)^{(\alpha+\beta-1)/\beta} \cdot (|\beta|/4) \cdot |I_k| \geq \delta \cdot k^{\alpha/\beta},$$

ahol δ egy csak β-tól függő pozitív konstans. Ha $\alpha + \beta \leq 0$, akkor $\alpha/\beta \geq -1$, tehát $\sum k^{\alpha/\beta}$ divergens. Így $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} |f'| \, dx = \infty$, tehát f' nem Lebesgue-integrálható $[0,1]$-ben.

260. Tegyük fel, hogy f nem Lipschitz. Megmutatjuk, hogy semmilyen $\varepsilon > 0$-hoz nem létezik olyan $\delta > 0$, ami kielégítené a feltételt. Mert legyen $\delta > 0$ tetszőleges. Legyen $K = 2\varepsilon/\delta$. Mivel f nem Lipschitz, ezért vannak olyan $a \leq c < d \leq b$ számok, hogy $|f(d) - f(c)| > K \cdot (d - c)$. Sőt, a $[c, d]$ intervallumot választhatjuk akármilyen rövidnek is. Ha ugyanis $|f(d) - f(c)| > K \cdot (d - c)$, akkor a $[c,d]$ intervallumot megfelezve a két félintervallum egyikére szintén fennáll egy hasonló egyenlőtlenség. Van tehát egy $[c,d]\subset[a,b]$ részintervallum úgy, hogy $d-c<\delta/2$, és $|f(d)-f(c)|>K\cdot(d-c)$. Legyen n olyan egész szám, hogy

$$\frac{\varepsilon}{K\cdot(d-c)}\le n<\frac{\delta}{d-c}$$

teljesüljön. Az, hogy ilyen egész szám van, a K szám választásából és $d-c<\delta/2$-ből következik. Ha $[a_i,b_i]=[c,d]$ minden $i=1,...,n$-re, akkor $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=n\cdot(d-c)<\delta$, de $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|=n\cdot|f(d)-f(c)|\ge n\cdot K\cdot(d-c)\ge\varepsilon$. Ez ellentmondás, amivel az állítást beláttuk.

261. Legyen $\varepsilon>0$ adott. Ekkor van egy $\delta>0$ úgy, hogy ha $[a_i,b_i]\subset[a,b]$ $(i=1,\dots,n)$ egymásba nem nyúló intervallumok, melyekre $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\delta$.

Belátjuk, hogy ha $[a_i,b_i]\subset[a,b]$ $(i=1,\dots,n)$ egymásba nem nyúló intervallumok, melyekre $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n}|V(b_i)-V(a_i)|\le\varepsilon$. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy V abszolút folytonos. Legyen $\eta>0$ adott. Ekkor minden $i=1,\dots,n$-re van olyan $a_i=x_{i,0}<x_{i,1}<\dots<x_{i,n_i}=b_i$ felosztás, hogy $\sum_{j=1}^{n_i}|f(x_{i,j})-f(x_{i,j-1})|>V(b_i)-V(a_i)-\eta$. Az $[x_{i,j-1},x_{i,j}]$ $(i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n_i)$ intervallumok egymásba nem nyúlóak, és az összhosszuk $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$. Így δ választása folytán $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}|f(x_{i,j})-f(x_{i,j-1})|<\varepsilon$. Ebből $\sum_{i=1}^{n}|V(b_i)-V(a_i)|<\varepsilon+n\cdot\eta$.

Mivel η tetszőleges volt, ezért $\sum_{i=1}^{n}|V(b_i)-V(a_i)|\le\varepsilon$, amivel az (i) állítást beláttuk. Ebből (ii) nyilvánvaló, hiszen ha f abszolút folytonos, akkor (i) alapján a $(V+f)/2$ és $(V-f)/2$ függvények is abszolút folytonosak, és egyszersmind monoton növőek.

262. Tegyük fel, hogy $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ abszolút folytonos, és $H\subset[a,b]$ nullmértékű. Legyen $\varepsilon>0$ adott. Az abszolút folytonosság definíciója szerint van olyan $\delta>0$, hogy ha $[a_1,b_1],\dots,[a_n,b_n]$ egymásba nem nyúló intervallumok, melyekre $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Mivel $\lambda(H) = 0$, ezért vannak olyan $I_1, I_2, \ldots$ intervallumok, melyek lefedik H-t, és $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| < \delta$. Az intervallumokat kicsit megnyújtva feltehetjük, hogy mindegyik I_n intervallum balról zárt és jobbról nyílt. Ekkor minden n-re $I_n \setminus \bigcup_{m<n} I_m$ előáll mint véges sok diszjunkt balról zárt és jobbról nyílt intervallum uniója (lásd a 20. feladatot). Ezek az intervallumok együttesen lefedik H-t, és az összhosszuk $< \delta$. Legyen $[a_n, b_n)$ ezen intervallumok egy felsorolása. Világos, hogy az $[a_n, b_n]$ intervallumok egymásba nem nyúlóak, és $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$.

Mivel f folytonos, ezért felveszi a minimumát és a maximumát az $[a_n, b_n]$ intervallumban. Legyen $m_n = \min_{[a_n,b_n]} f = f(c_n)$ és $M_n = \max_{[a_n,b_n]} f = f(d_n)$, ahol $c_n, d_n \in [a_n, b_n]$. Ekkor $f([a_n, b_n]) = [m_n, M_n]$, tehát

$$f(H) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} f([a_n, b_n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[m_n, M_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty}[f(c_n), f(d_n)]. \tag{58}$$

Legyen $J_n = [c_n, d_n]$, ha $c_n \le d_n$, és legyen $J_n = [d_n, c_n]$, ha $c_n > d_n$. Ekkor a J_n intervallumok egymásba nem nyúlóak, és $\sum_{n=1}^{\infty}|J_n| < \delta$. A δ szám választása szerint $\sum_{i=1}^{n}|f(c_i) - f(d_i)| = \sum_{i=1}^{n}|M_i - m_i| < \varepsilon$ minden n-re. Ezért (58) alapján $\lambda(f(H)) \le \sum_{n=1}^{\infty}(f(d_n) - f(c_n)) \le \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges volt, ez bizonyítja, hogy $\lambda(f(H)) = 0$, így f (N) tulajdonságú.

263. Legyen $A = \{x \in [a, b] \colon f'(x) = 0\}$. A feltétel szerint $B = [a, b] \setminus A$ nullmértékű. Mivel az előző (262.) feladat állítása szerint f (N) tulajdonságú, ezért $f(B)$ nullmértékű. Másrészt $f(A)$ is nullmértékű a 109. feladat állítása szerint. Így $f([a, b]) = f(A) \cup f(B)$ is nullmértékű. Azonban f folytonos, ezért $f([a, b])$ egy intervallum. Ez csak úgy lehetséges, ha $f([a, b])$ elfajuló, tehát f konstans.

264. Legyen $P \subset [a, b]$ pozitív mértékű és sehol sem sűrű zárt halmaz. Legyenek $[a, b] \setminus P$ komponensei (a_n, b_n) $(n = 1, 2, \ldots)$. Legyen $f(x) = x$ minden $x \in P$-re. Az (a_n, b_n) kiegészítő intervallumban az f függvényt úgy fogjuk megkonstruálni, hogy lineáris legyen az $I_n = [a_n, (a_n + b_n)/2]$ és $J_n = [(a_n + b_n)/2, b_n]$ intervallumok mindegyikében.

Minden ilyen f függvény rendelkezik az (N) tulajdonsággal. Ha ugyanis $\lambda(H) = 0$, akkor $f(H \cap P) = H \cap P$ nullmértékű, továbbá $f(H \cap I_n)$ és $f(H \cap J_n)$ szintén nullmértékű minden n-re, hiszen az I_n, J_n intervallumokban f lineáris.

Az $[a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ halmaz $n+1$ zárt intervallum uniója (amelyek között lehetnek elfajulóak). Jelölje c_n ezen intervallumok hosszainak maximumát. Mivel P sehol sem sűrű, ezért könnyen láthatóan $c_n \to 0$, ha $n \to \infty$. Világos, hogy a (c_n) sorozat monoton csökkenő.

Definiáljuk f-et a következőképpen: legyen $f((a_n + b_n)/2) = b_n + 2c_n$, és legyen f lineáris az I_n és J_n intervallumok mindegyikében. Megmutatjuk, hogy ekkor f folytonos $[0,1]$-ben, és egy megszámlálható halmaz kivételével P minden elemét végtelen sokszor veszi fel.

Az f függvény nyilvánvalóan folytonos az (a_n, b_n) intervallumok mindegyikében. Belátjuk, hogy minden $x \in P$ pontban is folytonos. Mivel a P halmazra megszorítva f folytonos, ezért elég megmutatni, hogy ha $x_n \to x$ és $x_n \notin P$, akkor $f(x_n) \to f(x) = x$. Ez nyilvánvaló, ha x az egyik (a_k, b_k) intervallum végpontja, és $x_n \in (a_k, b_k)$ minden n-re. Ezért feltehetjük, hogy $x_n \in (a_{k_n}, b_{k_n})$, ahol $k_n \to \infty$. Ekkor $a_{k_n} < f(x_n) \le b_{k_n} + 2c_{k_n}$. Mármost $a_{k_n} \to x$, $b_{k_n} \to x$ és $c_{k_n} \to 0$, így $f(x_n) \to x$.

Végül belátjuk, hogy ha $x \in P$, $x > 0$ és $x \ne b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor f az x értéket végtelen sok helyen felveszi. Legyen b_{i_n} a $\{b_i : i \le n,\ b_i < x\}$ halmaz legnagyobb eleme minden n-re. Ekkor a c_n szám választása szerint $c_n \ge x - b_{i_n}$. Így $f(a_{i_n}) = a_{i_n} < x$ és $f((a_{i_n} + b_{i_n})/2) = b_{i_n} + 2c_{i_n} \ge b_{i_n} + 2c_n > x$, tehát f felveszi az x értéket az I_{i_n} intervallum belsejében. Mivel $n \to \infty$ esetén $i_n \to \infty$, ezért f az x értéket végtelen sok pontban felveszi.

265. Az állítás nem igaz. Megmutatjuk, hogy az előző (264.) feladat megoldásában konstruált függvény ellenpélda. Legyenek az $(a,b) \setminus P$ nyílt halmaz komponensei (a_n, b_n) $(n = 1, 2, \ldots)$. Legyen $P' = P \setminus \{0, b_1, b_2, \ldots\}$. Az előző (264.) feladat megoldásában láttuk, hogy minden $y \in P'$-re végtelen sok olyan $x \in [a,b] \setminus P$ pont van, amelyre $f(x) = y$. Ebből következik, hogy végtelen sok olyan n van, amelyre f felveszi az y értéket az (a_n, b_n) intervallumban. Más szóval $P' \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} f((a_n, b_n))$ minden N-re.

Legyen $\delta > 0$ tetszőleges. Ekkor van olyan N, hogy az $E = \bigcup_{n=N}^{\infty}(a_n, b_n)$ halmaz mértéke kisebb mint δ. Mivel E képe tartalmazza a fix pozitív mértékű P' halmazt, ez bizonyítja, hogy f nem (S) tulajdonságú.

266. A 262. feladat megoldásának gondolatmenetét követjük. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy ha $[a_i, b_i]$ $(i = 1, ..., n)$ egymásba nem nyúló intervallumok $[a,b]$-ben, melyekre $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$.

Megmutatjuk, hogy ha $A\subset[a,b]$ és $\lambda(A)<\delta$, akkor $\lambda(f(A))\le\varepsilon$. Legyenek $I_1,I_2,\dots$ olyan intervallumok, amelyek lefedik A-t és az összhosszuk $<\delta$. Az I_n intervallumokat úgy is megválaszthatjuk, hogy páronként diszjunktak legyenek (lásd a 262. feladat megoldását). Legyen f minimuma, illetve maximuma a $\operatorname{cl} I_n$ zárt intervallumon m_n, illetve M_n, és legyenek a_n,b_n olyan pontok $\operatorname{cl} I_n$-ben, melyekre $f(a_n)=m_n$ és $f(b_n)=M_n$. Ekkor az $[a_n,b_n]$ intervallumok[28] egymásba nem nyúlóak és az összhosszuk $<\delta$. Így δ választása folytán

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)=\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$$

minden n-re, tehát $\sum_{i=1}^{\infty}(M_i-m_i)\le\varepsilon$. Mivel $f(I_i)\subset[m_i,M_i]$ minden i-re, ezért az $[m_i,M_i]$ intervallumok lefedik $f(A)$-t, tehát $\lambda(f(A))\le\varepsilon$.

267. Tegyük fel (i)-et. Ha $\lambda(H)=0$, akkor $\lambda(f(H))<\varepsilon$ minden $\varepsilon>0$-ra teljesül, tehát $\lambda(f(H))=0$. Így f (N) tulajdonságú. Jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(\{y\})$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y)=\infty$, ha $f^{-1}(\{y\})$ végtelen. A 247. feladat állítása szerint az N függvény Borel-mérhető $\mathbb{R}$-en. Belátjuk, hogy N véges m.m.

Ha ez nem igaz, akkor az $Y=\{y\in\mathbb{R}\colon N(y)=\infty\}$ halmaz mérhető és pozitív mértékű. Legyen $F\subset Y$ pozitív mértékű zárt halmaz. Ekkor $A=f^{-1}(F)$ mérhető részhalmaza $[a,b]$-nek (lásd a 138. feladatot). Az 165. feladat állítása szerint van olyan mérhető $A_1\subset A$ halmaz, amelyet f kölcsönösen egyértelműen F-re képez. Mivel $N(y)=\infty$ minden $y\in F$-re, ezért $f(A\setminus A_1)=F$. Így ismét alkalmazva 165. feladat állítását találunk egy mérhető $A_2\subset A\setminus A_1$ halmazt, amelyet f kölcsönösen egyértelműen F-re képez. Az eljárást folytatava kapjuk a páronként diszjunkt és mérhető $A_1,A_2,\dots$ halmazokat $[a,b]$-ben, amelyek mindegyikét f kölcsönösen egyértelműen F-re képezi. Az A_n halmazok között vannak akármilyen kis mértékűek. Azonban F mértéke pozitív, és ellentmond az (i) feltételnek. Ezzel beláttuk, hogy (i)-ből következik (ii).

Most tegyük fel (ii)-t. Ha (i) nem teljesül, akkor van olyan $\varepsilon>0$, hogy minden n-re van olyan $A_n\subset[a,b]$ halmaz, hogy $\lambda(A_n)<1/n^2$ és $\lambda(f(A_n))\ge\varepsilon$. Megmutatjuk, hogy az A_n halmazokat úgy is választhatjuk, hogy az $f(A_n)$ halmazok mérhetőek legyenek. Valóban, legyen $A_n\subset B_n$, ahol B_n olyan Lebesgue-mérhető halmaz, amelyre $\lambda(B_n)=\lambda(A_n)$ (l. a 96. feladatot). Ekkor $B_n=C_n\cup D_n$, ahol C_n F_σ halmaz és $\lambda(D_n)=0$ (l. a 101. feladat (ii) állítását). Ekkor $\lambda(C_n)=\lambda(B_n)=\lambda(A_n)<1/n^2$.

[28] Ha $b_n<a_n$, akkor $[a_n,b_n]$ alatt értsük a $[b_n,a_n]$ intervallumot.

Mivel f (N) tulajdonságú, ezért $\lambda(f(D_n)) = 0$, tehát $\lambda(f(C_n)) = \lambda(f(B_n)) \geq \lambda(f(A_n)) \geq \varepsilon$. Másrészt f folytonossága miatt az $f(C_n)$ halmaz F_σ, tehát mérhető minden n-re.

Feltehetjük tehát, hogy az $f(A_n)$ halmazok mérhetőek.

