© Typotex Kiadó

ANALITIKUS MÓDSZEREK A PÉNZÜGYBEN ÉS A KÖZGAZDASÁGTANBAN



www.interkonyv.hu

© Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyben és a közgazdaságtanban
Analízis feladatgyűjtemény I
Analízis feladatgyűjtemény II
Bevezetés az analízisbe
Complexity of Algorithms
Differential Geometry
Diszkrét matematikai feladatok
Diszkrét optimalizálás
Geometria
Igazságos elosztások
Introductory Course in Analysis
Mathematical Analysis – Exercises I
Mathematical Analysis – Problems and Exercises II
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Pénzügyi matematika
Szimmetrikus struktúrák
Többváltozós adatelemzés
Variációszámítás és optimális irányítás

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Kánnai Zoltán

ANALITIKUS MÓDSZEREK A PÉNZÜGYBEN ÉS A KÖZGAZDASÁGTANBAN

Budapesti Corvinus Egyetem

Typotex

2014

www.interkonyv.hu

© Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

© 2014–2019, Dr. Kánnai Zoltán, Budapesti Corvinus Egyetem,
Matematika tanszék

Lektorálta: Dr. V. Nagy Éva

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978 963 279 236 1
Készült a Typotex Kiadó (`http://www.typotex.hu`) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gindilla Orsolya

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú, „Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.



KULCSSZAVAK: parciális differenciálegyenlet, diffúziós feladat, funkcionálanalízis, Banach-terek, lineáris operátorok, Hilbert-tér, peremérték-feladatok, Szoboljev-terek, numerikus előállítás

ÖSSZEFOGLALÁS: A jegyzet a lineáris parciális differenciálegyenletek és a funkcionálanalízis legalapvetőbb eredményeit azok természetes egymásra épülésében mutatja be, a vonatkozó feladatok és modellek lényegre törő megragadásának szemszögéből. Fontos vezérelve – az egzaktság szem előtt tartásával – az alkalmazásokhoz szabott sorrendiség, illetve a speciálistól az absztrakt felé való haladási irány. Szerteágazó volta mellett jól használhatják az alkalmazók, mind a komolyabb optimalizálás, mind pedig a pénzügyi folyamatok területéről. A kurzusként önmagában is tárgyalható elemi parciális differenciálegyenletek bevezetőjét a funkcionálanalízis speciális, majd absztraktabb területeinek feldolgozása követi. Erre épül a lineáris peremérték-feladatok mélyebb és igényesebb tárgyalása, magában foglalva a numerikus előállítás alapgondolatát és legegyszerűbb formáit.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

2. Parciális differenciálegyenletek: naiv megközelítés **5**
2.1. Integrálok deriválása 6
2.2. Ismerkedés a p. d. e.-kkel feladatokon keresztül 11
2.2.1. Bevezető példák 11
2.2.2. A legegyszerűbb hullámegyenletek 13
2.2.3. Kötött hullámok egydimenzióban 15
2.2.4. Néhány nagyon elemi Laplace- ill. Poisson-egyenlet . . 27
2.2.5. Egyszerű diffúziós egyenletek 35
2.2.6. Egydimenziós Black–Scholes-egyenlet 55
2.2.7. Standard diffúziós Cauchy-feladat megoldása n dimenzióban 59
2.3. Másodrendű lineáris egyenletek kitűzése 69
2.3.1. Elsőrendű homogén lineáris egyenletek kétdimenzióban 69
2.3.2. Másodrendű lineáris parciális differenciáloperátorok és osztályozásuk 71
2.3.3. Állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenletek kanonikus alakra hozása 72
2.3.4. Függvényegyütthatós egyenletek kanonikus alakra hozása kétdimenzióban. Karakterisztikus egyenlet 79
2.3.5. Állandó együtthatós másodrendű egyenletek alapmegoldása 85

3. A funkcionálanalízis elemei **99**
3.1. Normált terek, Banach-terek 99
3.2. Folytonos lineáris operátorok 103
3.3. Neumann-sorok 110
3.4. Véges dimenziós normált terek 111
3.5. Néhány speciális Banach-tér 115
3.5.1. Korlátos függvények terei (c-típusú terek) 115

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.5.2. Az L^p Banach-terek ($1 \leq p < +\infty$) 120
3.5.3. Az L^∞ Banach-tér 126
3.5.4. A Meyer-tétel és a Dynkin-tétel. Sűrűség L^p-ben . . . 128
3.5.5. Szeparabilitás 132

4. Hilbert-terekről **135**
4.1. A Riesz-tétel. Szeparációk 139
4.2. A Krein–Milman-tétel végesrangú verziója 146
4.3. Ortonormált sorozatok 149
4.4. Gyenge konvergencia Hilbert-terekben 158
4.5. A Krein–Milman-tétel végtelen dimenziós változata 164
4.6. Adjungálás 167
4.7. Kompakt operátorok 172
4.8. Kompakt normális operátorok spektrálfelbontása 175
4.9. Egy alkalmazás: Hilbert–Schmidt-operátorok 184

5. Szoboljev-terek és lineáris elliptikus egyenletek **189**
5.1. A $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ Szoboljev-terek 189
5.1.1. Előkészületek 190
5.1.2. A $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ Hilbert-terek konstrukciója 192
5.1.3. Egy Dirichlet-feladat megoldása. Sajátérték-feladat. Numerikus előállítás 205
5.1.4. Egy általánosabb numerikus eljárás: A Rytz–Galjorkin-módszer 216

6. A funkcionálanalízis három alapelve **221**
6.1. A Baire-féle kategóriatétel 222
6.2. A Banach–Steinhaus-tétel 224
6.3. A Banach-féle nyíltleképezés-tétel 228
6.3.1. A zártgráftétel 231
6.4. A Hahn–Banach-tétel 233

7. Függelék **241**
7.1. Néhány Banach-tér duálisa 241
7.1.1. Folytonos funkcionálok az L^p Banach-téren ($1 \leq p < +\infty$) 241
7.1.2. A Riesz-Kakutani-féle reprezentációs tétel 249
7.1.3. A $C[a,b]$ tér funkcionáljai 254
7.2. A Weierstraß-féle sűrűségi tételek 258
7.2.1. Polinomok sűrűsége 258

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.2.2. Trigonometrikus polinomok sűrűsége. Fourier-sorok 261
7.3. A Rådström-féle törlési szabály 268
7.4. Gyenge és gyenge*-konvergencia 270
7.5. Gyenge konvergencia és reflexivitás 272
7.6. A $C_c^1(\Omega)$ és $C_c^2(\Omega)$ terek sűrűek $L^p(\Omega)$-ban $(1 \leq p < \infty)$ . . 278
7.7. Fourier-transzformáció 280

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

© Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

1. fejezet

Bevezetés

A világban észlelhető jelenségek egy részét mérni tudjuk, pontosabban valamely jól behatárolt szempont szerint számértéket tudunk nekik tulajdonítani, vagy éppen csak kapcsolatba tudjuk őket hozni számértékű függvényekkel. Ez teszi lehetővé a szóban forgó jelenségek számára a matematikai értelemben vett modellezhetőséget. Persze ez elsődlegesen sohasem jelentheti a pontos leírás igényét, csupán a visszajelzések által behatárolt érvényű modellt. Az ilyetén modellezés néha átütő sikerrel jár; ez vezetett például a leghétköznapibb fizikai jelenségekre alkalmazott differenciál- és integrálszámítás, illetve közönséges differenciálegyenletek elméletének gyors elterjedéséhez a XVII-XVIII. században. De ugyanez vezetett a mélyebb fizikai törvényszerűségeket megragadó parciális differenciálegyenletek megjelenéséhez a XVIII. század második felétől. És ugyanez hozta létre a fizikai alkalmazásokon túl, már a kezdetektől társadalmi folyamatokra is alkalmazott komoly igényű valószínűségszámítást és a még mélyebb fizikai jelenségeket megragadó funkcionálanalízist a XX. században.

A fizikában jól bevált diszciplínákat a XIX. század végétől kezdték alkalmazni társadalmi, közgazdasági, majd pénzügyi folyamatok modellezésére is. A gondolat kézenfekvő volt: az elég nagy léptékben mért társadalmi és gazdasági folyamatok természetüknél fogva olyanok, mint egy apró részecskéiből összeálló fizikai rendszer makroszkopikusan mérhető jelenségei, mint például a közeg- és energiaáramlás. Vagy fordított logikával: a fizikai rendszerek nem mások, mint miniatűr egyedekből összeálló társadalmak, amelyekre a társadalmakéra jellemző statisztikai törvényszerűségek igazak, tehát önmagában nem egy elvetélt gondolat, hogy az egyik rendszerre hatékonyan működő leírás sikerrel kamatoztatható a másik rendszer esetében is. Kezdettől tehát csak idő kérdése volt, hogy a klasszikus matematikai diszciplínák közgazdasági alkalmazása után mikor jelenik meg a közgazdaságtanban a XX. századi modern analízis fegyvertára is. Nagyon is érezhető volt, hogy előbb-utóbb a

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

közgazdaságtan és pénzügy integráns részévé válik a differenciálegyenleteknek nemcsak a laikus közvélemény előtt jobban ismert XVIII-XIX. századi elmélete, hanem a XX. században elindult modernebb elmélete is a benne megjelenő Hilbert-teres kalkulussal és topologikus vektorteres apparátussal együtt. Sőt úgy tűnik: a funkcionálanalízis szeparációs technikáinak a feltételes optimalizálásban megjelenő alkalmazása közgazdasági feladatok esetében mára már szinte hatékonyabb, mint a fizikaiakéban.

Ugyanakkor a modern analízis mégiscsak nagyon fiatal terület – közgazdasági és pénzügyi alkalmazásai még fiatalabbak –, s igényes szintű megjelenése a közgazdasági felsőoktatásban sokkal inkább le van szakadva a terület aktuális csúcseredményeitől, mint a természettudományi alkalmazások esetében. Hosszú távon nem is lehet elvárni csúcseredményeket egy közgazdaságtani iskolától anélkül, hogy a XX. század közepétől kikristályosodó modern analízis nyelvezete és eszköztára az egyetemi oktatásba is integránsan beépülne. A valóságot mélyebb szinten is jól leíró modelleket csak úgy várhatunk, ha megtanuljuk a számunkra feltérképezetlen területeken az érzékeinket kikapcsolni és csak a puszta tudásra támaszkodunk. E jegyzet elsődleges célja a modern analízis két fontos diszciplínájába: a funkcionálanalízisbe és a parciális differenciálegyenletek elméletébe bevezetést nyújtani közgazdászhallgatók számára. A modern analízis más diszciplínái, mint pl. a közönséges differenciálegyenletek, a mértékelmélet és a valószínűségszámítás bevezető elmélete a Budapesti Corvinus Egyetemen más tárgyak anyagát képezi, ezért célzottan nem vizsgáljuk, hanem inkább támaszodunk rájuk. Jelesül ismertnek tételezzük a *Dinamikai rendszerek* [3] és *Mértékelmélet* [2], [4] tárgyak apparátusát.

És természetesen ismertnek tételezzük föl a valós illetve komplex vektorterekre vonatkozó legelemibb lineáris algebrai ismereteket is, úgymint a vektorterek, lineáris függés (összefüggés és függetlenség), speciális részhalmazok (alterek, affin részhalmazok, konvex részhalmazok, kúpok) fogalmát, halmazok összegére és alterek direkt összegére vonatkozó alapvető tényeket (kommutativitás, asszociativitás) [1].

A funkcionálanalízis és a parciális differenciálegyenletek elmélete számtalan szállal fonódik össze, szövi át egymást. A parciális differenciálegyenletek rengeteg heurisztikát adnak a funkcionálanalízisnek, és rengeteg alkalmazható eredményt nyernek is a funkcionálanalízistől. A jegyzet felépítésében igyekeztünk tükrözni ezt az összefonódást. Az anyagban megjelenő eredményekkel ugyanakkor elméleti hátteret kívánunk biztosítani egyrészt az összetettebb optimalizálási feladatokhoz, másrészt a pénzügyben alkalmazott sztochasztikus folyamatok elméletéhez; ez utóbbi maga is több szálon kapcsolódik mind a parciális differenciálegyenletekhez, mind pedig a funkcionálanalízishez.

Az optimalizálás, de a parciális differenciálegyenletek elmélete is mint modern diszciplína elsődleges megközelítésben a Hilbert-terek geometriáját és operátorelméletét alkalmazza. Finomabb disztinkciók megtételéhez már szükségünk van a funkcionálanalízis kiterjedtebb elméletére a Banach-terek és

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Stone-hálók apparátusával. A felépítésben ezt a sorrendiséget is szem előtt tartottuk. (A graduális szintű parciális differenciálegyenletek kurzusok általában erőteljesen támaszkodnak a disztribúcióelméletre is, amely viszont a lokálisan konvex vektorterek és szigorú induktív limeszeik eszköztárára támaszkodik. Ebben a jegyzetben a disztribúcióelmélet alkalmazását a Szoboljev-terek egy újszerű bevezetésével sikerült kiküszöbölnünk, amelynek alapjául elegendő a Budapesti Corvinus Egyetemen évek óta oktatott mértékelméleti és Hilbert-teres apparátus.)

A tananyag – szokásostól eltérő sorrendű – felépítésében fontos vezérelv volt az alkalmazásokhoz szabott sorrendiség, illetve a speciálistól az absztrakt felé való haladási irány. Egy a lineáris peremérték-feladatokkal ismerkedő pénzügyi mesterszakos hallgatónak például a szükséges Hilbert-teres apparátus feldolgozása túl nagy feladatot jelent ahhoz, hogy a hozzá közvetlenül nem kapcsolódó absztrakt alapelveken is át kelljen rágnia magát. A feltételes optimalizálás alkalmazói ugyanakkor sokkal könnyebben képesek megtalálni az anyagon belül a számukra fontos elméleti konzekvenciákat, anélkül, hogy lineárisan haladva lennének kényszerülve az egész tananyag feldolgozására.

A jegyzetben tehát először naiv bevezetést adunk a lineáris parciális differenciálegyenletek kalkulusába, majd a normált terek legegyszerűbb fogalmai után definiáljuk a legalapvetőbbnek számító Banach-tereket, ez után pedig az alkalmazások szemszögéből fontos sűrűségi és szeparabilitási kérdéseiket vizsgáljuk. Ezt követően rátérünk a Hilbert-terek elméletére, majd erre támaszkodva bevezetjük a $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ Szoboljev-tereket, amelyekben tárgyalni tudjuk a lineáris elliptikus differenciálegyenletek modern elméletét. Ezek után vesszük sorra a funkcionálanalízis általánosabb apparátusát, amelyben egyre inkább megjelennek a modern parciális differenciálegyenletek, a sztochasztikus analízis, az optimális irányításelmélet és egyéb modern diszciplínák számára szükséges és gyakran visszatérő eszközök.

A kapcsolódó feladatok nem a fejezetek végén, hanem azokon belül, az anyag részeként jelennek meg. Ennek oka nemcsak az, hogy minden egyes feladatot igyekeztünk az elmélet szemszögéből leglogikusabb helyen kitűzni, hanem mert a feladatok egy része maga is nevezetes tétel, amelyeknek vagy nagyon egyszerű a bizonyítása, vagy a felépítés többi, feladatok nélküli része nem támaszkodik rájuk (de nagyban hozzájárulhatnak az ismeretek elmélyítéséhez). Az ilyen tételek egzakt megjelenítésével nem akartuk külön terhelni a helyenként amúgy is tömény és szerteágazó anyagot, ezért sűrítettük őket feladatokba. Igazolásukhoz mindig adtunk valamennyi instrukciót, amelyek birtokában az Olvasó önálló munkával kidolgozhatja az egzakt bizonyításokat. Ezzel egyrészt késztetést kívántunk adni az Olvasónak az önálló munkához, másrészt lehetőséget önmaga megmérettetéséhez, és fejlődési lépcsőfokot a tudományos dolgozatok olvasásához.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

© Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2. fejezet

Parciális differenciálegyenletek: naiv megközelítés

Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény k-adik parciális deriváltja az x_k változó szerinti derivált, amelyet $\partial_k f$-fel jelölünk. Hagyományosan az x szerinti parciális deriváltat ∂_1-gyel, az y szerintit ∂_2-vel, a z szerintit pedig ∂_3-mal jelöljük; a t szerinti deriváltat általában ∂_0-lal (a t változót nulladik változónak fogva föl egy $1+n$ változós $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény esetében). Általában $\partial_k^2 f := \partial_k (\partial_k f)$. Szintén szokásos jelölés: $\Delta f := \sum_{k=1}^{n} \partial_k^2 f$ (olvasd: „Laplace f"). Δ neve: Laplace-operátor.

A *„parciális differenciálegyenlet"* név onnan származik, hogy egy keresett függvényre vonatkozó egyenletben az illető (ismeretlen) függvény parciális deriváltjai szerepelnek (ellentétben a csak a $t \in \mathbb{R}$ változó szerinti deriváltat szerepeltető *közönséges* differenciálegyenletekkel). A lényeg viszont az, hogy olyan dinamikus összefüggésről van szó, amelyben a keresett ismeretlen maga is egy többváltozós függvény. Tipikusan olyan jelenségek modellezésére használatos, amelyekben a jelenséget leíró törvények a szerepeltett mennyiségeknek nem (csupán) az idő szerinti, hanem egyéb deriváltjaira (is) vonatkoznak. Ilyenek a fizikában pl. a hővezetés, közegterjedés és egyéb áramlások, hullámterjedés, elektrodinamika. Az elméleti pénzügyi modellekben egyes sztochasztikus mennyiségek átmenetsűrűségei és egyéb, őket megragadó deterministikus függvények szintén parciális differenciálegyenleteket elégítenek ki, amelyek közeli rokonságot mutatnak a hővezetés és közegterjedés egyenleteivel ($\rightarrow$ diffúziós egyenletek).

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A téma nehézsége kívánatossá teszi, hogy az egzaktabb felépítés előtt „deriválgatva" ismerkedjünk a parciális deriváltakra vonatkozó legelemibb összefüggésekkel és egyenletekkel.

A továbbiakban jelölje $M \subseteq \mathbb{R}^n$ esetén $C(M)$ az M-en értelmezett folytonos valós függvények vektorterét. Nyílt M esetén legyen $C^1(M)$ azon $C(M)$-beli függvények vektortere, amelyek minden elsőrendő parciális deriváltja létezik és folytonos M-en, $C^2(M)$ pedig azon $C(M)$-beli függvényeké, amelyek minden másodrendő parciális deriváltja létezik és folytonos M-en ($\Rightarrow$ a $C^1(M)$-beli függvények deriválhatók, a $C^2(M)$-beliek pedig kétszer deriválhatók). Persze

$$C^2(M) \subseteq C^1(M) \subseteq C(M).$$

Végül szintén nyílt $M \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra jelölje $\overline{C^1}(M)$ azon $C^1(M)$-beli f függvények vektorterét, amelyekre mind f, mind $\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f$ folytonosan terjednek ki M lezárására. Hasonlóan, jelölje $\overline{C^2}(M)$ azon $C^2(M)$-beli függvények vektorterét, amelyek az összes első- és másodrendű parciális deriváltjukkal együtt folytonosan terjednek ki M lezárására.

Az $M \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz lezárását $\overline{M}$ jelöli, míg M belsejét $\operatorname{int} M$. Az $\mathbb{R}^n$ (euklideszi) tér zárt egységgömbje

$$\overline{\mathcal{B}} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

(a nyílt $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ egységgömböt pedig rendszerint $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}$ jelöli).

2.1. Integrálok deriválása

Jelölje Λ az egydimenziós, $\Lambda^{(n)}$ pedig az n-dimenziós Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebráját.

2.1.1. Állítás. *Legyen $(X, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \times M \to \mathbb{R}$ pedig olyan $\mathcal{S} \otimes \Lambda^{(n)}$-mérhető függvény, hogy μ-m.m. x-re $f(x, \cdot)$ folytonos, valamint f L^1-majorált, azaz alkalmas $\ell \in L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ függvénnyel minden $(x, y) \in X \times I$-re*

$$|f(x, y)| \leq \ell(x).$$

Ez esetben az $F : M \to \mathbb{R}$,

$$F(y) := \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$$

függvény is folytonos.

Bizonyítás. A szekvenciális folytonosság a Lebesgue-féle dominált konvergenciatételből adódik ℓ majoráns mellett. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.1.2. Következmény. *Legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ lokálisan kompakt halmaz, $a < b \leq$ $\leq +\infty$,*

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \in [a,b) \times [a,b) : t \leq x \right\}$$

és $f : H \times M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $F : [a,b) \times M \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) := \int_a^x f(t,x,y)\ dt$$

függvény is folytonos.

