FÜGGELÉK

F.1. Az elemi aritmetika nyelve

A Függelékben a fő célunk, hogy megadjuk a Goldbach típusú állítások formális definícióját, és hogy ejtsünk néhány szót a nemteljességi tétel eredeti, Gödel-féle változatának Rossertől származó élesítéséről. Az Olvasó, aki a nemteljességi tétel bizonyításával is meg akar ismerkedni, haszonnal forgathatja a [Smullyan 92] könyvet[5], amelynek olvasásához semmilyen logikai előismeret nem szükséges.

Az elemi aritmetika nyelvét a 7.2. alfejezetben definiáltuk. Ezt most néhány új fogalommal kiegészítve elevenítjük fel. Kezdjük a *terminus* fogalmával. A terminusok változókból (x, y, z stb.), a 0 számjelből, az összeadás $+$ és a szorzás $\cdot$ jeléből, valamint rákövetkezésfüggvény s jeléből épülnek fel. (A rákövetkezés – vagy szukcesszor – az a függvény, amely egy n számhoz az $n+1$ számot rendeli.) A 0, 1, 2, 3… természetes számokat ezen a nyelven tehát 0, $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$… jelöli. Az n számot

[5] Magyarul: *Gödel nemteljességi tételei,* Typotex, több kiadás.

jelölő (formális) számjelre az $\underline{n}$ rövidítést használjuk. A változókat úgy használjuk, ahogy a matematikában általában; segítségükkel például olyan terminusokat képezhetünk, mint $x + s(0)$, $(x + y) \cdot z$ stb.; amennyiben a változókhoz természetes számokat rendelünk, úgy ezek a terminusok is természetes számokat jelölnek. Ha például x-hez a 8, y-hoz a 0, z-hez pedig a 2 számot rendeljük, akkor $(x + s(y)) \cdot z$ értéke 18. A formulákat az $s = t$ alakú *egyenlőségekből* (ahol s és t egyaránt terminusok) képezzük, logikai konnektívumok („nem", „és", „vagy", „ha–akkor", „akkor és csak akkor"), az *univerzális kvantor* („minden x természetes szám esetén…") és az *egzisztenciális kvantor* („van legalább egy x természetes szám, hogy…") segítségével.

Ezen a nyelven aztán olyan állításokat fogalmazhatunk meg, amilyen például a következő:

> *Minden x természetes számhoz létezik olyan y természetes szám, hogy valamely z-vel $y = x + s(z)$ és valamely w-vel $y = s(s(w))$, és bármely u és v természetes számok esetén, ha $y = u \cdot w$, akkor vagy $u = s(0)$ és $v = y$, vagy $u = y$ és $v = s(0)$.*

Az állítás – mint látni fogjuk – azt fejezi ki, hogy végtelen sok prímszám létezik. Az aritmetika nyelvét kibővíthetjük *definiált* jelekkel és kifejezésekkel is. Így például ha a „valamely z-vel $y = x + s(z)$" helyett azt írjuk, hogy $x < y$, a „létezik w, hogy $y = s(s(w))$, és tetszőleges s és v természetes számok esetén, ha $y = u \cdot w$, akkor vagy $u = s(0)$ és $v = y$, vagy $u = y$ és $v = s(0)$" helyett pedig azt, hogy y prímszám, akkor az iménti állítás könnyebben értelmezhetővé válik:

Minden x természetes számhoz létezik olyan y természetes szám, hogy $x < y$ és y prímszám.

Amikor formulákról beszélünk, meg kell különböztetnünk a változók *szabad* és *kötött* előfordulásait. Egy változó kötött előfordulásai azok, amelyek egy kvantor hatókörébe esnek. Így például a „valamely z-vel $y = x + s(z)$ és valamely w-vel $y = s(s(w))$, és bármely u és v természetes számok esetén, ha $y = u \cdot w$, akkor vagy $u = s(0)$ és $v = y$, vagy $u = y$ és $v = S(0)$" formulában a w, az u és v változók valamennyi előfordulása kötött. Ezeket a változókat csupán arra használjuk, hogy a „minden szám esetén. . . " és a „van olyan szám, hogy. . . " logikai konstrukciókat precízen kifejezhessük. Az y változó előfordulása ugyanakkor szabad, ami azt jelenti, hogy a formula egésze az y egy tulajdonságát fejezi ki – esetünkben azt, hogy y prím.