Legyen $A = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Ekkor $\lambda(A) = 0$ a Borel–Cantelli-lemma első állítása szerint (64. feladat). Mivel f (N) tulajdonságú, ezért $\lambda(f(A)) = 0$. Másrészt $\lambda(f(A_n)) \geq \varepsilon$ minden n-re, tehát a 62. feladat szerint $\lambda(B) \geq \varepsilon$, ahol $B = \limsup\limits_{n\to\infty} f(A_n)$. Így az $Y = B \setminus f(A)$ halmaz pozitív mértékű. Ha $y \in Y$, akkor $y \in f(A_n)$ végtelen sok n-re, de $y \notin f(A)$. Ez azt jelenti, hogy az $f^{-1}(\{y\}$ halmaz végtelen kell, hogy legyen, mert különben volna olyan x, hogy $f(x) = y$ és $x \in A_n$ végtelen sok n-re. Ez azonban lehetetlen, mert ekkor $x \in A$ és $y \in f(A)$. Ezzel beláttuk, hogy (ii)-ből következik (i).

268. Tegyük fel, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos. Ekkor létezik egy $\delta > 0$ a következő tulajdonsággal: ha az $[a_i,b_i] \subset [a,b]$ $(i = 1,\dots,n)$ intervallumok egymásba nem nyúlóak és $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < 1$. Legyen $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$ egy olyan felosztás, amelynek az osztóintervallumai rövidebbek δ-nál. Ekkor f totális variációja a $[c_{j-1}, c_j]$ intervallumon legfeljebb 1 minden $j = 1,\dots,k$-ra. Ugyanis tetszőleges $c_{j-1} = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = c_j$ felosztásra az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok egymásba nem nyúlóak és $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c_j - c_{j-1} < \delta$, tehát $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| < 1$. Ezzel beláttuk, hogy f totális variációja a $[c_{j-1}, c_j]$ intervallumokon legfeljebb 1, ezért f korlátos változású $[0,1]$-ben. Mivel f nyilvánvanóan folytonos, és (N) tulajdonságú is a 262. feladat szerint, így a feladat „csak akkor” részét beláttuk.

Az állítás másik irányát bizonyítandó tegyük fel, hogy f folytonos, korlátos változású és (N) tulajdonságú. Ekkor Banach tétele szerint (247. feladat) f m.m. értéket csak véges sokszor vesz fel, tehát a 267. feladat szerint f (S) tulajdonságú. Jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(\{y\})$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y) = \infty$, ha $f^{-1}(\{y\})$ végtelen.

Legyenek $[a_i,b_i] \subset [a,b]$ $(i = 1,\dots,n)$ egymásba nem nyúló intervallumok. Legyen $J_i = f((a_i,b_i))$ minden i-re. Ekkor $J_1, J_2, \dots$ olyan (esetleg elfajuló) intervallumok, melyekre $|J_i| \geq |f(b_i) - f(a_i)|$ minden i-re. Ha $J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|J_i| = \sum_{i=1}^{\infty}\int_J \chi_{J_i}\,d\lambda = \int_J \sum_{i=1}^{\infty}\chi_{J_i}\,d\lambda \leq \int_J N\,d\lambda. \tag{59}$$

A $\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{J_i} \le N$ egyenlőtlenség abból következik, hogy az (a_i, b_i) intervallumok páronként diszjunktak. Mármost N integrálható $\mathbb{R}$-en a 247. feladat szerint. Így a 206. feladat állítása szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\eta > 0$, hogy ha $B \subset \mathbb{R}$ és $\lambda(B) < \eta$, akkor $\int_B N \, d\lambda < \varepsilon$.

Az f függvény (S) tulajdonsága alapján alkalmas $\delta > 0$-ra, ha $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$, akkor $\lambda(J) < \eta$, és így (59)-ben $\int_J N \, d\lambda < \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy f abszolút folytonos.

269. A Cantor-függvény folytonos és korlátos változású (hiszen monoton), de nem (N) tulajdonságú, mert $f(C) = [0, 1]$. A 249. feladat megoldásában konstruált függvény folytonos és (N) tulajdonságú, de nem korlátos változású. A $\chi_{\{0\}}$ függvény $[0, 1]$-ben korlátos változású és (N) tulajdonságú, de nem folytonos.

270. A 267. feladat szerint elég belátni, hogy ha $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor (N) tulajdonságú, és m.m. értéket csak véges sokszor vesz fel.

Legyen $H \subset [a, b]$, $\lambda(H) = 0$. Ekkor a 228. feladat állításából adódik, hogy $\lambda(f(H)) = 0$. (Ez a 224. feladatból is adódik, mert minden differenciálható függvény lokálisan Lipschitz.) Ezzel beláttuk, hogy f (N) tulajdonságú. Jelöljük Y-nal azon $y \in \mathbb{R}$ értékek halmazát, amelyeket f végtelen sokszor vesz fel. Minden $y \in Y$-ra válasszunk egy $x_y \in [a, b]$ pontot, amely torlódási pontja az $f^{-1}(\{y\})$ halmaznak. Világos, hogy $f'(x_y) = 0$ minden $y \in Y$-ra. Az 109. feladat szerint az $U = \{f(x)\colon f'(x) = 0\}$ halmaz nullmértékű. Mivel $Y \subset U$, ezért $\lambda(Y) = 0$. Ezzel beláttuk, hogy f m.m. értéket csak véges sok helyen vesz fel, amivel a feladatot megoldottuk.

271. Tudjuk, hogy $\mu_f(\{x\})$ egyenlő f ugrásával x-ben (lásd a 219. feladat (iii) állítását). Ha μ_f abszolút folytonos λ-re nézve, akkor $\mu_f(\{x\}) = 0$ minden $x \in [a, b)$-re (hiszen $\lambda(\{x\}) = 0$), tehát f folytonos.

Mivel f monoton növő, így korlátos változású. Mivel folytonos is, ezért akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha (N) tulajdonságú. Azt kell tehát belátni, hogy folytonos f esetén μ_f akkor és csak akkor abszolút folytonos λ-re nézve, ha f (N) tulajdonságú.

Az 219. feladat (iii) állítása szerint $\mu_f(H) = \lambda(f(H))$ minden $H \subset [a, b)$-re. Ebből az állítás azonnal következik. Ha ugyanis f (N) tulajdonságú és $H \subset [a, b)$ nullmértékű, akkor $\lambda(f(H)) = 0$, tehát $\mu_f(H) = 0$, és így μ_f abszolút folytonos λ-re nézve. Megfordítva, ha μ_f abszolút folytonos λ-re nézve és $H \subset [a, b)$ nullmértékű, akkor $\mu_f(H) = 0$ és így $\lambda(f(H)) = 0$, tehát f (N) tulajdonságú.

272. Tegyük fel először, hogy f abszolút folytonos és monoton növő. Ekkor μ_f abszolút folytonos λ-ra nézve a 271. feladat szerint. Mivel λ véges $[a, b]$-

n, ezért alkalmazhatjuk a Radon–Nikodym-tételt. Azt kapjuk, hogy van olyan $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható függvény, hogy $\mu_f(A) = \int_A g\,d\lambda$ minden $A \subset [a,b]$ Lebesgue-mérhető halmazra. Ezt az $A = [a,x)$ halmazra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(x) - f(a) = \mu_f([a,x)) = \int_{[a,x)} g\,d\lambda = \int_a^x g\,d\lambda.$$

Ezzel a feladat állításának 'csak akkor' részét abszolút folytonos és monoton növő függvényekre beláttuk.

Ha f abszolút folytonos, akkor a 261. feladat (ii) állítása szerint $f = f_1 - f_2$, ahol f_1, f_2 abszolút folytonos és monoton növő $[a,b]$-n. Így a fentiek szerint vannak g_1, g_2 Lebesgue-integrálható függvények, melyekre $f_i(x) = f_i(a) + \int_a^x g_i\,d\lambda$ minden $x \in [a,b]$-re és $i = 1,2$-re. Ekkor $g = g_1 - g_2$ Lebesgue-integrálható, és $f(x) = f(a) + \int_a^x g\,d\lambda$ minden $x \in [a,b]$-re.

Most legyen $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható. A 206. feladat állítása szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $B \subset [a,b]$ mérhető és $\lambda(B) < \delta$, akkor $\int_B |g|\,d\lambda < \varepsilon$. Legyenek $[a_i,b_i] \subset [a,b]$ $(i = 1,\ldots,n)$ egymásba nem nyúló intervallumok, melyekre $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$. Ekkor a $B = \bigcup_{i=1}^n [a_i,b_i]$ halmazra $\lambda(B) < \delta$, tehát

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} g\,d\lambda \right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |g|\,d\lambda = \int_B |g|\,d\lambda < \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk, hogy f abszolút folytonos.

273. Tegyük fel, hogy $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, és $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ minden $x \in [a,b]$-re. Ekkor g korlátos, és így f Lipschitz. Mivel g m.m. folytonos (l. a 112. feladatot), ezért van olyan $A \subset [a,b]$ halmaz, hogy $[a,b] \setminus A$ nullmértékű, és g folytonos az A halmaz pontjaiban. Ekkor f differenciálható minden $x \in A$ pontban, és itt $f'(x) = g(x)$. Ezzel a feltétel szükségességét beláttuk.

A másik irányt bizonyítandó tegyük fel, hogy $f(a) = 0$, f Lipschitz, és van olyan $A \subset [a,b]$ halmaz, hogy $[a,b] \setminus A$ nullmértékű, f differenciálható A pontjaiban, és f' az $[a,b] \setminus A$ halmazra megszorítva folytonos. Tegyük fel, hogy

$|f(y) - f(x)| \le K \cdot |y - x|$ minden $x, y \in [a, b]$-re. Ekkor $|f'(x)| \le K$ minden olyan x pontban, ahol f differenciálható. Így $|f'(x)| \le K$ minden $x \in A$-ra.

Legyen $g(x) = \limsup_{y \in A,\, y \to x} f'(y)$ minden $x \in [a, b]$-re. Ekkor $|g| \le K$ mindenütt $[a, b]$-n, és $g(x) = f'(x)$ minden $x \in A$-ra, hiszen $x \in A$ esetén $\limsup_{y \in A,\, y \to x} f'(y) = f'(x)$. Könnyen látható, hogy g folytonos minden $x \in A$-ra. Ha ugyanis $x \in A$ és $|f'(y) - f'(x)| < \varepsilon$ minden $y \in A$, $|y - x| < \delta$ esetén, akkor könnyen láthatóan $|g(y) - g(x)| \le \varepsilon$ minden $|y - x| < \delta$-ra.

Így g korlátos és m.m. folytonos, tehát Riemann-integrálható. Legyen $F(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ $(x \in [a, b])$. Ekkor F Lipschitz, és $F'(x) = g(x) = f'(x)$ minden $x \in A$-ra. Az $F - f$ függvény Lipschitz, tehát abszolút folytonos, és a deriváltja m.m. nulla. Ebből következik (l. a 263. feladatot), hogy $F - f$ konstans. Mivel $F(a) - f(a) = 0$, ezért $f \equiv F$, amivel az állítást beláttuk.

274. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$ olyan Lebesgue-integrálható függvény, amelynek minden racionális pontban ∞ a határértéke (ilyen függvény van a 200. feladat szerint). Legyen $F(x) = \int_a^x f\, d\lambda$ minden $x \in [a, b]$-re. Ekkor F abszolút folytonos $[a, b]$-ben, és $F'(x) = \infty$ minden racionális $x \in (a, b)$-re. Ha F Lipschitz volna egy $[c, d] \subset [a, b]$ intervallumban, akkor F' véges lenne (c, d) racionális pontjaiban, ami lehetetlen.

275. Legyen $F \subset [0, 1]$ egy pozitív mértékű és sehol sem sűrű zárt halmaz, és legyen $g = \chi_F$. Belátjuk, hogy az $f(x) = \int_0^x \chi_F\, d\lambda$ $(x \in [0, 1])$ függvény kielégíti a feltételeket. Világos, hogy f abszolút folytonos (sőt Lipschitz). Jelöljük P-vel azon x pontok halmazát, melyekre $\lambda((x - \delta, x + \delta) \cap F) > 0$ minden $\delta > 0$-ra. Könnyű belátni, hogy P zárt, és sehol sem sűrű, hiszen $P \subset F$. Tegyük fel először, hogy $(c, d) \cap P \ne \emptyset$. Ekkor P definíciója szerint $\lambda((c, d) \cap F) > 0$, és így $f(d) - f(c) = \int_c^d \chi_F\, d\lambda = \lambda((c, d) \cap F) > 0$, azaz $f(d) > f(c)$. Most tegyük fel, hogy $(c, d) \cap P = \emptyset$. Ekkor minden $x \in (c, d)$ pontnak van olyan környezete, amelynek F-fel vett metszete nullmértékű. Borel lefedési tétele szerint (c, d) minden zárt részintervalluma lefedhető véges sok ilyen intervallummal, tehát (c, d) lefedhető megszámlálhatóan sok ilyen intervallummal. Így $\lambda((c, d) \cap F) = 0$, amiből $f(d) - f(c) = \int_c^d \chi_F\, d\lambda = 0$, azaz $f(d) = f(c)$. Ezt (c, d) részintervallumaira alkalmazva kapjuk, hogy f konstans (c, d)-ben.

Még be kell látnunk, hogy $P \ne \emptyset$. Tegyük fel, hogy $P = \emptyset$. Ekkor a fentiek szerint f konstans $(0, 1)$-ben. Ez azonban lehetetlen, mert f folytonos, és $f(1) -$

$f(0) = \int_0^1 \chi_F \, d\lambda = \lambda(F) > 0.$

276. Legyen $f(1/n) = 1/n^2$, ha n páros, $f(1/n) = 0$, ha n páratlan, legyen f lineáris az $[1/(n+1), 1/n]$ intervallumokban minden $n = 1, 2, \ldots$-re, és legyen $f(0) = 0$. Nyilvánvaló, hogy f folytonos és korlátos változású $[0,1]$-ben. Ha $0 < c < 1$, akkor f Lipschitz, tehát abszolút folytonos a $[c, 1]$ intervallumban. A 257. feladat állítása szerint f abszolút folytonos $[0,1]$-ben. A 256. feladat állítása szerint $\sqrt{x}$ is abszolút folytonos $[0,1]$-ben. Azonban $\sqrt{f}$ nem abszolút folytonos $[0,1]$-ben, mert nem korlátos változású.

277. Az állítás nem igaz. A 266. feladat állítása szerint minden abszolút folytonos függvény (S) tulajdonságú. Nyilvánvaló, hogy ez a tulajdonság megőrződik a kompozíció során. A 265. feladat megoldásában konstruáltunk egy olyan folytonos függvényt, amely (N) tulajdonságú, de nem (S) tulajdonságú, és így nem áll elő két abszolút folytonos függvény kompozíciójaként.

278. Az állítás nem igaz. Az 254. feladat állítása szerint van olyan $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható és korlátos változású függvény, amely nem áll elő két differenciálható monoton függvény különbségeként. Mármost minden differenciálható és korlátos változású függvény abszolút folytonos, mert (N) tulajdonságú, sőt (S) tulajdonságú (lásd a 270. és 268. feladatokat).

279. A 266. feladat állítása szerint minden abszolút folytonos függvény (S) tulajdonságú. Mivel az (S) tulajdonság megőrződik a kompozíció során, ezzel beláttuk, hogy a feltétel szükséges.

Most tegyük fel, hogy f folytonos és (S) tulajdonságú. Legyen $m = \min\limits_{[a,b]} f$ és $M = \max\limits_{[a,b]} f$. Jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(\{y\})$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y) = \infty$, ha $f^{-1}(\{y\})$ végtelen. Az (S) tulajdonságból következik, hogy N véges m.m. (lásd a 267. feladatot). Így $0 < 1/N \le 1$ m.m. $[m, M]$-ben. Legyen $s(x) = 1/N(x)$, ha $x \in [m, M]$, és legyen $s(x) = 1$, ha $x \notin [m, M]$. Ekkor s Lebesgue-integrálható minden korlátos intervallumon. Legyen $U(x) = \int_0^x s \, d\lambda$. Ekkor U szigorúan monoton növő és Lipschitz, tehát abszolút folytonos minden korlátos intervallumon.