Bizonyítás. A $\Phi : [a,b) \times [a,b) \times M \to H \times M$,

$$\Phi(t,x,y) := \begin{cases} (t,x,y), & \text{ha } t \leq x, \\ (x,x,y), & \text{ha } t > x \end{cases}$$

függvény nyilvánvalóan folytonos. Így $\widehat{f} := f \circ \Phi : [a,b) \times [a,b) \times M \to \mathbb{R}$ is folytonos függvény. Ekkor $G : [a,b) \times [a,b) \times M \to \mathbb{R}$,

$$G(u,x,y) := \int_a^u \widehat{f}(t,x,y)\ dt$$

választással a $G(u,\cdot,\cdot)$ függvények a fenti állítás értelmében folytonosak (minden (x,y) pont egy alkalmas kompakt U környezetére $\widehat{f}$ korlátos az $[a,u] \times$ $\times U$ halmazon), a $G(\cdot,x,y)$ függvények pedig triviálisan lokálisan Lipschitz-folytonosak. Innen könnyedén adódik G együttes folytonossága. Innen pedig $F(x,y) = G(x,x,y)$ is folytonos. □

2.1.3. Állítás. *Legyen $(X,\mathcal{S},\mu)$ mértéktér, I intervallum, $f : X \times I \to \mathbb{R}$ pedig olyan $\mathcal{S} \otimes \Lambda$-mérhető függvény, hogy μ-m.m. x-re $f(x,\cdot)$ folytonosan deriválható, valamint $\partial_2 f$ L^1-majorált, azaz alkalmas $\ell \in L^1(X,\mathcal{S},\mu)$ függvénnyel minden $(x,y) \in X \times I$-re*

$$|\partial_2 f(x,y)| \leq \ell(x).$$

Ez esetben ha az $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(y) := \int_X f(x,y)\ d\mu(x)$$

függvény jól definiált (azaz a definiáló integrálok értelmesek), akkor folytonosan deriválható is és minden $y \in I$-re

$$F'(y) = \int_X \partial_2 f(x,y)\ dx.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Legyen $y \in I$, $(y_n) \subseteq I$, $y_n \neq y$ és $y_n \to y$. Minden n-re és μ-m.m. x-re a Lagrange-középértéktétel miatt van olyan $\xi_{n,x}$ szám az y és y_n között, hogy

$$\left|\frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y}\right| = |\partial_2 f(x,\xi_{n,x})| \leq \ell(x).$$

Eszerint az $x \mapsto \frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y}$ függvényeknek ℓ közös L^1-beli majoránsa, így $\frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y} \to \partial_2 f(x,y)$ alapján a Lebesgue-tétel miatt

$$\frac{F(y_n)-F(y)}{y_n-y} = \int\limits_X \frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y}\,dx \to \int\limits_X \partial_2 f(x,y)\,dx,$$

ami (y_n) tetszőleges volta miatt azt jelenti, hogy

$$\lim_{z\to y}\frac{F(z)-F(y)}{z-y} = \int\limits_X \partial_2 f(x,y)\,dx,$$

tehát F deriválható y-ban és $F'(y) = \int\limits_X \partial_2 f(x,y)\,dx$. Az F' függvény folytonossága innen a fenti állításból adódik. □

2.1.4. Következmény. *Legyenek I, J intervallumok, $f : J \times I \to \mathbb{R}$ pedig olyan folytonos függvény, amely a második változójában folytonosan deriválható, továbbá alkalmas $\int\limits_J \ell < +\infty$ tulajdonságú folytonos függvénnyel minden $(x,y) \in J \times I$-re*

$$|\partial_2 f(x,y)| \leq \ell(x).$$

Ez esetben ha az $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(y) := \int\limits_J f(x,y)\,dx$$

függvény jól definiált, akkor folytonosan deriválható is és minden $y \in I$-re

$$F'(y) = \int\limits_J \partial_2 f(x,y)\,dx.$$

A fenti következményben szereplő integrálok persze impropriusak, speciális esetben ($J = [a,b]$) közönséges Riemann-integrálok. Megjegyezzük, hogy e következmény mértékelmélet nélkül is „kiepszilonozható”. A fenti állítás lényegében azt mondja, hogy megfelelő feltételek mellett

$$\frac{d}{dy}\int\limits_J f(x,y)\,dx = \int\limits_J \frac{d}{dy} f(x,y)\,dx.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.1.5. Következmény. *Legyenek $I, [a,b]$ intervallumok, $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ pedig olyan folytonos függvény, amelyre létezik a $\partial_2 f$ parciális derivált és az korlátos az $(a,b) \times I$ halmazon. Ekkor az*

$$F(y) := \int_a^b f(x,y)\, dx$$

függvény folytonosan deriválható és minden $y \in I$-re

$$F'(y) = \int_a^b \partial_2 f(x,y)\, dx.$$

Bizonyítás. A fenti következmény konstans majoránssal alkalmazható. □

2.1.6. Állítás (Leibniz-formula)**.** *Legyen f a*

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in [a,b) \times [a,b) : x \le y \right\}$$

halmazon értelmezett olyan valós folytonos függvény, amelyre az $\operatorname{int} H$ *halmazon $\partial_2 f$ létezik és folytonosan terjed ki H-ra. Ekkor az $F : [a,b) \to \mathbb{R}$,*

$$F(y) := \int_a^y f(x,y)\, dx$$

függvény folytonosan deriválható és minden $y \in [a,b)$-re

$$F'(y) = f(y,y) + \int_a^y \partial_2 f(x,y)\, dx$$

($y = a$ esetén abban az értelemben, hogy az integrál értéke 0*).*

Bizonyítás. A $\partial_2 f$ függvény H-ra való folytonos kiterjedését jelölje továbbra is $\partial_2 f$ (ami a határon egyelőre nem is derivált, csak annak határértéke). Ennek birtokában definiáljuk f-et az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in [a,b) \times [a,b)$, $x > y$ pontokban

$$f(x,y) := f(x,x) + \partial_2 f(x,x) \cdot (y - x)$$

módon. Világos, hogy ezzel f folytonos, továbbá $\partial_2 f$ létezik $(a,b) \times (a,b)$-n, sőt folytonosan terjed ki $[a,b) \times [a,b)$-re. ($\partial_2 f$ létezése az $f(x,\cdot)$ függvények deriválhatóságát jelenti, ez utóbbinak pl. az x pontban a baloldali deriváltja a

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

fenti definíció értelmében $\partial_2 f(x,x)$, a jobb oldali derivált pedig a Lagrange-középértéktétel alapján $\partial_2 f$ folytonos kiterjedése miatt lesz $\partial_2 f(x,x)$.) Legyen most $y \in [a,b)$, $(y_n) \subseteq [a,b)$, $y_n \neq y$ és $y_n \to y$. Ekkor

$$\frac{F(y_n)-F(y)}{y_n-y} = \frac{\int_a^{y_n} f(x,y_n)\,dx - \int_a^{y} f(x,y)\,dx}{y_n-y} =$$
$$= \frac{1}{y_n-y}\int_y^{y_n} f(x,y_n)\,dx + \int_a^{y} \frac{f(x,y_n)\,dx - f(x,y)}{y_n-y}\,dx.$$

Mivel $f(\cdot,y_n)$ folytonos, így az integrálás középértéktétele értelmében létezik τ_n az y és y_n között, hogy

$$\frac{1}{y_n-y}\int_y^{y_n} f(x,y_n)\,dx = f(\tau_n,y_n),$$

ami $n\to\infty$ határátmenettel $\tau_n \to y$ és f folytonossága miatt tart $f(y,y)$-hoz. Másrészt létezik $b > b_0 \geq y_n$ $(n\in\mathbb{N})$ tulajdonságú b_0 pont, ekkor minden $x\in[a,b_0]$-ra a Lagrange-középértéktétel miatt van olyan $\xi_{n,x}$ szám az y és y_n között, hogy

$$\left|\frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y}\right| = |\partial_2 f(x,\xi_{n,x})| \leq K,$$

ahol $K>0$ korlátja $\partial_2 f$-nek az $[a,b_0]\times[a,b_0]$ halmazon. Eszerint $[a,b_0]$-on az $x\mapsto \frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y}$ függvényeknek van közös korlátja, így $\frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y} \to \partial_2 f(x,y)$ alapján a Lebesgue-tétel miatt

$$\int_a^{y} \frac{f(x,y_n)\,dx - f(x,y)}{y_n-y}\,dx \to \int_a^{y} \partial_2 f(x,y)\,dx.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{F(y_n)-F(y)}{y_n-y} = \frac{1}{y_n-y}\int_y^{y_n} f(x,y_n)\,dx + \int_a^{y} \frac{f(x,y_n)\,dx - f(x,y)}{y_n-y}\,dx =$$

$$= f(\tau_n,y_n) + \int_a^{y} \frac{f(x,y_n)\,dx - f(x,y)}{y_n-y}\,dx \longrightarrow f(y,y) + \int_a^{y} \partial_2 f(x,y)\,dx.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Ez (y_n) tetszőleges választása miatt azt jelenti, hogy $\lim_{z\to y}\frac{F(z)-F(y)}{z-y}=f(y,y)+$ $+\int_a^y \partial_2 f(x,y)\,dx$, tehát F deriválható y-ban és $F'(y)=f(y,y)+\int_a^y \partial_2 f(x,y)\,dx$. (Ez már f és $\partial_2 f$ eredeti értékeivel van kifejezve.) Innen az F' függvény második tagjának folytonossága a legelső állítás következményéből adódik. □

2.1.7. Feladat. Legyen I intervallum, $a\in I$, $f: I\times I\to\mathbb{R}$ pedig folytonos függvény. Deriváljuk le az $F(x):=\int_a^x\int_a^x f(r,t)\,dtdr$ függvényt!

2.2. Ismerkedés a parciális differenciálegyenletekkel feladatokon keresztül

Az alábbiakban szereplő feladatok során végig kísérjük nagy figyelemmel, hogy a szóban forgó differenciálegyenlethez milyen további feltétel(ek)kel biztosítható a feladat `egyértelmű megoldása.` Ez a közönséges differenciálegyenletek esetén annyira természetes, hogy föl se merül, miszerint külön figyelnünk kéne rá; **jelen esetben viszont e kérdés sokkal nagyobb horderővel bír; sokszor nagyobbal, mint a megoldás konkrét előállítása.** (És majd szintén gondoljunk rá, hogy a megoldás konkrét alakjában milyen nagy szerepe lehet a definiáló tartomány alakjának, ami a közönséges differenciálegyenletek esetén szintén föl se merül ilyen formában.)

Az egyszerűség kedvéért a parciális differenciálegyenletekre vonatkozó feladatokban hagyományosan csak olyan ismeretlen függvényeket engedünk meg, amelyeknek léteznek és folytonosak a parciális deriváltjai, következésképp ők maguk is folytonosak. Ha az u ismeretlennek bármely $\partial_k\partial_j u$ másodrendű parciális deriváltja is szerepel az egyenletben, akkor egyidejűleg megköveteljük $\partial_k\partial_j u$ és $\partial_j\partial_k u$ létezését és folytonosságát az egyenlet értelmezési tartományán.

2.2.1. Bevezető példák

2.2.1. Feladat. (a) Oldjuk meg az alábbi parciális differenciálegyenletet a síkon $(u=u(x,y))$:

$$\partial_1 u=0.$$

(b) Adjuk meg a fenti egyenlet $u(x,x)=x^2$ feltételű megoldását.

Megoldás. (a): Minden y-ra $(u(\cdot,y))'=0$, így $u(\cdot,y)$ konstans (aminek értéke y-tól függ, hiszen a deriválandó függvény is függ az y paramétertől). Azaz $u(\cdot,y)=c(y)$, tehát $u(x,y)=c(y)$. Mivel u folytonosságát megköveteltük, ezért persze innen $c(\cdot)$ is folytonos. Ugyanakkor az $u(x,y)=c(y)$ formula

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

tetszőleges folytonos $c(\cdot)$ függvény mellett kielégíti az egyenletet. Tehát a megoldás: $u(x,y) = c(y)$, ahol $c(\cdot)$ tetszőleges folytonos függvény.

(b): A keresett u függvény tehát $u(x,y) = c(y)$ alakú. Így a feltételből minden x-re $x^2 = u(x,x) = c(x)$. Azaz $u(x,y) = y^2$ minden (x,y)-ra.

2.2.2. Feladat. Oldjuk meg a síkon: $\partial_2 u = f$
(ahol $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény).

Megoldás: minden x-re $(u(x,\cdot))'(y) = (f(x,\cdot))(y)$, így egyszerűen a második változó szerinti integrálással

$$u(x,y) = \int_0^y f(x,t)\, dt + c(x),$$

ahol $c(\cdot)$ folytonos függvény.

2.2.3. Feladat. Oldjuk meg a pozitív nyílt síknegyeden:

$$\begin{cases} \partial_1\partial_2 u = 0, \\ u\left(x, \dfrac{1}{x}\right) = \sin x, \\ \partial_1 u(x,y) = x. \end{cases}$$

Megoldás: minden y-ra $(\partial_2 u(\cdot,y))' = 0 \Rightarrow \partial_2 u(\cdot,y) = c(y)$, ahol tehát $c(\cdot)$ folytonos $\Rightarrow \partial_2 u(x,y) = c(y) \Rightarrow \partial_2 u(x,\cdot) = c(\cdot) \Rightarrow u(x,\cdot) = \int_0 c(\cdot) + d(x)$, tehát $u(x,y) = c_1(x) + c_2(y)$, ahol c_1 folytonos, c_2 pedig folytonosan deriválható. Viszont a fentebb tett folytonossági kitétel miatt a Young-tétel alapján a $\partial_1\partial_2$ és $\partial_2\partial_1$ operátorok amúgy is azonosak, így szimmetriaokokból $u(x,y) = c_1(x) + c_2(y)$, ahol c_1, c_2 mindketten folytonosan deriválhatók. (Eddig maga a differenciálegyenlet általános megoldása.) Most a feltételből $x = \partial_1 u(x,y) = c_1'(x) \Rightarrow c_1(x) = \frac{x^2}{2} + k$ ($k = $ konst.), tehát $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + k + c_2(y)$ alakú. Innen a másik feltételből $\sin x = u\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{2} + k + c_2\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow c_2\left(\frac{1}{x}\right) = \sin x - \frac{x^2}{2} - k$, ahonnan $c_2(y) = \sin\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} - k$, tehát

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \sin\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2}.$$

2.2.4. Feladat. Oldjuk meg a síkon (adott $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekre):

$$\begin{cases} \partial_1\partial_2 u + 2x \cdot \partial_2 u = 0, \\ u(x,x) = \varphi(x), \\ \partial_2 u(x,x) = \psi(x). \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Megoldás: rögzített y-ra jelölje $v := \partial_2 u(\cdot, y)$, ezzel $v'(x) + 2x \cdot v(x) = 0$ (ami közönséges differenciálegyenlet), tehát alkalmas – y-tól függő – $c(y) \in \mathbb{R}$ számmal $v(x) = c(y) \cdot e^{-x^2}$, azaz $(u(x,\cdot))'(y) = \partial_2 u(x,y) = (\partial_2 u(\cdot, y))(x) = v(x) = c(y) \cdot e^{-x^2}$, tehát $(u(x,\cdot))'(y) = c(y) \cdot e^{-x^2}$, ami y-ra közönséges differenciálegyenlet. Ezt megoldva ($c_2(y) := \int_0 c(\cdot)$ jelöléssel) azt kapjuk, hogy $u(x,y) = c_1(x) + c_2(y) \cdot e^{-x^2}$ alakú, ahol c_1, c_2 folytonosan deriválható függvények. (Eddig maga a differenciálegyenlet általános megoldása.) Innen a feltételből

$$\varphi(x) = u(x,x) = c_1(x) + c_2(x) \cdot e^{-x^2} \quad \text{és} \quad \psi(x) = \partial_2 u(x,x) = c_2'(x) \cdot e^{-x^2}.$$

Ezekből rövid kalkulációval

$$u(x,y) = \varphi(x) + e^{-x^2} \cdot \int_x^y e^{t^2} \cdot \psi(t)\, dt.$$

2.2.5. Feladat. Oldjuk meg a síkon:

$$\begin{cases} \partial_1 u - \partial_2 u = 0, \\ u(x,0) = \cos x. \end{cases}$$

Megoldás: $v(x,y) := u(x+y, x-y)$ választással $\partial_2 v(x,y) = 0$, tehát $v(x,y) = c(x)$, ahol $c(\cdot)$ folytonos. Innen az egyenlet megoldása visszatranszformálással $u(x,y) = c(x+y)$. A feladat megoldása pedig a kezdeti feltétel alapján $c(x) = u(x,0) = \cos x$, tehát $u(x,y) = \cos(x+y)$.

2.2.2. A legegyszerűbb hullámegyenletek

(speciális, ún. hiperbolikus egyenletek, vö. a $(\partial_1, \partial_2) \mapsto \partial_1^2 - \partial_2^2$ kvadratikus alak szinthalmazai hiperbolák)

2.2.6. Feladat. Adott $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ esetén oldjuk meg $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en:

$$\begin{cases} \partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0 \quad (x > 0), \\ u(0,y) = g(y), \\ \partial_1 u(0,y) = h(y) \end{cases}$$

(kezdetiérték-feladat, azaz ún. Cauchy-feladat).

Megoldás: $v(x,y) := u\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$ választással triviálisan $\partial_1 \partial_2 v(x,y) = 0$ (az $y > -x$ félsíkban), ahonnan a 2.2.3. Feladathoz hasonló módon $v(x,y) = c_1(x) + c_2(y)$, ahol $c_1, c_2 \in C^1(\mathbb{R})$. Innen visszatranszformálással

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$u(x,y) = c_1(x+y) + c_2(x-y)$ (újra a jobb félsíkban). A kezdeti feltételek miatt minden y-ra

$g(y) = u(0,y) = c_1(y) + c_2(-y)$,

$h(y) = \partial_1 u(0,y) = \frac{d}{dx} u(x,y)_{|x=0} = c_1'(y) + c_2'(-y)$, azaz

$$\begin{cases} g'(y) = c_1'(y) - c_2'(-y), \\ h(y) = c_1'(y) + c_2'(-y). \end{cases}$$

Innen elemi kalkulációval

$$c_1(y) = \frac{1}{2}\left(g(y) + \int_0^y h\right) + c \quad \text{és} \quad c_2(y) = \frac{1}{2}\left(g(-y) + \int_{-y}^0 h\right) - c,$$

innen pedig

$$u(x,y) = c_1(x+y) + c_2(x-y) = \frac{1}{2}\left(g(y+x) + g(y-x) + \int_{y-x}^{y+x} h\right).$$

2.2.7. Feladat. Adott $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ esetén bederiválással igazoljuk, hogy az $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(x,y) := \frac{1}{2} \int_0^x \left[\int_{y-(x-t)}^{y+(x-t)} f(t,r)\, dr \right] dt$$

függvény kielégíti az alábbi feladatot:

$$\begin{cases} \partial_1^2 u(x,y) - \partial_2^2 u(x,y) = f(x,y) \quad (x>0), \\ u(0,y) = 0, \\ \partial_1 u(0,y) = 0. \end{cases}$$

2.2.8. Következmény (D'Alembert-formula)**.** *A legutóbbi két feladat összetételével adódik, hogy tetszőleges $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ esetén $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en a*

$$\begin{cases} \partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f \quad (x>0), \\ u(0,y) = g(y), \\ \partial_1 u(0,y) = h(y) \end{cases}$$

feladat megoldása az $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \int_0^x \left[\int_{y-(x-t)}^{y+(x-t)} f(t,r)\, dr \right] dt + \frac{1}{2} \left(g(y+x) + g(y-x) + \int_{y-x}^{y+x} h \right)$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

függvény. A levezetett homogén rész egyértelműsége miatt a feladat megoldása egyértelmű.

2.2.9. Megjegyzés. A legutóbbi feladat eredménye így is fogalmazható:

$$E(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x \geq |y|, \\ 0, & \text{ha } x < |y| \end{cases}$$

választással $u(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} E(x-t, y-r) \cdot f(t,r)\, d(t,r)$ kielégíti a $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$ hullámegyenletet (ahol $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ tetszőleges). Ezt úgy is szokás fogalmazni, hogy E ún. **alapmegoldása** a hullámegyenletnek.

Fizikai példa *(húr transzverzális rezgése).* Ha egy transzverzálisan rezgő vékony húr csak kis kitéréseket végez, akkor a kitérésfüggvény jó közelítéssel a fentebb tárgyalt típusú hullámegyegyenletet elégít ki. Nevezetesen ha $u(t,x)$ jelöli a húr (vízszintes) x koordinátájú pontjának t időpillanatbeli (függőleges) kitérését, akkor u kielégíti a

$$\rho(x) \cdot \partial_0^2 u(t,x) - T \cdot \partial_1^2 u(t,x) = F(t,x)$$

differenciálegyenletet, ahol ρ a húr anyagának (x-től függő) sűrűségfüggvénye, T a húrban jelentkező (konstans) feszítőerő, F pedig a kényszerrezgést okozó (esetleges) külső erő. ($F = 0$ esetén szabad rezgésről, egyébként pedig kényszerrezgésről beszélünk.) $u(0,x) = \varphi(x)$ a húr kezdőpillanatbeli alakját, $\partial_0 u(0,x) = \psi(x)$ pedig kezdeti sebességeloszlását jelenti, amit ismertnek tételezhetünk. Ezek a rezgés *kezdeti feltételei*. (Láthatjuk, hogy ezektől függően nagyon sokféle lehet a rezgés, egészen más típusú függvények jöhetnek be, ugyanakkor ezek mind-mind ugyanazt a parciális differenciálegyenletet elégítik ki.) Ugyanakkor várható, hogy a rezgés csak akkor lesz egyértelműen meghatározott, ha az eddigieken túlmenően a húr végpontjaiban ún. *peremfeltételek*et is biztosítunk.

Ha $\rho(x) = \rho$ konstans (azaz a húr homogén tömegeloszlású), akkor $v(t,x) := u\left(\sqrt{\rho} \cdot t, \sqrt{T} \cdot x\right)$, $f(t,x) := F\left(\sqrt{\rho} \cdot t, \sqrt{T} \cdot x\right)$ transzformálással a

$$\partial_0^2 v - \partial_1^2 v = f$$

egydimenziós hullámegyenlethez jutunk, aminek a kezdeti feltételeit is ismerjük. Ha a húr elég hosszú ahhoz, hogy a húr vizsgált szakaszán a végpontok hatásaitól eltekintsünk, akkor a rezgést meghatározó feladat *kezdetiérték-feladat* másképpen *Cauchy-feladat*, amelyre alkalmazható a D'Alembert-formula.

2.2.3. Kötött hullámok egydimenzióban

A fizikában előforduló egydimenziós hullámok általában nem a teljes téren jelentkeznek, hanem annak valamely „falak" által közrezárt tartományán; ez

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

egydimenzióban azt jelenti, hogy nem a teljes számegyenesen, hanem annak valamely részintervallumán. Az egydimenziós hullámegyenletekhez kapcsolódó feladatokra nézve tehát arra jutunk, hogy hullámegyenleteket különböző síktartományokon kell vizsgálnunk. Ezek tárgyalása jól mutatja, milyen mértékben függ az adott tartomány alakjától az, hogy a rajta definiált hullámegyenlet megoldásának egyértelműsége mekkora számú további feltétellel biztosítható.

(Megjegyezzük, hogy a vonatkozó irodalom nagyobb része az alább tárgyalandó eredményeket az ún. tükrözési elv segítségével vezeti le, amelynek lényege a kötött hullámokra vonatkozó feladatok visszajátszása az előző szakaszbeli félsíkon értelmezett standard feladatra. Hozzátesszük azonban, hogy ezen elv formális alkalmazása rendszerint több technikai számolással jár, mint az alábbiakban követett.)

A félsíkon definiált torzítatlan lineáris

$$\partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0$$

hullámegyenlet standard feladatának megoldását úgy kaptuk meg, hogy az egyenlet tetszőleges megoldását

$$u(t,x) = c(x+t) + d(x-t)$$

alakban kereshettük. Ebben az alakban a sík egyéb részhalmazain is tudunk kitűzni és formulákkal megoldani releváns standard feladatokat (tehát anélkül, hogy minden esetben kénytelenek lennénk azonnal numerikus eszközöket alkalmazni).