Ha A olyan formula, amelyben az egyetlen szabad változó x, akkor így jelöljük: $A(x)$; azt a formulát pedig, amelyet úgy kapunk, hogy x helyébe mindenütt a t terminust írjuk, $A(t)$ jelöli. *Mondatnak* nevezzük azokat a formulákat, amelyekben nincs szabad változó. Egy mondat tehát egy állítást fejez ki, amelyről értelmesen felvethető, hogy igaz-e vagy hamis, míg azok a formulák, amelyben az x, y. . . szabad változók szerepelnek, olyan feltételeket fejeznek ki, amelyek x, y. . . bizonyos értékei mellett igazak, máskor pedig hamisak. Ha a fenti formulát, amely azt fejezi ki, hogy y prím, PRÍM(y) jelöli, akkor PRÍM(17) igaz mondat, amely azt fejezi ki, hogy 17 prímszám, PRÍM(15) pedig hamis mondat, amely azt fejezi ki, hogy 15 prímszám.

Gödel fedezte fel azt a figyelemre méltó tényt, hogy az összeadás és a szorzás segítségével a hatványozás is *definiálható* – az aritmetikában használt többi szokásos művelettel egyetemben. Az, hogy a hatványozás definiálható, a következőt jelenti: létezik olyan $\textsc{exp}(x, y, z)$ formula, hogy tetszőleges m, n és k számok esetén a behelyettesítéssel kapott $\textsc{exp}(m, n, k)$ mondat pontosan akkor igaz, ha $k = m^n$. Mi több, ennek a definíciónak az alapján PA-ban bizonyíthatóak a hatványozásra vonatkozó alapvető összefüggések: $x^0 = 1$ és $x^{y+1} = x^y \cdot x$, tetszőleges x és y esetén. (Ezekből, valamint az indukciós axiómákból a hatványozásra vonatkozó összes többi szabály levezethető.) Amikor tehát az elemi aritmetikáról logikai vagy filozófiai kontextusban esik szó, akkor elegendő, ha az összeadásra és a szorzásra, valamint PA axiómáira szorítkozunk.

Egy kis szimbolizmus

Használni fogjuk a szokásos logikai jeleket: $\forall x$ jelöli azt, hogy „minden x esetén", $\exists x$ azt, hogy „van olyan x, hogy", $\neg A$ azt, hogy nem-A (nem az a helyzet, hogy A), $A \vee B$ azt, hogy „A vagy B", $A \wedge B$ azt, hogy „A és B", $A \supset B$ azt, hogy „ha A, akkor B", $A \equiv B$ pedig azt, hogy „A akkor és csak akkor, ha B".

Az például, hogy $x < y$, így írható fel: $\exists z(y = x + s(z))$. Az „y prím" formula az áttekinthetőbb $\exists w(y = s(s(w))) \wedge \forall u \forall v$ $(y = u \cdot w \supset (u = \underline{1} \wedge v = y) \vee (u = y \wedge v = \underline{1}))$ alakot ölti, a „végtelen sok prímszám van" mondat pedig ez a formula lesz: $\forall x \exists y(x < y \wedge y \text{ prím})$.

F.2. Az első nemteljességi tétel

Immár abban a helyzetben vagyunk, hogy formálisan is rögzíthetjük, miben is áll „az aritmetika ama bizonyos része”, amelynek magába foglalása elegendő ahhoz, hogy egy formális rendszerre az első nemteljességi tétel érvényes legyen. A következtetési szabályokat nem határozzuk meg, ehelyett egyszerűen feltesszük, hogy bármely informális aritmetikai érvelés a vizsgált rendszerekben is formalizálható. Mivel „informális érvelés” itt azt jelenti, hogy „az elsőrendű logikában formalizálható érvelés” (l. a 7. fejezetet), ez a feltevésünk jogos (amennyiben a vizsgált formális rendszer magába foglalja az elsőrendű logika szabályait is). Feltesszük azt is, hogy a rendszer tételeinek halmaza felsorolható (l. a 3.4. alfejezetet).