Mivel $f = U^{-1} \circ (U \circ f)$, ezért elég belátni, hogy U^{-1} és $U \circ f$ abszolút folytonosak. Az U^{-1} függvény folytonos és monoton, tehát a Banach–Zareckij-tétel szerint az abszolút folytonosságához elég belátni, hogy (N) tulajdonságú.

Legyen $A \subset \mathbb{R}$ nullmértékű, és legyen $B = U^{-1}(A)$. Az U függvény m.m. deriválható, és a deriváltja 1 vagy $1/N$. (Itt felhasználjuk a 310. feladat állítását.) Így $U' > 0$ majdnem mindenütt. A 230. feladat állításából következik, hogy ha $\lambda(B) > 0$, akkor

$$\lambda(A) = \lambda(U(B)) \ge \int_B U' \, d\lambda > 0,$$

ami lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy $\lambda(B) = 0$, tehát az U függvény (N) tulajdonságú, és így abszolút folytonos.

Az $U \circ f$ függvény folytonos és (N) tulajdonságú, hiszen U és f mindeketten azok. Így a Banach–Zareckij-tétel szerint (268. feladat) az $U \circ f$ függvény abszolút folytonosságához elég belátni, hogy korlátos változású. Jelöljük $s(y)$-nal $(U \circ f)^{-1}(\{y\})$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $s(y) = \infty$, ha $f^{-1}(\{y\})$ végtelen. A 247. feladat állítása szerint azt kell megmutatni, hogy $\int_{\mathbb{R}} s\, d\lambda < \infty$.

Mivel U szigorúan monoton növő, ezért $(U \circ f)^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{U^{-1}(y)\})$, tehát $s(y) = N(U^{-1}(y))$ minden y-ra. Mármost

$$\int_{\mathbb{R}} s\, d\lambda = \int_{U(m)}^{U(M)} s\, d\lambda = \int_{U(m)}^{U(M)} N(U^{-1}(y))\, d\lambda(y) =$$
$$= \int_m^M N \cdot U'\, d\lambda = \int_m^M 1\, d\lambda = M - m < \infty.$$

Itt a helyettesítéses integrálás képletét alkalmaztuk:

$$\int_{U(m)}^{U(M)} g \circ U^{-1}\, d\lambda = \int_m^M g \cdot U'\, d\lambda$$

tetszőleges $g\colon [m, M] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható függvényre. Ez könnyen ellenőrizhető először abban az esetben, amikor g egy intervallum karakterisztikus függvénye, aztán lépcsősfüggvény, végül tetszőleges Lebesgue-integrálható függvény. Ezzel beláttuk, hogy $U \circ f$ abszolút folytonos.

280. Mivel $(\mu(A) = 0) \iff (\nu(A) = 0) \iff (A = \emptyset)$, ezért μ és ν nyilvánvalóan abszolút folytonosak egymásra nézve. A μ mértéknek van Radon–Nikodym-deriváltja ν-re nézve, nevezetesen az azonosan ∞ függvény, más szóval $\mu(A) = \int_A \infty\, d\nu$ minden $A \subset X$-re. Ez nyilvánvaló mind az $A = \emptyset$, mind pedig az $A \neq \emptyset$ esetben.

A ν mértéknek nincs Radon–Nikodym-deriváltja μ-re nézve. Ha ugyanis $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ minden $A \subset X$-re, akkor ez az $A = \{x\}$ egyelemű halmazra is igaz kellene, hogy legyen. Azonban $\nu(\{x\}) = 1$, míg $\int_{\{x\}} f\, d\mu$ értéke csak 0 vagy $\pm\infty$ lehet.

281. Legyen $\vartheta(B) = \int_B f\, d\mu$ minden $B \in \mathcal{C}$-re. Ekkor ϑ előjeles mérték $\mathcal{C}$-n, amely nyilvánvalóan abszolút folytonos μ-re nézve. A feltétel szerint az $(X, \mathcal{C}, \mu)$ mértéktér σ-véges, tehát alkalmazhatjuk a Radon–Nikodym-tételt. Azt kapjuk, hogy van olyan $\mathcal{C}$ szerint mérhető g függvény, hogy $\int_B g\, d\mu = \int_B f\, d\mu$ minden $B \in \mathcal{C}$-re. Éppen ezt akartuk bizonyítani.

Ha $\mathcal{C}$ véges, akkor van olyan $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ diszjunkt felbontás, hogy $A_i \in \mathcal{C}$ minden i-re, és $\mathcal{C}$ minden eleme előáll mint néhány A_i uniója. Az $(X, \mathcal{A}, \mathcal{C})$ mértéktér σ-végességéből következik, hogy $\mu(A_i) < \infty$ minden i-re. A g függvénynek mindegyik A_i-n konstansnak kell lennie. Világos, hogy ha $\mu(A_i) > 0$, akkor $g(x) = \frac{1}{u(A_i)} \cdot \int_{A_i} f \, d\mu$ minden $x \in A_i$-re, vagyis g egyenlő f átlagával A_i-n. Ha $\mu(A_i) = 0$, akkor g tetszőleges lehet A_i-n (sőt, nem is kell, hogy definiálva legyen A_i-n).

282. Legyen $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = P(\mathbb{Z})$, és legyen μ a számosságmérték $P(\mathbb{Z})$-n. Világos, hogy az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér σ-véges. Legyen $f = \chi_{\{0\}}$. Ekkor f integrálható X-en, és $\int_X f \, d\mu = 1$. Legyen $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\}$. Ekkor nincs olyan $\mathcal{C}$ szerint mérhető $g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amelyre az $\int_X g \, d\mu$ integrál létezik, és $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$. Ugyanis az $\int_X g \, d\mu$ integrál csak akkor létezhet, ha g konstans X-en. Mivel $\mu(X) = \infty$, ezért az $\int_X g \, d\mu$ integrál értéke csak nulla és $\pm\infty$ lehet.

283. A μ mérték akkor és csak akkor abszolút folytonos ϑ-ra nézve, ha minden $A \in \mathcal{A}$-ra $(\vartheta(A) = 0) \Longrightarrow (\mu(A) = 0)$, azaz ha $(\mu(A) > 0) \Longrightarrow (\vartheta(A) > 0)$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $f > 0$ μ-m.m. (Lásd a 204. feladatot.)

Tegyük fel, hogy $f > 0$ μ-m.m., és legyen g a μ mérték Radon–Nikodym-deriváltja ϑ-ra nézve. Ez azt jelenti, hogy

$$\mu(H) = \int_H g \, d\vartheta \tag{60}$$

minden $H \in \mathcal{A}$-ra. Legyen $A \in \mathcal{A}$, és tegyük fel, hogy $0 < \mu(A) < \infty$. Belátjuk, hogy $g = 1/f$ μ-m.m. A-n. Legyenek $p < q$ pozitív számok, és legyen $H = A(g > q > p > 1/f)$. Ekkor $f > 1/p$ a H halmazon, tehát $\vartheta(H) = \int_H f \, d\mu \geq \mu(H)/p$, és $\int_H g \, d\vartheta \geq q \cdot \vartheta(H) \geq \mu(H) \cdot (q/p)$. Így (60)-ból $\mu(H) \geq \mu(H) \cdot (q/p)$. Mivel $q/p > 1$, ezért $\mu(H) = 0$. Egy hasonló okoskodás mutatja, hogy ha $p < q$ pozitív számok, és $E = A(g < p < q < 1/f)$, akkor $\mu(E) = 0$. Tehát $g = 1/f$ μ-m.m. A-n.

Ha $f \equiv \infty$ az A halmazon, ahol $0 < \mu(A) < \infty$, akkor a fentiek szerint $g = 0$ μ-m.m. A-n. Ekkor azonban (60) szerint $\mu(A) = 0$, ami lehetetlen.

Azt kaptuk, hogy *ha μ-nek van Radon–Nikodym-deriváltja ϑ-ra nézve, akkor az $X(f = \infty)$ halmaz minden mérhető részhalmazának a μ-mértéke* 0 *vagy* ∞.

Megmutatjuk, hogy ez a feltétel (azzal együtt, hogy $f > 0$ μ-m.m.) elégséges is a Radon–Nikodym-derivált létezéséhez. Tegyük fel, hogy a fenti feltétel teljesül, és legyen $g(x) = 1/f(x)$, ha $f(x) < \infty$, és legyen $g(x) = \infty$, ha $f(x) = \infty$. Belátjuk, hogy (60) teljesül minden $H \in \mathcal{A}$-ra.

Tegyük fel először, hogy $\mu(H)$ σ-véges. Ekkor $f < \infty$ μ-m.m. H-n. Valóban, legyen $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, ahol $\mu(H_n) < \infty$ minden n-re. A feltétel szerint az $H_n(f = \infty)$ halmaz minden mérhető részhalmazának a μ-mértéke 0 vagy ∞. Mivel $\mu(H_n) < \infty$, ezért $\mu(H_n(f = \infty)) = 0$. Ez minden n-re igaz, tehát $\mu(H(f = \infty)) = 0$.

Így a $H_n(f < k)$ halmazok egy nullmértékű halmaz híján lefedik H-t. Mivel

$$\vartheta(H_n(f < k)) \le k \cdot \mu(H_n) < \infty,$$

ezért $\vartheta(H)$ szintén σ-véges. Így alkalmazhatjuk a Radon–Nikodym-tételt, és azt kapjuk, hogy μ-nek van Radon–Nikodym-deriváltja ϑ-ra nézve H-n. Legyen ez a h függvény. Mint láttuk, a $H(h \ne 1/f)$ halmaz minden mérhető részhalmazának a μ-mértéke 0 vagy ∞. Mivel $\mu(H)$ σ-véges, ezért szükségképpen $\mu(H(h \ne 1/f)) = 0$. Tehát $h = g$ μ-m.m. H-n, és így (60) fennáll.

Most tegyük fel, hogy $\mu(H)$ nem σ-véges. Ekkor $\vartheta(H)$ sem σ-véges. Tegyük fel ugyanis, hogy $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, ahol $\vartheta(H_n) < \infty$ minden n-re. Mivel $\vartheta(H_n) = \int_{H_n} f\, d\mu$ és $f > 0$ μ-m.m., ezért a 204. feladat (ii) állítása szerint $\mu(H_n)$ σ-véges. Ez minden n-re igaz, ami lehetetlen, hiszen akkor $\mu(H)$ is σ-véges lenne.

Tehát $\vartheta(H)$ nem σ-véges. Mivel $g > 0$ mindenütt, ezért ismét a 204. feladat (ii) állítását használva azt kapjuk, hogy (60) jobb oldalának értéke ∞. Mivel $\mu(H) = \infty$, ezért (60) fennáll.

284. Legyen $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{A} \colon \mu(B) = 0\}$. Világos, hogy $\mathcal{C}$ zárt a megszámlálható unióra. Legyen $b = \sup\{\nu(B) \colon B \in \mathcal{C}\}$, és legyenek $B_n \in \mathcal{C}$ olyan halmazok, melyekre $\nu(B_n) \to b$. Ekkor $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$. Mivel $\nu(S) \ge b$, ezért szükségképpen $\nu(S) = b$, tehát S egy maximális ν-mértékű halmaz $\mathcal{C}$-ben. Ezzel (i)-et beláttuk.

Legyen ν σ-véges, és legyen $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, ahol $\nu(X_n) < \infty$ minden n-re. Ekkor (i)-et alkalmazva az X_n halmazon kapunk egy maximális ν-mértékű $S_n \subset X_n$ halmazt, amelyre $\mu(S_n) = 0$. Legyen $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, ekkor $\mu(S) = 0$. Belátjuk, hogy ν abszolút folytonos μ-re nézve az $A = X \setminus S$ halmazon. Legyen $B \subset A$ és $\mu(B) = 0$. Ekkor $\mu(B \cap X_n) = 0$. Mivel $\nu(S_n) \le \nu(X_n) < \infty$, ezért $\nu(S_n)$ maximalitása miatt $\nu(B \cap X_n) = 0$, hiszen különben a $(B \cap X_n) \cup S_n$

halmaz ν-mértéke nagyobb volna $\nu(S_n)$-nél, holott $\mu((B \cap X_n) \cup S_n) = 0$. Így $\nu(B \cap X_n) = 0$ minden n-re, tehát $\nu(B) = 0$. Ezzel (ii)-t is beláttuk.

285. Az állítás igaz. Belátjuk, hogy ha α abszolút folytonos β-ra nézve, és f az α mérték Radon–Nikodym-deriváltja β-ra nézve, akkor $f/(f+1)$ az α mérték Radon–Nikodym-deriváltja $\alpha + \beta$-ra nézve.

Mivel $\alpha(H) = \int_H f\,d\beta$ minden $H \in \mathcal{A}$-ra és $0 \le \alpha < \infty$ mindenütt $\mathcal{A}$-n, ezért $0 \le f < \infty$ β-m.m. X-en. Feltehetjük, hogy ez mindenütt igaz. Így $0 \le f/(f+1) \le 1$ mindenütt X-en. Azt kell belátni, hogy minden $H \in \mathcal{A}$-ra

$$\alpha(H) = \int_H \frac{f}{f+1}\,d\alpha + \int_H \frac{f}{f+1}\,d\beta. \tag{61}$$

Elég belátni, hogy

$$\int_H \frac{1}{f+1}\,d\alpha = \int_H \frac{f}{f+1}\,d\beta. \tag{62}$$

Ha ugyanis (62) igaz, akkor mindkét oldalához hozzáadva $\int_H f/(f+1)\,d\alpha$-t megkapjuk (61)-et. Mármost

$$\int_H g\,d\alpha = \int_H (g \cdot f)\,d\beta \tag{63}$$

minden nemnegatív mérhető g függvényre igaz. Ugyanis $g = \chi_B$-re ez világos abból, hogy $\alpha(H \cap B) = \int_{H \cap B} f\,d\beta$. Ebből az állítás azonnal következik egyszerű függvényekre, majd a monotonkonvergencia-tétel felhasználásával minden nemnegatív mérhető függvényre. Ha (63)-at $1/(f+1)$-re alkalmazzuk, akkor megkapjuk (62)-t.

Ha α nem abszolút folytonos β-ra nézve, akkor a következőképpen okoskodhatunk. Vegyünk egy olyan $X = A \cup S$ felbontást, amelyre α abszolút folytonos β-ra nézve A-n, és $\beta(S) = 0$. Legyen

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/(f(x)+1), & \text{ha } x \in A, \\ 1, & \text{ha } x \in S. \end{cases}$$

Belátjuk, hogy g az α Radon–Nikodym-deriváltja $\alpha + \beta$-ra nézve X-en. Azt kell megmutatni, hogy

$$\alpha(H) = \int_H g\,d\alpha + \int_H g\,d\beta \tag{64}$$

minden $H \in \mathcal{A}$-ra. Ha $H \subset A$, akkor ez igaz a már bizonyított eset szerint. Legyen $H \subset S$. Azt kell belátni, hogy $\alpha(H) = \alpha(H) + \beta(H)$, ami világos, hiszen $\beta(H) = 0$.

