

Előszó

Van valahol egy rejtett világ. A szépség és elegancia eldugott univerzuma, amely ezer szállal kötődik a mindennapi világunkhoz. Ez a matematika világa. És ez legtöbbünknek láthatatlan. Ez a könyv meghívó ennek a világnak a felfedezésére.

Nézzük a következő paradoxont: a matematika át- meg átszövi a mindennapi életünket. Ha vásárolunk valamit online, vagy keressük valamit az interneten, vagy GPS alapján tájékozódunk, akkor mindez valójában matematikai formulák és algoritmusok segítségével történik. Közben a legtöbb ember fél a matematikától. Hans Magnus Enzensberger költő szavaival a matematika „fehér folt a kultúránkban – idegen terület, ahol csak a kiváltságosok, a kevés beavatott érzi jól magát”. Ahogyan mondja, igen ritkán „találni olyan embert, aki határozottan állítaná, hogy elviselhetetlen szenvedés számára a regényolvasás pusztá gondolata, egy festmény vagy egy film megtekintése”. Ugyanakkor „értelmes, tanult emberek” gyakran kijelentik, mégpedig „büszkén és kihívóan”, hogy a matek „tisztá gyötrelem” már-már „rémálom” számukra, ami teljesen „letöri az embert”.

Hogyan lehetséges ez az ellentmondás? Két fő okot látok. Először is a matematika sokkal elvontabb, mint a többi tudomány, így kevésbé megközelíthető. Másodsor, az iskolában csak igen kis részét tanuljuk a mateknak, annak is a legnagyobb hányada már több mint egy évezrede ismert. A matematika hihetetlen sokat fejlődött azóta, de a modern matek kincsei legtöbbünk elől rejtve vannak.

Mi lenne, ha az iskolában olyan „képzőművészeti órára” kéne járni, ahol csak azt tanítják, hogyan kell kerítést festeni? Mi lenne, ha sohasem mutatnák meg Leonardo da Vinci és Picasso festményeit? Értékelné-e akkor a képzőművészetet? Akarnál-e többet tanulni róla? Kétlem. Valószínűleg azt mondanád, „az iskolában elvesztegetett idő volt képzőművészetet tanulni. Ha a kerítésemet valaha is festeni kell, felveszek majd valakit, aki megcsinálja”. Talán nevetségesen hangzik, de a matematikát így tanítják, és legtöbbször szemében ez olyan, mint azt nézni, hogyan szárad meg a festék a kerítésen. Míg a nagy mesterek festményei könnyen elérhetőek mindenki számára, a nagy mesterek matekja legtöbbször elől el van zárva.

Jóllehet nem csupán a matek szépsége megkapó. Galilei szerint „a Természet törvényei a matematika nyelvén íródtak”. A matek a valóság leírásának univerzális módja, segítségével megfejtjük, hogyan működik a világ, egy egyetemes nyelv, amely az igazság alapja. Világunkban, melyet egyre inkább a tudomány és technológia vezérel, a matematika egyre inkább a képesség, a haladás és az érték forrásává válik. Így azok, akik tökéletesen beszélik ezt a nyelvet, a haladás élén állnak.

Általános tévhit a matematikával kapcsolatban, hogy csupán mint eszköz használható; mondjuk, ha egy biológus kutató, adatot gyűjt, akkor megpróbál felépíteni egy matematikai modellt, ami illeszkedik az adataira (ezt talán matematikus segítségével teszi meg). Bár ez fontos alkalmazási terület, a matek ennél *sokkal többet kínál*, olyan felfedezéseket tesz lehetővé, amelyek új alapokat teremtenek, paradigmákat döntenek meg, amelyek máshogy el sem képzelhetőek. Például Albert Einstein nem adatokra próbált egyenleteket illeszteni, amikor megértette, hogy a tömegvonzás okozza a tér görbületét. Ilyen adat nem létezett. Abban az időben senki sem tudta elképzelni, hogy a terünk görbül, mindenki úgy „tudta”, hogy a világunk nem görbe. De Einstein megértette, hogy ez az egyetlen út: általánosítani kell a speciális relativitáselméletet nem inerciális rendszerekre; majd ezt a követelményt zseniális módon kiegészítette egy másikkal, nevezetesen hogy a tömegvonzásnak és gyorsulásnak ugyanaz a hatása. Ez magas szintű intellektuális feladat volt