Tegyük fel tehát, hogy elméletünk nyelve magába foglalja az elemi aritmetika nyelvét, axiómái között pedig ott van PA első hat axiómája:

1. $\forall x \neg s(x) = 0$
2. $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \supset x = y$
3. $\forall x (x + 0 = x)$
4. $\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$
5. $\forall x (x \cdot 0 = 0)$
6. $\forall x \forall y (x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$

Vizsgáljuk most „a $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ diofantikus egyenletnek van legalább egy megoldása (a természetes számok körében)" alakú állításokat. Feltesszük, hogy ezek PA nyelvén is felírhatók; így például az $x \cdot x - y \cdot y = 1$ helyett azt írhatjuk, hogy $x \cdot x = y \cdot y + 1$. Az ilyen alakú igaz állítások bizonyításához csupán a (3), (4), (5) és (6) axiómákra van szükség, elvégre ha egy $s(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n)$ egyenletnek a $k_1, \ldots, k_n$ számok egy megoldását adják, akkor (3)–(6) alapján bizonyítható, hogy valamely m-re $s(\underline{k_1}, \ldots, \underline{k_n}) = \underline{m}$ és $t(\underline{k_1}, \ldots, \underline{k_n}) = \underline{m}$, amiből egy egyszerű logikai következtetéssel kapjuk, hogy az egyenlet megoldható. Ha a vizsgált T elmélet konzisztens, akkor (mint azt a 3.4. alfejezetben láttuk) az MRDP-tételből következik, hogy vannak „a $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ diofantikus egyenletnek nincs megoldása" alakú igaz állítások, amelyek T-ben nem bizonyíthatók. Ha pedig T-ben egyetlen, „az $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ diofantikus egyenletnek van megoldása" alakú *hamis* állítás sem bizonyítható, akkor vannak T-ben eldönthetetlen ilyen alakú állítások is.

Jegyezzük meg: igazából nem szükséges, hogy a T rendszer magába foglalja az aritmetika nyelvét, és hogy axiómái között ott legyenek az (1)–(6) formulák. Elegendő, ha $+$, $\cdot$ és s *definiálhatóak* az elmélet nyelvén, és felírható egy $N(x)$ formula, hogy a neki eleget tevő objektumokra (1)–(6) bizonyíthatóak. A halmazelméletben például azt, hogy x egy természetes szám, definiálhatjuk egy tisztán halmazelméleti (azaz kizárólag az „eleme" jelet használó) $N(x)$ formulával, és hasonlóan definiálhatjuk „az x természetes szám az y és z természetes számok összege", „az x természetes szám az y és z természetes számok szorzata", és „az x természetes szám az y természetes szám rákövetkezője" kifejezéseket, amelyekkel – és a 0 definíciójával – az (1)–(6) formulák mind bizonyíthatóak. A nemteljességi tétel gondolatmenete ezután –

az értelemszerű módosításokkal – a halmazelméletre is alkalmazható.

Jegyezzük meg azt is, hogy az (1) és a (2) axiómára a fenti gondolatmenetben nincs is szükségünk. Az (1) és a (2) axiómák alapján minden „$\underline{m} = \underline{n}$" alakú hamis állítás *cáfolható,* a (3)–(6) axiómákat is csatasorba állítva tehát minden „$D(x_1, \ldots, x_n) = 0$" alakú hamis állítást cáfolhatunk. Ezeknek az axiómáknak az alapján tehát már kimondhatjuk a nemteljességi tétel Gödeltől származó, az ω-konzisztencián alapuló változatát: ha egy T rendszerre teljesül, hogy nincs olyan $A(x_1, \ldots, x_n)$ aritmetikai formula, hogy T-ben bizonyítható a „létezik $x_1, \ldots, x_n$, hogy $A(x_1, \ldots, x_n)$", de valamennyi $A(\underline{k_1}, \ldots, \underline{k_n})$ állítás cáfolható, akkor T nem teljes. (Valójában elegendő feltennünk azt, hogy a T rendszer Σ-helyes – a Σ-helyesség formális definícióját is hamarosan megadjuk –, mivel a feltétel teljesülését csupán a $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ alakú formulákra kell megkövetelnünk.)