Hullámegyenlet a kvadránson

Legyenek először csak $g, a \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Keressünk a nemnegatív (t,x)-kvadránson olyan folytonos u függvényt, amelyik a kvadráns belsejében kielégíti a

$$\partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0$$

hullámegyenletet, továbbá

$$\begin{aligned} u(0,x) &= g(x) \quad (x \geq 0), \\ u(t,0) &= a(t) \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

A megoldhatóságnak nyilván szükséges feltétele $a(0) = g(0)$, továbbá a zárt kvadránson az $u(t,x) = c(x+t) + d(x-t)$ alakból a feltételek miatt minden $x \geq 0$ mellett

$$c(x) + d(x) = g(x),$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$c(x) + d(-x) = a(x),$$

tehát $x \geq 0$ esetén $d(x) = g(x) - c(x)$, míg $x \leq 0$ esetén $d(x) = a(-x) - c(-x)$. Innen a nemnegatív kvadránson

$$u(t,x) = \begin{cases} c(x+t) - c(x-t) + g(x-t), \text{ ha } t \leq x, \\ c(t+x) - c(t-x) + a(t-x), \text{ ha } t > x. \end{cases}$$

Ez pontosan akkor lesz kétszer folytonosan deriválható a nyílt kvadránson, ha teljesülnek az

$$\begin{aligned} a(0) &= g(0), \\ a''(0) &= g''(0), \\ 2c'(0) &= a'(0) + g'(0) \end{aligned}$$

ún. **kompatibilitási feltételek**. Ezekkel együtt viszont u már ki elégíti a hullámegyenletet és az adott feltételeket (tehát a kompatibilitási feltételek esetén a megoldás a megadott és csak a megadott alakú). A feladat egyértelmű megoldhatóságához tehát még olyan további feltételt kell tennünk, amely a c függvényt egyértelműen meghatározza. Ilyen feltétel a $\partial_0 u(0,x) = h(x)$ megkötés a nemnegatív félegyenesen. Ekkor a kapott alakból ezen a félegyenesen

$$c'(x) = \frac{g'(x) + h(x)}{2},$$

tehát a kompatibilitási feltételek aktuális alakja

$$\begin{aligned} a(0) &= g(0), \\ a'(0) &= h(0), \\ a''(0) &= g''(0), \end{aligned}$$

ami lényegében azt jelenti, hogy a megoldás másodrendű parciális deriváltjai is folytonosan terjednek ki a zárt kvadránsra. Továbbá (additív konstanstól eltekintve)

$$c(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) + \int_0^x h(s)\, ds\right).$$

Ezzel igazoltuk a következőket:

adott $g, a \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $h \in C^1(\mathbb{R}_+)$ és a

$$\begin{aligned} a(0) &= g(0), \\ a'(0) &= h(0), \\ a''(0) &= g''(0) \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

kompatibilitási feltételek esetén az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$-on értelmezett

$$\begin{cases} \partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0 & (t, x > 0)\,, \\ u\,(0,x) = g\,(x) & (x \geq 0)\,, \\ \partial_0 u\,(0,x) = h\,(x) & (x \geq 0)\,, \\ u\,(t,0) = a\,(t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

feladat egyértelmű $u = u\,(t,x)$ megoldására a nemnegatív kvadránson

$$u\,(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g\,(x+t) + g\,(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} h\,(s)\; ds \right), & \text{ha } t \leq x, \\ \frac{1}{2}\left(g(t+x) - g(t-x) + \int\limits_{t-x}^{t+x} h(s)\, ds \right) + a\,(t-x)\,, & \text{ha } t > x. \end{cases}$$

2.2.10. Példa. Oldjuk meg a nemnegatív kvadránson a

$$\begin{cases} \partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0 & (t, x > 0)\,, \\ u\,(0,x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} & (x \geq 0)\,, \\ \partial_0 u\,(0,x) = 1 - x & (x \geq 0)\,, \\ u\,(t,0) = e^t & (t \geq 0) \end{cases}$$

feladatot!

Megoldás: A fenti jelölésekkel $a\,(t) = e^t$, $g\,(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $h\,(x) = 1 - x$, ezekre pedig teljesülnek a kompatibilitási feltételek. Így a megoldás azonnal

$$u\,(t,x) = \begin{cases} 1 + x + t + \frac{(x-t)^2}{2}, & \text{ha } 0 \leq t \leq x, \\ 2x + e^{t-x}, & \text{ha } t > x \geq 0. \end{cases}$$

Hullámegyenlet háromszöglapon

Legyenek $g, a \in C^2\,[0,1]$. Keressünk a

$$H = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y\,;\; x + y \leq 1 \right\}$$

háromszöglapon olyan u függvényt, amely H belsejében kielégíti a

$$\partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0$$

hullámegyenletet, továbbá (az egyszerűség kedvéért a kvadráns esetéhez hasonlóan) másodrendű parciális deriváltjaival együtt folytonosan terjed ki H-ra és a befogókon

$$u\,(t,0) = a\,(t) \quad (0 \leq t \leq 1)\,,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$u(0,x) = g(x) \quad (0 \le x \le 1).$$

A kvadránson látottakhoz hasonlóan a H halmazon

$$u(t,x) = \begin{cases} c(x+t) - c(x-t) + g(x-t), & \text{ha } t \le x, \\ c(t+x) - c(t-x) + a(t-x), & \text{ha } t > x, \end{cases}$$

ahol $c \in C^2[0,1]$. Innen $x \in [0,1]$ esetén

$$u\left(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}\right) = c(1) - c(x) + g(x)$$

és

$$u\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = c(1) - c(x) + a(x).$$

Ezért

$$c(1) + g(x) - u\left(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}\right) = c(x) = c(1) + a(x) - u\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$$

minden $x \in [0,1]$ esetén, azaz

$$u\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2}\right) - u\left(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}\right) = a(x) - g(x).$$

Eszerint az átfogón nem tetszőlegesen írható elő u értéke, hanem az átfogó felezőponjára szimmetrikus pontokban u értékei meghatározzák egymást a most kapott egyenlőség szerint. Viszont ugyaninnen az is adódik, hogy az átfogó feléig u értéke előírható (természetesen a megfelelő kompatibilitási feltételekkel a végpontokban). Ezáltal (elemi számolással) azt nyerjük, hogy adott $g, a \in C^2[0,1]$, $f \in C^2\left[0, \frac{1}{2}\right]$ esetén a

$$\begin{aligned} a(0) &= g(0), \\ f(0) &= g(1), \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= a'(0) - g'(0), \\ a''(0) &= g''(0) \end{aligned}$$

kompatibilitási feltételek mellett az H-n értelmezett

$$\begin{cases} \partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0 & ((t,x) \in H), \\ u(0,x) = g(x) & (0 \le x \le 1), \\ u(t,0) = a(t) & (0 \le t \le 1), \\ u(t,1-t) = f(t) & \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

feladat $u=u(t,x)$ megoldása egyértelműen létezik, nevezetesen

$$u(t,x)=\begin{cases} g(x+t)+f\left(\frac{1+t-x}{2}\right)-f\left(\frac{1-t-x}{2}\right), & \text{ha } t\le x,\\ g(t+x)-g(t-x)+f\left(\frac{1+x-t}{2}\right)-f\left(\frac{1-x-t}{2}\right)+a(t-x), & \text{ha } t>x. \end{cases}$$

2.2.11. Példa. Oldjuk meg a fenti H háromszöglapon a

$$\begin{cases} \partial_0^2 u-\partial_1^2 u=0 & ((t,x)\in H),\\ u(0,x)=1+x & (0\le x\le 1),\\ u(t,0)=1 & (0\le t\le 1),\\ u(t,1-t)=2-t+\sin(\pi t) & \left(0\le t\le \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

feladatot!

Megoldás: A fenti jelölésekkel $a(t)=1$, $g(x)=1+x$, $f(t)=2-t+\sin(\pi t)$, ezekre pedig teljesülnek a megadott kompatibilitási feltételek. Így a megoldás rövid számolás után

$$u(t,x)=\begin{cases} 1+x+\sin\frac{\pi(1+t-x)}{2}-\sin\frac{\pi(1-t-x)}{2}, \text{ ha } & t\le x,\\ 1+x+\sin\frac{\pi(1+x-t)}{2}-\sin\frac{\pi(1-x-t)}{2}, \text{ ha } & t>x. \end{cases}$$

Ez a $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ azonosság miatt egyetlen képletté egyszerűsödik:

$$u(t,x)=1+x+\sin\frac{\pi(1+t-x)}{2}-\sin\frac{\pi(1-t-x)}{2}=$$
$$=1+x+2\cos\frac{\pi(1-x)}{2}\sin\frac{\pi t}{2}$$

minden $(t,x)\in H$ esetén.

Hullámegyenlet az egységnégyzeten

Legyenek $g,a,b\in C^2[0,1]$. Keressünk a $[0,1]\times[0,1]$ négyzeten olyan u függvényt, amely a négyzet belsejében kielégíti a

$$\partial_0^2 u-\partial_1^2 u=0$$

hullámegyenletet, továbbá (az egyszerűség kedvéért a fentebbi esetekhez hasonlóan) másodrendű parciális deriváltjaival együtt folytonosan terjed ki $[0,1]\times[0,1]$-re és három oldalélen adott:

$$\begin{aligned} u(0,x)&=g(x) \quad (0\le x\le 1),\\ u(t,0)&=a(t) \quad (0\le t\le 1),\\ u(t,1)&=b(t) \quad (0\le t\le 1). \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A kvadránson és háromszögön látottakhoz hasonlóan az egységnégyzeten

$$u(t,x)=\begin{cases} c(x+t)-c(x-t)+g(x-t), \text{ ha } \ t\le x,\\ c(t+x)-c(t-x)+a(t-x), \text{ ha } \ t>x \end{cases}$$

alakú, ahol a c függvény értelmezett a [0,2] intervallumon. A felső peremfeltétel alapján ekkor $0\le t\le 1$ esetén

$$b(t)=u(t,1)=c(1+t)-c(1-t)+g(1-t),$$

ahonnan

$$c(1+t)=c(1-t)-g(1-t)+b(t),$$

azaz $x\in[1,2]$ esetén

$$c(x)=c(2-x)-g(2-x)+b(x-1),$$

tehát a c függvény (1,2]-n felvett értékei kifejezhetők a [0,1]-en felvett értékeivel. Így $[0,1]\times[0,1]$-en

$$u(t,x)=\begin{cases} c(x+t)-c(x-t)+g(x-t), & \text{ha } t\le x \text{ és } t+x\le 1,\\ g(x-t)-g(2-x-t)+c(2-x-t)- & \\ \qquad -c(x-t)+b(x+t-1), & \text{ha } t\le x \text{ és } t+x>1,\\ c(t+x)-c(t-x)+a(t-x), & \text{ha } t>x \text{ és } t+x\le 1,\\ a(t-x)+b(t+x-1)-g(2-t-x) & \\ \qquad +c(2-t-x)-c(t-x), & \text{ha } t>x \text{ és } t+x>1. \end{cases}$$

Ez a függvény kielégíti a peremfeltételeket. Továbbá ellenőrzéssel adódik, hogy u pontosan akkor lesz kétszer folytonosan deriválható az egységnégyzeten, ha teljesülnek a

$$\begin{aligned} a(0)&=g(0), & b(0)&=g(1),\\ 2c'(0)&=a'(0)+g'(0), & 2c'(1)&=b'(0)+g'(1),\\ a''(0)&=g''(0), & b''(0)&=g''(1) \end{aligned}$$

kompatibilitási feltételek. Ezek teljesülése esetén viszont az u-ra kapott képlet tetszőleges $c\in C^2[0,1]$ mellett kielégíti a hullámegyenletet is. (Tehát a megoldások ezek és csak ezek.)

2.2.12. Megjegyzés. A fenti formulával kapott u függvényre a négyzet negyedik oldalán

$$u(1,x)=a(1-x)+b(x)-g(1-x),$$

ami c választásától független. Ez azt jelenti, hogy mind a négy oldalon nem írhatjuk elő az egységnégyzetbeli hullámfüggvényt. Három oldalon viszont

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

már előírhatjuk, sőt az egyik oldalon még a rá merőleges irányú deriváltat is. Nevezetesen: a kvadráns esetéhez hasonlóan adódik, hogy adott $g, a, b \in$ $\in C^2\,[0,1]$, $h \in C^1\,[0,1]$ esetén az

$$\begin{aligned} a\,(0) &= g\,(0)\,, \qquad b\,(0) = g\,(1)\,, \\ a'\,(0) &= h\,(0)\,, \qquad b'\,(0) = h\,(1)\,, \\ a''\,(0) &= g''\,(0)\,, \quad b''\,(0) = g''\,(1) \end{aligned}$$

kompatibilitási feltételek mellett a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten a

$$\partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0$$

hullámegyenletnek az

$$\begin{aligned} u\,(0,x) &= g\,(x) && (0 \le x \le 1)\,, \\ \partial_0 u\,(0,x) &= h\,(x) && (0 \le x \le 1)\,, \\ u\,(t,0) &= a\,(t) && (0 \le t \le 1)\,, \\ u\,(t,1) &= b\,(t) && (0 \le t \le 1) \end{aligned}$$

előírások melletti egyértelmű megoldása

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(g\,(x+t) + g\,(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} h\,(s)\;ds\Big), \\ \qquad\qquad \text{ha } t \le x \text{ és } t+x \le 1, \\ b\,(x+t-1) + \frac{1}{2}\Big(g\,(x-t) - g\,(2-x-t) + \int\limits_{x-t}^{2-x-t} h\,(s)\;ds\Big), \\ \qquad\qquad \text{ha } t \le x \text{ és } t+x > 1, \\ a\,(t-x) + \frac{1}{2}\Big(g\,(t+x) - g\,(t-x) + \int\limits_{t-x}^{t+x} h\,(s)\;ds\Big), \\ \qquad\qquad \text{ha } t > x \text{ és } t+x \le 1, \\ a(t-x) + b(t+x-1) + \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{t-x}^{2-t-x} h(s)\,ds - g(2-t-x) - g(t-x)\Big), \\ \qquad\qquad \text{ha } t > x \text{ és } t+x > 1. \end{cases}$$

2.2.13. Példa. Oldjuk meg a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzeten a

$$\begin{cases} \partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0 & ((t,x) \in [0,1] \times [0,1])\,, \\ u\,(0,x) = 1 + x & (0 \le x \le 1)\,, \\ \partial_0 u\,(0,x) = x^2 - x & (0 \le x \le 1)\,, \\ u\,(t,0) = 1 & (0 \le t \le 1)\,, \\ u\,(t,1) = 2 & (0 \le t \le 1) \end{cases}$$

feladatot!

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Megoldás: A fenti jelölésekkel $a(t)=1$, $b(t)=2$, $g(x)=1+x$, $h(x)=x^2-x$, és ezekre teljesülnek a legutóbbi kompatibilitási feltételek. A megoldás a fenti két formula bármelyikének használatával felírható. A korábbi formulából például a megadott feltételek és a c-re vonatkozó kompatibilitási egyenlőségek alapján c egyszerűen kiszámolható:

$$c(x)=\frac{1+x}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}$$

(additív konstanstól eltekintve), így behelyettesítés és egyszerűsítés után

$$u(t,x)=\begin{cases} x^2t+\frac{t^3}{3}-xt+x+1, & \text{ha } t\le x \text{ és } t+x\le 1,\\ 2x+(1-t)^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}+t(1-x), & \text{ha } t\le x \text{ és } t+x>1,\\ t^2x+\frac{x^3}{3}-xt+x+1, & \text{ha } t>x \text{ és } t+x\le 1,\\ t+x+(1-x)^2(1-t)+\frac{(1-t)^3}{3}+x(1-t), & \text{ha } t>x \text{ és } t+x>1. \end{cases}$$

Hullámegyenlet sávon (a korlátos hullám modellje)

Legyen $g\in C^2[0,1]$ és $a,b\in C^2(\mathbb{R}_+)$. Keressünk az $\mathbb{R}_+\times[0,1]$ sávon olyan u függvényt, amely a sáv belsejében kielégíti a

$$\partial_0^2u-\partial_1^2u=0$$

hullámegyenletet, továbbá másodrendű parciális deriváltjaival együtt folytonosan terjed ki a zárt $\mathbb{R}_+\times[0,1]$ sávra, továbbá a sáv határán adott:

$$\begin{aligned} u(0,x)&=g(x) \quad (0\le x\le 1),\\ u(t,0)&=a(t) \quad (0\le t),\\ u(t,1)&=b(t) \quad (0\le t). \end{aligned}$$

Az u függvényt megint csak

$$u(t,x)=c(x+t)+d(x-t)$$

alakban keresve, az alsó peremfeltétel alapján minden $t\ge 0$ esetén

$$a(t)=u(t,0)=c(t)+d(-t),$$

ezért (t helyett $t-1$-gyel) minden $t\ge 1$ mellett

$$a(t-1)=c(t-1)+d(1-t).$$

A felső peremfeltétel alapján pedig minden $t\ge 0$ esetén

$$b(t)=u(t,1)=c(1+t)+d(1-t).$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

E két legutóbbiból $d(t-1)$ kiküszöbölésével

$$c(t+1) = c(t-1) - a(t-1) + b(t)$$

minden $t \geq 1$ mellett. Eszerint c értékeit elegendő [0,2]-n ismerni, onnan a most kapott egyenlőség értelmében egyértelműen meghatározott egész $\mathbb{R}_+$-on. Most a kezdeti feltétel és újra az alsó peremfeltétel alapján

$$d(t) = \begin{cases} g(t) - c(t), & \text{ha } 0 \leq t \leq 1, \\ a(-t) - c(-t), & \text{ha } t < 0, \end{cases}$$

tehát az egész sávon

$$d(x-t) = \begin{cases} g(x-t) - c(x-t), & \text{ha } x-1 \leq t \leq x, \\ a(t-x) - c(t-x), & \text{ha } x < t. \end{cases}$$

Innen d kiküszöbölésével

$$u(t,x) = \begin{cases} c(x+t) - c(x-t) + g(x-t), & \text{ha } t \leq x, \\ c(t+x) - c(t-x) + a(t-x), & \text{ha } t > x \end{cases}$$

az egész sávon. Mindezek alapján u megadásához elegendő csak c értékeit megadnunk, azokat is csak [0,2]-n. Továbbá azonnal leellenőrizhető, hogy u kétszeri folytonos deriválhatóságának szükséges feltételét képezik az egységnégyzet esetében felírt

$$\begin{aligned} a(0) &= g(0), & b(0) &= g(1), \\ 2c'(0) &= a'(0) + g'(0), & 2c'(1) &= b'(0) + g'(1), \\ a''(0) &= g''(0), & b''(0) &= g''(1) \end{aligned}$$

kompatibilitási feltételek. Ugyanakkor a kezdeti feltételből és a felső peremfeltételből adódólag minden $0 \leq t \leq 1$ esetén

$$c(1+t) = c(1-t) - g(1-t) + b(t),$$

tehát a c függvény (1,2]-n felvett értékei kifejezhetők a [0,1]-en felvett értékeivel. Így az $u(t,x)$-re legutóbb kapott képlet explicite megadja a megoldást, ha a c függvény $\mathbb{R}_+$-on fölvett értékeit kifejezzük a [0,1]-en fölvett értékeivel. A

$$\begin{aligned} c(1+t) &= c(1-t) - g(1-t) + b(t) \qquad (0 \leq t \leq 1), \\ c(t+1) &= c(t-1) - a(t-1) + b(t) \qquad (t \geq 1) \end{aligned}$$

feltétel-együttes alapján ezt rekurzíve megtehetjük.Teljes indukcióval azonnal adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ mellett

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

- $2n-1 \le x \le 2n$ esetén

$$c(x) = c(2n-x) - g(2n-x) + \sum_{k=1}^{n} b(x-2k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} a(x-2k);$$

- $2n \le x \le 2n+1$ esetén

$$c(x) = c(x-2n) + \sum_{k=1}^{n} b(x-2k+1) - \sum_{k=1}^{n} a(x-2k).$$

Elemi számolással adódik, hogy ha a c függvényt a [0,1]-en tetszőleges olyan kétszer folytonosan deriválható függvényként definiáljuk, amely teljesíti a fent megadott kompatibilitási feltételeket, akkor a fenti rekurzióval kiterjesztett $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvénnyel definiált

$$u(t,x) = \begin{cases} c(x+t) - c(x-t) + g(x-t), \text{ ha } t \le x, \\ c(t+x) - c(t-x) + a(t-x), \text{ ha } t > x \end{cases}$$

függvény az egész $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ sáv belsejében kétszer folytonosan deriválható és kielégíti a $\partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0$ hullámegyenletet, továbbá másodrendű parciális deriváltjaival együtt folytonosan terjed ki az egész sávra, valamint a megadott kezdeti és peremfeltételeknek is eleget tesz. Mindezekkel beláttuk a következőket:

2.2.14. Tétel. *Legyenek $g, c \in C^2[0,1]$ és $a, b \in C^2(\mathbb{R}_+)$, amelyekre teljesülnek a*

$$\begin{aligned} a(0) &= g(0), & b(0) &= g(1), \\ 2c'(0) &= a'(0) + g'(0), & 2c'(1) &= b'(0) + g'(1), \\ a''(0) &= g''(0), & b''(0) &= g''(1) \end{aligned}$$

kompatibilitási feltételek. Ekkor a

$$\partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0$$

hullámegyenletnek az $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ sávon az

$$\begin{aligned} u(0,x) &= g(x) \quad (0 \le x \le 1), \\ u(t,0) &= a(t) \quad (0 \le t), \\ u(t,1) &= b(t) \quad (0 \le t) \end{aligned}$$

kezdeti és peremfeltételeknek eleget tevő egyértelmű megoldása

$$u(t,x) = \begin{cases} \widetilde{c}(x+t) - \widetilde{c}(x-t) + g(x-t), \text{ ha } t \le x, \\ \widetilde{c}(t+x) - \widetilde{c}(t-x) + a(t-x), \text{ ha } t > x, \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ahol $\widetilde{c}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{c}(x) := \begin{cases} c(x), & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ c(2n-x) - g(2n-x) + \sum_{k=1}^{n} b(x-2k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} a(x-2k), & \\ & \text{ha } 2n-1 \le x \le 2n, \\ c(x-2n) + \sum_{k=1}^{n} b(x-2k+1) - \sum_{k=1}^{n} a(x-2k), & \\ & \text{ha } 2n \le x \le 2n+1 \end{cases}$$

(n *a természetes számok halmazán fut).*

Mivel a tételbeli formula az egységnégyzeten a reá vonatkozó fentebbi eredményt adja vissza, ezért a sávra vonatkozó megoldás iteratíve is megkapható: először felírjuk az egységnégyzeten való u megoldást, majd az $u(1,x)$ és $\partial_0 u(1,x)$ értékek mint kezdeti feltételek ismeretében felírjuk az [1,2] × × [0,1]-beli megoldást (vízszintes egységnyi eltolással, mintha [0,1] × [0,1]-en dolgoznánk), és így tovább.

2.2.15. Példa. Oldjuk meg a $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ sávon a

$$\begin{cases} \partial_0^2 u - \partial_1^2 u = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]), \\ u(0,x) = 1 + x & (0 \le x \le 1), \\ \partial_0 u(0,x) = x^2 - x & (0 \le x \le 1), \\ u(t,0) = 1 & (t \ge 0), \\ u(t,1) = 2 & (t \ge 0) \end{cases}$$

feladatot!