286. Tegyük fel először, hogy ϑ σ-véges mérték $\mathcal{A}$-n. A 284. feladat (ii) állítása szerint van olyan $X = A \cup S$ felbontás, hogy ϑ abszolút folytonos μ-re nézve

$\mathcal{A}$-n, és $\mu(S) = 0$. Legyen $\alpha(H) = \vartheta(H \cap A)$ és $\sigma(H) = \vartheta(H \setminus A)$ minden $H \in \mathcal{A}$-ra. Világos, hogy α és σ mértékek $\mathcal{A}$-n és $\vartheta = \alpha + \sigma$. Ha $H \in \mathcal{A}$ és $\mu(H) = 0$, akkor $\mu(H \cap A) = 0$, tehát A választása folytán $\vartheta(H \cap A) = 0$, azaz $\alpha(H) = 0$. Így α abszolút folytonos μ-re nézve. Nyilvánvaló, hogy σ szinguláris μ-re nézve.

Ha ϑ σ-véges előjeles mérték $\mathcal{A}$-n, akkor a Hahn-felbontási tétel szerint van olyan $X = P \cup Q$ felbontás, amelyre $P, Q \in \mathcal{A}$, továbbá ϑ mérték $\mathcal{A}_P$-n, és $-\vartheta$ mérték $\mathcal{A}_Q$-n. Világos, hogy ϑ σ-véges $\mathcal{A}_P$-n, és $-\vartheta$ σ-véges $\mathcal{A}_Q$-n. Ha $\vartheta = \alpha_P + \sigma_P$ a ϑ mérték μ-re vonatkozó Lebesgue-felbontása $\mathcal{A}_P$-n és $-\vartheta = \alpha_Q + \sigma_Q$ a $-\vartheta$ mérték μ-re vonatkozó Lebesgue-felbontása $\mathcal{A}_Q$-n, akkor könnyen láthatóan $\vartheta = \alpha + \sigma$ a ϑ Lebesgue-felbontása $\mathcal{A}$-n, ahol $\alpha(H) = \alpha_P(H \cap P) - \alpha_Q(H \cap Q)$ és $\sigma(H) = \sigma_P(H \cap P) - \sigma_Q(H \cap Q)$ minden $H \in \mathcal{A}$-ra.

287. Legyenek $\vartheta = \alpha_1 + \sigma_1$ és $\vartheta = \alpha_2 + \sigma_2$ Lebesgue-felbontások. Mivel σ_1 és σ_2 szingulárisak μ-re nézve, ezért vannak olyan $N_1, N_2 \in \mathcal{A}$ halmazok, hogy $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$, és $\sigma_1(A) = 0$, valahányszor $A \in \mathcal{A}$ és $A \cap N_1 = \emptyset$, és $\sigma_2(A) = 0$, valahányszor $A \in \mathcal{A}$ és $A \cap N_2 = \emptyset$. Legyen $N = N_1 \cup N_2$. Ekkor $\mu(N) = 0$, és $\sigma_1(A) = \sigma_2(A) = 0$, valahányszor $A \in \mathcal{A}$ és $A \cap N = \emptyset$.

Ha $A \in \mathcal{A}$ és $A \cap N = \emptyset$, akkor tehát $\vartheta(A) = \alpha_1(A) + 0 = \alpha_2(A) + 0$, és így $\alpha_1(A) = \alpha_2(A)$. Ha $A \subset N$, akkor $\alpha_1(A) = \alpha_2(A) = 0$, hiszen $\mu(A) = 0$ és α_1, α_2 abszolút folytonosak μ-re nézve. Így tetszőleges $A \in \mathcal{A}$-ra

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \setminus N) = \mu_2(A \setminus N) = \mu_2(A).$$

Ezzel beláttuk, hogy $\alpha_1 = \alpha_2$.

Ha $A \in \mathcal{A}$ és $A \subset N$, akkor $\vartheta(A) = 0 + \sigma_1(A) = 0 + \sigma_2(A)$, és így $\sigma_1(A) = \sigma_2(A)$. Ha $A \cap N = \emptyset$, akkor $\sigma_1(A) = \sigma_2(A) = 0$ az N halmaz választása szerint. Így tetszőleges $A \in \mathcal{A}$-ra

$$\sigma_1(A) = \sigma_1(A \cap N) = \sigma_2(A \cap N) = \sigma_2(A).$$

Ezzel beláttuk, hogy $\sigma_1 = \sigma_2$.

288. (i) A λ mérték abszolút folytonos μ-re nézve, hiszen $\mu(A) = 0$ esetén $A = \emptyset$ és $\lambda(\emptyset) = 0$. Így a keresett Lebesgue-felbontás $\lambda = \lambda + 0$.

(ii) Belátjuk, hogy μ-nek nincs Lebesgue-felbontása λ-ra nézve. Tegyük fel ugyanis, hogy $\mu = \alpha + \sigma$ egy Lebesgue-felbontás. Mivel σ szinguláris λ-ra nézve, van olyan N halmaz, hogy $\lambda(N) = 0$ és $\sigma(A) = 0$, valahányszor A Lebesgue-mérhető és $A \cap N = \emptyset$. Legyen $x \in \mathbb{R} \setminus N$ tetszőleges. Mivel $\lambda(\{x\}) = 0$, ezért α abszolút folytonossága miatt $\alpha(\{x\}) = 0$. Így $1 = \mu(\{x\}) = \alpha(\{x\}) + \sigma(\{x\}) = 0 + 0$, ami ellentmondás.

289. Tegyük fel, hogy ν szinguláris μ-re nézve. Ekkor van egy olyan $S \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\mu(S) = 0$ és $\nu(X \setminus S) = 0$. Ekkor a feladatban megfogalmazott feltétel nyilván teljesül: minden $\varepsilon > 0$-ra legyen $A = S$.

Most tegyük fel, hogy a feladatban megfogalmazott feltétel teljesül. Ekkor vannak $A_n \in \mathcal{A}$ halmazok úgy, hogy $\mu(A_n) < 1/n^2$ és $\nu(X \setminus A_n) < 1/n^2$ minden n-re. Legyen $S = \limsup_{n\to\infty} A_n$ és $T = \limsup_{n\to\infty}(X \setminus A_n)$. A Borel–Cantelli-lemma első állítása szerint (64. feladat) $\mu(S) = 0$ és $\nu(T) = 0$. Mivel

$$X \setminus S = \liminf_{n\to\infty}(X \setminus A_n) \subset T,$$

ezért $\nu(X \setminus S) = 0$, tehát ν szinguláris μ-re nézve.

290. Mivel f, g korlátos változásúak, ezéry $f+g$, $f \cdot g$ és minden $c \in \mathbb{R}$-re $c \cdot f$ is korlátos változású a 246. feladat állítása szerint. Mivel $f'(x) = g'(x) = 0$ m.m. $x \in [a,b]$-re, nyilvánvaló, hogy $f+g$, $f \cdot g$ és $c \cdot f$ deriváltja is majdnem mindenütt nulla.

291. Tegyük fel, hogy f szinguláris. Ekkor $f' = 0$ m.m., vagyis van olyan $A \subset [a,b]$ halmaz, hogy $\lambda([a,b] \setminus A) = 0$ és $f'(x) = 0$ minden $x \in A$-ra. Ekkor $\lambda(f(A)) = 0$ a 109. (vagy a 227.) feladat állítása szerint, amivel az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikációt beláttuk.

Most tegyük fel, hogy (ii) igaz. Hagyjuk el A-ból azokat a pontokat, amelyekben f szakad. Az így kapott halmazra szintén teljesül, hogy $\lambda(f(A)) = 0$, és az is, hogy $\lambda([a,b] \setminus A) = 0$, hiszen csak megszámlálhatóan sok pontot hagytunk el. A 219. feladat (iii) állítása szerint ekkor $\mu_f(A) = 0$. Mivel $\lambda([a,b] \setminus A) = 0$, ezért μ_f szinguláris λ-ra nézve. Ezzel a (ii)$\Longrightarrow$(iii) implikációt beláttuk.

Most tegyük fel, hogy μ_f szinguláris λ-ra nézve. Ekkor van olyan $A \subset [a,b)$ halmaz, amelyre $\lambda([a,b) \setminus A) = 0$ és $\mu_f(A) = 0$. A 219. feladat (iii) állítása szerint ekkor $\lambda(f(A)) = 0$. Ezzel beláttuk a (iii)$\Longrightarrow$(ii) implikációt.

Végül tegyük fel (ii)-t. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha $B_\varepsilon = A(D^+f > \varepsilon)$, akkor a 233. feladat állítása szerint $\lambda(f(B_\varepsilon)) \geq \varepsilon \cdot \lambda(B_\varepsilon)$. Mivel $B_\varepsilon \subset A$, ezért $\lambda(f(B_\varepsilon)) = 0$, tehát $\lambda(B_\varepsilon) = 0$. Ez minden ε-ra igaz, így $\lambda(A(D^+f > 0)) = 0$, azaz $D^+f(x) = 0$ m.m. $x \in A$ pontra. Mivel $\lambda([a,b] \setminus A) = 0$, ezzel beláttuk, hogy f jobb oldali deriváltja, f'_+ nulla m.m. $[a,b]$-ben. A $g(x) = -f(-x)$ függvény szintén monoton növő (a $[-b,-a]$ intervallumban), és nyilvánvaló, hogy szintén rendelkezik a (ii) tulajdonsággal. Így $g'_+ = 0$ m.m., tehát f bal oldali deriváltja is nulla Ezért $f' = 0$ m.m., amivel a (ii)$\Longrightarrow$(i) implikációt is beláttuk.

292. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elégségességet bizonyítandó legyen $a \leq c < d \leq b$ tetszőleges. Az f függvény monotonitásából nyilvánvaló, hogy az $(f(c), f(c+0))$, $(f(x-0), f(x+0))$ $(x \in D \cap (c,d))$ és $(f(d-0), f(d))$ nyílt intervallumok páronként diszjunktak, és részei $(f(c), f(d))$-nek. Ebből következik, hogy

$$f(d) - f(c) \geq (f(c+0) - f(c)) + \sum_{x \in D \cap (c,d)} u_f(x) + (f(d) - f(d-0)).$$

Hasonló egyenlőtlenség teljesül az (a, c) és (d, b) számpárokra is. Ezt a három egyenlőtlenséget összeadva azt kapjuk, hogy

$$f(b) - f(a) \geq (f(a+0) - f(a)) + \sum_{x \in D \cap (a,b)} u_f(x) + (f(b) - f(b-0)).$$

Azonban a feltétel szerint itt egyenlőség áll. Ez csak úgy lehetséges, ha mind a három egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Ez bizonyítja (12)-t. Mivel ez minden $a \leq c < d \leq b$-re igaz, így f tiszta ugrófüggvény.

293. Feltehetjük, hogy f balról folytonos. Ha ugyanis f értékét minden szakadási pontban f bal oldali határértékére változtatjuk, akkor az így kapott f_1 függvényre teljesül, hogy monoton növő tiszta ugrófüggvény, és balról folytonos. Nem nehéz belátni, hogy ha egy x pontban f_1 differenciálható, akkor f úgyszintén, és $f_1'(x) = f'(x)$. Ha tehát $f_1' = 0$ m.m., akkor $f' = 0$ m.m., tehát f szinguláris.

Legyen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton növő és balról folytonos tiszta ugrófüggvény, és jelöljük A-val f folytonossági pontjainak halmazát. Ekkor $[a, b] \setminus A$ megszámlálható, tehát nullmértékű. Ha megmutatjuk, hogy $\lambda(f(A)) = 0$, akkor a 291. feladat állítása szerint következni fog, hogy f szinguláris. A tiszta ugrófüggvény definíciója szerint

$$f(b) - f(a) = (f(a+0) - f(a)) + \sum_{x \in (a,b) \setminus A} u_f(x) + (f(b) - f(b-0)).$$

Az $I_a = (f(a), f(a+0))$, $I_b = (f(b-0), f(b))$ és $I_x = (f(x-0), f(x+0))$ $(x \in (a, b) \setminus A)$ intervallumok páronként diszjunktak, részei az $[f(a), f(b)]$ intervallumnak, és az összhosszuk $f(b) - f(a)$. Így az $N = [f(a), f(b)] \setminus \left(I_a \cup I_b \cup \bigcup_{x \in (a,b) \setminus A} I_x \right)$ halmaz nullmértékű. Nyilvánvaló, hogy $f(A) \subset N$, ezért $\lambda(f(A)) = 0$.

294. Legyen f monoton növő $[a, b]$-ben. Legyen az f függvény (a, b)-beli szakadási pontjainak halmaza $\{x_1, x_2, \ldots\}$, és legyen $x_0 = a$. Az $u_f(a) = f(a+0) - f(a)$ és $u_f(b) = f(b) - f(b-0)$ jelölést használva $\sum_{n=0}^{\infty} u_f(x_n) \leq f(b) - f(a)$ az f függvény monotonitása alapján. A h_1 függvényt a következőképpen definiáljuk. Legyen $h_1(a) = 0$, továbbá minden $x \in (a, b]$-re legyen $h_1(x)$ azon $u_f(x_n)$ számok összege, amelyek n indexére teljesül $x_n < x$. Nyilvánvaló, hogy h monoton növő $[a, b]$-ben. A 82. feladat megoldásának gondolatmenete mutatja, hogy h balról folytonos. Ugyanez a gondolatmenet azt is adja, hogy $u_{h_1}(x) = u_f(x)$ minden $x \in [a, b)$-re. Ebből egyszerűen következik, hogy a h_1 függvény értékeit az x_n pontokban megváltoztathatjuk úgy, hogy továbbra is monoton növő legyen, és $[a,b)$ minden pontjában mind a bal oldali, mind pedig a jobb oldali ugrása megegyezzen f megfelelő ugrásával. Jelöljük az így megváltoztatott függvényt h-val. Legyen továbbá $h(b) = h_1(b) + u_f(b)$. Ekkor h monoton növő, és a $g = f - h$ függvény folytonos $[a,b]$-n. Mivel

$$h(b) - h(a) = \sum_n u_f(x_n) + u_f(b) = \sum_n u_h(x_n) + u_h(b),$$

ezért h tiszta ugrófüggvény.

A g függvény monoton növő. Valóban, ha $a \le c < d \le b$ és f folytonos a c, d pontokban, akkor

$$h(d) - h(c) = \sum_{c<x_n<d} u_f(x_n) \le f(d) - f(c),$$

tehát $g(d) - g(c) \ge 0$. Mivel g folytonos, ezért $g(d) - g(c) \ge 0$ minden $a \le c < d \le b$-re igaz.

295. Tegyük fel először, hogy f monoton növő és folytonos. Ekkor μ_f véges mérték $[a,b)$ Borel-halmazain. Így a 286. feladat állítása szerint μ_f-nek van Lebesgue-felbontása λ-ra nézve. Legyen $\mu_f = \alpha + \sigma$ a Lebesgue-felbontás. Mivel μ_f véges $[a,b)$ Borel-részhalmazain, ezért ugyanez igaz α-ra és σ-ra is.

Legyen $g(x) = \alpha([a,x))$ és $h(x) = \sigma([a,x))$ minden $x \in [a,b]$-re. Világos, hogy g és h monoton növő függvények $[a,b]$-n. Ekkor

$$f(x) = f(a) + \mu_f([a,x)) = f(a) + \alpha([a,x)) + \sigma([a,x)) = f(a) + g(x) + h(x)$$

minden $x \in [a,b]$-re. Belátjuk, hogy g abszolút folytonos és h szinguláris.

Először azt látjuk be, hogy g és h balról folytonosak. Legyen $x_n \in [a,b]$ monoton növő sorozat, és legyen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ekkor $[a,x_1) \subset [a,x_2) \subset \ldots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a,x_n) = [a,x)$, tehát

$$g(x) = \alpha([a,x)) = \lim_{n\to\infty} \alpha([a,x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(x_n),$$

ami bizonyítja, hogy g balról folytonos. Ugyanígy látható be, hogy h is balról folytonos.