a matematika birodalmában. Einstein itt egy matematikus, Bernhard Riemann ötven évvel azelőtti munkájára támaszkodott. Az emberi agy úgy van felépítve, hogy egyszerűen nem tudunk elképzelni kettőnél több dimenziós görbült tereket – ilyeneket csak matematikai módszerrel tudunk leírni. És láss csodát, Einsteinnek igaza volt – világegyetemünk *valóban* görbült, sőt még tágul is. Ez a matematika ereje, erről beszélek.

Sok hasonló példát hozhatnánk, nemcsak a fizikából, hanem más tudományágakból is (fogunk még néhányról beszélni). A történelem azt mutatja, hogy a matematikai gondolatok egyre gyorsabban változtatják a tudományt és technikát. Matematikai elméletek, melyeket kezdetben elvontnak és ezoterikusnak tartottak, később nélkülözhetetlenné váltak az alkalmazásokban. Charles Darwin, akinek a munkája kezdetben nem matematikán alapult, később ezt írta önéletrajzában: „Nagyon sajnálom, hogy nem jutottam elég messzire abban a törekvésemben, hogy legalább valamit megértsek a matematika fontos elméleteiből; egy újabb érzékre tesznek szert azok, akik ezzel a tudással vannak megáldva.” Ezt a következő generációnak szóló, előremutató tanácsnak tartom arról, hogyan éljünk a matematikában rejlő óriási lehetőségekkel.

Gyermekként még nem figyeltem fel a matematika rejtett világára. Mint a legtöbb ember, azt gondoltam, hogy a matematika száraz és unalmas. De szerencsés voltam, a gimnázium utolsó évében megismertem egy hivatásos matematikust, aki megnyitotta előttem a matematika mágikus világát. Megtanultam, hogy a matematikában végtelen sok lehetőség van, ugyanakkor elegáns és szép, mint a költészet, a művészet és a zene. Szerelmes lettem a matekba.

Kedves olvasó, ezzel a könyvvel azt akarom elérni nálad, amit a tanárain és mentoraim nálam, azaz meg akarom láttatni veled a matematika erejét és szépségét, képessé szeretnék tenni *téged*, hogy belépj ebbe a varázslatos világba, ahogy én tettem, még akkor is, ha sohasem használtad a „matek” és „csók” szavakat ugyanabban a mondatban. A matematika ugyanúgy bele fog kerülni az életedbe, a bőröd alá, ahogy nekem, és a világlátásod gyökeresen meg fog változni.

* * *

A matematikai tudás merőben különbözik minden más tudástól. A fizikai világról alkotott képünk talán mindig torzított lesz, de a matematikai igazságok sohasem azok. Ezek objektív, örök és szükségzerű igazságok. Egy matematikai képlet vagy egy tétel mindenkinek, mindenhol ugyanazt jelenti – lényegtelen, férfi vagy-e vagy nő, milyen a vallásod vagy a bőröd színe; és mindenkinek ugyanazt fogja jelenteni ezer év múlva is. És ami még nagyon fontos, hogy egy csapásra mindannyiunké. Senki sem szabadalmaztathat egy matematikai formulát, az mindannyiunk közös értéke. Nincs más a földön, ami ennyire mély és különleges – mégis mindenki számára könnyen elérhető. Szinte hihetetlen, hogy a tudásnak ilyen szinte kifogyhatatlan tárháza létezik. Túl drága ahhoz, hogy ráhagyjuk a „kiválasztott kevesekre”. Mert mindannyiunké.