Megoldás: A tételjelöléseivel $a(t) = 1$, $b(t) = 2$, $g(x) = 1 + x$, $h(x) = x^2 - x$, és ezekre teljesülnek a kompatibilitási feltételek. Ha először csak a [0,1] × [0,1] négyzetre szorítkozunk, akkor ez éppen az előző példát kapjuk vissza. Ennek alapján az egységnégyzeten

$$u(t,x) = \begin{cases} x^2 t + \frac{t^3}{3} - xt + x + 1, & \text{ha } t \le x \text{ és } t + x \le 1, \\ 2x + (1-t)^2 (1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + t(1-x), & \text{ha } t \le x \text{ és } t + x > 1, \\ t^2 x + \frac{x^3}{3} - xt + x + 1, & \text{ha } t > x \text{ és } t + x \le 1, \\ t + x + (1-x)^2 (1-t) + \frac{(1-t)^3}{3} + x(1-t), & \text{ha } t > x \text{ és } t + x > 1. \end{cases}$$

Innen azonnal minden $x \in [0,1]$ esetén

$$u(1,x) = 1 + x$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$\partial_0 u\,(1,x) = x - x^2.$$

Ez alapján az $[1,2]\times[0,1]$ négyzeten (mintha $[0,1]\times[0,1]$-en számolnánk, $1+x$ kezdeti értékkel és a t szerinti derivált $x-x^2$ kezdeti értékével; majd $t \to t-1$ helyettesítéssel mint egységnyi jobbra tolással)

$$u\,(t,x) = \begin{cases} 1 + x + (t-1)\,x - x^2\,(t-1) - \frac{(t-1)^3}{3}, \\ \qquad\qquad \text{ha } t \le x+1 \text{ és } t+x \le 2, \\ 1 + x + (2-t)\,(1-x) - (2-t)^2\,(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3}, \\ \qquad\qquad \text{ha } t \le x+1 \text{ és } t+x > 2, \\ 1 + x + x\,(t-1) - (t-1)^2\,x - \frac{x^3}{3}, \\ \qquad\qquad \text{ha } t > x+1 \text{ és } t+x \le 2, \\ 1 + x + (1-x)\,(2-t) - (1-x)^2\,(2-t) - \frac{(2-t)^3}{3}, \\ \qquad\qquad \text{ha } t > x+1 \text{ és } t+x > 2, \end{cases}$$

a kompatibilitási feltételek természetesen ez esetben is fennállnak. Azonnal látható, hogy

$$\begin{aligned} u\,(2,x) &= 1 + x = u\,(0,x)\,, \\ \partial_0 u\,(2,x) &= x^2 - x = \partial_0 u\,(0,x)\,, \end{aligned}$$

tehát $t = 2$-től jobbra u ugyanúgy viselkedik, mint $t = 0$-tól közvetlenül jobbra. Eszerint a sávon az u függvény a t tengely irányában periodikus, 2 periódussal. Például

$$\begin{aligned} \partial_0 u\,(2013,x) &= x - x^2, \\ \partial_0 u\,(2014,x) &= x^2 - x. \end{aligned}$$

2.2.4. Néhány nagyon elemi Laplace- ill. Poisson-egyenlet

(speciális, ún. elliptikus egyenletek, vö. a $(\partial_1,\partial_2) \mapsto \partial_1^2 + \partial_2^2$ kvadratikus alak szinthalmazai ellipszisek, sőt körök)

2.2.16. Feladat. Keressük meg a síkon a $\Delta u = 0$ Laplace-egyenlet $u\,(x,y) = \varphi\,(x)\cdot\psi\,(y)$ alakú megoldásait!

Megoldás: A keresett alakra $0 = \Delta u\,(x,y) = \partial_1^2 u\,(x,y) + \partial_2^2 u\,(x,y) = \varphi''\,(x)\cdot\psi\,(y) + \varphi\,(x)\cdot\psi''\,(y)$, tehát $\varphi''\,(x)\cdot\psi\,(y) = -\varphi\,(x)\cdot\psi''\,(y)$ ahonnan (egyelőre feltételezve, hogy φ és ψ nem azonosan 0, és az egyenletet csak ezen változók mentén vizsgálva)
$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}$. Mivel a baloldal nem függ y-tól (és a jobb oldal x-től), ezért mindkét oldal konstans, persze ugyanaz a c konstans. Ezzel tehát

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = c$ és $\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = -c$, ahonnan $\varphi''(x) = c \cdot \varphi(x)$ és $\psi''(y) = -c \cdot \psi(y)$. (Ez utóbbi feltételekbe már az is belefér, ha φ vagy ψ azonosan 0.)

I. eset: $c > 0$. Ekkor (amint az a közönséges differenciálegyenletek köréből ismert) alkalmas c_1, c_2, d_1, d_2 konstansokkal $\varphi(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{c}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{c}x}$, $\psi(y) = d_1 \cdot \cos\sqrt{c}y + d_2 \cdot \sin\sqrt{c}y$, azaz

$$u(x,y) = \left(c_1 \cdot e^{\sqrt{c}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{c}x}\right) \cdot \left(d_1 \cdot \cos\sqrt{c}y + d_2 \cdot \sin\sqrt{c}y\right).$$

II. eset: $c = 0$. Ekkor alkalmas c_1, c_2, d_1, d_2 konstansokkal $\varphi(x) = c_1 x + c_2$, $\psi(y) = d_1 y + d_2$, azaz

$$u(x,y) = (c_1 x + c_2) \cdot (d_1 y + d_2).$$

III. eset: $c < 0$. Ekkor alkalmas c_1, c_2, d_1, d_2 konstansokkal

$$\varphi(x) = c_1 \cdot \cos\sqrt{|c|}x + c_2 \cdot \sin\sqrt{|c|}x,$$

$\psi(y) = d_1 \cdot e^{\sqrt{|c|}y} + d_2 \cdot e^{-\sqrt{|c|}y}$, azaz

$$u(x,y) = \left(c_1 \cdot \cos\sqrt{|c|}x + c_2 \cdot \sin\sqrt{|c|}x\right) \cdot \left(d_1 \cdot e^{\sqrt{|c|}y} + d_2 \cdot e^{-\sqrt{|c|}y}\right).$$

2.2.17. Feladat. Adott $f, g \in C(\mathbb{R})$ esetén keressük meg a síkon a $\Delta u(x,y) = f(x) + g(y)$ Poisson-egyenlet $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$ alakú megoldásait!

Megoldás: A keresett alakra

$$f(x) + g(y) = \Delta u(x,y) = \varphi''(x) + \psi''(y),$$

ahonnan $f(x) - \varphi''(x) = \psi''(y) - g(y)$, tehát mindkét oldal konstans. Tehát alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal $\varphi''(x) = f(x) - c$ és $\psi''(y) = g(y) + c$. Ezeket megoldva, végül

$$u(x,y) = \int_0^x \int_0^r f(\xi)\, d\xi\, dr + \int_0^y \int_0^t g(\tau)\, d\tau\, dt + \alpha \cdot \left(y^2 - x^2\right) + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta,$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valós konstansok.

A $\Delta u = 0$ Laplace-egyenletet kielégítő függvényeket *harmonikus függvények*nek is szokás nevezni.

2.2.18. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $u(x,y) := \frac{1}{4\pi} \ln\left(x^2 + y^2\right)$ kétváltozós függvény az origó komplementumán harmonikus!

2.2.19. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények az értelmezési tartományukon kielégítik a síkbeli $\Delta u = 0$ Laplace-egyenletet, tehát harmonikusak (ajánlott sorban egymás után).

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

1. $u(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$,
2. $u(x,y) := \frac{y}{x^2+y^2}$,
3. $u(x,y) := \frac{a\cdot x+b\cdot y}{x^2+y^2} \quad (a,b\in\mathbb{R})$,
4. $u(x,y) := \frac{a\cdot(x-a)+b\cdot(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} \qquad (a,b\in\mathbb{R})$,
5. $u(x,y) := -1-2\cdot\frac{a\cdot(x-a)+b\cdot(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} = \frac{a^2+b^2-x^2-y^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} \quad (a,b\in\mathbb{R})$,

de például az $u(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2}$ már nem, sőt a kétváltozós kvadratikus alakok közül is csak nagyon speciálisak!

Az alábbiakban legyen

$$S(0,1) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \right\},$$
$$B(0,1) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \right\},$$
$$B^{\mathrm{o}}(0,1) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1 \right\}$$

rendre a síkbeli egységkörvonal, zárt egységkörlap és nyílt egységkörlap.

2.2.20. Definíció. $P : [0,2\pi]\times B^{\mathrm{o}}(0,1)\to\mathbb{R}$,

$$P(t,x,y) := \frac{1-x^2-y^2}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}$$

ún. **Poisson-**féle **mag**függvény.

2.2.21. Megjegyzés. A fenti feladat utolsó pontja értelmében minden $t\in$ $\in[0,2\pi]$ mellett a $P(t,\cdot,\cdot)$ függvény harmonikus.

2.2.22. Megjegyzés. Az $(x,y)\mapsto P(t,x,y)\cdot f(\cos t,\sin t)$ és $(x,y)\mapsto$ $\partial_k P(t,x,y)\cdot f(\cos t,\sin t)$ függvények folytonos deriválhatósága miatt bederiválással (kétszer, egymást követően) azonnal adódik, hogy tetszőleges $f\in$ $\in C(S(0,1))$ esetén az

$$u(x,y) := \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-x^2-y^2\right)\cdot f(\cos t,\sin t)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} P(t,x,y)\cdot f(\cos t,\sin t)\;dt$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

függvénynek az $S(0,1)$ körvonal komplementumán léteznek és folytonosak a másodrendű parciális deriváltjai. Ezért u kétszer folytonosan deriválható az $S(0,1)$ körvonal komplementumán, továbbá

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \Delta P(t,x,y) \cdot f(\cos t, \sin t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} 0 \cdot f(\cos t, \sin t)\; dt = 0,$$

azaz u ezen a komplementumon kielégíti a $\Delta u = 0$ Laplace-egyenletet.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy e legutóbbi feladatban definiált u függvény a nyílt $B^{\mathrm{o}}(0,1)$ körlapról folytonosan terjed ki a zárt $B(0,1)$ körlapra, mégpedig úgy, hogy az $S(0,1)$ körvonal pontjaiban az előre megadott f függvénnyel egyezik meg, azaz u kielégíti az alábbi ún. peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \left(x^2+y^2<1\right), \\ u(x,y) = f(x,y) & \left(x^2+y^2=1\right), \end{cases}$$

sőt e feladatnak a fent definiált u a mondott feltételekre nézve egyértelmű megoldása. Az egyenlet kielégítése éppen a fenti megjegyzést jelenti. A továbbiakban a peremfeltétellel és az egyértelműséggel foglalkozunk.

2.2.23. Megjegyzés. Minden $0 \le r < 1$ esetén

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cdot\cos t}{1 + r^2 - 2r\cdot\cos t}\, dt = 2\pi.$$

Bizonyítás.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cdot\cos t}{1 + r^2 - 2r\cdot\cos t}\, dt = \int_0^{\pi} \cdots + \int_{\pi}^{2\pi} \cdots =$$

$$= \left[\operatorname{arctg} \frac{r - \cos t}{\sin t}\right]_{0+}^{\pi-} + \left[\operatorname{arctg} \frac{r - \cos t}{\sin t}\right]_{\pi+}^{2\pi-} = \pi + \pi = 2\pi. \qquad \square$$

2.2.24. Állítás. *Minden $0 \le r < 1$ esetén*

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cdot\cos t}\, dt = 1.$$

Bizonyítás. A legutóbbiból

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cdot\cos t}{1 + r^2 - 2r\cdot\cos t}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cdot\cos t}\right) dt =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cdot\cos t}\,dt,$$

ahonnan az állítás triviális. □

2.2.25. Állítás. *Tetszőleges $f \in C(S(0,1))$ esetén az $u : B(0,1) \to \mathbb{R}$,*

$$u(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & ha\ x^2+y^2 = 1, \\ \dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\left(1-x^2-y^2\right)\cdot f(\cos t,\sin t)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt, & ha\ x^2+y^2<1 \end{cases}$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. Elegendő igazolnunk, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}$, $(r_n) \subseteq [0,1)$, $\alpha_n \to \alpha$, $r_n \to 1-$ esetén $u(r_n\cdot\cos\alpha_n, r_n\cdot\sin\alpha_n) \to f(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

Feltehető, hogy mindegyik $|\alpha_n - \alpha| < \pi$, továbbá a 2π-periodicitás miatt $u(r_n\cdot\cos\alpha_n, r_n\cdot\sin\alpha_n) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{\left(1-r_n^2\right)\cdot f(\cos t,\sin t)}{(r_n\cos\alpha_n-\cos t)^2+(r_n\cdot\sin\alpha_n-\sin t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{\left(1-r_n^2\right)\cdot f(\cos t,\sin t)}{1+r_n^2-2r_n\cdot\cos(t-\alpha_n)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \frac{\left(1-r_n^2\right)\cdot f(\cos t,\sin t)}{1+r_n^2-2r_n\cdot\cos(t-\alpha_n)}\,dt,$$

innen $\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \frac{\left(1-r_n^2\right)}{1+r_n^2-2r_n\cdot\cos(t-\alpha_n)}\,dt = 1$ miatt

$$|u(r_n\cdot\cos\alpha_n, r_n\cdot\sin\alpha_n) - f(\cos\alpha,\sin\alpha)| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \frac{\left(1-r_n^2\right) f(\cos t,\sin t)}{1+r_n^2-2r_n\cos(t-\alpha_n)}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \frac{\left(1-r_n^2\right) f(\cos\alpha,\sin\alpha)}{1+r_n^2-2r_n\cos(t-\alpha_n)}\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \frac{\left(1-r_n^2\right)|f(\cos t,\sin t) - f(\cos\alpha,\sin\alpha)|}{1+r_n^2-2r_n\cos(t-\alpha_n)}\,dt.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Jelölje $K > 0$ az f egy korlátját. Legyen most $\varepsilon > 0$. Ekkor f folytonossága miatt van olyan $0 < \delta < \pi$ szám, hogy minden $|t - \alpha| \leq \delta$ esetén

$$|f(\cos t, \sin t) - f(\cos\alpha, \sin\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Egy N_0 indextől kezdve persze $|\alpha_n - \alpha| < \frac{\delta}{2}$. Ezzel

$$|u(r_n \cdot \cos\alpha_n, r_n \cdot \sin\alpha_n) - f(\cos\alpha, \sin\alpha)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \frac{\left(1 - r_n^2\right) \cdot |f(\cos t, \sin t) - f(\cos\alpha, \sin\alpha)|}{1 + r_n^2 - 2r_n \cdot \cos(t - \alpha_n)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_{\alpha-\pi}^{\alpha-\delta} \cdots + \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} \cdots + \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\pi} \cdots \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha-\pi}^{\alpha-\delta} \frac{2K\left(1 - r_n^2\right)}{1 + r_n^2 - 2r_n \cdot \cos(t - \alpha_n)}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} \frac{\frac{\varepsilon}{2}\left(1 - r_n^2\right)}{1 + r_n^2 - 2r_n \cdot \cos(t - \alpha_n)}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\pi} \frac{2K\left(1 - r_n^2\right)}{1 + r_n^2 - 2r_n \cdot \cos(t - \alpha_n)}\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha-\pi}^{\alpha-\delta} \frac{2K\left(1 - r_n^2\right)}{1 + r_n^2 - 2r_n \cdot \cos\frac{\delta}{2}}\, dt + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2\pi} \cdot \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \frac{\left(1 - r_n^2\right)}{1 + r_n^2 - 2r_n \cdot \cos(t - \alpha_n)}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\pi} \frac{2K\left(1 - r_n^2\right)}{1 + r_n^2 - 2r_n \cdot \cos\frac{\delta}{2}}\, dt \leq \frac{2K\left(1 - r_n^2\right)}{1 + r_n^2 - 2r_n \cdot \cos\frac{\delta}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

A legutóbbi kifejezés $n \to +\infty$ határátmenettel $0 + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$-höz tart, így van olyan $N_1 \geq N_0$ index, hogy $n \geq N_1$ esetén e legutóbbi kifejezés kisebb, mint ε, azaz

$$|u(r_n \cdot \cos\alpha_n, r_n \cdot \sin\alpha_n) - f(\cos\alpha, \sin\alpha)| < \varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy

$$u(r_n \cdot \cos\alpha_n, r_n \cdot \sin\alpha_n) \to f(\cos\alpha, \sin\alpha),$$

amit akartunk. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.2.26. Állítás. *A fenti u egyértelmű megoldása a szóban forgó feladatnak.*

Bizonyítás. Speciális esete az alábbi állításnak és következményének. □

2.2.27. Állítás. *Ha u az $\mathbb{R}^n$ tér zárt $\overline{\mathcal{B}}$ egységgömbjén folytonos függvény, a gömb belsejében kétszer folytonosan deriválható és ott $\Delta u = 0$, akkor u az egységgömbbeli szélsőértékeit fölveszi a gömb $\mathcal{S} := \overline{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{B}^{\mathrm{o}}$ peremén.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy pl. létezik $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}^{\mathrm{o}}$, amelyre $u(\mathbf{x}_0) > \max_{\mathcal{S}} u$. Ekkor alkalmasan kicsi $\alpha > 0$ mellett is igaz, hogy a

$$v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \alpha \cdot \|\mathbf{x}\|^2$$

függvényre

$$v(\mathbf{x}_0) > \max_{\mathcal{S}} v.$$

Emiatt a v függvény $\overline{\mathcal{B}}$-re vonatkozó maximumát a $\overline{\mathcal{B}}$ halmaz $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}$ belsejében veszi föl, mondjuk egy $\mathbf{x}_*$ pontban. Mivel ez így lokális maximum is, ezért az (egyváltozós) másodrendű feltétel miatt minden $1 \le k \le n$ mellett $\partial_k^2 v(\mathbf{x}_*) \le 0$, tehát

$$0 \ge \Delta v(\mathbf{x}_*) = \Delta u(\mathbf{x}_*) + 2n\alpha = 0 + 2n\alpha > 0,$$

ami ellentmondás. □

2.2.28. Következmény. *Ha $f \in C(\overline{\mathcal{B}})$ és $g \in C(\mathcal{S})$ (ahol $\mathcal{S} := \overline{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{B}^{\mathrm{o}}$ a gömbfelület), akkor az $\mathbb{R}^n$-beli*

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \mathcal{B}^{\mathrm{o}}), \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \mathcal{S}) \end{cases}$$

ún. Dirichlet-feladatnak ***legfeljebb*** *egy, a $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}$ gömbben kétszer folytonosan deriválható $u \in C(\overline{\mathcal{B}})$ megoldása lehet. (Alkalmazzuk a fenti állítást két tetszőleges megoldás különbségére.)*

Az eddigieket összefoglalva:

2.2.29. Tétel (Poisson-formula)**.** *Tetszőleges $f \in C(S(0,1))$ esetén az*

$$u(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & \text{ha } x^2+y^2 = 1, \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(1-x^2-y^2\right) \cdot f(\cos t, \sin t)}{(x-\cos t)^2 + (y-\sin t)^2}\, dt, & \text{ha } x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

függvény az $S(0,1)$ körvonal komplementumán kielégíti a $\Delta u = 0$ Laplace-egyenletet, továbbá folytonos a zárt B körlapon (és természetesen a kör peremén kielégíti az $u_{|S} = f$ peremfeltételt), sőt a B körlapon egyértelmű folytonos megoldása a

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \text{ha } x^2+y^2 < 1, \\ u(x,y) = f(x,y), & \text{ha } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

peremérték-feladatnak.

2.2.30. Megjegyzés. Bizonyítás nélkül közöljük a következőt: Legyen $\gamma = \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ folytonos, szakaszonként folytonosan deriválható egyszerű zárt görbe ($\gamma_{|[a,b)}$ injektív, viszont $\gamma(a) = \gamma(b)$). Ekkor tetszőleges $f \in C(R_\gamma)$ függvényre a γ értékkészlete és belseje unióján értelmezett

$$u(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & \text{ha } (x,y) \in R_\gamma \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \frac{(\gamma_1(t)-x)\cdot\gamma_2'(t)-(\gamma_2(t)-y)\cdot\gamma_1'(t)}{(\gamma_1(t)-x)^2+(\gamma_2(t)-y)^2}\, dt & \text{a } \gamma \text{ belsejében} \end{cases}$$

függvény egyértelmű folytonos megoldása a

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{a } \gamma \text{ belsejében,} \\ u(x,y) = f(x,y), & \text{ha } (x,y) \in R_\gamma \end{cases}$$

peremérték-feladatnak.

2.2.31. Megjegyzés. Szintén bizonyítás nélkül közöljük a következőt: Legyen $\mathcal{S}$ az euklideszi $\mathbb{R}^3$ tér egységgömbfelülete és $\overline{\mathcal{B}}$ maga a zárt egységgömb. Adott $f \in C(\mathcal{S})$ mellett a

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0, & \text{ha } x^2+y^2+z^2 < 1, \\ u(x,y,z) = f(x,y,z), & \text{ha } x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

peremérték-feladat $\overline{\mathcal{B}}$-n folytonos megoldására minden $x^2+y^2+z^2 < 1$ esetén

$$u(x,y,z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)\cdot f\left(r,s,\sqrt{1-r^2-s^2}\right)}{\left((x-r)^2+(y-s)^2+\left(z-\sqrt{1-r^2-s^2}\right)^2\right)\sqrt{1-r^2-s^2}} dsdr +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)\cdot f\left(r,s,-\sqrt{1-r^2-s^2}\right)}{\left((x-r)^2+(y-s)^2+\left(z+\sqrt{1-r^2-s^2}\right)^2\right)\sqrt{1-r^2-s^2}} dsdr,$$

ami valójában az

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int\limits_{\mathcal{S}} \frac{1-\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{r}\|^2} \cdot f(\mathbf{r})\, d\sigma(\mathbf{r})$$

felületi integrál. ($\mathbf{x}$ és $\mathbf{r}$ persze itt háromdimenziós vektorváltozók.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Fizikai példa *(stacionárius hővezetés).* Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ sima felületű korlátos tartomány (gondoljunk gömbre), amelyben homogén közeg helyezkedik el. Tegyük föl, hogy a közeg hőmérsékleteloszlása időben állandó. Jelölje $u(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x} \in \Omega$ pontbeli hőmérsékletet. Ekkor u kielégíti a háromdimenziós

$$\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_3^2 u = f$$

Poisson-egyenletet, ahol f a belső hőforrások ill. hőnyelők sűrűségét jellemző függvény. Ha nincs belső hőforrás, sem hőnyelő (azaz $f = 0$), akkor u-ra a $\Delta u = 0$ Laplace-egyenlet áll fönn. Ha ismerjük az Ω határán vett $u_{|\partial\Omega} = \chi$ hőmérsékleteloszlást, akkor az egyenlet megoldásával meghatározhatjuk az Ω belsejében levő hőmérsékleteloszlást (ez az ún. első peremérték-feladat másképpen *Dirichlet-feladat*):

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ u_{|\partial\Omega} = \chi. \end{cases}$$

Ha a hőmérséklet peremeloszlása helyett a $\partial\Omega$ felületen átfolyó hőáram intenzitását ismerjük, akkor ún. második peremérték-feladathoz másképpen *Neumann-feladat*hoz jutunk:

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ \partial_{\nu(\mathbf{x})} u_{|\partial\Omega} = \varphi, \end{cases}$$

ahol $\nu(\mathbf{x})$ a $\partial\Omega$ felület $\mathbf{x}$ pontjában a felület Ω-ból kifelé mutató normálisa (az $\mathbf{x}$-beli érintősíkra merőleges, kifelé mutató egységvektor) és $\partial_{\nu(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}) := \langle f'(\mathbf{x}) \mid \nu(\mathbf{x}) \rangle$ a $\nu(\mathbf{x})$ irányú iránymenti derivált. Ha pedig a test és a külső közeg között hőcsere megy végbe, akkor a következő alakú ún. harmadik peremérték-feladathoz jutunk:

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ \big(h(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}) + \partial_{\nu(\mathbf{x})} u(\mathbf{x})\big)_{|\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a tér egy tartományában egy időfüggetlen töltéseloszlás által létesített elektromágneses mező u potenciálja is Poisson-egyenletet elégít ki:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = -4\pi \cdot \rho(\mathbf{x}),$$

ahol $\rho(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x}$ pontbeli töltéssűrűség.