A nemteljességi tétel Rossertől származó élesítése szerint egyetlen, az aritmetika egy elegendő részét magába foglaló konzisztens rendszer sem teljes. Azzal, hogy az ω-konzisztencia vagy a Σ-helyesség helyett a konzisztenciát kötjük ki, úgy tűnik, a nemteljességi tételt csak szerény mértékben élesítettük. Valóban, az olyan elméletek esetében, mint a PA vagy a ZFC, amelyek matematikai tudásunk egy részét formalizálják, a Σ-helyesség nem problematikusabb, mint a konzisztencia, így az erősebb nemteljességi tétel nem szolgál új információval. Elvben előfordulhat, hogy valaki csupán PA vagy ZFC Σ-helyességében kételkedik, az elméletek konzisztenciájában viszont nem – a valóságban azonban ilyen szkeptikus, úgy tűnik, nem létezik.

A Rosser-féle változatnak mindazonáltal fontos alkalmazásai vannak. Amikor a tételt egy T elméletre alkalmazzuk, akkor izoláljuk T „aritmetikai komponensét”, amelyen belül definiálható az „x egy természetes” szám tulajdonság, a 0, az összeadás, a szorzás és a rákövetkezés úgy, hogy a tárgyalási univerzumot az így definiált természetes számokra szűkítve az (1)–(6) axiómák bizonyíthatók. Előfordulhat azonban, hogy az, amit mi a T elmélet aritmetikai komponensének választottunk, másképpen is interpretálható. Emiatt előfordulhat, hogy semmi baj nem származik abból, ha T-ben bizonyítható olyan, „a $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ diofantikus egyenletnek van megoldása” alakú állítás, amely a természetes számokról szóló kijelentésként interpretálva hamis. Tegyük fel például, hogy T nem csupán az (1)–(6) axiómákat bizonyítja, de azt is, hogy

$$\exists x(s(0) + x = x).$$

Aritmetikai állításként értelmezve ez nyilvánvalóan hamis, hiszen az $1 + x = x$ egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében. De előfordulhat, hogy valaki, aki a T elméletben dolgozik, a változók lehetséges értékeinek nem a természetes számokat, hanem a megszámlálható rendszámokat (a természetes számok halmazelméleti általánosításait) tekinti. Az (1)–(6) axiómák eszerint az interpretáció szerint is igazak maradnak, viszont az $1 + x = x$ egyenletnek is lesz (méghozzá végtelen sok) megoldása.

Amikor tehát egy T elméletre a nemteljességi tétel Rosser-féle erősebb változatát alkalmazzuk, akkor a következő a helyzet:

bármilyen ésszerű választásnak tűnik is T aritmetikai komponensének izolálása (attól függően, hogy az elmélet az aritmetika „egy bizonyos részén” kívül még mit bizonyít), ez a komponens nem lesz teljes – csak akkor, ha inkonzisztens, ami viszont mindenképpen „rossz” tulajdonság, bármiképpen interpretáljuk is T-t.

Rosser bizonyításával röviden a 2.7. alfejezetben foglalkoztunk. A bizonyításnak több változata és általánosítása ismert, de egyik sem használja az MRDP-tételt azon a nyilvánvaló módon, ahogy abból a tétel Gödel-féle változata megkapható. A Gödel–Rosser-tételt általában olyan elméletekre alkalmazzák, amelyek az (1)–(6) axiómákhoz képest valamivel „több” aritmetikát foglalnak magukba. Az aritmetikának ezt az elméletét *Robinson-aritmetikának* nevezik (R. M. Robinson nyomán). Egyik változatát úgy kaphatjuk meg, hogy az elemi aritmetika nyelvét kibővítjük: a $<$ relációt nem definiáljuk, hanem definiálatlan alapjelként vesszük fel, és a szokásos, „szigorúan kisebb, mint” értelemben interpretáljuk. Az (1)–(6) axiómákhoz pedig hozzávesszük a következő hármat, amelyek közül az első kettő ugyanazt teszi a $<$ relációval kapcsolatban, mint az (1)–(6) axiómák az összeadásra, a szorzásra és a rákövetkezésre vonatkozóan:

7. $\forall x \neg x < 0$
8. $\forall x \forall y (x < s(y) \equiv x < y \vee x = y)$
9. $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$

Az érdeklődő Olvasó Smullyan könyvében megtalálja annak bizonyítását, hogy egyetlen, az (1)–(9) axiómákat magába foglaló konzisztens elmélet sem teljes. Mi a továbbiakban a Robinson-aritmetikát a kiszámíthatóság elmélete szempontjából vizsgáljuk, hogy megadhassuk a Goldbach típusú állítások formális definícióját.