A matematika egyik kulcsszerepe az információ elrendezése. Van Gogh ecsetvonásait is ez különbözteti meg egy pusztá mázolmánytól. Annak köszönhetően, hogy már képesek vagyunk 3D-ben nyomtatni, megszokott világunk gyökeres változáson megy át: a fizikai tárgyak szférájából minden átköltözik az információ hordozóiba. És megfordítva: hamarosan ugyanolyan könnyen materializálhatjuk az információt a 3D-nyomtatókon, mint ahogyan most könyv lesz egy PDF fájlból, avagy az MP3 fájlból muzsika. Ebben a szép új világban a matematikusok szerepe, ha lehet, még fontosabb lesz: nekik kell rendben tartaniuk az információt, és megtalálni hasznosításának módjait.

Ebben a könyvben az egyik legnagyobb gondolatot vázolom, amely a matematikában az utóbbi ötven évben született: ez a Langlands-program, amiről sokan úgy gondoljuk, hogy a matematika nagy egyesített elmélete. Ez nagyon izgalmas elmélet, amely kapcsolatot sző a matematika látszólag fényévekre levő ágai: az algebra, a geometria, a számelmélet, a függvénytan, valamint kvantumfizika között. Ha úgy tekintünk ezekre a témákra, mint a matematika rejtett világának a földrészeire, akkor a Langlands-program az az eszköz, amely átvisz az egyik földrésről a másikra, és vissza is hoz onnan.

A Langlands-programot az 1960-as évek végén Robert Langlands kezdeményezte, ő az a matematikus, aki Princetonban Albert Einstein szobájában dolgozott. Ez a program a szimmetria alapvető matematikai elméletén alapszik. Ezt az elméletet két évszázaddal korábban egy francia fiatalember vetette papírra húszéves korában, mielőtt megölték egy párbajban. Az elméletet később egy újabb lélegzetelállító felfedezés gazdagította, amely nemcsak a nagy Fermat-tétel bizonyításához vezetett, de a számokról és egyenletekről való gondolkodásunkat is forradalmasította. Ezt követte annak felismerése, hogy a matematikában is van rozetta-kő, és még mindig tele van rejtélyekkel és metaforákkal. Ezeket az analógiákat követve, mintha a matematika rejtett szakadékaiban bolyonganánk, a geometria és a kvantumfizika birodalmába hatolunk be, rendet és harmóniát teremtünk ott, ahol addig csak káosz volt.

Ezekről fogok írni, és bemutatom a matematika olyan ritkán látott oldalait, amelyek lelkesítők, tele vannak ötletekkel és hihetetlen felismerésekkel. George Cantor, a halmazelmélet atyja írta: „a matematika lényege a szabadság”. Arra tanít, hogy a valóságot vizsgáljuk, a tényeket; és kövessük őket, bárhova vezetnek is. Megszabadít a dogmáktól és előítéletektől, fejleszti az innovatív képességeinket. Így teremt olyan eszközöket, amelyekkel feltárhatjuk a dolgok lényegét.

Aztán, hogy ezeket az eszközöket helyes vagy helytelen célok szolgálatába állítjuk-e, az egészen más kérdés. Például nemrég gazdasági válsághoz vezetett bizonyos pénzügyi matematikai egyenletek felelőtlen alkalmazása. Sok döntéshozó, aki matematikai analabéta volt, merő mohóságból arrogánsan hagyatkozott ezekre az egyenletekre, egészen addig, amíg az egész rendszer majdnem összedőlt. Felhasználták az információ megszerzéséhez való aszimmetrikus viszonyukat, blöfföltek ezekkel az egyenletekkel abban a reményben, hogy mások úgysem értik. Talán, ha néhányan hamarabb megértették volna ezeknek az egyenleteknek a feltételeit, nem boldíthattak volna minket ilyen sokáig.