Mármost μ_g és α véges mértékek $[a,b)$ Borel-halmazain, amelyek megegyeznek a $\mathcal{P}^1([a,b])$ félgyűrűn. Valóban, ha $a \le c < d \le b$, akkor

$$\mu_g([c,d)) = g(d) - g(c) = \alpha([a,d)) - \alpha([a,c)) = \alpha([c,d)).$$

Így μ_g és α megegyeznek a $\mathcal{P}^1([a,b])$ félgyűrűn által generált gyűrűn is. Ezért a 80. feladat állítása szerint μ_g és α megegyeznek $[a,b)$ Borel-halmazain. Ebből következik, hogy a $\mu_g = \alpha$ Lebesgue–Stieltjes-mérték abszolút folytonos λ-ra nézve. A 271. feladat állítása szerint ebből következik, hogy g abszolút folytonos.

Ugyanígy adódik, hogy $\mu_h = \sigma$, tehát a μ_h Lebesgue–Stieltjes-mérték szinguláris λ-ra nézve. A 291. feladat állítása szerint ebből következik, hogy h szinguláris. Ezzel beláttuk, hogy f előáll a monoton és abszolút folytonos $g + f(a)$ és a monoton és szinguláris h függvény összegeként.

Most legyen f monoton növő (de nem feltétlenül folytonos). Az előző (294.) feladat állítása szerint ekkor $f = g_1 + h_1$, ahol g_1, h_1 monoton növő függvények, g_1 folytonos, h_1 pedig tiszta ugrófüggvény. A fentiek szerint $g_1 = g + h$, ahol g, h monoton növő függvények, g abszolút folytonos, h pedig szinguláris. Mivel a 293. feladat állítása szerint h_1 szinguláris, ezért f előáll a monoton és abszolút folytonos g és a monoton és szinguláris $h + h_1$ függvény összegeként.

Ha f korlátos változású, akkor $f = f_1 - f_2$, ahol f_1, f_2 monoton növő függvények (l. a 250. feladat (i) állítását). A fentiek szerint $f_1 = g_3 + h_3$ és $f_2 = g_4 + h_4$, ahol g_3, g_4, h_3, h_4 monoton növő függvények, g_3, g_4 abszolút folytonosak, h_3, h_4 pedig szingulárisak. Így f előáll az abszolút folytonos $g_3 - g_4$ és a szinguláris $h_3 - h_4$ függvény összegeként.

Végül belátjuk, hogy az előállítás (konstans összeadandóktól eltekintve) egyértelmű. Tegyük fel, hogy $f = g + h = G + H$, ahol g és G abszolút folytonosak, h, H pedig szingulárisak. Ekkor $g - G = h - H$. Ha $g - G = h - H = c$, akkor a c függvény egyszerre abszolút folytonos és szinguláris. Így $c'(x) = 0$ m.m. $x \in [a, b]$-re, tehát a 263. feladat állítása szerint c konstans. Így $g = G + c$ és $h = H + c$, amivel az állítást beláttuk.

296. Legyen $A = \{x \in (a, b) \colon D_+ f(x) < \infty\}$ és $B = \{x \in (a, b) \colon D_- f(x) < \infty\}$. Világos, hogy $(a, b) \setminus E_\infty = A \cup B$. Mivel f monoton növő, ezért $D_+ f(x) \geq 0$ és $D_- f(x) \geq 0$ minden x-re. Így $D_+ f(x)$ és $D_- f(x)$ véges minden $x \in A \cup B$-re, tehát a 234. feladat állítása szerint $\lambda(f(A)) = \int_A D_+ f \, d\lambda$ és $\lambda(f(B)) = \int_B D_- f \, d\lambda$. Mivel f szinguláris, ezért $f' = 0$ m.m., és minden ilyen pontban $D_+ f(x) = D_- f(x) = 0$. Ezért $D_+ f = 0$ m.m. és $D_- f = 0$ m.m., tehát mindkét integrál értéke nulla. Így $\lambda(f(A)) = \lambda(f(B)) = 0$. Mármost

$$(f(a), f(b)) \setminus f(E_\infty)) \subset f(A) \cup f(B),$$

hiszen f folytonos, tehát $f(a, b) \supset (f(a), f(b))$. Ebből (i) nyilvánvaló.

A (ii) állítást bizonyítandó vegyük észre, hogy $f([a, b] \setminus E_\infty) \subset [f(a), f(b)] \setminus f(E_\infty)$. Valóban, ha $x \in [a, b] \setminus E_\infty$, $y \in E_\infty$, és $f(x) = f(y)$, akkor $x \neq y$ és f monotonitása alapján f konstans az $[x, y]$ (vagy az $[y, x]$) intervallumon. Ez azonban lehetetlen $f'(y) = \infty$ miatt. Így (i) alapján $f([a, b] \setminus E_\infty)$ nullmértékű, tehát (ii) azonnal következik a 219. feladat (iii) állításából.

297. A Cantor-halmaz pontjai az $x_\varepsilon = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n/3^n$ alakú számok, ahol $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ tetszőleges $0-1$ sorozat. Legyen f a Cantor-függvény, ekkor $f(x_\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n/2^n$ minden ε $0-1$ sorozatra.

Legyen adott a $k \geq 2$ egész szám, és legyen ε olyan $0-1$ sorozat, amelyben nincs k egymás utáni 0 tag, sem pedig k egymás utáni 1 tag. Megmutatjuk, hogy ekkor $f'(x_\varepsilon) = \infty$. Nyilvánvaló, hogy x_ε a C Cantor-halmaznak kétoldali torlódási pontja. Ezért elég belátni, hogy

$$\lim_{y \to x_\varepsilon + 0,\ y \in C} \frac{f(y) - f(x_\varepsilon)}{y - x_\varepsilon} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{y \to x_\varepsilon - 0,\ y \in C} \frac{f(y) - f(x_\varepsilon)}{y - x_\varepsilon} = \infty. \tag{65}$$

Ha ugyanis $y_1, y_2 \in C$, $y_1 < x_\varepsilon < y_2$ és $(f(y) - f(x_\varepsilon))/(y - x_\varepsilon) > K$ minden $y_1 < y < y_2$ és $y \in C \setminus \{x_\varepsilon\}$ számra, akkor könnyen láthatóan $(f(y) - f(x_\varepsilon))/(y - x_\varepsilon) > K$ minden $y_1 < y < y_2$, $y \neq x_\varepsilon$-ra is teljesül.

Legyen $N > 1$ adott, és legyen $x_\varepsilon < y < x_\varepsilon + 1/3^N$, $y \in C$. Ekkor $y = x_\eta$, ahol $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ egy $0-1$ sorozat. Mivel $x_\varepsilon < x_\eta$, ezért van olyan n, hogy $\varepsilon_i = \eta_i$ minden $i < n$-re, $\varepsilon_n = 0$ és $\eta_n = 1$. Másrészt $x_\eta < x_\varepsilon + 1/3^N$ alapján $n \geq N$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(y) - f(x_\varepsilon) &= \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{\eta_i}{2^i} - \frac{\varepsilon_i}{2^i} \right) \geq \frac{1}{2^n} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i} \geq \\ &\geq \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+k}} \right) = \frac{1}{2^{n+k}}, \end{aligned}$$

hiszen az $\varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_{n+k}$ tagok között kell, hogy legyen legalább egy nulla. Másrészt

$$y - x_\varepsilon = 2 \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{\eta_i}{3^i} - \frac{\varepsilon_i}{3^i} \right) \leq 2 \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Így $(f(y) - f(x_\varepsilon))/(y - x_\varepsilon) \geq (3/2)^n/(3 \cdot 2^k)$. Itt k fix, míg $n \to \infty$, ha $y \to x_\varepsilon + 0$. Ezzel (65) első limeszrelációját beláttuk. A második ugyanígy bizonyítható.

Az $x_\varepsilon \in C$ szám akor és csak akkor racionális, ha az ε sorozat valahonnan kezdve periodikus. Ha $x_\varepsilon \in C$ racionális és a nevezője nem 3-hatvány, akkor az ε sorozatban van végtelen sok nulla és végtelen sok 1 tag is, tehát az ε sorozatra teljesül, hogy nincs benne k egymás utáni 0 tag, sem pedig k egymás utáni 1 tag, ahol k a periódus. Azt kaptuk, hogy $f'(x) = \infty$ teljesül C minden olyan racionális pontjára, amelynek a nevezője nem 3-hatvány. Ilyen például az $1/4$ szám.

298. Legyen $U(x) = x^2 \cdot \cos(1/x)$, ha $x \neq 0$, és legyen $U(0) = 0$. Könnyű ellenőrizni, hogy U mindenütt differenciálható, $U'(0) = 0$, és $x \neq 0$ esetén $U'(x) = 2x \cdot \cos(1/x) + f(x)$. Legyen $v(x) = 2x \cdot \cos(1/x)$ ha $x \neq 0$, és $v(0) = 0$. Ekkor v mindenütt folytonos, tehát van primitív függvénye $\mathbb{R}$-en. Ha $V' = v$, akkor $(U - V)' = f$, amivel beláttuk, hogy f-nek az $U - V$ függvény primitív függvénye. Hasonlóan bizonyítható, hogy g-nek is van primitív függvénye.

Ha $x \neq 0$, akkor

$$g(x) = \cos(1/x) = 1 - 2\sin^2(1/2x) = 1 - 2f^2(2x).$$

Ha f^2-nek van primitív függvénye, akkor $1 - 2f^2(2x)$-nek is van. Legyen F egy primitív függvény. Ekkor $x \neq 0$ esetén $F'(x) = g(x)$, valamint $F'(0) = 1 - 2f^2(0) = 1$. Mint láttuk, g-nek is van primitív függvénye; legyen G egy primitív függvény. Ekkor $(F - G)'(x) = g(x) - g(x) = 0$, ha $x \neq 0$ és $(F - G)'(0) = 1 - 0 = 1$. Eszerint a $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvénynek is van primitív függvénye. Ez azonban lehetetlen, mert egy primitív függvény konstans kell, hogy legyen a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ félegyeneseken, tehát a folytonosság miatt konstans kell, hogy legyen mindenütt, de akkor a nullában a deriváltja nulla és nem 1. Ezzel beláttuk, hogy f^2-nek nincs primitív függvénye. Hasonlóan bizonyítható, hogy g^2-nek sincs primitív függvénye.

299. Legyen $W(x) = x^{3/2} \cdot \cos(1/x)$, ha $x \neq 0$, és legyen $W(0) = 0$. Könnyű ellenőrizni, hogy W mindenütt differenciálható, $W'(0) = 0$, és $x \neq 0$ esetén $W'(x) = (3/2)x^{1/2} \cdot \cos(1/x) - f(x)$. Legyen $s(x) = (3/2)x^{1/2} \cdot \cos(1/x)$ ha $x \neq 0$, és $s(0) = 0$. Ekkor s mindenütt folytonos, tehát van primitív függvénye $\mathbb{R}$-en. Ha $S' = s$, akkor $(S - W)' = f$, amivel beláttuk, hogy f-nek az $S - W$ függvény primitív függvénye.

Legyen $g(x) = x^{1/2} \sin(1/x)$, ha $x \neq 0$, és $g(0) = 0$. Világos, hogy g folytonos. Az előző (298.) feladatban láttuk, hogy $f \cdot g$-nek nincs primitív függvénye $\mathbb{R}$-en.

300. A Borel-féle lefedési tételből következik, hogy f minden korlátos és zárt intervallumon korlátos. Így f minden korlátos és zárt intervallumon Lebesgue-integrálható. Legyen $F(x) = \int_0^x f \, d\lambda$ $(x \in \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy $F'(x) = f(x)$ minden x-re. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és legyen $A_h = \{y \in [x, x+h] \colon |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ minden $h > 0$-ra. Legyen $|f(y)| \leq K$ minden $y \in [x, x+1]$-re. Ha

$0 < h \leq 1$, akkor

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h}(f(y)-f(x))\,d\lambda\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h}|f(y)-f(x)|\,d\lambda \leq \\
&\leq \frac{1}{h}\cdot\int_{A_h}|f(y)-f(x)|\,d\lambda + \frac{1}{h}\cdot\int_{[x,x+h]\setminus A_h}|f(y)-f(x)|\,d\lambda \leq \\
&\leq 2K\cdot\frac{\lambda(A_h)}{h} + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{66}$$

Mivel f approximatíve folytonos x-ben, ezért $\lambda(A_h)/h \to 0$, ha $h \to 0$. Így (66) szerint $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| < 2\varepsilon$, ha h elég kicsi. Ezzel beláttuk, hogy $\lim\limits_{h\to 0+0}(F(x+h)-F(x))/h = f(x)$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $\lim\limits_{h\to 0-0}(F(x+h)-F(x))/h = f(x)$, és így $F'(x) = f(x)$. Mivel ez minden x-re igaz, ezért F primitív függvénye f-nek.

301. Jelöljük M-mel f szigorú lokális maximumhelyeinek halmazát. Minden $x \in M$-re legyenek p_x, q_x olyan racionális számok, melyekre $p_x < x < q_x$ és $f(y) < f(x)$ minden $y \in (p_x, q_x)$ és $y \neq x$ esetén. Világos, hogy különböző x-ekhez különböző (p_x, q_x) párok tartoznak. Ebből azonnal adódik, hogy f szigorú lokális maximumhelyeinek halmaza megszámlálható. Ugyanígy kapjuk, hogy f szigorú lokális minimumhelyeinek halmaza is megszámlálható.

302. Tegyük fel, hogy f jobbról és balról is differenciálható c-ben, és $f'_-(c) < f'_+(c)$. Könnyű belátni, hogy ha $f'_-(c) < p < f'_+(c)$, akkor az $f(x) - p\cdot x$ függvénynek a c pont szigorú lokális minimumhelye. Hasonlóan, ha $f'_-(c) > p > f'_+(c)$, akkor az $f(x) - p\cdot x$ függvénynek a c pont szigorú lokális maximumhelye. Ha tehát vesszük az $f(x) - p\cdot x$ függvények szigorú lokális szélsőértékhelyei halmazának unióját minden racionális p-re, akkor egy olyan megszámlálható halmazt kapunk, amely minden olyan pontot tartalmaz, amelyben f bal és jobb oldali deriváltjai léteznek de különbözőek.

303. Legyen $A = \{x \in [a,b]\colon D_+f(x) < D^+f(x) < \infty\}$. Ekkor A Borel-mérhető a 173. feladat állítása szerint. Tegyük fel, hogy $\lambda(A) > 0$. Ekkor a 234. feladat állítása szerint

$$\lambda(f(A)) = \int_A D_+f\,d\lambda < \int_A D^+f\,d\lambda = \lambda(f(A)),$$

ami lehetetlen. Így $\lambda(A) = 0$.

Legyen $B = \{x \in [a,b]\colon D^+f(x) = \infty\}$. Ekkor B szintén Borel-mérhető, és a 233. feladat állításából következik, hogy $\lambda(f(B)) \geq m\cdot\lambda(B)$ minden m-re, tehát $\lambda(B) = 0$. Ezzel beláttuk, hogy f jobbról differenciálható m.m. $x \in [a, b]$ pontban.

Ezt a $-f(-x)$ függvényre alkalmazva adódik, hogy f m.m. balról differenciálható. Mivel megszámlálható sok pont kivételével a bal és jobb oldali derivált megegyezik az előző (302.) feladat állítása szerint, ezért f m.m. differenciálható.

304. Mivel minden korlátos változású függvény két monoton függvény különbsége (l. a 250. feladat (i) állítását), ezért elég az állítást monoton növő függvényekre bizonyítani. Tegyük fel tehát, hogy f monoton növő. Az előző feladat állítása szerint f m.m. differenciálható.