F.3. Goldbach típusú állítások, Σ-formulák és felsorolható relációk

A $<$ reláció segítségével definiálhatjuk formulák egy osztályát, amelyekben csak korlátos kvantorok szerepelnek, és amelynek elemeit *korlátos formuláknak* nevezzük. Egy ilyen formulában az univerzális kvantorok kizárólag $\forall x(x < t \supset A)$ formában, az egzisztenciális kvantorok pedig kizárólag $\exists x(x < t \vee A)$ formában jelennek meg (t mindkét esetben olyan terminus, amely nem tartalmazza x-et). Ezeket a formulákat $\forall x < t\, A(x)$, illetve $\exists x < t\, A(x)$ rövidíti.

A korlátos formulák lényegi tulajdonsága, hogy létezik algoritmus, amelynek alapján tetszőleges mondatról, amelyben kizárólag korlátos kvantorok fordulnak elő, eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Annak eldöntéséhez, hogy a $\forall x(x < t \supset A)$ mondat igaz-e, elegendő, ha sorra vesszük azokat az $A(\underline{n})$ mondatokat, amelyekben $n < t$, és hasonlóan kell eljárnunk a $\exists x < t\, A(x)$ mondat esetében is. Tekintsük például a

$$\forall x < \underline{1000}(\underline{2} < x \wedge \exists w < x(x = \underline{2} \cdot w) \supset$$
$$\supset \exists y < x \exists z < x(z = x + y \wedge \ x \text{ prímszám } \wedge \ z \text{ prímszám})$$

mondatot, amelyben azt, hogy „y prímszám", immár olyan formulával definiáljuk, amelyben kizárólag korlátos kvantorok szerepelnek: $\underline{1} < y \wedge \forall u < y \forall v < y \neg(u \cdot v = y)$. A fenti módszert alkalmazva azt, hogy a fenti mondat (amely Goldbach sejtésének az 1000-nél kisebb számokra való megszorítása) igaz-e vagy sem, véges számú, $s = t$, illetve $s < t$ alakú mondat ellenőrzésével eldönthetjük. Ugyanez áll minden olyan mondatra, amelyben kizárólag korlátos kvantorok szerepelnek. Egy korlátos mondat igazsága mindig eldönthető olyan gondolatmenet alapján, amely a Robinson-aritmetikában is formalizálható.

Mindebből az következik, hogy minden olyan természetes számokból álló E halmaz kiszámítható, amely egy $A(x)$ korlátos formulával definiálható. Annak eldöntéséhez, hogy n eleme-e az E halmaznak, csupán azt kell kideríteni, hogy az $A(\underline{n})$ mondat igaz-e. A megfordítás nem igaz, vannak ugyanis olyan kiszámítható halmazok, amelyek nem definiálhatók korlátos formulával. De miként látni fogjuk, a kiszámíthatóságot mégis definiálhatjuk ennek a fogalomnak az alapján.

Jegyezzük meg, hogy egy korlátos formula tagadása is mindig megadható egy korlátos formulával. Ennek magyarázata az, hogy $\neg\forall x < t\, A(x)$ logikailag ekvivalens a $\exists x < t\, \neg A(x)$ formulával, $\neg\exists x < t\, A(x)$ pedig a $\forall x < t\, \neg A(x)$ formulával. Ezeknek a szabályoknak az egymás utáni alkalmazásával – és figyelembe véve más logikai ekvivalenciákat, például azt, hogy $\neg(A \vee B)$ ekvivalens a $\neg A \wedge \neg B$ formulával – minden korlátos formula tagadása egy korlátos formulára redukálható.