Vagy vegyük a következő példát: 1996-ban egy, a kormány által felkért bizottság az USA-ban megváltoztatta a fogyasztói árindexet,

amely befolyásolja az inflációt és alapja az adókulcsoknak, a társadalombiztosításnak, az egészségügynek és sok más indexelt kifizetésnek. Emberek tízmillióinak szóltak bele az életébe, de sem az új formulát nem tették közzé, sem a következményeit. És napjainkban az USA gazdaságának a hátsó kapuin keresztül újra megpróbálták visszacsempészni ezt az ásatag formulát.¹

A matematikusok közösségében az ilyen titkos tanácskozások sokkal ritkábbak. A matematikát úgy kapjuk, hogy a szigorúsághoz hozzáadjuk az intellektuális teljesség és a tényekre való támaszkodás szorzatát. Mindannyian hozzáférünk a matematikai ismeretekhez, a matematika eszköztárhoz, és ez megvéd minket attól, hogy néhány kivételezett hatalmasság önkényes döntésének legyünk az áldozatai. Ahol nincs matematika, ott szabadság sem lehet.

* * *

A matematika ugyanúgy a kulturális örökségünk része, mint a képzőművészet, az irodalom és a zene. Emberek lévén, izgat a vágy, hogy valami újat fedezzünk fel, új értelmet találjunk, jobban megértsük az univerzumot, amelyben élünk, és megtaláljuk a helyünket benne. Sajna nem fedezhetünk fel új földrészeket, mint Kolombusz, vagy léphetünk elsőként a Holdra. Mit szólnál, ha azt mondanám, nem kell vitorlásra szállnod, nem kell óceánokat átszelned vagy kirepülnöd az űrbe ahhoz, hogy felfedezd a világ csodáit? Ezek a csodák itt fekszenek előttünk, átszöve napjaink tényeivel. Bizonyos értelemben bennünk rejlenek. Matematika irányítja az univerzum folyamatait, ott bujkál a formákban és ívekben, mindennek az alapja a piciny atomoktól a legnagyobb csillagokig.

Ezzel a könyvvel vendégségbe hívlak ebbe a gazdag és izgalmas világba. Könyvem olvasásához nincs szükség semmilyen előismeretre. Ha azt gondolod, hogy a matek nehéz, hogy nem vagy képes megérteni, de ugyanakkor csábít is, szeretnél a közelébe kerülni, akkor pontosan neked írtam ezt a könyvet.

Mindenki azt gondolja, hogy hosszú éveken át kell tanulmányoznia a matematikát, hogy megragadja a lényegét. Néhányan eleve úgy gondolják, hogy a matematika nem értése velük született rendellenesség. Ezzel nem értek egyet: mindannyian hallottunk olyan

fogalmakról, mint a Naprendszer, az atomok, az elemi részecskék, a DNS kettős spirálja; még valami homályos elképzelésünk is van ezekről a fogalmakról anélkül, hogy hosszú előadásokat hallgattunk volna végig fizikából vagy biológiából. Senkit nem is lep meg, hogy ezek a bonyolult konstrukciók a kultúránk és közös tudatunk részei. Ehhez hasonlóan a matematika alapvető fogalmait is mindenki megértheti, feltéve, hogy jól mondják el neki. Az esetek többségében ehhez nem kell éveken át matematikát tanulni, nagyon sokszor egyenesen eljuthatunk a dolgok lényegéhez.

A következő a baj: Miközben az egész világ kötetlenül beszél a bolygókról, az atomokról, a DNS-ről, semmi remény sincs arra, hogy valaha is beszélne neked valaki a modern matematika olyan izgalmas tényeiről, mint például a szimmetriacsoportok, a váratlan számrendszerek – amelyekben ha kettőhöz kettőt adsz, nem négy az eredmény –, vagy a Riemann-felületek gyönyörű geometriai formái. Ez pontosan olyan, mintha folyton egy kiscicát tartanának eléd, mondván, hogy az a tigris. Pedig a tigris egészen másképpen néz ki. Én meg fogom mutatni neked teljes pompájában, látni fogod „ész-bontó szimmetriáját” – ahogyan azt William Blake olyan közérthetően mondta.