2.2.5. Egyszerű diffúziós egyenletek

(speciális, ún. parabolikus egyenletek, vö. a $(\partial_0, \partial_1) \mapsto \partial_0 - \partial_1^2$ hozzárendelés szinthalmazai parabolák)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bevezető (teoretikusan is fontos) feladatok

2.2.32. Feladat. Adott $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \partial_1^2 u &= 0, \\ u(0,x) &= e^{\alpha x} \end{aligned}$$

ún. kezdetiérték-feladatnak keressünk $u(t,x) = \varphi(t) \cdot e^{\alpha x}$ alakú megoldását (tehát amely a zárt félsíkon folytonos, a nyílt félsíkon kétszer folytonosan deriválható, valamint a nyílt félsíkon $\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$)!

Megoldás: Erre az alakra $0 = \partial_0 u - \partial_1^2 u = \left(\varphi'(t) - \alpha^2 \varphi(t)\right) \cdot e^{\alpha x}$, tehát $\varphi'(t) = \alpha^2 \varphi(t)$ és $\varphi(0) = 1$. Persze ekkor $\varphi(t) = e^{\alpha^2 t}$, tehát $u(t,x) = e^{\alpha^2 t + \alpha x}$.

2.2.33. Állítás. *Ha a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre valamely c konstanssal $g'' = c \cdot g$, akkor az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett*

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \partial_1^2 u &= 0, \\ u(0,x) &= g(x) \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatnak létezik $u = \varphi(t) \cdot g(x)$ szorzat alakú megoldása.

Bizonyítás. A keresett alakra $0 = \partial_0 u - \partial_1^2 u = (\varphi'(t) - c\varphi(t)) \cdot g(x)$, tehát $\varphi'(t) = c\varphi(t)$ és $\varphi(0) = 1$. Persze ekkor $\varphi(t) = e^{ct}$, tehát $u(t,x) = e^{ct} \cdot g(x)$ kielégíti a feladatot. □

2.2.34. Következmény. *Ha a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvényre valamely c, d konstansokkal $g'' = c \cdot g + d$, akkor az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett*

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \partial_1^2 u &= 0, \\ u(0,x) &= g(x) \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatnak $c \neq 0$ esetén létezik $u = \varphi(t) \cdot \left(g(x) + \frac{d}{c}\right) - \frac{d}{c}$ alakú megoldása; $c = 0$ esetén pedig $u = td + g(x)$ megoldás.

Bizonyítás. $c \neq 0$ esetén a $h(x) := g(x) + \frac{d}{c}$ kezdeti feltételre alkalmazzuk a fenti állítást; a $c = 0$ eset pedig triviális. □

2.2.35. Feladat. Az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \partial_1^2 u &= 0, \\ u(0,x) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatnak keressünk megoldását!

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Megoldás: $\left(x^2+1\right)'' = 2$, tehát ($c=0$, $d=2$ mellett) $u(t,x) = 2t + x^2 + 1$ megoldás.

2.2.36. Feladat. Az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$-n értelmezett

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \Delta u &= 0, \\ u(0,x,y) &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatnak keressünk megoldását!

Megoldás: A

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \partial_1^2 u &= 0, \\ u(0,x) &= x^2 \end{aligned}$$

feladatnak a legutóbbi következmény ötletével megoldása $u(t,x) = 2t + x^2$. Vegyük észre, hogy $u(t,x,y) := u(t,x)$ formalizmussal u eggyel magasabb dimenziós diffúziós egyenletet elégít ki ugyanazon kezdeti feltétel mellett:

$$\begin{aligned} \partial_0 u(t,x,y) - \Delta u(t,x,y) &= 0 \\ u(0,x,y) &= x^2. \end{aligned}$$

Ugyanígy adódik, hogy $v(t,x,y) := 2t + y^2$ az y^2 kezdeti feltételű diffúziós egyenletet elégíti ki. Persze így az egyenlet linearitása miatt $w := u + v = 4t + x^2 + y^2$ kielégíti az eredeti feladatot.

2.2.37. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges rögzített $r \in \mathbb{R}$ esetén az $u : \mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-r)^2}{4t}}$$

függvény kielégíti a

$$\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$$

egydimenziós diffúziós egyenletet, továbbá

$$\lim_{t \to 0+} u(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq r, \\ +\infty, & \text{ha } x = r. \end{cases}$$

2.2.38. Feladat. Legyenek $u_1, u_2, \ldots, u_n : \mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyek kielégítik a $\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$ diffúziós egyenletet. Mutassuk meg, hogy a $w : \mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$w(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) := u_1(t, x_1) \cdot u_2(t, x_2) \cdot \cdots \cdot u_n(t, x_n)$$

függvény kielégíti a

$$\partial_0 u - \Delta u = 0$$

n-dimenziós diffúziós egyenletet! $\left(\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \partial_k^2 u.\right)$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.2.39. Következmény. *Tetszőleges rögzített* $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ *esetén az* $u : \mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$u(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{r}\|^2}{4t}}$$

függvény kielégíti a

$$\partial_0 u - \Delta u = 0$$

n-dimenziós diffúziós egyenletet ($u_k(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-r_k)^2}{4t}}$ *választással,* $1 \leq \leq k \leq n$*).*

2.2.40. Feladat. Az előző feladat alapján mutassuk meg, hogy a

$$\begin{aligned} \partial_0 u(t, x) - \partial_1^2 u(t, x) &= 0 \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}), \\ u(0, x) &= g_k(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatok u_k megoldásaival ($1 \leq k \leq n$) képezett

$$w(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) := u_1(t, x_1) \cdot u_2(t, x_2) \cdot \cdots \cdot u_n(t, x_n)$$

függvény kielégíti a

$$\begin{aligned} \partial_0 w(t, \mathbf{x}) - \Delta w(t, \mathbf{x}) &= 0 \qquad (t > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \\ w(0, \mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \qquad 7\,(x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatot, ahol $g(\mathbf{x}) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot \cdots \cdot g_n(x_n)$!

2.2.41. Feladat. Az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$-n értelmezett

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \Delta u &= 0, \\ u(0, x) &= xy \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatnak keressünk megoldását!

Megoldás: Az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \partial_1^2 u &= 0, \\ u(0, x) &= x \end{aligned}$$

feladatnak megoldása $u_1(t, x) \equiv x$, míg a

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \partial_1^2 u &= 0, \\ u(0, x) &= y \end{aligned}$$

feladatnak megoldása $u_2(t, y) \equiv y$. Így az előző feladat értelmében $u(t, x, y) = = xy$ kielégíti a kitűzött kezdetiérték-feladatot.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A Duhamel-elv

Az alábbiakban legyen $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ rögzített.

2.2.42. Lemma (Duhamel-elv)**.** *Tegyük föl, hogy minden $\tau \geq 0$ mellett a $v_\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény az $\mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}^n$ halmazon folytonosan deriválható, sőt az $\mathbf{x}$ változóra nézve kétszer folytonosan deriválható, valamint a jobb féltérben kielégíti a*

$$\begin{aligned} \partial_0 v_\tau(t,\mathbf{x}) - \Delta v_\tau(t,\mathbf{x}) &= 0, \\ v_\tau(0,\mathbf{x}) &= f(\tau,\mathbf{x}) \end{aligned}$$

n-dimenziós homogén jobb oldalú diffúziós kezdetiérték-feladatot. Tegyük föl továbbá, hogy a

$$(\tau,t,\mathbf{x}) \mapsto v_\tau(t,\mathbf{x})$$

hozzárendelés az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ halmazon folytonos, sőt az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett

$$\begin{aligned} (\tau,t,\mathbf{x}) &\mapsto \partial_0 v_\tau(t,\mathbf{x}), \\ (\tau,t,\mathbf{x}) &\mapsto \partial_k v_\tau(t,\mathbf{x}), \\ (\tau,t,\mathbf{x}) &\mapsto \partial_k \partial_j v_\tau(t,\mathbf{x}) \end{aligned}$$

hozzárendelések $(1 \leq k,j \leq n)$ folytonosan terjednek ki az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ halmazra. Ekkor az $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$u(t,\mathbf{x}) := \int_0^t v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\, d\tau$$

függvény folytonos, továbbá $\mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}^n$-en folytonosan deriválható, sőt $\mathbf{x}$ vonatkozásában kétszer folytonosan deriválható is, valamint u a jobb féltérben kielégíti a

$$\begin{aligned} \partial_0 u(t,\mathbf{x}) - \Delta u(t,\mathbf{x}) &= f(t,\mathbf{x}), \\ u(0,\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

n-dimenziós inhomogén jobb oldalú diffúziós kezdetiérték-feladatot.

Bizonyítás. A $(\tau,t,\mathbf{x}) \mapsto v_\tau(t,\mathbf{x})$ hozzárendelés folytonossága miatt a jegyzet legelső állítása következményének értelmében a fent definiált u függvény folytonos és természetesen minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mellett $u(0,\mathbf{x}) = 0$.

Ezek után rögzített $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mellett a $H := \{(t,\tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \tau \leq t\}$ halmazra ezen a $h(\tau,t) := v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})$ függvényre alkalmazzuk a Leibniz-formulát. A $(\tau,t) \mapsto v_\tau(t,\mathbf{x})$ hozzárendelés folytonossága alapján h folytonos

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

a H halmazon, ugyanakkor a $(\tau,t)\mapsto\partial_0 v_\tau(t,\mathbf{x})$ hozzárendelés is folytonos a H halmazon, ezért a $\partial_2 h$ függvény folytonosan terjed ki H-ra. Így az

$$F(t):=\int_0^t h(\tau,t)\,d\tau=\int_0^t v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau=u(t,\mathbf{x})$$

függvény a Leibniz-formula értelmében deriválható $\mathbb{R}_+$-on, továbbá minden $0\le t$ mellett

$$F'(t)=h(t,t)+\int_0^t\partial_2 h(\tau,t)\,d\tau=v_\tau(t-t,\mathbf{x})+\int_0^t\partial_0 v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau=$$

$$=v_t(0,\mathbf{x})+\int_0^t\partial_0 v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau=f(t,\mathbf{x})+\int_0^t\partial_0 v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau.$$

Eszerint létezik

$$\partial_0 u(t,\mathbf{x})=f(t,\mathbf{x})+\int_0^t\partial_0 v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau,$$

amely a $(\tau,t,\mathbf{x})\mapsto\partial_0 v_\tau(t,\mathbf{x})$ hozzárendelés folytonossága miatt (megint a jegyzet legelső állítása következményének értelmében) folytonos is. Ugyanakkor a $(\tau,t,\mathbf{x})\mapsto\partial_k v_\tau(t,\mathbf{x})$ és $(\tau,t,\mathbf{x})\mapsto\partial_k\partial_j v_\tau(t,\mathbf{x})$ hozzárendelésekre tett folytonossági feltétel miatt a $\int_0^t v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau$ integrálba mindegyik x_k és x_j változó szerint egymás után is be lehet deriválni. Ezért minden $1\le k,j\le n$ mellett létezik

$$\partial_k\partial_j u(t,\mathbf{x})=\int_0^t\partial_k\partial_j v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau,$$

amely a $(\tau,t,\mathbf{x})\mapsto\partial_k\partial_j v_\tau(t,\mathbf{x})$ hozzárendelés folytonossága miatt (ismét a jegyzet legelső állítása következményének értelmében) szintén folytonos. Ezért u az $\mathbb{R}_+^\circ\times\mathbb{R}^n$ halmazon folytonosan deriválható, $\mathbf{x}$ szerint pedig kétszer folytonosan deriválható is. Továbbá minden $(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}_+^\circ\times\mathbb{R}^n$ esetén a bederiválások miatt

$$\partial_0 u(t,\mathbf{x})-\Delta u(t,\mathbf{x})=f(t,\mathbf{x})+\int_0^t\partial_0 v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau-\int_0^t\Delta v_\tau(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau=$$

$$=f(t,\mathbf{x})+\int_0^t(\partial_0 v_\tau-\Delta v_\tau)(t-\tau,\mathbf{x})\,d\tau=f(t,\mathbf{x})+0,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

tehát a nyílt féltéren u kielégíti a kívánt egyenletet. □

2.2.43. Példa. Az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett

$$\partial_0 u - \partial_1^2 u = t + e^x,$$
$$u(0,x) = \cos x$$

kezdetiérték-feladatnak keressünk megoldását!

Megoldás: Alkalmazzuk a Duhamel-elvet! Minden $\tau \geq 0$ mellett először megoldjuk a

$$\partial_0 v_\tau - \partial_1^2 v_\tau = 0,$$
$$u(0,x) = \tau + e^x$$

kezdetiérték-feladatot: mivel $\frac{d^2}{dx^2}(\tau + e^x) = e^x = (\tau + e^x) - \tau$, így az egyik fenti állítás értelmében e feladatnak létezik $v_\tau = \varphi(t) \cdot e^x + \tau$ alakú megoldása, persze $\varphi(0) = 1$. Visszahelyettesítéssel a $\varphi' - \varphi = 0$ feltétel adódik, tehát $\varphi(t) = e^t$ és

$$v_\tau(t,x) = e^t \cdot e^x + \tau = e^{t+x} + \tau$$

megoldása a feladatnak. Ezekre a függvényekre teljesülnek a Duhamel-elv feltételei, így

$$u_1(t,x) := \int_0^t v_\tau(t-\tau,x)\, d\tau = \int_0^t e^{t-\tau+x} + \tau\, d\tau =$$
$$= e^{t+x} \cdot \int_0^t e^{-\tau}\, d\tau + \frac{t^2}{2} = e^{t+x} \cdot \left(1 - e^{-t}\right) + \frac{t^2}{2} =$$
$$= e^{t+x} - e^x + \frac{t^2}{2}$$

kielégíti a $t + e^x$ jobb oldalú diffúziós egyenletet nulla kezdeti feltétel mellett. Ugyanakkor a

$$\partial_0 u_2 - \partial_1^2 u_2 = 0,$$
$$u_2(0,x) = \cos x$$

kezdetiérték-feladatnak a már szokásos módon kereshetünk megoldását, amire

$$u_2(t,x) = e^{-t} \cdot \cos x$$

adódik. A kettő összege,

$$u(t,x) := e^{t+x} - e^x + \frac{t^2}{2} + e^{-t} \cdot \cos x$$

kielégíti az eredeti feladatot.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.2.44. Példa. Az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$-en értelmezett

$$\begin{aligned} \partial_0 u\,(t,x,y) - \Delta u\,(t,x,y) &= txy, \\ u\,(0,x) &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatnak keressünk megoldását!

Megoldás: Megint alkalmazzuk a Duhamel-elvet! Minden $\tau \geq 0$ mellett (az 2.2.41. Feladathoz hasonlóan) megoldva a

$$\begin{aligned} \partial_0 v_\tau - \Delta v_\tau &= 0, \\ u\,(0,x,y) &= \tau xy \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatokat, a $v_\tau\,(t,x,y) = \tau xy$ megoldásokat kapjuk. Ezekre teljesülnek a Duhamel-elv feltételei, így

$$u_1\,(t,x,y) := \int_0^t v_\tau\,(t-\tau,x,y)\;d\tau = \int_0^t \tau xy\,d\tau = \frac{1}{2}t^2xy$$

kielégíti a txy jobb oldalú, 0 kezdeti feltételű feladatot. Ugyanakkor a 0 jobb oldalú, x^2+y^2 kezdeti feltételű feladatnak (az 2.2.36. Feladat értelmében) megoldása az

$$u_2\,(t,x,y) = 4t + x^2 + y^2$$

függvény, így az eredeti kezdetiérték-feladatnak megoldása az

$$u\,(t,x,y) = 4t + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}t^2xy$$

függvény.

2.2.45. Példa. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ melett az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett

$$\begin{aligned} \partial_0 u - \partial_1^2 u &= 0, \\ u\,(0,x) &= x^n \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatnak keressünk megoldását!

Megoldás: Bár ez homogén egyenlet, a megoldás megsejtésében lehet szerepe a Duhamel-elvnek. Mivel a korábbiak alapján triviálisan $n = 0$ esetén

$$u\,(t,x) = 1$$

megoldás, $n = 1$ esetén

$$u\,(t,x) = x$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

megoldás, $n = 2$ esetén pedig

$$u(t,x) = x^2 + 2t$$

megoldás, ezért azt sejtjük, hogy a megoldásban külön tagként az x^n mindig megjelenik. Keressük az u függvényt $u(t,x) = x^n + v(t,x)$ alakban, erre éppen

$$\begin{aligned} \partial_0 v - \partial_1^2 v &= n(n-1)x^{n-2}, \\ v(0,x) &= 0, \end{aligned}$$

amit Duhamel-elvvel a kettővel kisebb kitevő esetére vezettünk tehát vissza. Ezzel pl. $n = 3$-ra

$$u(t,x) = x^3 + 6tx$$

adódik. Egyre magasabb n-re szépen látszik, hogy az egymás követő tagok mindig olyanok, hogy x kitevője kettővel csökken, t kitevője pedig eggyel emelkedik. Ezen alakú kétváltozós polinomot már vissza is helyettesíthetjük az egyenletbe, ahonnan tetszőleges $n \geq 2$-re rövid kalkulációval

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{k!\,(n-2k)!} \cdot t^k x^{n-2k}$$

megoldás, ahol $[\cdot]$ az egészrész-függvény. Figyelembe véve a későbbi egyértelműségi tételt, ezzel az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett $\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$ egyenletet tetszőleges polinomiális kezdeti feltétel mellett meg tudjuk oldani (egyértelműen az ún. normális növekedésű függvények körében).

2.2.46. Következmény. *A fenti példa és a 2.2.40. Feladat alapján bármely $n \in \mathbb{N}$-re az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en értelmezett $\partial_0 u - \Delta u = 0$ egyenletet tetszőleges (többváltozós) polinomiális kezdeti feltétel mellett meg tudjuk oldani (normális növekedés melletti egyértelműséggel).*

2.2.47. Megjegyzés. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha valamely $g \in C(\mathbb{R})$ mellett az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett v függvényre

$$\begin{cases} \partial_0 v - \partial_1^2 v = 0, \\ \quad v(0,x) = g(x), \end{cases}$$

akkor tetszőleges α konstans mellett az

$$u(t,x) = e^{\alpha^2 t + \alpha x} \cdot v(t, x + 2\alpha t)$$

függvényre $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en

$$\begin{cases} \partial_0 u - \partial_1^2 u = 0, \\ \quad u(0,x) = e^{\alpha x} g(x). \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Speciálisan a legutóbbi példa alapján az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett

$$\begin{cases} \partial_0 u - \partial_1^2 u = 0, \\ \quad u(0,x) = e^{\alpha x} x^n \end{cases}$$

kezdetiérték-feladatnak megoldása

$$u(t,x) = e^{\alpha^2 t + \alpha x} \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{k!\,(n-2k)!} \cdot t^k \,(x + 2\alpha t)^{n-2k}\,.$$

2.2.48. Következmény. *A legutóbbi következmény és megjegyzés alapján bármely $n \in \mathbb{N}$-re az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en értelmezett $\partial_0 u - \Delta u = 0$ egyenletet tetszőleges*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} e^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(j)} x_k} \cdot p_j(x_1, \ldots, x_n)$$

kvázipolinomiális kezdeti feltétel (ahol mindegyik p_j egy n-változós polinom) mellett zárt alakban meg tudjuk oldani (normális növekedés melletti egyértelműséggel). Sőt – komplex konstansok alkalmazásával – ezen kvázipolinomokban trigonometrikus tényezők is szerepelhetnek.

2.2.49. Feladat. A fentiek alapján a normális növekedésű függvények körében oldjuk meg az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en értelmezett

(a) $\begin{cases} \partial_0 u - \partial_1^2 u = 0, \\ \quad u(0,x) = x e^{\alpha x}, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \partial_0 u - \partial_1^2 u = 0, \\ \quad u(0,x) = x \cos x, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \partial_0 u - \partial_1^2 u = 0, \\ \quad u(0,x) = x^2 e^{\alpha x}, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \partial_0 u - \partial_1^2 u = 0, \\ \quad u(0,x) = x^2 \cos x \end{cases}$

kezdetiérték-feladatokat ($\alpha \in \mathbb{R}$), és az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$-n értelmezett

(e) $\begin{cases} \partial_0 u - \Delta u = 0, \\ u(0,x,y) = x^2 y e^{x+y} \end{cases}$

kezdetiérték-feladatot!

Megoldások:

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

(a) $u(t,x) = (x+2\alpha t)\, e^{\alpha x+\alpha^2 t}$,

(b) $u(t,x) = (x\cos x - 2t\sin x)\, e^{-t}$,

(c) $u(t,x) = \left(x^2+4\alpha x t+4\alpha^2 t^2+2t\right) e^{\alpha x+\alpha^2 t}$,

(d) $u(t,x) = e^{-t}\left[\left(x^2-4t^2+2t\right)\cos x - 4xt\sin x\right]$,

(e) $u(t,x,y) = e^{2t+x+y}\cdot\left((x+2t)^2+2t\right)\cdot(y+2t)$.

A $\partial_0 - \partial_1^2$ operátor bevitele az integráljel mögé

2.2.50. Megjegyzés. Minden $t>0$ esetén közismerten az

$$r \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\cdot e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változónak van várható értéke és szórása, nevezetesen 0 és $\sqrt{2t}$. Sőt, tetszőleges $K>0$ és $x\in\mathbb{R}$ mellett az

$$\left(1+(\xi-x)^2\right)\cdot e^{K\cdot|\xi|}$$

valószínűségi változónak is van várható értéke. Ezért az

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\left(1+(r-x)^2\right)\cdot e^{K\cdot|r|}}{\sqrt{4\pi t}}\cdot e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dr$$

integrál abszolút konvergens $(t,x)\in\mathbb{R}^{\mathrm{o}}_+\times\mathbb{R}$ esetén.