Osszuk fel $[a, b]$-t n egyenlő részre az $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ pontokkal. Legyen $g_n(x) = (f(x_i) - f(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1})$ minden $x \in (x_{i-1}, x_i)$-re $(i = 1, \ldots, n)$. Könnyű belátni, hogy ha egy x pontban f differenciálható, $y_n < x < z_n$ minden n-re és $z_n - y_n \to 0$, akkor $(f(z_n) - f(y_n))/(z_n - y_n) \to f'(x)$. Ebből világos, hogy $g_n \to f'$ m.m. $x \in [a, b]$-re. A Fatou-lemma szerint

$$\int_a^b f' \, d\lambda \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n \, d\lambda = f(b) - f(a),$$

tehát f' Lebesgue-integrálható.

305. Ha $a \le x < y \le b$, akkor minden n-re

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i(y) - f_i(x)}{y - x} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(y) - f_i(x)}{y - x},$$

hiszen a függvények monotonitása miatt mindegyik differenciahányados nemnegatív. Ebből következik, hogy ha az $x \in (a, b)$ pontban mindegyik f_n és f is differenciálható, akkor $f'(x) \ge \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$. Mivel ez minden n-re igaz, ezért $f'(x) \ge \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$ minden ilyen pontban, tehát m.m.

Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ sor konvergens (és az összege $f(a)$), ezért az f_n függvényeket kicserélhetjük az $f_n - f_n(a)$ függvényekre. Ez a csere nem befolyásolja a szereplő függvények deriváltját (ahol létezik), sem a sor pontonkénti konvergenciáját. Így feltehetjük, hogy $f_n(a) = 0$ minden n-re. Ekkor $0 \le f_n(x) \le f_n(b)$ minden n-re és minden $x \in [a, b]$-re.

Legyen $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_n$ minden n-re. Legyenek $n_1 < n_2 < \ldots$ olyan indexek, amelyekre $f(b) - s_{n_k}(b) < 1/k^2$. Ekkor $f - s_{n_k} < 1/k^2$ mindenütt $[a, b]$-n, tehát a $\sum_{k=1}^{\infty}(f - s_{n_k})$ sor (egyenletesen) konvergens $[a, b]$. Legyen az összege g. A $\sum_{k=1}^{\infty}(f - s_{n_k})$ sor tagjai szintén monoton növő függvények, tehát, amint láttuk, $\sum_{k=1}^{\infty}(f'(x) - s'_{n_k}(x)) \le g'(x)$ m.m. x-re. Így a $\sum_{k=1}^{\infty}(f'(x) - s'_{n_k}(x))$ sor m.m. konvergens, tehát $f'(x) - s'_{n_k}(x) \to 0$ m.m. x-re. Mivel m.m. x-re az $s'_n(x)$ sorozat monoton nő, ezért m.m. x-re $s'_n(x) \to f'(x)$, amivel az állítást beláttuk.

306. Feltehetjük, hogy $H \subset [0, 1]$. Azt kell belátnunk, hogy m.m. $x \in H$-ra $f'(x) = 1$, ahol $f(x) = \lambda(H \cap [0, x])$. Legyen G_n olyan nyílt halmaz, amelyre $H \subset G_n$ és $\lambda(G_n \setminus H) < 1/2^n$, és legyen $g_n(x) = \lambda(G_n \cap [0, x])$. Ekkor $g_n - f$ monoton nő, és $0 \le g_n - f \le 1/2^n$. Így a $\sum_n (g_n - f)$ sor konvergens, legyen az összege G. Tudjuk, hogy m.m. pontban az f, g_n, G függvények mindegyike differenciálható. Egy ilyen x pontban $\sum_n (g'_n(x) - f'(x)) \le G'(x)$, tehát $g'_n(x) - f'(x) \to 0$. Mivel $x \in H$ esetén $g'_n(x) = 1$ minden n-re, ezért m.m. $x \in H$-ra $f'(x) = 1$.

307. Legyen A a H halmaz egy mérhető burka. A 119. feladat állítása szerint $\lambda(H \cap I) = \lambda(A \cap I)$ minden I mérhető halmazra, tehát minden intervallumra. Ebből nyilvánvaló, hogy egy x_0 pont akkor és csak akkor sűrűségi pontja H-nak, ha sűrűségi pontja A-nak. Mivel az előző (306.) feladat állítása szerint m.m. $x \in A$ pont sűrűségi pontja A-nak, ezért m.m. $x \in H$ pont sűrűségi pontja H-nak.

308. Jelöljük f-fel a Cantor-függvényt (lásd a 169. feladatot). Terjesszük ki f-et $\mathbb{R}$-re úgy, hogy $f(x) = 0$ legyen minden $x < 0$-ra, és $f(x) = 1$ legyen minden $x > 1$-re. Ekkor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő és folytonos. Legyen (r_n) a racionális számok egy sorozatba rendezése. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x - r_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, tehát az összege, f folytonos. Fubini tétele szerint $f' = 0$ m.m., hiszen $f(x - r_n)$ deriváltja m.m. nulla. Az f függvény szigorúan monoton növő. Valóban, ha $x < y$, akkor van olyan n, hogy $x < r_n < y$. Mivel a Cantor-függvény pozitív $(0, 1)$-ben, ezért $f(x - r_n) \le f(0) = 0 < f(y - r_n)$, amiből világos, hogy $f(x) < f(y)$.

309. Tegyük fel, hogy az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ sor konvergens. Az f_n függvényt kicserélhetjük $f_n - f_n(x_0)$-ra; ez nem befolyásolja sem a szereplő függvények deriváltját (ahol létezik), sem a függvénysor konvergenciáját, sem pedig az f_n függvények totális variációját. Feltehetjük tehát, hogy $f_n(x_0) = 0$ minden n-re.

Legyen $V_n = V(f_n;[a,b])$ minden n-re. A feltétel szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ sor konvergens. Mivel $|f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(x_0)| \le V_n$ minden n-re és minden $x \in [a,b]$-re, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor mindenütt konvergens $[a,b]$-ben. Legyen az összege f.

Legyen $g_n(x) = V(f_n;[a,x])$ minden n-re és minden $x \in [a,b]$-re. Ekkor g_n monoton növő függvény $[a,b]$-n. Mivel $|g_n| \le V_n$ mindenütt $[a,b]$-n, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ függvénysor mindenütt konvergens $[a,b]$-n. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g$, akkor Fubini tétele szerint $\sum_{n=1}^{\infty} g_n' = g'$ m.m. $[a,b]$-n.

Könnyen látható, hogy $g_n - f_n$ is monoton növő függvény $[a,b]$-n minden n-re. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty}(g_n - f_n) = g - f$, ezért Fubini tétele szerint $\sum_{n=1}^{\infty}(g_n' - f_n') = g' - f'$ m.m. $[a,b]$-n. Így $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = f'$ m.m. $[a,b]$-n.

310. A 190. feladat állítása szerint minden n-re van olyan $g_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ lépcsősfüggvény, hogy $\int_a^b |g - g_n|\, d\lambda < 1/n^2$. Legyen $f_n(x) = \int_a^x g_n\, d\lambda$ minden $x \in [a,b]$-re. Ekkor $f(x) - f_n(x) = \int_a^x (g - g_n)\, d\lambda$ minden $x \in [a,b]$-re, tehát a 251. feladat állítása szerint $f - f_n$ korlátos változású, és $V(f_n;[a,b]) \le 1/n^2$. Mivel $f(a) - f_n(a) = 0$ minden n-re, ezért a 309. feladat állítása szerint a $\sum_{n=1}^{\infty}(f' - f_n')$ sor m.m. konvergens $[a,b]$-ben. Így $f' - f_n' \to 0$, azaz $f_n' \to f'$ m.m. $[a,b]$-ben. Mivel f_n egy lépcsősfüggvény integrálfüggvénye, ezért $f_n' = g_n$ véges sok pont kivételével, tehát $g_n \to f'$ m.m. $[a,b]$-ben. Azonban $g_n \to g$ m.m. $[a,b]$-ben (lásd a 180. feladatot), így $f' = g$ m.m. $[a,b]$-ben.

311. Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos, akkor van olyan g Lebesgue-integrálható függvény, hogy $f(x) = f(a) + \int_a^x g\, d\lambda$ minden $x \in [a,b]$-re (lásd a 272. feladatot). Az 310. feladat állításából következik, hogy $g = f'$ m.m.

312. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ szinguláris. Ekkor f korlátos változású, tehát $f = g - h$, ahol f és g monoton növő függvények. Ekkor g és h m.m. differenciálhatóak, és így $g' - h' = f' = 0$ m.m., hiszen f szinguláris. Az 304. feladat szerint g' Lebesgue-integrálható $[a,b]$-ben. Legyen $A(x) = \int_a^x g'\, d\lambda$ minden $x \in [a,b]$-re. Ekkor $A' = g'$ m.m. $[a,b]$-ben.

Az 304. feladat megoldásában azt is láttuk, hogy egy monoton növő függvény deriváltjának az integrálja legfeljebb annyi, mint a függvény megváltozása. Így minden $a \le c < d \le b$-re $\int_c^d g'\,d\lambda \le g(d)-g(c)$, azaz $A(d)-A(c) \le g(d)-g(c)$. Mivel $h' = g'$ m.m., ezért ugyanígy kapjuk, hogy $A(d)-A(c) \le h(d)-h(c)$. Így $g(c)-A(c) \le g(d)-A(d)$ és $h(c)-A(c) \le H(d)-A(d)$ minden $a \le c < d \le b$-re, tehát a $g-A$ és $h-A$ függvények monoton növőek $[a,b]$-ben. Mivel $(g-A)' = g'-A' = 0$ és $(h-A)' = g'-A' = 0$ m.m., ezért $g-A$ és $h-A$ szinguláris monoton növő függvények, melyek különbsége f.

313. Az (i)$\Longrightarrow$(ii) implikáció nyilvánvaló a Banach–Zareckij-tételből (268. feladat) és abból, hogy minden differenciálható függvény (N) tulajdonságú. (Az utóbbi állítást illetően lásd a 224., 228. és 270. feladatok bármelyikét.) A (ii)$\Longrightarrow$(iii) implikáció nyilvánvaló a 311. feladat állításából. Végül a (iii)$\Longrightarrow$(i) implikáció nyilvánvaló a 252. feladat állításából.

314. Feltehetjük, hogy f-nek az x_0 pontban lokális minimuma van, mert különben áttérünk a $-f$ függvényre. Azt is feltehetjük, hogy $f(x_0)=0$, mert különben áttérünk az $f-f(x_0)$ függvényre. Ekkor van olyan $\eta>0$, hogy $f(x)\ge 0$ minden $x\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$-ra.

Legyen f primitív függvénye F. Tetszőleges $0<h<\eta$-ra $F'=f\ge 0$ az $I=[x_0,x_0+h]$ intervallumban, tehát itt F monoton növő. Az előző (313.) feladat állítása szerint F abszolút folytonos I-ben, tehát $F(x_0+h)-F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f\,d\lambda$ (felhasználva a 311. feladat állítását).

Legyen $\varepsilon>0$ adott, és legyen $A_h = \{x\in(x_0,x_0+h)\colon |f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon\}$. Ekkor

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f\,d\lambda \ge \frac{1}{h}\cdot\int_{A_h} f\,d\lambda \ge \frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot\lambda(A_h).$$

Mivel $h\to 0$ esetén $(F(x_0+h)-F(x_0))/h \to f(x_0)=0$, ezért $\lambda(A_h)/h\to 0$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $\lambda(B_h)/h\to 0$, ahol $B_h=\{x\in(x_0-h,x_0)\colon |f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon\}$.

Ezzel beláttuk, hogy

$$\lim_{h\to 0+0}\tfrac{1}{2h}\cdot\lambda(\{x\in(x_0-h,x_0+h)\colon |f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon\})=0.$$

Mivel ez minden $\varepsilon>0$-ra igaz, f approximatíve folytonos x_0-ban.

315. Nyilvánvaló, hogy $f_s'(x)=0$ minden $x\in(0,1)\setminus C$-re. Belátjuk, hogy $f_s'(x)=\infty$ minden $x\in(0,1)\cap C$-re. Legyen $x\in(0,1)\cap C$ tetszőleges. Ekkor $x = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n/3^n$, ahol $\varepsilon_n=0$ vagy 1 minden n-re. Ha $2\cdot 3^{-n}\le h\le 2\cdot 3^{-n+1}$, akkor $\varepsilon_n = 0$ esetén

$$f(x+h) - f(x-h) \geq f(x + 2 \cdot 3^{-n}) - f(x) = 2^{-n},$$

míg $\varepsilon_n = 1$ esetén

$$f(x+h) - f(x-h) \geq f(x) - f(x - 2 \cdot 3^{-n}) = 2^{-n}.$$

Tehát ε_n értékétől függetlenül

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \geq \frac{2^{-n}}{4 \cdot 3^{-n+1}} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Ebből világos, hogy $h \to 0$ esetén $(f(x+h) - f(x-h))/(2h) \to \infty$, azaz $f'_s(x) = \infty$.

316. Nincs olyan folytonos és nem-konstans függvény $[a, b]$-n, amelyre minden $x \in [a, b]$ pontban $f'(x) = 0$ vagy $f'(x) = \infty$. Tegyük fel ugyanis, hogy f ilyen függvény. Mivel f nem konstans, ezért van olyan pont, amelyben $f'(x) = \infty$. Másrészt $f'(x) = \infty$ csak egy nullmértékű halmaz pontjaiban állhat a 110. feladat szerint, ezért olyan pont is van, amelyben $f'(x) = 0$.

A $g(x) = f(x) - x$ függvény folytonos, és nem monoton, hiszen van olyan pont, amelyben a deriváltja -1, és olyan is van, amelyben a deriváltja végtelen. Ezért van olyan $x \in (a, b)$ pont, amelyben g-nek lokális szélsőértéke van. Ez azonban lehetetlen, mert $g'(x) = -1$ vagy $g'(x) = \infty$, és így a g függvény vagy szigorúan lokálisan nő, vagy pedig szigorúan lokálisan csökken x-ben.

Ha az f függvényről nem tesszük fel, hogy folytonos, csak azt, hogy nem konstans, akkor nyilván van ilyen függvény. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Az f függvénynek mindenütt nulla a deriváltja, kivéve a nulla pontban, ahol végtelen.

A feladat harmadik kérdése úgy szól, hogy van-e olyan függvény, amelyik semmilyen intervallumban sem konstans, és a deriváltja minden pontban nulla vagy végtelen. A feladatnak erre a részére kivételesen nem adunk megoldást, és a választ sem áruljuk el. Az olvasónak most az egyszer segítség nélkül kell megtalálnia a választ.

317. (i)$\Longrightarrow$(ii): Adott $\varepsilon > 0$-ra legyen $A = \{x \in G \colon |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$.

Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(B(x_0,r))}\cdot\int_{B(x_0,r)}|f(x)-f(x_0)|\,d\lambda\geq\\ \geq\frac{1}{\lambda(B(x_0,r))}\cdot\int_{A\cap B(x_0,r)}|f(x)-f(x_0)|\,d\lambda\geq\\ \geq\varepsilon\cdot\frac{\lambda(A\cap B(x_0,r))}{\lambda(B(x_0,r))}.\end{aligned}$$

Ha x_0 Lebesgue-pont, akkor $r\to 0$ esetén a bal oldal nullához tart, tehát $\lambda(A\cap B(x_0,r))/\lambda(B(x_0,r))\to 0$, és így f approximatíve folytonos x_0-ban.