Immár megadhatjuk a „Goldbach típusú mondat" formális definícióját. Idézzük fel a 2.1. alfejezetből a következőket:

> *Beláttuk tehát, hogy Goldbach sejtése megfogalmazható a következő formában: „minden természetes szám P tulajdonságú", ahol P egy kiszámítható tulajdonság. Logikai szempontból ez a Goldbach-sejtés rendkívül fontos jellemzője; a következőkben az ilyen formájú állításokat* Goldbach típusú *állításoknak fogjuk nevezni... Az iménti fejtegetésben egy fontos pont felett átsiklottunk: a szóban forgó P tulajdonságnak nem csupán kiszámíthatónak, de elegendően egyszerűnek is kell lennie ahhoz, hogy a fennállását vagy fenn nem állását eldöntő algoritmus „kiolvasható" legyen P definíciójából.*

Goldbach típusú mondatnak nevezzük ezek után a $\forall x A(x)$ alakú mondatokat, ahol $A(x)$ korlátos formula. A fentiekből következik, hogy ez a definíció kielégíti azt a feltételt, miszerint az algoritmus, amelynek alapján eldönthető, hogy valamely n szám esetén $A(\underline{n})$ igaz-e vagy sem, az $A(x)$ feltétel alapján felírható.

Bár maga a Goldbach-sejtés könnyen megfogalmazható Goldbach típusú állításként (nem kell mást tennünk, mint a példánkban szereplő „$< \underline{1000}$" korlátot eltüntetni a $\forall x$ kvantor mögül), egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy az 1.2. alfejezet informális definíciójának megfelelő mondatok az iménti, formális meghatározásnak is eleget tesznek.

Hogy ezt belássuk, néhány újabb fogalomra is szükségünk lesz. A $\exists x A(x)$ alakú formulákat, ahol $A(x)$ korlátos formula, Σ-*formulának* nevezzük. (Egy elmélet Σ-*helyes*, ha minden benne bizonyítható Σ-mondat igaz.) Tegyük fel, hogy a $\exists x A(x)$ mondatnak van egy szabad változója, így $\exists x A(x, y)$ alakban is felírhatjuk. Ekkor azoknak az n számoknak a halmaza, amelyekkel $\exists x A(x, \underline{n})$ igaz, felsorolható halmaz: felsorolásához az $A(\underline{m}, \underline{n})$ alakú mondatokat kell sorra vennünk, és amikor igaz mondatot találunk, n-t hozzá kell csapnunk a listához. Ennek a megfordítása is igaz: minden felsorolható E halmazhoz létezik egy $\exists x A(x, y)$ Σ-formula, hogy E pontosan azoknak az n számoknak a halmaza, amelyekkel $\exists x A(x, \underline{n})$ igaz. Ennek bizonyításához – például Turing-gépekre hivatkozva – formalizálni kell felsorolható halmazok 3. fejezetben szereplő informális definícióját. (Ehhez komoly technikai arzenált kell mozgósítani, itt nem is kíséreljük meg.) Ha egy E halmazt olyan definícióval adnak meg nekünk, amelynek alapján tudjuk, hogy E felsorolható (például „legyen E olyan ZFC-beli bizonyításoknak a halmaza, amelyek valamely állításnak és az állítás tagadásának konjunkcióját bizonyítják”), akkor megkonstruálhatjuk az E-t definiáló $\exists x A(x, y)$ formulát. A „minden n-re, n nem eleme E-nek” állítás így formalizálható: $\forall y \neg \exists x A(x, y)$, vagy ami ezzel ekvivalens: $\forall z \forall y < z\, \forall x < z\, \neg A(x, y)$ – ez utóbbi viszont a formális definíció alapján Goldbach típusú állítás. Speciálisan, ha adott egy P tulajdonság, amelyről tudjuk, hogy eldönthető, akkor „a minden természetes szám P tulajdonságú” állítás felírható $\forall x A(x)$ alakban, ahol $A(x)$ korlátos formula. Egy eldönthető halmaz komplementuma ugyanis mindig kiszámítható; a $\forall x A(x)$ állítás pedig ekvivalens azzal, hogy „minden n esetén, n nem eleme a P tulajdonságú számok halmaza komplementumának”.

Figyelembe véve, hogy egy halmaz pontosan akkor eldönthető, ha ő maga és a komplementuma egyaránt kiszámítható, egy hasonló gondolatmenet alapján azt is beláthatjuk, hogy az eldönthető halmazok pontosan azok a halmazok, amelyek egy $\exists x A(x, y)$ Σ-formulával és egy $\forall x A(x, y)$ Π-*formulával* is definiálhatók. (A Π-formulák a $\forall x A(x)$ alakú formulák, ahol $A(x)$ korlátos.)