2.2.51. Állítás. *Rögzített $x\in\mathbb{R}$, $t>0$ és $(\tau,y)\in\left[\frac{t}{2},\frac{3t}{2}\right]\times[x-1,x+1]$ esetén az $r\mapsto \frac{\left(1+(y-r)^2\right)\cdot e^{K\cdot|r|}}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{(y-r)^2}{4\tau}}$ függvényeknek van közös $\ell\in L^1(\mathbb{R})$ majoránsuk.*

Bizonyítás. Először is minden szóban forgó (τ,y) mellett

$$\frac{1+(y-r)^2}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{(y-r)^2}{4\tau}} \le \frac{1+(y-r)^2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-r)^2}{6t}} =: f_r(y).$$

Most f_0' nullhelyei szokásos számolással adódóan 0, $\pm\sqrt{|6t-1|}$ közül kerülhetnek ki. f_r' nullhelyei pedig (ebből eltolással) r, $r\pm\sqrt{|6t-1|}$ közül. Az f_r függvény $[x-1,x+1]$-beli bármelyik maximumhelye persze vagy deriváltnullhely, vagy végpont. A kapottak értelmében egy maximumhely csak akkor lehet belső pont, ha

$$r\in\left[x-1-\sqrt{|6t-1|},x+1+\sqrt{|6t-1|}\right] =: [\alpha,\beta].$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Így minden $y \in [x-1, x+1]$ és $r \in \mathbb{R}$ esetén formálisan igaz lesz, hogy

$$\begin{aligned} f_r(y) &\le f_r(x-1) + f_r(x+1) + \\ &\quad + \chi_{[\alpha,\beta]}(r) \cdot \left(f_r(r) + f_r\left(r + \sqrt{|6t-1|}\right) + f_r\left(r - \sqrt{|6t-1|}\right)\right) \le \\ &\le f_r(x-1) + f_r(x+1) + \chi_{[\alpha,\beta]}(r) \cdot \frac{3 + 2|6t-1|}{\sqrt{2\pi t}} = \\ &= \frac{1 + (x+1-r)^2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x+1-r)^2}{6t}} + \frac{1 + (x-1-r)^2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-1-r)^2}{6t}} + \\ &\quad + \chi_{[\alpha,\beta]}(r) \cdot \frac{3 + 2|6t-1|}{\sqrt{2\pi t}}. \end{aligned}$$

Innen aztán

$$\begin{aligned} e^{K\cdot|r|} \cdot f_r(y) \le e^{K\cdot|r|} \cdot \left(\frac{1+(x+1-r)^2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x+1-r)^2}{6t}} + \frac{1+(x-1-r)^2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-1-r)^2}{6t}} \right) + \\ + e^{K\cdot|r|} \cdot \left(\chi_{[\alpha,\beta]}(r) \cdot \frac{3 + 2|6t-1|}{\sqrt{2\pi t}} \right). \end{aligned}$$

Jelölje $\ell(r)$ e legutóbbi kifejezést. A beszorzás utáni első két tag a fenti megjegyzés értelmében $L^1(\mathbb{R})$-beli, az utolsó tag pedig triviálisan ($c \cdot e^{K\cdot|\cdot|} \cdot \chi_{[\alpha,\beta]}$ alakú). Tehát $\ell \in L^1(\mathbb{R})$ és minden $(\tau, y) \in \left[\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}\right] \times [x-1, x+1]$ mellett

$$\begin{aligned} \frac{1 + (y-r)^2 \cdot e^{K\cdot|r|}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(y-r)^2}{4\tau}} &\le \frac{1 + (y-r)^2 \cdot e^{K\cdot|r|}}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-r)^2}{6t}} \le \\ &\le e^{K\cdot|r|} f_r(y) \le \ell(r). \end{aligned}$$

□

2.2.52. Definíció. Egy $g \in C(\mathbb{R})$ függvényt **normális növekedésű**nek mondunk, ha alkalmas $C, K > 0$ számokkal minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$|g(x)| \le C \cdot e^{K|x|}.$$

Hasonlóan egy $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt **normális növekedésű**nek mondunk, ha alkalmas $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény és $K > 0$ szám mellett minden (t, x)-re

$$|u(t,x)| \le C(t) \cdot e^{K\cdot|x|}.$$

A fenti definícióban mindig feltehető, hogy a C függvény folytonosan deriválható és szigorúan növő, sőt hogy $\lim_{+\infty} C = +\infty$. Vehetünk ugyanis C helyett egy olyan C_1 függvényt, amelyik minden $n \in \mathbb{N}$ mellett az $[n-1, n]$ intervallumon szigorúan növő deriválható úton jut el az $n + \max_{[0,n]} C$ értékből az

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$n+1+\max\limits_{[0,n+1]} C$ értékbe úgy, hogy a végpontokban a deriváltja 0 (például koszinuszos függvényekkel).

Ha $g \in C(\mathbb{R})$ normális növekedésű függvény, akkor a legutóbbi megjegyzés alapján triviálisan

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(r)}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}\, dr$$

abszolút konvergens integrál.

2.2.53. Állítás. *Tetszőleges $g \in C(\mathbb{R})$ normális növekedésű függvényre az $u : \mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(r)}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}\, dr$$

függvény folytonosan deriválható, sőt x szerint kétszer folytonosan deriválható, és a jobb félsíkon kielégíti a

$$\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$$

egydimenziós diffúziós egyenletet. Az u függvény $\mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}$-on vett $\partial_0 u$, $\partial_1 u$ és $\partial_1^2 u$ parciális deriváltjai a definiáló integrálba való bederiválással számolhatók.

Bizonyítás. A normális növekedés értelmében alkalmas $C, K > 0$ konstansokkal

$$|g(r)| \le C \cdot e^{K\cdot|r|}$$

minden $r \in \mathbb{R}$ pontra. Ekkor tetszőleges rögzített $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}$ pontnak az $U := \left[\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}\right] \times [x_0 - 1, x_0 + 1]$ környezetére a legutóbbi állítás (2.2.51. Állítás) alapján igaz, hogy az

$$r \mapsto \left(1 + (x-r)^2\right) \frac{e^{K\cdot|r|}}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-r)^2}{4t}}$$

függvényeknek van közös $L^1(\mathbb{R})$-beli $r \mapsto \ell(r)$ majoránsa (midőn (t,x) befutja az U környezetet). Ezért $|g(r)| \le C\cdot e^{K\cdot|r|}$ alapján $u_r(t,x) := \frac{g(r)}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-r)^2}{4t}}$ definícióval az $r \mapsto u_r(t,x)$ függvényeknek és a

$$\partial_1 u_r = -\frac{x-r}{2t} \cdot u_r \qquad \text{és} \qquad \partial_0 u_r = \partial_1^2 u_r = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{(x-r)^2}{4t^2}\right) \cdot u_r$$

parciális deriváltaknak is $r \mapsto C\cdot\left(1 + \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right)\cdot \ell(r)$ már biztosan $L^1(\mathbb{R})$-beli majoránsa ($(t,x) \in U$). Ezért az

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} u_r(t,x)\, dr$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

integrálba be lehet deriválni t szerint egyszer és x szerint kétszer is ($(t,x)\in U$). Ezzel pedig egyrészt az

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}} u_r(t,x)\,dr,$$
$$\partial_1 u(t,x)=-\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x-r}{2t}\cdot u_r(t,x)\,dr,$$
$$\partial_0 u(t,x)=\partial_1^2 u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(-\frac{1}{2t}+\frac{(x-r)^2}{4t^2}\right)u_r(t,x)\,dr$$

függvények a jegyzet legelső állításának értelmében folytonosak (t_0,x_0)-ban, másrészt ugyaninnen

$$\partial_0 u(t_0,x_0)-\partial_1^2 u(t_0,x_0)=0. \qquad \square$$

Az elemi diffúziós formula

2.2.54. Megjegyzés. Minden $t>0$ esetén valószínűségszámítási alapismeretekből

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dr=\frac{1}{2}$$

és persze $\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dr=1$. Innen tetszőleges $K\geq 0$ esetén (teljes négyzetté alakítással)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{K\cdot r-\frac{r^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dr=e^{K^2\cdot t}\cdot\int\limits_{-2K\cdot t}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dr\leq e^{K^2\cdot t}\cdot 1=e^{K^2\cdot t},$$

ahonnan

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{K\cdot|r|-\frac{r^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dr\leq 2e^{K^2\cdot t}.$$

2.2.55. Megjegyzés. A fenti megjegyzésből minden $t>0$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dr=1,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

továbbá minden $K \geq 0$ mellett

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{K|r-x|-\frac{(r-x)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dr \leq 2e^{K^2\cdot t}.$$

2.2.56. Tétel (elemi diffúziós formula)**.** *Tetszőleges $g \in C(\mathbb{R})$ normális növekedésű függvényre az $u : \mathbb{R}_+^\circ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{g(r)}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}\, dr = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g\left(x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}\, dp$$

függvény folytonosan deriválható, sőt x szerint kétszer folytonosan deriválható, és a jobb félsíkon kielégíti a

$$\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$$

egydimenziós diffúziós egyenletet, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ mellett

$$\lim_{\substack{(t,y)\to(0,x)\\ t>0}} u(t,y) = g(x),$$

azaz az $u(0,x)=g(x)$ feltétel folytonosan terjeszti ki az u függvényt az $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ zárt félsíkra. Az u függvény $\mathbb{R}_+^\circ \times \mathbb{R}$-on vett $\partial_0 u$, $\partial_1 u$ és $\partial_1^2 u$ parciális deriváltjai a(z első) definiáló integrálba való bederiválással számolhatók.

Bizonyítás. A bederiválhatóságot, a megfelelő deriváltak folytonosságát és az egyenlet fennállását az előző szakaszban már bizonyítottuk. Hátravan még a határátmenet igazolása. Mivel az $u(t,x)$-et definiáló két integrál ($t>0$ mellett) triviálisan azonos, továbbá a második integrál $t=0$ esetén is értelmes, sőt éppen $g(x)$ értéket vesz föl, ezért elegendő igazolni, hogy a

$$(t,x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g\left(x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}\, dp$$

hozzárendelés $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-on folytonos. Valóban, a

$$(t,x,p) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} g\left(x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}$$

hozzárendelések folytonosak, ugyanakkor az

$$\int_{\mathbb{R}} e^{K\cdot|p|-p^2}\, dp$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

alakú integrálok végesek, ezért ha (t,x) tetszőleges korlátos részhalmazt fut be, akkor g normális növekedése miatt a $p \mapsto g\left(x+2\sqrt{t}\cdot p\right)\cdot e^{-p^2}$ függvényeknek létezik közös

$$p \mapsto C\cdot e^{K\cdot|p|-p^2}$$

alakú $L^1(\mathbb{R})$-beli majoránsuk. Így a jegyzet legelső állítása értelmében a $(t,x)\mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} g\left(x+2\sqrt{t}\cdot p\right)\cdot e^{-p^2}\,dp$ hozzárendelés tényleg folytonos az $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ halmazon. □

2.2.57. Megjegyzés. $C,K>0$ esetén a fenti 2.2.55. Megjegyzés alapján triviálisan

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{Ce^{K|r|}}{\sqrt{4\pi t}}\cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}\,dr \le Ce^{K|x|}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{K|r-x|}}{\sqrt{4\pi t}}\cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}\,dr \le 2Ce^{K^2\cdot t}\cdot e^{K|x|},$$

így g normális növekedése miatt a fenti tételben szereplő u függvény is normális növekedésű. Ha g korlátos, akkor u is korlátos, mégpedig

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,dr = 1$$

alapján triviálisan $\|g\|_\infty$-val korlátozott.

2.2.58. Állítás. *A*

$$\begin{aligned}\partial_0 u-\partial_1^2 u&=0,\\ u(0,x)&=0\end{aligned}$$

kezdetiérték-feladat megoldása a jobb zárt félsíkon folytonos, a nyílt félsíkon folytonosan deriválható, az x változó vonatkozásában kétszer folytonosan deriválható ***normális növekedésű függvények körében*** *egyedül az azonosan nulla függvény.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy van olyan $|u(t,x)|\le C(t)\cdot e^{K\cdot|x|}$ tulajdonságú u megoldás (C szigorúan növő folytonosan deriválható, $\lim\limits_{+\infty} C=+\infty$ és $K\ge 1$), amely valamely (t_0,x_0) pontban nem tűnik el, mondjuk pozitív. Ekkor a

$$D(t) := e^{4K^2\cdot(t+C(t)+1)}$$

függvény is szigorúan növő folytonosan deriválható és $D'(t)\ge 4K^2\cdot D(t)$, valamint ($e^x>x$ miatt) $D(t)>C(t)$. Ezzel a

$$w(t,x) := D(t)\cdot\left(e^{2Kx}+e^{-2Kx}\right)>0$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

függvényre $\partial_0 w - \partial_1^2 w \geq 0$ az egész jobb félsíkon. Most $u(t_0, x_0) > 0$ miatt alkalmasan kicsi pozitív α mellett a

$$v_\alpha(t,x) := u(t,x) - \alpha \cdot [t + w(t,x)]$$

függvényre szintén $v_\alpha(t_0, x_0) > 0$. Ugyanakkor v_α a függőleges tengelyen negatív, továbbá

$$\begin{aligned} v_\alpha(t,x) &\leq u(t,x) - \alpha \cdot w(t,x) \leq C(t) \cdot e^{K|x|} - \alpha \cdot D(t) \cdot \left(e^{2Kx} + e^{-2Kx}\right) \leq \\ &\leq C(t) \cdot e^{K|x|} - \alpha \cdot D(t) \cdot e^{2K|x|} \leq D(t) \cdot e^{K|x|} - \alpha \cdot D(t) \cdot e^{2K|x|} \leq \\ &\leq D(t) \cdot e^{K|x|} \cdot \left(1 - \alpha \cdot e^{K \cdot |x|}\right), \end{aligned}$$

innen azonnal adódik, hogy v_α egy alkalmas vízszintes sávon kívül is negatív. Sőt hasonlóan

$$\begin{aligned} v_\alpha(t,x) &\leq C(t) \cdot e^{K|x|} - \alpha \cdot D(t) \cdot e^{2K|x|} \leq \\ &\leq C(t) \cdot e^{2K|x|} - \alpha \cdot D(t) \cdot e^{2K|x|} = \\ &= e^{2K|x|} \cdot (C(t) - \alpha \cdot D(t)) = e^{2K|x|} \cdot \left(C(t) - \alpha \cdot e^{4K^2 \cdot (t + C(t) + 1)}\right) \leq \\ &\leq e^{2K|x|} \cdot \left(e^{C(t)} - \alpha \cdot e^{4C(t)}\right) = e^{2K|x|} \cdot e^{C(t)} \cdot \left(1 - \alpha \cdot e^{3C(t)}\right), \end{aligned}$$

innen pedig $\lim\limits_{+\infty} C = +\infty$ miatt az adódik, hogy v_α egy alkalmas függőleges sávon kívül is negatív. Ezért v_α az $\mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}$ egy alkalmas korlátos részén kívül negatív. Viszont $v_\alpha(t_0, x_0) > 0$, így v_α a nyílt $\mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}$ halmazon fölveszi a maximumát egy (t_1, x_1) pontban. Az (egyváltozós) elsőrendű feltétel szerint ekkor $\partial_0 v_\alpha(t_1, x_1) = 0$, a másodrendű feltétel szerint viszont $\partial_1^2 v_\alpha(t_1, x_1) \leq$ ≤ 0, tehát

$$0 \leq \partial_0 v_\alpha(t_1, x_1) - \partial_1^2 v_\alpha(t_1, x_1) = -\alpha \cdot \left(1 + \partial_0 w(t_1, x_1) - \partial_1^2 w(t_1, x_1)\right) \leq -\alpha,$$

(hiszen $\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$ és $\partial_0 w - \partial_1^2 w \geq 0$). Ez pedig ellentmondás. □

2.2.59. Következmény. *A fenti elemi diffúziós formula a jobb félsíkon a*

$$\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$$

egydimenziós diffúziós egyenletnek a $\lim\limits_{\substack{(t,y) \to (0,x) \\ t > 0}} u(t,x) = g(x)$ *feltétel* ($x \in$ $\in \mathbb{R}$) *melletti egyedüli megoldását szolgáltatja a normális növekedésű kétszer folytonosan deriválható függvények körében.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Inhomogén diffúziós formula $n = 1$ esetén

2.2.60. Állítás. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ olyan normális növekedésű függvény, amelyre léteznek $\partial_1 f, \partial_1^2 f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, és ezek is normális növekedésűek. Ekkor minden $\tau \geq 0$ mellett $v_\tau : \mathbb{R}_+^\circ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$v_\tau(t,x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau,r)}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}\, dr = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau, x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}\, dp$$

definícióval a $(\tau,t,x) \mapsto v_\tau(t,x)$, $\partial_0 v_\tau(t,x)$, $\partial_1 v_\tau(t,x)$ és $\partial_1^2 v_\tau(t,x)$ hozzárendelések folytonosan terjednek ki az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ halmazra.

Bizonyítás. A $(\tau,t,x,p) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} f\left(\tau, x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}$ hozzárendelések folytonosak, ugyanakkor az

$$\int_{\mathbb{R}} e^{K\cdot|p|-p^2}\, dp$$

alakú integrálok végesek, ezért ha (τ,t,x) tetszőleges korlátos részhalmazt fut be, akkor f normális növekedése miatt a $p \mapsto f\left(\tau, x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}$ függvényeknek létezik közös

$$p \mapsto C \cdot e^{K\cdot|p|-p^2}$$

alakú $L^1(\mathbb{R})$-beli majoránsuk. Így a jegyzet legelső állítása értelmében a $(\tau,t,x) \mapsto v_\tau(t,x)$ hozzárendelés folytonos az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ halmazon. Most mindezt f helyett $\partial_1 f$-re elmondva azt kapjuk, hogy ha (τ,t,x) tetszőleges korlátos részhalmazt fut be, akkor a $p \mapsto \partial_1 f\left(\tau, x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}$ függvényeknek is létezik közös $L^1(\mathbb{R})$-beli majoránsuk, továbbá a

$$(\tau,t,x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f\left(\tau, x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}\, dp$$

hozzárendelés folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en. Az L^1-majoráltság miatt viszont az $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau, x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}\, dp$ integrálba x szerint be lehet deriválni, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en

$$\partial_1 v_\tau(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f\left(\tau, x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}\, dp,$$

emiatt a $(\tau,t,x) \mapsto \partial_1 v_\tau(t,x)$ hozzárendelés folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en. Ugyanezt viszont $\partial_1 f$ helyett $\partial_1^2 f$-re elmondva azt nyerjük, hogy a $(\tau,t,x) \mapsto$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$\partial_1^2 v_\tau(t,x)$ hozzárendelés folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-en. Ugyanakkor v_τ kielégíti a diffúziós egyenletet, azaz a nyílt félsíkon $\partial_0 v_\tau = \partial_1^2 v_\tau$, így a $(\tau,t,x) \mapsto \partial_0 v_\tau(t,x)$ hozzárendelésnek a $(\tau,t,x) \mapsto \partial_1^2 v_\tau(t,x)$ hozzárendelés éppen folytonos kiterjesztése $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-re. □

2.2.61. Tétel. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ olyan normális növekedésű függvény, amelyre léteznek $\partial_1 f, \partial_1^2 f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, és ezek is normális növekedésűek. Ekkor az $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$u(t,x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau, x + 2\sqrt{t-\tau}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}\, dp\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau,r)}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4(t-\tau)}}\, dr\, d\tau$$

függvény folytonos, továbbá $\mathbb{R}_+^\circ \times \mathbb{R}^n$-en folytonosan deriválható, sőt x szerint kétszer folytonosan deriválható is, valamint u a jobb félsíkban kielégíti a

$$\partial_0 u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x)$$
$$u(0,x) = 0$$

inhomogén jobb oldalú diffúziós kezdetiérték-feladatot.

Bizonyítás. Az elemi diffúziós formula alapján minden $\tau \geq 0$ mellett a zárt félsíkon folytonos $v_\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$v_\tau(t,x) := \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau,r)}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}\, dr, & \text{ha } t > 0, \\ f(\tau,x), & \text{ha } t = 0 \end{cases}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau, x + 2\sqrt{t}\cdot p\right) \cdot e^{-p^2}\, dp$$

függvény kielégíti a

$$\partial_0 v_\tau(t,x) - \partial_1^2 v_\tau(t,x) = 0 \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}),$$
$$v_\tau(0,x) = f(\tau,x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

homogén Cauchy-feladatot. Mivel az $f(\tau,\cdot)$ függvények első és második deriváltja is normális növekedésű, ezért az előző állítás miatt a $(\tau,t,x) \mapsto v_\tau(t,x)$, $\partial_0 v_\tau(t,x)$, $\partial_1 v_\tau(t,x)$ és $\partial_1^2 v_\tau(t,x)$ hozzárendelések folytonosan terjednek ki $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-re. Így a Duhamel-elvből (2.2.42. Lemma) azonnal adódik az állítás. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.2.62. Következmény. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ olyan normális növekedésű függvény, amelyre léteznek $\partial_1 f, \partial_1^2 f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, és ezek is normális növekedésűek, továbbá $g \in C(\mathbb{R})$ is normális növekedésű. Ekkor az $u : \mathbb{R}_+ \times \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$u(t,x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g\left(x + 2\sqrt{t}\cdot p\right)\cdot e^{-p^2}\,dp + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau, x + 2\sqrt{t-\tau}\cdot p\right)\cdot e^{-p^2}\,dp\,d\tau = \\ = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(r)}{\sqrt{4\pi t}}\cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4t}}\,dr + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau,r)}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}}\cdot e^{-\frac{(r-x)^2}{4(t-\tau)}}\,dr\,d\tau$$

függvény folytonos, továbbá $\mathbb{R}_+^{\circ} \times \mathbb{R}^n$-en folytonosan deriválható, sőt x szerint kétszer folytonosan deriválható is, valamint a normális növekedésű függvények körében egyértelmű megoldása a

$$\partial_0 u(t,x) - \partial_1^2 u(t,x) = f(t,x) \quad (t>0,\ x\in\mathbb{R}),$$
$$u(0,x) = g(x) \quad (x\in\mathbb{R})$$

inhomogén jobb oldalú diffúziós kezdetiérték-feladatnak.

Bizonyítás. Az u függvény a fenti tételben és az elemi diffúziós formulában definiált függvények összege, amely nyilvánvalóan kielégíti a kívánt feladatot. A normális növekedésű függvények körében való egyértelműség a legutóbbi következményből nyilvánvaló. □

Fizikai példa *(időben változó hővezetés rúdban).* Tekintsünk egy nagyon hosszú vékony, homogén tömegeloszlású rudat a palástján hőszigeteléssel. Jelölje $u(t,x)$ a rúd (vízszintes) x koordinátájú pontjának t időpillanatbeli hőmérsékletét, akkor u kielégíti a

$$\partial_0 u(t,x) - a^2\cdot\partial_1^2 u(t,x) = f(t,x)$$

differenciálegyenletet, ahol $a^2 = \frac{k}{c\cdot\rho}$, továbbá k a hővezetési együttható, c a fajhő, ρ a rúd tömegsűrűsége, f pedig a rúdban levő hőforrások ill. nyelők elhelyezkedését jellemző függvény. (Természetesen $v(t,x) := u(t,a\cdot x)$ transzformálással $\partial_0 v - \partial_1^2 v = h$ alakú diffúziós egyenletre jutunk.) Fizikai aspektusból nyilvánvaló, hogy a hővezetés egyértelmű leírásához még további feltételre van szükségünk, s e feltételt például biztosítja a kezdeti hőmérsékleteloszlás ismerete, azaz az $u(0,x) = \varphi(x)$ alakú kezdeti feltétel (φ folytonos és normális növekedésű). Ha például se hőforrás, se hőnyelő nincs a rúdban

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

(azaz $f = 0$), akkor φ ismeretében felírhatjuk u-t az elemi diffúziós formula alapján.

Megjegyezzük, hogy a közegterjedést, diffúziót szintén a fenti típusú egyenlettel lehet leírni, innen ered a „diffúziós egyenlet" absztrakt elnevezés is.

2.2.6. Egydimenziós Black–Scholes-egyenlet

(ez is diffúziós egyenlet)

Bevezetés

„európai call opció" = „európai vételi opció" = „európai vételi jog"

Ez egy elővásárlási jog, amelynek birtokosa előre rögzített áron és időpontban adott mennyiséget vásárolhat egy adott termékből a vételi jog kibocsátójától. Ezt a jogot a birtokosa szintén vásárlás útján szerzi meg a kibocsátótól. A kérdés a termék vásárlása előtti bármely t időpontban az, hogy valaki *mennyit hajlandó fizetni* az adott pillanatban (= jelenérték-probléma) a későbbi T időpontbeli garantált rögzített E összegért.