(i)$\Longrightarrow$(iii): Mivel

$$\frac{\vartheta(B(x_0,r))}{\lambda(B(x_0,r))}-f(x_0)=\frac{1}{\lambda(B(x_0,r))}\cdot\int_{B(x_0,r)}(f(x)-f(x_0))\,d\lambda,$$

ezért $r\to 0$ esetén

$$\left|\frac{\vartheta(B(x_0,r))}{\lambda(B(x_0,r))}-f(x_0)\right|\leq\frac{1}{\lambda(B(x_0,r))}\cdot\int_{B(x_0,r)}|f(x)-f(x_0)|\,d\lambda\to 0.$$

318. Az előző (317.) feladat állítását felhasználva csak azt kell belátnunk, hogy ha f approximatíve folytonos x_0-ban, akkor x_0 Lebesgue-pontja f-nek. Tegyük fel, hogy $|f(x)|\leq K$ ha $|x-x_0|<\eta$. Adott $0<\varepsilon<\eta$-ra legyen $A=\{x\in G\colon |f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,r)}|f(x)-f(x_0)|\,d\lambda=\\ =\int_{B(x_0,r)\cap A}|f(x)-f(x_0)|\,d\lambda+\int_{B(x_0,r)\setminus A}|f(x)-f(x_0)|\,d\lambda\leq\\ \leq 2K\cdot\lambda(B(x_0,r)\cap A)+\varepsilon\cdot\lambda(B(x_0,r)),\end{aligned}$$

tehát

$$\frac{1}{\lambda(B(x_0,r))}\cdot\int_{B(x_0,r)}|f(x)-f(x_0)|\,d\lambda\leq 2K\cdot\frac{\lambda(B(x_0,r)\cap A)}{\lambda(B(x_0,r))}+\varepsilon.$$

Mármost f x_0-beli approximatív folytonossága miatt

$$\lambda(B(x_0,r)\cap A)/\lambda(B(x_0,r))\to 0,\ \text{ha}\ r\to 0,$$

ezért

$$\frac{1}{\lambda(B(x_0,r))}\cdot\int_{B(x_0,r)}|f(x)-f(x_0)|\,d\lambda<2\varepsilon,$$

ha r elég kicsi. Mivel ez minden $0 < \varepsilon < \eta$-ra igaz, ezért

$$\frac{1}{\lambda(B(x_0,r))} \cdot \int_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\, d\lambda \to 0,$$

ha $r \to 0$, tehát x_0 Lebesgue-pontja f-nek.

319. Az f függvénynek van primitív függvénye a 298. feladat szerint. Legyen F_1 egy primitív függvény. Mivel f minden intervallumban Riemann-integrálható, ezért a Newton–Leibniz-formula szerint $\int_0^x f(t)\,dt = F_1(x) - F_1(0)$. Tudjuk, hogy $\int_0^x f\,d\lambda = \int_0^x f(t)\,dt$ (lásd a 193. feladatot), tehát $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = F_1(x) - F_1(0)$ minden x-re. Így $F' = F_1' = f$.

Pontosan ugyanígy bizonyítható, hogy ha $g(x) = \cos(1/x)$, $g(0) = 0$ és $G(x) = \int_0^x g\,d\lambda$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $G' = g$ mindenütt.

Most belátjuk, hogy az $x = 0$ pont nem Lebesgue-pontja f-nek. Minden $x > 0$-ra

$$\begin{aligned}\int_0^x |f(t) - f(0)|\,d\lambda &= \int_0^x |\sin(1/t)|\,d\lambda \ge \int_0^x \sin^2(1/t)\,d\lambda = \\ &= \int_0^x \sin^2(1/t)\,dt = \int_0^x \frac{1-\cos(2/t)}{2}\,d\lambda = \\ &= \frac{x}{2} - G(x/2).\end{aligned}$$

Mivel $G'(0) = 0$, ezért $x \to 0$ esetén $G(x/2)/x \to 0$. Így

$$\liminf_{x\to 0+0} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x |f(t) - f(0)|\,d\lambda \ge \liminf_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{2} - \frac{G(x/2)}{x}\right) = \frac{1}{2},$$

tehát az $x = 0$ pont nem Lebesgue-pontja f-nek.

Ebből az is következik, hogy f nem approximatíve folytonos 0-ban, hiszen f korlátos, és így a 318. feladat állítása szerint, ha f approximatíve folytonos lenne 0-ban, akkor az $x = 0$ pont Lebesgue-pontja lenne f-nek.

320. Tegyük fel, hogy H olyan mérhető halmaz, hogy x_0 sűrűségi pontja H-nak, $x_0 \in H$, és f a H halmazra szorítkozva folytonos x_0-ben. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és legyen $A = \{x \in G\colon |f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon\}$. Mivel f a H halmazra szorítkozva folytonos x_0-ban, ezért van olyan $\eta > 0$, hogy $x \in H$ és $|x - x_0| < \eta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, azaz $x \notin A$. A $B_r = B(x_0, r)$ jelölést használva ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha $0 < r < \eta$, akkor $A \cap B_r \subset B_r \setminus H$. Így $0 < r < \eta$ esetén

$$\lambda(A \cap B_r) \le \lambda(B_r \setminus H) = \lambda(B_r) - \lambda(B_r \cap H),$$

és
$$\frac{\lambda(A\cap B_r)}{\lambda(B_r)}\le 1-\frac{\lambda(B_r\cap H)}{\lambda(B_r)}.$$
Mivel x_0 sűrűségi pontja H-nak, ezért $r\to 0$ esetén $\lambda(B_r\cap H)/\lambda(B_r)\to 1$, és így $\lambda(A\cap B_r)/\lambda(B_r)\to 0$. Mivel ez minden $\varepsilon>0$-ra igaz, ezért f approximatíve folytonos az $x_0\in G$ pontban.

Most tegyük fel, hogy f approximatíve folytonos az $x_0\in G$ pontban. Legyen $H_\varepsilon=\{x\in G\colon |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}$. Ekkor $r\to 0$ esetén $\lambda(B_r\setminus H_\varepsilon)/\lambda(B_r)\to 0$. Ebből
$$1-\frac{\lambda(B_r\cap H_\varepsilon)}{\lambda(B_r)}\to 0,\qquad \frac{\lambda(B_r\cap H_\varepsilon)}{\lambda(B_r)}\to 1,$$
tehát x sűrűségi pontja H_ε-nak minden $\varepsilon>0$-ra. A H_ε halmazok segítségével most konstruálunk egy olyan H halmazt, amelynek x_0 sűrűségi pontja, $x_0\in H$, és f a H halmazra szorítkozva folytonos x_0-ban.

Válasszunk egy szigorúan monoton csökkenő és nullához tartó (r_k) sorozatot, amelyre teljesül, hogy $\lambda(H_{1/k}\cap B_r)>(1-(1/k))\cdot\lambda(B_r)$ minden $0<r\le r_k$-ra és $k=1,2,\ldots$-re. Nyilván azt is feltehetjük, hogy $r_{k+1}/r_k\to 0$ ha $k\to\infty$. Legyen
$$H=\{x_0\}\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}(H_{1/k}\setminus B_{r_{k+2}}).$$
Ekkor f a H halmazra megszorítva folytonos lesz x_0-ban. Tegyük fel ui., hogy $x\in H\cap B_{r_{k+2}}$ és $x\ne x_0$. Ekkor van olyan n, hogy $x\in H_{1/n}\setminus B_{r_{n+2}}$. Mivel $x\in B_{r_{k+2}}$, ezért szükségképpen $n\ge k$, $x\in H_{1/k}$ és $|f(x)-f(x_0)|<1/k$.

Ha $r_{k+1}\le r\le r_k$, akkor $H\cap B_r\supset(H_{1/k}\cap B_r)\setminus B_{r_{k+2}}$ alapján
$$\lambda(H\cap B_r)>\lambda(H_{1/k}\cap B_r)-\lambda(B_{r_{k+2}})>(1-(1/k))\cdot\lambda(B_r)-\lambda(B_{r_{k+2}})=$$
$$=\lambda(B_r)\cdot\left(1-\frac{1}{k}-\frac{\lambda(B_{r_{k+2}})}{\lambda(B_r)}\right)\ge\lambda(B_r)\cdot\left(1-\frac{1}{k}-\frac{\lambda(B_{r_{k+2}})}{\lambda(B_{r_{k+1}})}\right).$$
Mivel $\lambda(B_{r_{k+2}})/\lambda(B_{r_{k+1}})\to 0$ ha $k\to\infty$, ezért $\lambda(H\cap B_r)/\lambda(B_r)\to 1$ ha $r\to 0$, azaz x_0 sűrűségi pontja H-nak.

321. Először is belátjuk, hogy $i_1<i_2<\ldots<i_s$. Az $i_1,\ldots,i_s$ indexek különbözőek, hiszen a B_{i_j} gömbök páronként diszjunktak. Mivel $i_1=1$, ezért $i_1<i_2$. Mivel i_2 volt a legkisebb index, amelyre $B_{i_2}\cap B_{i_1}=\emptyset$, és $B_{i_3}\cap B_{i_1}=\emptyset$ is igaz, ezért szükségképpen $i_2<i_3$. Ugyanígy adódik, hogy $i_3<i_4$ stb.

Belátjuk, hogy minden $i=1,\ldots,n$-re van olyan k, hogy a B_{i_k} gömböt a középpontjából 3-szorosára nyújtva, az így kapott B'_{i_k} gömb lefedi B_i-t. Ez nyilvánvaló, ha $i=i_j$ valamely $j=1,\ldots,s$-re. Tegyük fel, hogy $i_j<i<i_{j+1}$. Mivel i_{j+1} volt a legkisebb index, amelyre $B_{i_{j+1}}$ diszjunkt a korábban kiválasztott gömböktől, ezért B_i-re ez nem igaz. Így van olyan $1\le k\le j$, hogy $B_{i_k}\cap B_i\ne\emptyset$.

Legyen $x \in B_{i_k} \cap B_i$. Ekkor tetszőleges $y \in B_i$-re

$$|y - a_{i_k}| \le |y - x| + |x - a_{i_k}| < 2r_i + r_{i_k} \le 3r_{i_k},$$

hiszen $i_k < i$ miatt $r_i \le r_{i_k}$. Ezzel beláttuk, hogy $y \in B'_{i_k}$. Ez minden $y \in B_i$-re igaz, tehát $B_i \subset B'_{i_k}$.

322. Minden $x \in H_t$-hez válasszunk egy x középpontú B_x gömböt, amelyre $\mu(B_x) > \lambda(B_x) \cdot t$. Lindelöf tétele szerint a B_x gömbök közül megszámlálhatóan sok lefedi H_t-t. Legyenek $B_1, B_2, \ldots$ olyan gömbök, melyekre $\mu(B_i) > \lambda(B_i) \cdot t$ minden i-re, és $H_t \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Ekkor

$$\lambda(H_t) \le \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right).$$

Így elég belátni, hogy $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \le 3^p \cdot \mu(\mathbb{R}^p)/t$ minden n-re.

Legyen n rögzített. A gömbökre vonatkozó lefedési tétel (321. feladat) szerint vannak olyan $i_1, \ldots, i_s$ indexek, hogy a B_{i_j} gömbök páronként diszjunktak, és ha a B_{i_j} gömbök mindegyikét a középpontjából 3-szorosára nyújtjuk, akkor az így kapott B'_{i_j} gömbök lefedik az $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ halmazt. Így

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \le \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{s} B'_{i_j}\right) \le \sum_{j=1}^{s} \lambda(B'_{i_j}) = \sum_{j=1}^{s} 3^p \cdot \lambda(B_{i_j}) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{s} \frac{3^p}{t} \cdot \mu(B_{i_j}) = \frac{3^p}{t} \cdot \sum_{j=1}^{s} \mu(B_{i_j}) =$$

$$= \frac{3^p}{t} \cdot \mu\left(\bigcup_{j=1}^{s} B_{i_j}\right) \le \frac{3^p}{t} \cdot \mu(\mathbb{R}^p).$$

Itt az utolsó előtti egyenlőség abból következik, hogy a B_{i_j} gömbök páronként diszjunktak. Ezzel az állítást beláttuk.

323. Feltehetjük, hogy $G = \mathbb{R}^p$, mert különben f-et kiterjesztjük $\mathbb{R}^p$-re az $f(x) = 0$ $(x \notin G)$ definícióval. Jelöljük C-vel azon pontok halmazát, amelyek nem Lebesgue-pontjai f-nek. Ha C_n jelöli azon x_0 pontok halmazát, amelyekre

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{1}{\lambda(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\, d\lambda > \frac{1}{n},$$

akkor $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Tegyük fel, hogy $\lambda(C) > 0$. Ekkor van olyan n, hogy $\lambda(C_n) > 0$. Rögzítsünk egy ilyen n-et, és legyen $\varepsilon = \min(1/n, \lambda(C_n))/(3^p+1)$.

A 191. feladat állítása szerint van olyan $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\int_{\mathbb{R}^p} |f-g|\,d\lambda < \varepsilon^2$. Legyen $h = f - g$, és jelöljük A_ε-nal azon $x \in \mathbb{R}^p$ pontok halmazát, melyekre van olyan $r > 0$, hogy $\int_{B(x,r)} |h|\,d\lambda > \varepsilon \cdot \lambda(B(x,r))$. A függvényekre vonatkozó maximál-egyenlőtlenség szerint $\lambda(A_\varepsilon) < 3^p\varepsilon$. Legyen $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^p\colon |h(x)| > \varepsilon\}$. Mivel $\int_{\mathbb{R}^p} |h|\,d\lambda < \varepsilon^2$, ezért $\lambda(B_\varepsilon) < \varepsilon$. Ha $x_0 \notin A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, akkor

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{1}{\lambda(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} |f(x)-f(x_0)|\,d\lambda \le 3\varepsilon. \tag{67}$$

Valóban,

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x_0,r)} |f(x)-f(x_0)|\,d\lambda \le \\
&\quad\le \int_{B(x_0,r)} |h(x)-h(x_0)|\,d\lambda + \int_{B(x_0,r)} |g(x)-g(x_0)|\,d\lambda \le \\
&\quad\le \int_{B(x_0,r)} |h(x)|\,d\lambda + |h(x_0)|\cdot\lambda(B(x_0,r)) + \int_{B(x_0,r)} |g(x)-g(x_0)|\,d\lambda = \\
&\quad= I_1 + |h(x_0)|\cdot\lambda(B(x_0,r)) + I_2
\end{aligned} \tag{68}$$

minden $r > 0$-ra. Mivel $x_0 \notin A_\varepsilon$, ezért $I_1 < \varepsilon\cdot\lambda(B(x_0,r))$. Mivel $x_0 \notin B_\varepsilon$, ezért $|h(x_0)| \le \varepsilon$. Mivel g folytonos, ezért $I_2 < \varepsilon\cdot\lambda(B(x_0,r))$, ha r elég kicsi. Így (68) alapján megkapjuk (67)-et.

Mivel $3\varepsilon < 1/n$, ezért (67) alapján megállapíthatjuk, hogy ha $x_0 \notin A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, akkor $x_0 \notin C_n$, vagyis $C_n \subset A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$. Ez azonban lehetetlen, mert $\lambda(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) < (3^p+1)\varepsilon \le \lambda(C_n)$. Ezzel beláttuk, hogy $\lambda(C) = 0$, azaz m.m. x_0 Lebesgue-pontja f-nek.

324. A Radon–Nikodym-tétel szerint van olyan g Lebesgue-integrálható függvény, hogy $\vartheta(A) = \int_A g\,d\lambda$ minden $A \subset G$ Lebesgue-mérhető halmazra. Így az állítás a 323. és 317. feladatok állításaiból következik.