Ne érts félre! Attól, hogy elolvasod ezt a könyvet, még nem válsz matematikussá. Még azt sem mondom, hogy mindenkiből legyen matematikus. Tudhatod, ha megtanulsz néhány húron pötyögni, még nagyon kevés dalt fogsz tudni eljátszani a gitárodon. Nem te leszel a világ legjobb gitárosa, csak egy picit gazdagabb lesz az életed. Ebben a könyvben megmutatom neked a modern matematika húrjait, amelyeket eldugtak előled. És megígérem, hogy gazdagabb lesz az életed.

Egyik tanítómától, a nagy Israel Gelfandtól hallottam: „Az emberek azt szokták mondani, hogy nem értik a matematikát, pedig ez csak azt mutatja, milyen rosszul tanítják nekik a matematikát. Ha egy iszákostól megkérdezzük, melyik szám nagyobb, a $\frac{2}{3}$ vagy a $\frac{3}{5}$, biztosan nem fog tudni válaszolni. De ha választania kell, hogy két üveg vodkán osztozzon harmadmagával, vagy három üvegen ötödmagával, kapásból kivágja: „két üveg háromra, testvér.”

Céлом úgy mesélni el mindent, hogy meg is értsd.

Arról is fogok mesélni, mi történt velem azon a helyen, amit akkoriban Szovjetunióknak neveztek, s ahol egy tökéletesen elnyomó rendszerben élve, a matematika volt szinte az egyetlen lehetséges út, amely a szabadságba vezetett. Megtagadták tőlem, hogy a Moszkvai Állami Egyetemen tanuljak, mert akkoriban a Szovjetunióban nagyon erős volt a diszkrimináció. Az orrom előtt csapták be az ajtót. De én nem adtam fel. Belopakodtam az egyetemre, részt vettem az előadásokon és a szemináriumokon. Egyedül, csak magamra utalva olvastam a matekkönyveket, sokszor késő éjszakáig. Végül kifogtam a rendszeren. Nem engedtek be az ajtón, berепültem hát az ablakon! Mert ha szerelmes vagy, ki állíthatna meg?

Két ragyogó matematikus vont engem védőszárnyai alá, ők lettek a mentoraim. Irányításuk alatt matematikai kutatásokba fogtam. Még csak gimnazista voltam, de máris az ismeretlen határait feszegettem. Életem legszebb szakasza volt ez, miközben biztosan tudtam, a Szovjetunióban soha nem lehetek kutató matematikus.

Várt rám azonban egy nagy meglepetés: a cikkeimet kicsempészték a Szovjetunióból, híres lettem, és huszonegy évesen két évre meghívtak a Harvard Egyetemre. Láss csodát, ekkor jött a *peresztrojka*, amikor is a Szovjetunió szabadjára engedte a polgárait. Én pedig ott álltam megint, a Harvard oktatójaként, akinek még PhD-je sincs, és aki megint homokot szór a rendszerbe. Rendületlenül folytattam a kutatást, alapvető eredményekre jutottam a Langlands-programban, és az utóbbi húsz évben elértem, hogy meghatározó szerepem legyen benne. Elmondom, milyen fontos eredményekre jutottak briliáns tudósok, és azt is, ami közben a kulisszák mögött történt velük.

Ám ez a könyv tulajdonképpen a csók regénye. Egyszer álmodtam egy formuláról, amelytől mindenki szerelmes lesz, ez a formula lett a *A szerelem és a matematika rítusai* című filmem ígérete, amelyről majd mesélek a könyvben. Egyszer megkérdezte tőlem valaki a filmmel kapcsolatban, hogy „valóban létezik-e a szerelem képlete”.

A válaszom: „Nálunk minden képletben szerelem bujkál.” A matematika teszi lehetővé azt az időn túli, mindenén áthatoló tu-

dást, amely az anyag szívébe hatol, és egyesíti a kultúrákat, korszakokat és kontinenseket. Van egy álmom: egyszer majd minden ember megérti ezeknek a képleteknek és egyenleteknek a mágikus szépségét, és szerelembe esik a valósággal, benne minden emberrel.