Tekintsünk egy ilyen vételi opciót. Tegyük föl, hogy a vételi jog egy T időtartamra vonatkozik (lejárati idő). Legyen S az alapul szolgáló aktívák jelenértéke. Jelölje $C(t,S)$ a szóban forgó vételi jog értékét a $0 \le t \le T$ időpillanatban az S jelenérték mellett. Ekkor C (pénzügyi megfontolásokból adódóan) kielégíti a

$$\partial_0 C(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \partial_1^2 C(t,S) + r \cdot S \cdot \partial_1 C(t,S) - r \cdot C(t,S) = 0$$

parciális differenciálegyenletet, röviden a

$$\partial_0 C + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\partial_1^2 C + rS\partial_1 C - rC = 0$$

egyenletet, ahol σ az aktívák kockázatosságának mértéke, r pedig a kockázatmentes kamatláb. σ és r elvileg függvények, az egyszerűség kedvéért most tegyük föl, hogy konstansok: $\sigma, r \in \mathbb{R}$.

A C vételi opcióérték továbbá eleget tesz a

$$C(t,0) = 0 \qquad \text{és} \qquad C(t,S) \sim S \quad (S \to \infty)$$

peremfeltételeknek, valamint a

$$C(T,S) = (S-E)_+ = (S-E) \vee 0$$

„végfeltételnek", ahol E a kötési árfolyam. A peremfeltételeket mi most helyettesítsük azon (valamivel pontosabban megfogalmazott) rokon feltétellel, hogy C növekedése S-ben legfeljebb lineáris, t-ben pedig legfeljebb exponenciális: $C(t,S) \le M \cdot (1+S) \cdot e^{Kt}$, ahol $M, K > 0$. Összefoglalva tehát:

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A modell

Adottak:

- E kötési árfolyam
- T lejárati idő
- $0 \leq t \leq T$ időváltozó
- S az alapul szolgáló aktívák jelenértéke
- $C = C(t, S)$ a vételi jog értéke
- σ az aktívák kockázatosságának mértéke
- r kockázatmentes kamatláb

és C kielégíti a

$$\begin{cases} \partial_0 C + \dfrac{\sigma^2 S^2}{2} \partial_1^2 C + rS\partial_1 C - rC = 0, \\ C(T, S) = (S - E)_+ \end{cases}$$

feladatot, továbbá $C(t, S) \leq M \cdot (1 + S) \cdot e^{Kt}$, ahol $M, K > 0$.

Változótranszformáció

$$\tau := \frac{\sigma^2}{2} \cdot (T - t), \quad x := \ln S - \ln E \quad \text{és} \quad v(\tau, x) := \frac{C\left(T - \frac{2}{\sigma^2}\tau, Ee^x\right)}{E}$$

választással $C(t, S) = E \cdot v(\tau, x)$ és $t = T - \frac{2}{\sigma^2}\tau$, $S = Ee^x$, valamint v kielégíti a

$$\begin{cases} \partial_0 v - \partial_1^2 v = \left(\dfrac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \cdot \partial_1 v - \dfrac{2r}{\sigma^2} \cdot v, \\ v(0, x) = (e^x - 1)_+ \end{cases}$$

feladatot, továbbá $v(\tau, x) \leq 2M \cdot e^{x + Kt}$, tehát v éppen `normális növekedésű`. $k_1 := \frac{2r}{\sigma^2}$ választással az egyenletünk egy picit egyszerűbb alakú:

$$\partial_0 v - \partial_1^2 v = (k_1 - 1) \cdot \partial_1 v - k_1 \cdot v$$

Ez az egyenlet ugyanakkor még mindig nem olyan alakú diffúziós egyenlet, amelyre az elemi diffúziós formula alkalmazható.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Átparaméterezés

$u(\tau,x)=e^{\alpha\tau+\beta x}\cdot v(\tau,x)$ alakú új ismeretlenre térve az α és β paraméterek megválaszthatók úgy, hogy $u(\tau,x)$ és $\partial_1 u(\tau,x)$ együtthatói nullák legyenek, nevezetesen $\alpha:=\frac{(k_1+1)^2}{4}$ és $\beta:=\frac{k_1-1}{2}$ esetén. Tehát

$$u(\tau,x):=e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau+\frac{1}{2}(k_1-1)x}\cdot v(\tau,x)$$

választással feladatunk az $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$-en értelmezett

$$\begin{aligned}\partial_0 u-\partial_1^2 u&=0,\\ u(0,x)&=\left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}\right)_+\end{aligned}$$

Cauchy-feladatra redukálódik, valamint u is normális növekedésű.

A Black–Scholes-egyenlet megoldása a formulával

Mivel az $u(0,x)=\left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}\right)_+$ kezdeti feltétel normális növekedésű, így az elemi diffúziós formula és következményei alapján

$$u(\tau,x)=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)s}-e^{\frac{1}{2}(k_1-1)s}\right)_+}{\sqrt{4\pi\tau}}\cdot e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}}\,ds,$$

és a normális növekedésű folyamatok körében ez az egyetlen megoldás. Ezt ki is tudjuk integrálni:

$$\begin{aligned}u(\tau,x)&=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)s}-e^{\frac{1}{2}(k_1-1)s}}{\sqrt{4\pi\tau}}\cdot e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}}\,ds=\\
&=\int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)\left(x+\sqrt{2\tau}z\right)}-e^{\frac{1}{2}(k_1-1)\left(x+\sqrt{2\tau}z\right)}}{\sqrt{4\pi\tau}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\sqrt{2\tau}\,dz=\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)\left(x+\sqrt{2\tau}z\right)}-e^{\frac{1}{2}(k_1-1)\left(x+\sqrt{2\tau}z\right)}\right)\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\\
&=\frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}e^{\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}z}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz-\\
&\quad-\frac{e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}e^{\frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}z}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{\left(z-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}\right)^2}{2}}\, dz -$$

$$- \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x+\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{\left(z-\frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}\right)^2}{2}}\, dz =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi -$$

$$- \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x+\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi =$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}\right) -$$

$$- e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x+\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau} \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}\right),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi$$

a standard normális eloszlásfüggvény. Tehát

$$u(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}\right) -$$

$$- e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x+\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau} \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}\right).$$

Innen a v függvényre (amely u egyértelműsége miatt szintén egyértelmű megoldása a saját feladatának) a definíciója alapján

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau-\frac{1}{2}(k_1-1)x} \cdot u(\tau, x) =$$

$$= e^x \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}\right) - e^{-k_1\tau} \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}\right).$$

Most ezt visszaírva C-re, a $C(t,S) = E \cdot v(\tau, x)$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2} \cdot (T-t)$, $x = \ln S - \ln E$ és $k_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$ összefüggésekkel

$$C(t,S) = E \cdot v(\tau, x) =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= E \cdot e^x \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}\right) -$$
$$- E \cdot e^{-k_1\tau} \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}\right) =$$
$$= S \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}\right) -$$
$$- E \cdot e^{r\cdot(t-T)} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}\right).$$

Tehát

$$C(t,S) = S \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}\right) -$$
$$- E \cdot e^{r\cdot(t-T)} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}\right)$$

(Black–Scholes-formula). Ez a képlet az általunk kitűzött keretek között egyértelmű megoldását szolgáltatja a Black–Scholes-féle diffúziós Cauchy-feladatnak.

2.2.7. Standard diffúziós Cauchy-feladat megoldása n dimenzióban

Technikai bevezető

2.2.63. Megjegyzés. Minden $t > 0$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}\, d\mathbf{r} = 1,$$

továbbá minden $K, t > 0$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{K\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\| - \frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}\, d\mathbf{r} \le 2^n \cdot e^{nK^2\cdot t}.$$

Bizonyítás. Először is

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}\, d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{(r_k-x_k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, d\mathbf{r} = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(r_k-x_k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dr_k = 1.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Továbbá tetszőleges rögzített $K, t > 0$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén a Fubini-tétel és a 2.2.55. Megjegyzés alapján

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{K\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\| - \frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}\, d\mathbf{r} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{K\cdot\sum_{j=1}^n |r_j-y_j| - \sum_{j=1}^n \frac{(r_j-y_j)^2}{4t}}}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}\, d\mathbf{r} =$$

$$= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{K\cdot|r_j-y_j| - \frac{(r_j-y_j)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dr_j \leq \prod_{j=1}^n \left(2e^{K^2\cdot t}\right) = 2^n \cdot e^{nK^2\cdot t}. \qquad \square$$

2.2.64. Definíció. Egy $g \in C(\mathbb{R}^n)$ függvényt **normális növekedésű**nek mondunk, ha alkalmas $C, K > 0$ számokkal minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-re

$$|g(\mathbf{x})| \leq C \cdot e^{K\|x\|}.$$

Hasonlóan egy $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt **normális növekedésű**nek mondunk, ha alkalmas $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény és $K > 0$ szám mellett minden $(t, \mathbf{x})$-re

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq C(t) \cdot e^{K\cdot\|x\|}.$$

A fenti definícióban (az egydimenziós esethez hasonlóan) mindig feltehető, hogy a C függvény folytonosan deriválható és szigorúan növő, sőt hogy

$$\lim_{+\infty} C = +\infty.$$

Ha $g \in C(\mathbb{R}^n)$ normális növekedésű függvény, akkor e szakasz bevezető megjegyzése alapján triviálisan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}\, d\mathbf{r}$$

abszolút konvergens integrál.

2.2.65. Állítás. *Tetszőleges $g \in C(\mathbb{R}^n)$ normális növekedésű függvényre az $u : \mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$u(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}\, d\mathbf{r}$$

függvény folytonosan deriválható, sőt az $\mathbf{x}$ változó vonatkozásában szerint kétszer folytonosan deriválható, és kielégíti a

$$\partial_0 u - \Delta u = 0$$

n-dimenziós diffúziós egyenletet. Az u függvény $\mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}^n$-en vett összes elsőrendű, továbbá az $\mathbf{x}$ változó vonatozásában vett összes másodrendű parciális deriváltja a definiáló integrálba való bederiválással számolható.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A normális növekedés értelmében alkalmas $C, K > 0$ konstansokkal

$$|g(\mathbf{r})| \leq C \cdot e^{K \cdot \|\mathbf{r}\|}$$

minden $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ pontra. Ekkor tetszőleges rögzített $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}_+^o \times \mathbb{R}^n$ pontnak az $U := \left[\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}\right] \times \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, 1)$ környezetére a 2.2.51. Állítás alapján igaz, hogy minden $1 \leq k \leq n$ mellett az $r_k \mapsto \frac{\left(1+(r_k-x_k)^2\right) \cdot e^{K \cdot |r_k|}}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(r_k-x_k)^2}{4t}}$ függvényeknek van közös $\ell_k \in L^1(\mathbb{R})$ majoránsuk, midőn $(t, \mathbf{x})$ befutja az U környezetet. Így a Fubini-tétel alapján az

$$\ell(\mathbf{r}) := \ell_1(r_1) \cdot \cdots \cdot .\ell_n(r_n)$$

függvény $L^1(\mathbb{R}^n)$-beli majoránsa ezek szorzatának, következésképpen ($\|\mathbf{r}\| \leq \leq \sum_1^n |r_k|$ és $1 + \|\mathbf{r}\|^2 \leq \prod_1^n \left(1 + r_k^2\right)$ alapján) az

$$\mathbf{r} \mapsto \frac{\left(1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|^2\right) \cdot e^{K \cdot \|\mathbf{r}\|}}{\sqrt{4\pi t}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{r}\|^2}{4t}}$$

függvényeknek is (midőn $(t, \mathbf{x})$ az U környezetet futja be). Ezért $|g(\mathbf{r})| \leq \leq C \cdot e^{K \cdot \|\mathbf{r}\|}$ alapján $u_{\mathbf{r}}(t, x) := \frac{g(\mathbf{r})}{\sqrt{4\pi t}^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}$ definícióval az $\mathbf{r} \mapsto u_{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x})$ függvényeknek és a

$$\partial_k u_{\mathbf{r}} = -\frac{x_k - r_k}{2t} \cdot u_{\mathbf{r}} \qquad \text{és} \qquad \partial_k \partial_j u_{\mathbf{r}} = \frac{(x_k - r_k) \cdot (x_j - r_j)}{4t^2} \cdot u_{\mathbf{r}},$$

valamint a

$$\partial_k^2 u_{\mathbf{r}} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{(x_k - r_k)^2}{4t^2}\right) \cdot u_{\mathbf{r}}$$

parciális deriváltaknak $(1 \leq k \neq j \leq n)$ is az $\mathbf{r} \mapsto C \cdot \left(1 + \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right) \cdot \ell(\mathbf{r})$ függvény $L^1(\mathbb{R}^n)$-beli majoránsa ($(t, \mathbf{x}) \in U$). Ezért a $\partial_0 u_{\mathbf{r}} = \Delta u_{\mathbf{r}}$ függvényeknek is az $\mathbf{r} \mapsto n \cdot C \cdot \left(1 + \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_0^2}\right) \cdot \ell(\mathbf{r})$ függvény $L^1(\mathbb{R})$-beli majoránsa ($(t, \mathbf{x}) \in U$). Így az

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{r}$$

integrálba $(t, \mathbf{x}) \in U$ mellett be lehet deriválni t szerint egyszer és $\mathbf{x}$ komponensei szerint kétszer is. (Tehát Δ is bevihető az integráljel mögé.) Ezzel pedig egyrészt az

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{r},$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$\partial_k u(t,\mathbf{x}) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_k - r_k}{2t} \cdot u_{\mathbf{r}}(t,\mathbf{x})\ d\mathbf{r},$$

$$\partial_k \partial_j u(t,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(x_k - r_k)\cdot(x_j - r_j)}{4t^2} \cdot u_{\mathbf{r}}(t,\mathbf{x})\ d\mathbf{r},$$

$$\partial_k^2 u(t,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{(x_k - r_k)^2}{4t^2}\right) \cdot u_{\mathbf{r}}(t,\mathbf{x})\ d\mathbf{r},$$

$$\partial_0 u(t,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_0 u_{\mathbf{r}}(t,\mathbf{x})\ d\mathbf{r} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta u_{\mathbf{r}}(t,\mathbf{x})\ d\mathbf{r} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{r}\|^2}{4t^2}\right) \cdot u_{\mathbf{r}}(t,\mathbf{x})\ d\mathbf{r}$$

$(1 \le k \ne j \le n)$ függvények a jegyzet legelső állításának értelmében folytonosak $(t_0, \mathbf{x}_0)$-ban, másrészt ugyaninnen

$$\partial_0 u(t_0,\mathbf{x}_0) - \Delta u(t_0,\mathbf{x}_0) = 0. \qquad \square$$

Homogén diffúziós formula $\mathbb{R}^n$-ben

2.2.66. Megjegyzés. A Fubini-tétel és egyváltozós integráltranszformációk triviális egymás utánjával adódik, hogy minden $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$ és $\mathbf{b} \in \in \mathbb{R}^n$esetén $\mathbf{p} = \alpha\cdot\mathbf{r} + \mathbf{b}$ helyettesítéssel

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\alpha\cdot\mathbf{r} + \mathbf{b})\ d\mathbf{r} = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{p})\ d\mathbf{p}.$$

2.2.67. Megjegyzés. Ha $g \in C(\mathbb{R}^n)$ normális növekedésű függvény, akkor az előbbi megjegyzés alapján $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}}{2\sqrt{t}}$ helyettesítéssel minden $t > 0$ és $\mathbf{x} \in \in \mathbb{R}^n$esetén

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}\ d\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}\ d\mathbf{p}.$$

2.2.68. Állítás. *Tetszőleges $g \in C(\mathbb{R}^n)$ normális növekedésű függvényre az $u : \mathbb{R}^{\circ}_{+} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$u(t,\mathbf{x}) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}\ d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}\ d\mathbf{p}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

függvény folytonosan deriválható, sőt az $\mathbf{x}$ *változó vonatkozásában szerint kétszer folytonosan deriválható, és a jobb nyílt féltérben kielégíti a*

$$\partial_0 u - \Delta u = 0$$

n-dimenziós diffúziós egyenletet, továbbá minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *mellett*

$$\lim_{\substack{(t,\mathbf{y})\to(0,\mathbf{x}) \\ t>0}} u(t,\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}).$$

Másképpen fogalmazva: az $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,*

$$u(t,\mathbf{x}) := \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}\, d\mathbf{r} & ha\ t > 0, \\ g(\mathbf{x}), & ha\ t = 0 \end{cases}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}\, d\mathbf{p}$$

függvény folytonos, továbbá kielégíti a

$$\partial_0 u(t,\mathbf{x}) - \Delta u(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad (t>0,\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n),$$
$$u(0,\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n)$$

n-dimenziós diffúziós Cauchy-feladatot. Az u *függvény* $\mathbb{R}^{\mathrm{o}}_+ \times \mathbb{R}^n$*-en vett összes elsőrendű, valamint* $\mathbf{x}$ *szerinti összes másodrendű parciális deriváltja a(z első) definiáló integrálba való bederiválással számolható.*

Bizonyítás. A legutóbbi állítás biztosítja, hogy u kielégíti a kívánt egyenletet. Hátravan még a határátmenet igazolása. Mivel az $u(t,\mathbf{x})$-et definiáló két integrál ($t > 0$ mellett) azonos, továbbá a második integrál $t = 0$ esetén is értelmes, sőt éppen $g(\mathbf{x})$ értéket vesz föl, ezért elegendő igazolni, hogy a

$$(t,\mathbf{x}) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}\, d\mathbf{p}$$

hozzárendelés $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en folytonos. Valóban, a

$$(t,\mathbf{x},\mathbf{p}) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} g\left(\mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}\, d\mathbf{p}$$

hozzárendelések folytonosak, ugyanakkor az

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{K\cdot\|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{p}\|^2}\, d\mathbf{p}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

alakú integrálok végesek, ezért ha $(t,\mathbf{x})$ tetszőleges korlátos részhalmazt fut be, akkor g normális növekedése miatt a $\mathbf{p}\mapsto g\left(\mathbf{x}+2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right)\cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}$ függvényeknek létezik közös

$$\mathbf{p}\mapsto C\cdot e^{K\cdot\|\mathbf{p}\|-\|\mathbf{p}\|^2}$$

alakú $L^1(\mathbb{R}^n)$-beli majoránsuk. Így a jegyzet legelső állítása értelmében a $(t,\mathbf{x})\mapsto\frac{1}{\sqrt{\pi}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x}+2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right)\cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}\,d\mathbf{p}$ hozzárendelés tényleg folytonos az $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ halmazon. □

2.2.69. Megjegyzés. $C,K>0$ esetén a fenti 2.2.63. Megjegyzés alapján triviálisan

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{Ce^{K\|\mathbf{r}\|}\cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}\,d\mathbf{r}\le Ce^{K\|\mathbf{x}\|}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{K\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}\,d\mathbf{r}\le 2^nCe^{nK^2\cdot t}\cdot e^{K\|\mathbf{x}\|},$$

így g normális növekedése miatt a fenti tételben szereplő u függvény is normális növekedésű. Ha g korlátos, akkor u is korlátos, mégpedig

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}\cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}\,d\mathbf{r}=1$$

alapján triviálisan $\|g\|_\infty$-val korlátozott.

2.2.70. Állítás. *A*

$$\begin{aligned}\partial_0u(t,\mathbf{x})-\Delta u(t,\mathbf{x})&=0\quad(t>0,\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n),\\ u(0,\mathbf{x})&=0\quad(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

n-dimenziós diffúziós Cauchy-feladat megoldása a jobb zárt féltérben folytonos, a nyílt féltérben folytonosan deriválható, az $\mathbf{x}$ változó vonatkozásában kétszer folytonosan deriválható ***normális növekedésű függvények körében*** *egyedül az azonosan nulla függvény.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy van olyan $|u(t,\mathbf{x})|\le C(t)\cdot e^{K\|\mathbf{x}\|}$ tulajdonságú u megoldás (C szigorúan növő folytonosan deriválható, $\lim\limits_{+\infty}C=+\infty$ és $K\ge1$), amely valamely $(t_0,\mathbf{x}_0)$ pontban nem tűnik el, mondjuk pozitív. Ekkor a

$$D(t):=e^{4nK^2\cdot(t+C(t)+1)}$$

függvény is szigorúan növő folytonosan deriválható és $D'(t)\ge4nK^2\cdot D(t)$, valamint ($e^x>x$ miatt) $D(t)>C(t)$. Ezzel a

$$w(t,\mathbf{x}):=D(t)\cdot\prod_{k=1}^n\left(e^{2Kx_k}+e^{-2Kx_k}\right)>0$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

függvényre $\partial_0 w - \Delta w \geq 0$ az egész jobb féltérben. Most $u(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$ miatt alkalmasan kicsi pozitív α mellett a

$$v_\alpha(t, \mathbf{x}) := u(t, \mathbf{x}) - \alpha \cdot [t + w(t, \mathbf{x})]$$

függvényre szintén $v_\alpha(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$. Ugyanakkor v_α a $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ hipersíkon negatív, továbbá

$$\begin{aligned} v_\alpha(t, \mathbf{x}) \leq u(t, \mathbf{x}) - \alpha \cdot w(t, \mathbf{x}) \leq C(t) \cdot e^{K\|\mathbf{x}\|} - \alpha \cdot D(t) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(e^{2Kx_k} + e^{-2Kx_k}\right) \leq \\ \leq C(t) \cdot e^{K\|\mathbf{x}\|} - \alpha \cdot D(t) \cdot e^{2K\|\mathbf{x}\|} \leq D(t) \cdot e^{K\|\mathbf{x}\|} - \alpha \cdot D(t) \cdot e^{2K\|\mathbf{x}\|} = \\ = D(t) \cdot e^{K\|\mathbf{x}\|} \cdot \left(1 - \alpha \cdot e^{K\|\mathbf{x}\|}\right), \end{aligned}$$

innen azonnal adódik, hogy v_α egy alkalmas $\mathbb{R}_+ \times \overline{\mathcal{B}}(\mathbf{0}, R)$ alakú halmazon kívül is negatív. Sőt hasonlóan

$$\begin{aligned} v_\alpha(t, \mathbf{x}) \leq C(t) \cdot e^{K\|\mathbf{x}\|} - \alpha \cdot D(t) \cdot e^{2K\|\mathbf{x}\|} \leq \\ \leq C(t) \cdot e^{2K\|\mathbf{x}\|} - \alpha \cdot D(t) \cdot e^{2K\|\mathbf{x}\|} = \\ = e^{2K\|\mathbf{x}\|} \cdot (C(t) - \alpha \cdot D(t)) = \\ = e^{2K\|\mathbf{x}\|} \cdot \left(C(t) - \alpha \cdot e^{4nK^2 \cdot (t + C(t) + 1)}\right) \leq \\ \leq e^{2K\|\mathbf{x}\|} \cdot \left(e^{C(t)} - \alpha \cdot e^{4C(t)}\right) = e^{2K\|\mathbf{x}\|} \cdot e^{C(t)} \cdot \left(1 - \alpha \cdot e^{3C(t)}\right), \end{aligned}$$

innen pedig $\lim_{+\infty} C = +\infty$ miatt az adódik, hogy v_α egy alkalmas $[0, T] \times$ $\times \mathbb{R}^n$ alakú halmazon kívül is negatív. Ezért v_α az $\mathbb{R}_+^{\circ} \times \mathbb{R}^n$ egy alkalmas korlátos részén kívül negatív. Viszont $v_\alpha(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$, így v_α a nyílt $\mathbb{R}_+^{\circ} \times$ $\times \mathbb{R}$ halmazon fölveszi a maximumát egy $(t_1, \mathbf{x}_1)$ pontban. Az (egyváltozós) elsőrendű feltétel szerint ekkor $\partial_0 v_\alpha(t_1, \mathbf{x}_1) = 0$, a másodrendű feltétel szerint viszont minden $1 \leq k \leq n$ mellett $\partial_k^2 v_\alpha(t_1, \mathbf{x}_1) \leq 0$, ezért $\Delta v_\alpha(t_1, \mathbf{x}_1) \leq 0$, tehát

$$0 \leq \partial_0 v_\alpha(t_1, \mathbf{x}_1) - \Delta v_\alpha(t_1, \mathbf{x}_1) = -\alpha \cdot (1 + \partial_0 w(t_1, \mathbf{x}_1) - \Delta w(t_1, \mathbf{x}_1)) \leq -\alpha,$$

(hiszen $\partial_0 u - \partial_1^2 u = 0$ és $\partial_0 w - \partial_1^2 w \geq 0$). Ez pedig ellentmondás. □

2.2.71. Következmény. *A fenti homogén diffúziós formula (2.2.68. Állítás) a*

$$\begin{aligned} \partial_0 u(t, \mathbf{x}) - \Delta u(t, \mathbf{x}) = 0 \qquad & (t > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \\ u(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

n-dimenziós diffúziós Cauchy-feladatnak egyértelmű megoldását szolgáltatja a jobb zárt féltérben folytonos, a nyílt féltérben folytonosan deriválható, továbbá az $\mathbf{x}$ változó vonatkozásában kétszer folytonosan deriválható és normális növekedésű függvények körében.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti állítást két tetszőleges normális növekedésű megoldás különbségére. □

Inhomogén diffúziós formula $\mathbb{R}^n$-ben

2.2.72. Állítás. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ olyan normális növekedésű függvény, amelynek az $\mathbf{x}$ változóra vonatkozó mindegyik első- és másodrendű parciális deriváltja létezik és folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en, továbbá ezek is normális növekedésűek. Ekkor minden $\tau \geq 0$ mellett $v_\tau : \mathbb{R}_+^{\circ} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$v_\tau(t,\mathbf{x}) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\tau,\mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}}\, d\mathbf{r} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}\, d\mathbf{p}$$

definícióval a $(\tau,t,\mathbf{x}) \mapsto v_\tau(t,\mathbf{x})$, $\partial_0 v_\tau(t,\mathbf{x})$, $\partial_k v_\tau(t,\mathbf{x})$ és $\partial_k\partial_j v_\tau(t,\mathbf{x})$ hozzárendelések $(1 \leq k,j \leq n)$ folytonosan terjednek ki az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ halmazra.