325. Tegyük fel először, hogy ϑ véges mérték. Mivel ϑ szinguláris λ-ra nézve, létezik egy $N \subset G$ Borel-halmaz, amelyre $\lambda(N) = 0$ és $\vartheta(G \setminus N) = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. A 75. feladat állítása szerint van olyan $G \setminus N \subset U \subset G$ nyílt halmaz, amelyre $\vartheta(U) < \varepsilon^2$. Legyen $\vartheta_1(H) = \vartheta(H \cap U)$ minden H Borel-halmazra. Ekkor ϑ_1 mérték $\mathbb{R}^p$ Borel-halmazain, és $\vartheta_1(\mathbb{R}^p) < \varepsilon^2$. Jelöljük A_ε-nal azon $x \in U$

pontok halmazát, melyekre van olyan $r > 0$, hogy $\vartheta_1(B(x,r)) > \varepsilon \cdot \lambda(B(x,r))$. A maximál-egyenlőtlenség szerint $\lambda(A_\varepsilon) < 3^p\varepsilon$. Ha $x \in G \setminus (A_\varepsilon \cup N)$, akkor

$$\limsup_{r\to 0+0} \frac{\vartheta(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} \le \varepsilon, \tag{69}$$

hiszen $G \setminus N \subset U$ és U nyílt, tehát elég kis r-re $\vartheta(B(x,r)) = \vartheta_1(B(x,r))$. Jelöljük C-vel azon $x \in U$ pontok halmazát, amelyekre

$$\limsup_{r\to 0+0} \frac{\vartheta(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} > 0.$$

Ha C_n azon pontok halmaza, amelyekben a $\limsup$ értéke $> 1/n$, akkor $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Tegyük fel, hogy $\lambda(C) > 0$. Ekkor van olyan n, hogy $\lambda(C_n) > 0$. Legyen $\varepsilon = \min(1/n, \lambda(C_n)/3^p)$. Mivel $\lambda(A_\varepsilon \cup N) < 3^p\varepsilon \le \lambda(C_n)$, ezért van olyan $x \in C_n$ pont, amelyre $x \notin A_\varepsilon \cup N$. Ekkor (69) alapján $x \notin C_n$ (hiszen $\varepsilon \le 1/n$), ami lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy $\lambda(C) = 0$, azaz λ-m.m. pontban $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = 0$.

Most legyen ϑ véges előjeles mérték, amely szinguláris λ-ra nézve. Legyen $N \subset G$ olyan Borel-halmaz, amelyre $\lambda(N) = 0$ és $\vartheta(H) = 0$ minden $H \subset G \setminus N$ Borel-halmazra. Hahn felbontási tétele szerint van olyan $P \subset G$ Borel-halmaz, hogy $\vartheta(A \setminus P) \le 0 \le \vartheta(A \cap P)$ minden $A \subset G$ Borel-halmazra. Legyen $\alpha(A) = \vartheta(A \cap P)$ és $\nu(A) = -\vartheta(A \setminus P)$ minden $A \subset G$ Borel-halmazra. Ekkor α és ν véges mértékek $\mathcal{B}(G)$-n, és $\vartheta = \alpha - \nu$. Az α és ν mértékek szingulárisak λ-ra nézve, hiszen $\alpha(G \setminus N) = \vartheta((G \setminus N) \cap P) = 0$ és $\nu(G \setminus N) = -\vartheta((G \setminus N) \setminus P) = 0$. Így $\frac{d\alpha}{d\lambda}(x) = 0$ és $\frac{d\nu}{d\lambda}(x) = 0$ m.m. Így $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = 0$ m.m., hiszen $\vartheta = \alpha - \nu$.

326. Legyen ϑ Lebesgue-felbontása λ-ra nézve $\alpha + \sigma$. A Radon–Nikodym-tétel szerint van olyan $f\colon G \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható függvény, hogy $\alpha(A) = \int_A f\, d\lambda$ minden $A \in \mathcal{B}(G)$-re. Mivel λ-m.m. pont Lebesgue-pontja f-nek a 323. feladat állítása szerint, ezért a 324. feladat állítása szerint $\frac{d\alpha}{d\lambda}(x) = f(x)$ λ-m.m. $x \in G$-re. Mármost a 325. feladat állítása szerint $\frac{d\sigma}{d\lambda}(x) = 0$ m.m. Így $\vartheta = \alpha + \sigma$ alapján $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = f(x)$ m.m. A fentiekből az (i), (ii), (iii) állítások mindegyike azonnal következik.

327. Legyen N azon $x \in G$ pontok halmaza, amelyekre $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = 0$ nem teljesül. A feltétel szerint $\lambda(N) = 0$. Ha $x \in G \setminus N$, akkor $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = 0$, és van olyan $r > 0$, hogy $\vartheta(B(x,r))$ véges. Ekkor ϑ véges minden $A \subset B(x,r)$ Borel-halmazra. Így alkalmazhatjuk az előző (326.) feladat állítását, és azt kapjuk, hogy ϑ szinguláris λ-ra nézve $B(x,r)$-ben.

Azt kaptuk, hogy minden $x \in G \setminus N$ pontnak van olyan gömb-környezete, amelyben ϑ szinguláris λ-ra nézve. Lindelöf tétele szerint ezek közül megszámlálhatóan sok lefedi $G \setminus N$-et. Legyenek $B_1, B_2, \ldots$ olyan gömbök, amelyekben ϑ szinguláris λ-ra nézve, és amelyek lefedik $G \setminus N$-et.

Legyen $N_i \subset B_i$ olyan Borel-halmaz, amelyre $\lambda(N_i) = 0$ és $\vartheta(A) = 0$ minden $A \subset B_i \setminus N_i$-re. Ekkor az $M = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ halmaz Lebesgue-mértéke nulla, és $\vartheta(A) = 0$ minden $A \subset G \setminus M$-re. Ezzel beláttuk, hogy ϑ szinguláris λ-ra nézve.

328. Legyen U azon $x \in G$ pontok halmaza, amelyekre $\vartheta(B(x,r))$ véges legalább egy $r > 0$-ra. Ha $\vartheta(B(x,r))$ véges, akkor $\vartheta(A)$ is véges minden $A \subset B(x,r)$-re, tehát U nyílt halmaz. A 326. feladat (i) állítása szerint, ha $B(x,r) \subset G$ és $\vartheta(B(x,r))$ véges, akkor a $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ derivált létezik $B(x,r)$ m.m. pontjában. Így U minden pontjának van olyan környezete, amelyben $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ m.m. létezik. Lindelöf tétele szerint ezen környezetek közül megszámlálhatóan sok lefedi U-t, tehát $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ létezik U m.m. pontjában.

Másrészt a $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ derivált létezik minden $x \in G \setminus U$ pontban is. Ha ugyanis $x \in G \setminus U$, akkor $\vartheta(B(x,r)) = \pm\infty$ minden elég kis $r > 0$-ra. Adott $x \in G \setminus U$-ra vagy $\vartheta(B(x,r)) = \infty$ minden elég kis $r > 0$-ra, vagy pedig $\vartheta(B(x,r)) = -\infty$ minden elég kis $r > 0$-ra, hiszen ha $A \subset B$ és $\vartheta(A) = \infty$, akkor szükségképpen $\vartheta(B) = \infty$, és ha $\vartheta(A) = -\infty$, akkor $\vartheta(B) = -\infty$. Így $x \in G \setminus U$ esetén $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = \infty$ vagy $\frac{d\vartheta}{d\lambda}(x) = -\infty$.

329. Tegyük fel először, hogy H korlátos és mérhető. Ekkor χ_H Lebesgue-integrálható, tehát a 323. feladat állítása szerint m.m. x pont Lebesgue-pontja χ_H-nak. Így a 317. feladat állítása szerint m.m. $x \in H$ pontra

$$\lim_{r \to 0+0} \frac{\lambda(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = \chi_H(x) = 1.$$

Ha H tetszőleges mérhető halmaz, akkor a fentiek szerint minden n-re teljesül, hogy m.m. $x \in H \cap B(0,n)$ pont sűrűségi pontja $H \cap B(0,n)$-nek, tehát H-nak is. Ebből nyilvánvaló, hogy m.m. $x \in H$ pont sűrűségi pontja H-nak.

Most legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ tetszőleges. A 119. feladat állítása szerint van olyan A mérhető halmaz, amelyre $H \subset A$, és $\lambda(H \cap B) = \lambda(A \cap B)$ minden mérhető B halmazra. A sűrűségi tétel szerint m.m. $x \in A$-ra $\lim_{r \to 0+0} \lambda(A \cap B(x,r))/\lambda(B(x,r)) = 1$.

Mivel $\lambda(A \cap B(x,r)) = \lambda(H \cap B(x,r))$ minden $x \in \mathbb{R}^p$-re és $r > 0$-ra, ezért a fenti limeszben A helyett írhatunk H-t. Mivel pedig $H \subset A$, ezért a limesz m.m. $x \in H$-ra egyenlő 1-gyel.

330. Ha H mérhető, akkor m.m. $x \in \mathbb{R}^p \setminus H$-ra

$$\frac{\lambda(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 1 - \frac{\lambda((\mathbb{R}^p \setminus H) \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} \to 0, \quad \text{ha} \quad r \to 0.$$

Most tegyük fel, hogy m.m. $x \notin H$-ra $\lim_{r\to 0} \lambda(H \cap B(x,r))/\lambda(B(x,r)) = 0$. Legyen A olyan mérhető halmaz, amelyre $H \subset A$, és $\lambda(H \cap B) = \lambda(A \cap B)$ minden mérhető B halmazra (l. a 119. feladatot). Ekkor m.m. $x \in A \setminus H$-ra $\lim_{r\to 0} \lambda(H \cap B(x,r))/\lambda(B(x,r)) = 0$. De tudjuk (lásd az előző (329.) feladatot), hogy m.m. $x \in A$-ra, és így m.m. $x \in A \setminus H$-ra is

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\lambda(A \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy $A \setminus H$ nullmértékű, és így $H = A \setminus (A \setminus H)$ mérhető.

331. Legyen A olyan mérhető halmaz, amelyre $\mathbb{R}^p \setminus H \subset A$, és $\lambda((\mathbb{R}^p \setminus H) \cap B) = \lambda(A \cap B)$ minden mérhető B halmazra (l. a 119. feladatot). Ekkor a 98. feladat állítását felhasználva azt kapjuk, hogy minden $x \in H$-ra és $r > 0$-ra

$$\frac{\underline{\lambda}(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 1 - \frac{\lambda((\mathbb{R}^p \setminus H) \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 1 - \frac{\lambda(A \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))}.$$

Így m.m. $x \in H$-ra $r \to 0$ esetén $\lambda(A \cap B(x,r))/\lambda(B(x,r)) \to 1$ nem teljesül. De azt is tudjuk, hogy $\lambda(A \cap B(x,r))/\lambda(B(x,r)) \to 1$ m.m. $x \in A$-ra. Így $H \cap A$ nullmértékű, tehát $H = (\mathbb{R}^p \setminus A) \cup (A \cap H)$ mérhető.

332. Legyen f mérhető. Ekkor az $A_{p,q} = \{x \in G \colon p < f(x) < q\}$ halmaz mérhető minden $p, q \in \mathbb{R}$-re. A sűrűségi tétel (329. feladat) szerint $A_{p,q}$-nak m.m. pontja sűrűségi pont, azaz $\lambda(N_{p,q}) = 0$, ahol $N_{p,q}$ jelöli azon $x \in A_{p,q}$ pontok halmazát, amelyek nem sűrűségi pontjai $A_{p,q}$-nak. Ekkor az $N = \bigcup \{N_{p,q} \colon p, q \in \mathbb{Q},\ p < q\}$ halmaz nullmértékű. Belátjuk, hogy f approximatíve folytonos minden $x_0 \in G \setminus N$ pontban.

Legyen $x_0 \in G \setminus N$ és $\varepsilon > 0$ adott. Válasszunk p, q racionális számokat, melyekre $f(x_0) - \varepsilon < p < f(x_0) < q < f(x_0) + \varepsilon$. Ekkor $x_0 \in A_{p,q}$, és az $A = \{x \in G \colon |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$ halmazra teljesül, hogy $A \cap A_{p,q} = \emptyset$. Így a $B_r = B(x_0, r)$ jelölést használva $A \cap B_r \subset B_r \setminus A_{p,q}$, tehát

$$\lambda(A \cap B_r) \leq \lambda(B_r \setminus A_{p,q}) = \lambda(B_r) - \lambda(B_r \cap A_{p,q})$$

minden $r > 0$-ra. Így

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(A \cap B_r)}{\lambda(B_r)} \le 1 - \frac{\lambda(B_r \cap A_{p,q})}{\lambda(B_r)} = 0,$$

hiszen $x_0 \in A_{p,q} \setminus N_{p,q}$, és így x_0 sűrűségi pontja $A_{p,q}$-nak. Ez minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, tehát f approximatíve folytonos x_0-ban.

Most tegyük fel, hogy $G = \mathbb{R}^p$ (azaz f mindenütt értelmezve van), és f m.m. pontban approximatíve folytonos. Azt kell belátni, hogy f mérhető, azaz hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$-re az $A_c = \{x \in \mathbb{R}^p \colon f(x) \le c\}$ halmaz mérhető. Tegyük fel, hogy f approximatíve folytonos az $x_0 \in \mathbb{R}^p \setminus A_c$ pontban. Ekkor $f(x_0) > c$, tehát választhatunk egy pozitív ε számot, amelyre $f(x_0) - \varepsilon > c$. Ekkor az $A = \{x \in G \colon |f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon\}$ halmazra teljesül $A_c \subset A$. Így ismét a $B_r = B(x_0, r)$ jelölést használva $B_r \cap A_c \subset B_r \cap A$ minden $r > 0$-ra. Így

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(B_r \cap A_c)}{\lambda(B_r)} \le \lim_{r\to 0} \frac{\lambda(B_r \cap A)}{\lambda(B_r)} = 0,$$

hiszen f approximatíve folytonos x_0-ban. Ez m.m. $x_0 \in \mathbb{R}^p \setminus A_c$-re igaz. Ezért a 330. feladat állítása szerint a $\mathbb{R}^p \setminus A_c$ halmaz mérhető, és így A_c is mérhető.

Végül legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, és legyen $f \colon G \to \mathbb{R}$ m.m. $x_0 \in G$ pontban approximatíve folytonos. Legyen $B \subset G$ egy tetszőleges gömb, és legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in B$ és $g(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R}^p \setminus B$. Könnyen látható, hogy g m.m. pontban approximatíve folytonos, tehát a fentiek szerint g mérhető. Így f mérhető minden G-ben fekvő gömbben. A Lindelöf-tétel felhasználásával ebből világos, hogy f mérhető.

333. Legyen $H = \bigcup \mathcal{F}$. Ha $x \in H$, akkor van olyan $F \in \mathcal{F}$ halmaz, hogy $x \in F$. Tudjuk, hogy F konvex és a belseje nem üres. Legyen $B \subset F$ egy nyílt gömb. Legyen B sugara δ, és legyen $R = \sup\{|y - x| \colon y \in B\}$. Tetszőleges $0 < r < R$-re $H \cap B(x, r)$ tartalmazza az $(1 - (r/R))x + (r/R) \cdot B$ gömböt. Így $\underline{\lambda}(H \cap B(x, r)) \ge \gamma \cdot (r\delta/R)^p$, ahol γ jelöli az egységsugarú gömb mértékét. Ebből

$$\liminf_{r\to 0+0} \frac{\underline{\lambda}(H \cap B(x, r))}{\lambda(B(x, r))} \ge \liminf_{r\to 0+0} \frac{\gamma \cdot (r\delta/R)^p}{\gamma \cdot r^p} = (\delta/R)^p > 0.$$

Mivel ez minden $x \in H$-ra igaz, ezért a 331. feladat állítása szerint H mérhető.

Jelölések mutatója

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] Járai Antal: *Mérték és integrál.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

[2] Hajnal András és Hamburger Péter: *Halmazelmélet.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[3] Paul R. Halmos: *Mértékelmélet.* Gondolat, Budapest, 1984.

[4] A.N. Kolmogorov és Sz.V. Fomin: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[5] A.A. Kirillov és A.D. Gvisiani: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[6] Laczkovich Miklós: *Valós függvénytan.* Egyetemi jegyzet. ELTE, Budapest, 1995.

[7] Laczkovich Miklós és T. Sós Vera: *Valós Analízis II.* Typotex, Budapest, 2013.

[8] Petruska György: *Analízis II.* Egyetemi jegyzet. ELTE Eötvös Kiadó, 1999.