Bizonyítás. A $(\tau,t,\mathbf{x},\mathbf{p}) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}$ hozzárendelések folytonosak, ugyanakkor az

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{K\cdot\|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{p}\|^2}\, d\mathbf{p}$$

alakú integrálok végesek, ezért ha $(\tau,t,\mathbf{x})$ tetszőleges korlátos részhalmazt fut be, akkor f normális növekedése miatt a $\mathbf{p} \mapsto f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}$ függvényeknek létezik közös

$$\mathbf{p} \mapsto C_* \cdot e^{K\cdot\|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{p}\|^2}$$

alakú $L^1(\mathbb{R}^n)$-beli majoránsuk. Így a jegyzet legelső állítása értelmében a $(\tau,t,\mathbf{x}) \mapsto v_\tau(t,\mathbf{x})$ hozzárendelés folytonos az $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ halmazon. Most mindezt f helyett $\partial_k f$-re elmondva $(1 \leq k \leq n)$ azt kapjuk, hogy ha $(\tau,t,\mathbf{x})$ tetszőleges korlátos részhalmazt fut be, akkor a $\mathbf{p} \mapsto \partial_k f(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}$ függvényeknek létezik közös $L^1(\mathbb{R}^n)$-beli majoránsuk, továbbá a

$$(\tau,t,\mathbf{x}) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t}\cdot\mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2}\, d\mathbf{p}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

hozzárendelés folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en. Az L^1-majoráltság miatt viszont az $\frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t} \cdot \mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2} \, d\mathbf{p}$ integrálba x_k szerint be lehet deriválni, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en

$$\partial_k v_\tau(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t} \cdot \mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2} \, d\mathbf{p},$$

emiatt a $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \partial_k v_\tau(t, \mathbf{x})$ hozzárendelés folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en. Ugyanezt viszont $\partial_k f$ helyett $\partial_k \partial_j f$-re $(1 \leq j \leq n)$ elmondva azt nyerjük, hogy a $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \partial_k \partial_j v_\tau(t, \mathbf{x})$ hozzárendelések folytonosak $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en. Tehát a $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \Delta v_\tau(t, \mathbf{x})$ hozzárendelés is folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en.Ugyanakkor v_τ kielégíti a diffúziós egyenletet, azaz a nyílt féltérben $\partial_0 v_\tau = = \Delta v_\tau$, így a $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \partial_0 v_\tau(t, \mathbf{x})$ hozzárendelésnek a $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \Delta v_\tau(t, \mathbf{x})$ hozzárendelés éppen folytonos kiterjesztése $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-re. □

2.2.73. Tétel. *Legyen $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ olyan normális növekedésű függvény, amelynek az $\mathbf{x}$ változóra vonatkozó mindegyik első- és másodrendű parciális deriváltja létezik és folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en, továbbá ezek is normális növekedésűek. Ekkor az $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$u(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t - \tau} \cdot \mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2} \, d\mathbf{p} \, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\tau, \mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi(t - \tau)}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|^2}{4(t-\tau)}} \, d\mathbf{r} \, d\tau$$

függvény folytonos, továbbá $\mathbb{R}_+^{\mathrm{o}} \times \mathbb{R}^n$-en folytonosan deriválható, sőt $\mathbf{x}$ vonatkozásában kétszer folytonosan deriválható is, valamint u a jobb féltérben kielégíti a

$$\begin{aligned} \partial_0 u(t, \mathbf{x}) - \Delta u(t, \mathbf{x}) &= f(t, \mathbf{x}) \quad (t > 0, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \\ u(0, \mathbf{x}) &= 0 \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

inhomogén jobb oldalú diffúziós kezdetiérték-feladatot.

Bizonyítás. A homogén diffúziós formula alapján minden $\tau \geq 0$ mellett a zárt féltéren folytonos $v_\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$v_\tau(t, \mathbf{x}) := \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\tau, \mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|^2}{4t}} \, d\mathbf{r}, & \text{ha } t > 0 \\ f(\tau, \mathbf{x}), & \text{ha } t = 0 \end{cases} =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t} \cdot \mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2} \, d\mathbf{p}$$

függvény kielégíti a

$$\begin{aligned} \partial_0 v_\tau(t, \mathbf{x}) - \Delta v_\tau(t, \mathbf{x}) &= 0 \qquad (t > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \\ v_\tau(0, \mathbf{x}) &= f(\tau, \mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

homogén Cauchy-feladatot. Mivel az $f(\tau, \cdot)$ függvények első- és másodrendű parciális deriváltjai is normális növekedésűek, ezért az előző állítás miatt a $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto v_\tau(t, \mathbf{x})$, $\partial_0 v_\tau(t, \mathbf{x})$, $\partial_k v_\tau(t, \mathbf{x})$ és $\partial_k \partial_j v_\tau(t, \mathbf{x})$ hozzárendelések $(1 \leq k, j \leq n)$ folytonosan terjednek ki $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-re. Így a Duhamel-elvből azonnal adódik az állítás. □

2.2.74. Megjegyzés. A fenti tétel úgy is fogalmazható, hogy az $E : \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$E(t, \mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}}, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0 \end{cases}$$

függvénnyel

$$u(t, \mathbf{x}) := \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n} E(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{r}) \cdot f(\tau, \mathbf{r}) \, d(\tau, \mathbf{r})$$

megoldása a $\partial_0 u - \Delta u = f$, $u(0, \mathbf{x}) = 0$ feladatnak minden olyan $f \in \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ normális növekedésű függvényre, amelynek az $\mathbf{x}$ változóra vonatkozó mindegyik első- és másodrendű parciális deriváltja létezik és folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en, valamint ezek is normális növekedésűek. (E alapmegoldás.)

A fenti tétel eredménye triviálisan egybekapcsolható a homogén formulával:

2.2.75. Tétel (standard diffúziós formula)**.** *Legyen $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ olyan normális növekedésű függvény, amelynek az $\mathbf{x}$ változóra vonatkozó mindegyik első- és másodrendű parciális deriváltja létezik és folytonos $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$-en, valamint ezek is normális növekedésűek, továbbá $g \in C(\mathbb{R}^n)$ is normális növekedésű. Ekkor az $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} &u(t, \mathbf{x}) := \\ &= \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4t}} \, d\mathbf{r} + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\tau, \mathbf{r})}{\left(\sqrt{4\pi(t-\tau)}\right)^n} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{x}\|^2}{4(t-\tau)}} \, d\mathbf{r} \, d\tau, & ha\ t > 0 \\ g(\mathbf{x}), & ha\ t = 0 \end{cases} = \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x} + 2\sqrt{t} \cdot \mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2} \, d\mathbf{p} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\tau, \mathbf{x} + 2\sqrt{t-\tau} \cdot \mathbf{p}\right) \cdot e^{-\|\mathbf{p}\|^2} \, d\mathbf{p} \, d\tau$$

függvény folytonos, továbbá $\mathbb{R}_+^{\circ} \times \mathbb{R}^n$-en folytonosan deriválható, sőt x szerint kétszer folytonosan deriválható is, valamint a normális növekedésű függvények körében egyértelmű megoldása a

$$\begin{aligned} \partial_0 u(t, \mathbf{x}) - \Delta u(t, \mathbf{x}) &= f(t, \mathbf{x}) \quad (t > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \\ u(0, \mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

inhomogén jobb oldalú diffúziós kezdetiérték-feladatnak.

Bizonyítás. Az u függvény a fenti tételben és a homogén elemi diffúziós formulában definiált függvények összege, amely nyilvánvalóan kielégíti a kívánt feladatot. A normális növekedésű függvények körében való egyértelműség a legutóbbi következményből (2.2.71. Következmény) nyilvánvaló. □

2.3. Másodrendű lineáris egyenletek kitűzése

2.3.1. Elsőrendű homogén lineáris egyenletek kétdimenzióban

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt összefüggő halmaz és $f, g \in C(\Omega)$. Olyan $u \in C^1(\Omega)$ függvényeket keresünk, amelyek kielégítik az

$$f(x,y) \cdot \partial_1 u(x,y) + g(x,y) \cdot \partial_2 u(x,y) = 0 \qquad (*)$$

ún. *elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenlet*et.

2.3.1. Megjegyzés. Tegyük föl, hogy u kielégíti $(*)$-ot, továbbá hogy egy nyílt intervallumon értelmezett deriválható $y(\cdot)$ függvény grafikonja Ω-ban fekszik és

$$y'(x) = \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))}.$$

Ekkor $x \mapsto u(x, y(x))$ konstans. (Tehát u konstans a fenti `közönséges` differenciálegyenlet megoldásai mentén.)

Bizonyítás. Láncszabállyal

$$\frac{d}{dx} u(x, y(x)) = \partial_1 u(x, y(x)) + \partial_2 u(x, y(x)) \cdot y'(x) =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \partial_1 u\left(x, y\left(x\right)\right) + \partial_2 u\left(x, y\left(x\right)\right) \cdot \frac{g\left(x, y\left(x\right)\right)}{f\left(x, y\left(x\right)\right)} = 0. \qquad \square$$

Tehát $(*)$ megoldásai olyan függvények, amelyeknek szinthalmazai a fenti közönséges differenciálegyenlet megoldásgrafikonjai, tehát jó esetben ismertek és könnyen leírhatók. Ha egy konkrét vonalon ismerjük u értékeit, ebből a két információból sok esetben u az egész tartományon meghatározható.

2.3.2. Feladat. Oldjuk meg a síkon az

$$\begin{aligned} x \cdot \partial_1 u + y \cdot \partial_2 u &= 0, \\ u\left(x,1\right) &= e^x \end{aligned}$$

feladatot!

Megoldás: A vonatkozó közönséges differenciálegyenlet $y'\left(x\right) = \frac{y(x)}{x}$. Ennek megoldásai az $y\left(x\right) = c \cdot x$ alakú függvények ($c \in \mathbb{R}$), tehát u-nak szinthalmazai az $y = cx$ egyenesek. Most tetszőleges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $x_0, y_0 \neq 0$ tulajdonságú pont rajta van egy ilyen egyenesen: $y_0 = cx_0$, ahonnan $c = \frac{y_0}{x_0}$. Tehát az illető egyenes $y = \frac{y_0}{x_0}x$, amelyiknek 1 ordinátájú pontja $\left(\frac{x_0}{y_0},1\right)$. Tudjuk, hogy $u\left(\frac{x_0}{y_0},1\right) = e^{\frac{x_0}{y_0}}$, s mivel (x_0, y_0) ugyanazon az egyenesen van, ezért $u\left(x_0, y_0\right) = e^{\frac{x_0}{y_0}}$. Általános változóra visszaírva (a tengelyektől eltekintve) $u\left(x, y\right) = e^{\frac{x}{y}}$. Ez a képlet természetes módon terjed ki az y tengelyre is, az x tengelyen azonban nem értelmezhető. Így a feladat megoldása a felső félsíkban értelmezett és ott $u\left(x, y\right) = e^{\frac{x}{y}}$.

2.3.3. Feladat. Oldjuk meg a síkon az

$$\begin{aligned} \partial_1 u + x \cdot \partial_2 u &= 0, \\ u\left(0, y\right) &= \varphi\left(y\right) \end{aligned}$$

feladatot ($\varphi \in C\left(\mathbb{R}\right)$ adott)!

Megoldás: A vonatkozó közönséges differenciálegyenlet $y'\left(x\right) = x$. Ennek megoldásai $y\left(x\right) = \frac{x^2}{2} + c$ alakúak, tehát az $y\left(x\right) = \frac{x^2}{2} + c$ parabolák mentén u állandó. Most tetszőleges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont rajta van egy ilyen parabolán: $y_0 = \frac{x_0^2}{2} + c$, ahonnan $c = y_0 - \frac{x_0^2}{2}$. Tehát az illető parabola $y = \frac{x^2}{2} + \left(y_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$. Ennek y tengelyre eső pontja $\left(0, y_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$. Tehát e pontban és (x_0, y_0)-ban u értéke ugyanaz. Így $u\left(x_0, y_0\right) = u\left(0, y_0 - \frac{x_0^2}{2}\right) = \varphi\left(y_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$. Általános változóra visszaírva, a megoldás

$$u\left(x, y\right) = \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right).$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

(Ha például minden y-ra $\varphi(y) = \sin y$, akkor $u(x,y) = \sin\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$ az egész síkon.)

2.3.2. Másodrendű lineáris parciális differenciáloperátorok és osztályozásuk

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő halmaz és minden $1 \leq k, j \leq n$ esetén legyen adott $a_{k,j}, b_k \in C(\Omega)$, amelyekről tegyük föl, hogy $a_{j,k} = a_{k,j}$ minden k, j mellett. Jelölje $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$Lu := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot \partial_k \partial_j u + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k u.$$

L neve: *másodrendű lineáris parciális differenciáloperátor*. Formálisan szokás ilyenkor írni, hogy

$$L = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot \partial_k \partial_j + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k,$$

és további

$$\partial := \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_n \end{bmatrix}$$

formalizmussal és

$$A(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\mathbf{x}) & & \cdots & a_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad , \quad b(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} b_1(\mathbf{x}) \\ b_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ b_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

választással még formálisabban

$$L = \langle A(\mathbf{x})\,\partial \mid \partial \rangle + \langle b(\mathbf{x}) \mid \partial \rangle,$$

ahol $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$ folytonos, szimmetrikus mátrix értékű függvény. Az L operátor $\langle A(\mathbf{x})\,\partial \mid \partial \rangle$ tagját (és ha nem okoz félreértést magát az $A(\cdot)$ mátrixfüggvényt is) az L operátor **főrészének** nevezzük.

2.3.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a fenti L differenciáloperátor az $\mathbf{x} \in \Omega$ pontban

- **elliptikus**, ha $A(\mathbf{x})$ (pozitív vagy negatív) definit;

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

- **hiperbolikus**, ha $A(\mathbf{x})$ indefinit;
- **tágabb értelemben parabolikus**, ha $A(\mathbf{x})$ (pozitív vagy negatív) szemidefinit, de nem definit;
- **parabolikus**, ha tágabb értelemben parabolikus és $\dim\ker A(\mathbf{x}) = 1$.

Ha minden $\mathbf{x} \in \Omega$ pontra L elliptikus (hiperbolikus, parabolikus) $\mathbf{x}$-ben, akkor azt is mondjuk, hogy L elliptikus (hiperbolikus, parabolikus) az Ω tartományon.

Ha adott $f, c \in C(\Omega)$, akkor az u ismeretlenű

$$Lu + c \cdot u = f$$

egyenletet *másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet*nek nevezzük. Az L operátorral párhuzamosan magát ezen egyenletet is rendre elliptikusnak (hiperbolikusnak, parabolikusnak) mondjuk (egy $\mathbf{x}$ pontban vagy Ω-n), ha L elliptikus (hiperbolikus, parabolikus).

2.3.5. Példa. Tetszőleges Ω tartományon a $\Delta u = f$ Poisson-egyenlet (és a $\Delta u = 0$ Laplace-egyenlet)elliptikus. (Itt minden $\mathbf{x}$-re $A(\mathbf{x}) = I$.)

2.3.6. Példa. A $\partial_0^2 u - \Delta u = f$ hullámegyenlet hiperbolikus.

2.3.7. Példa. A $\partial_0 u - \Delta u = f$ diffúziós egyenlet parabolikus.

2.3.8. Példa. A síkbeli $y \cdot \partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$ ún. Tricomi-egyenlet a felső nyílt félsíkban elliptikus, az alsó nyílt félsíkban hiperbolikus, míg az x tengelyen parabolikus. (A Tricomi-egyenletnek a hangsebességet túllépő gépek aerodinamikájában van szerepe.)

2.3.3. Állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenletek kanonikus alakra hozása

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő halmaz, továbbá minden $1 \leq k, j \leq n$ esetén $a_{k,j}, b_k \in \mathbb{R}$, amelyekről föltesszük, hogy $a_{j,k} = a_{k,j}$ minden k, j mellett. Jelölje $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$Lu := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot \partial_k \partial_j u + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k u.$$

2.3.9. Definíció. Az L leképezést állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciáloperátornak nevezzük. Az

$$Lu + c \cdot u = f$$

formulát (ahol $c \in C(\Omega)$) állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletnek nevezzük. Ennek megoldásain olyan $u \in C^2(\Omega)$ függvényeket értünk, amelyekre $Lu + c \cdot u = f$.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Az $a_{k,j}$ számokból az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixot, valamint a b_k számokból a $b \in \mathbb{R}^n$ vektort elkészítve természetesen

$$L = \langle A\partial \mid \partial\rangle + \langle b \mid \partial\rangle .$$

A célünk ehelyütt az, hogy e differenciáloperátort alkalmas $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lineáris transzformációval és $h \in \mathbb{R}^n$ vektorral négyzetösszeg ill. „megközelítőleg négyzetösszeg" alakra transzformáljuk, azaz ha u kielégíti az $Lu + cu = f$ egyenletet, akkor a $v(\mathbf{x}) := e^{\langle h|\mathbf{x}\rangle} \cdot u(B\mathbf{x})$ függvény valami egyszerűbbet elégítsen ki, lehetőleg Poisson-, hullám- vagy diffúziós egyenletet.

2.3.10. Megjegyzés. Gyakran hasznos formalizmus, ha a $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ differenciáloperátorokat közönséges számokra vonatkozó szimbólumokként kezeljük, és a

$$\partial := \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_n \end{bmatrix}$$

kifejezést is $\mathbb{R}^n$-beli vektornak tekintjük. Tudniillik ezzel a formalizmussal éppen teljesülnek a következők: tetszőleges $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ deriválható függvényre és b, $c \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$\frac{d}{dx} f(x \cdot b + c) = \Big(\ \langle b \mid \partial\rangle f \ \Big)(x \cdot b + c) .$$

Ha f kétszer is deriválható, akkor ezt még egyszer alkalmazva

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x \cdot b + c) = \Big(\ \langle b \mid \partial\rangle^2 f \ \Big)(x \cdot b + c) ,$$

ahol természetesen $\langle b \mid \partial\rangle^2 f = \sum\sum b_k b_j \cdot \partial_k \partial_j f$.

Legyen $Q_A(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\rangle$ az A mátrix kvadratikus alakja. Ha a ∂ kifejezést $\mathbb{R}^n$-beli vektornak tekintjük, akkor mondhatjuk, hogy éppen $Q_A(\partial) = \langle A\partial \mid \partial\rangle$ az A mátrix kvadratikus alakja. Tegyük föl, hogy bizonyos $b_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokkal $(1 \le k \le n)$

$$\langle A\partial \mid \partial\rangle = s_1 \cdot \langle b_1 \mid \partial\rangle^2 + s_2 \cdot \langle b_2 \mid \partial\rangle^2 + \cdots + s_n \cdot \langle b_n \mid \partial\rangle^2$$

– ez egyelőre tisztán a kvadratikus alakra vonatkozó egyenlőség –, ahol $s_1, \ldots, s_n \in \{-1,0,1\}$, továbbá a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vektorok lineárisan függetlenek. (Ez a felírás általában nem egyértelmű, viszont mindig létezik és konkrét esetekben egyszerűen számolható.) Jelölje

$$B := [b_1, b_2, \ldots, b_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

(persze B reguláris) és legyenek $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ a B mátrix sorai. Legyen $u \in C^2(\Omega)$. Ekkor

$$v := u \circ B$$

választással minden $1 \le p \le n$ esetén a fenti megjegyzést használva

$$\begin{aligned}
\partial_p^2 v(x_1,\dots,x_n) &= \left(\frac{d}{dx_p}\right)^2 u\left(B^{(1)}x, B^{(2)}x, \dots, B^{(n)}x\right) = \\
&= \left(\frac{d}{dx_p}\right)^2 u\left(b_{1,p}\cdot x_p + c_1, b_{2,p}\cdot x_p + c_2, \dots, b_{n,p}\cdot x_p + c_n\right) = \\
&= \left(\frac{d}{dx_p}\right)^2 u\left(x_p \cdot b_p + c\right) = \left(\langle b_p \mid \partial\rangle^2 u\right)(x_p\cdot b_p + c) = \\
&= \left(\langle b_p \mid \partial\rangle^2 u\right)\left(B^{(1)}x, B^{(2)}x, \dots, B^{(n)}x\right) = \\
&= \left(\langle b_p \mid \partial\rangle^2 u\right)(Bx),
\end{aligned}$$

alkalmas $c \in \mathbb{R}^n$ mellett. Így

$$\begin{aligned}
&\left(s_1\cdot\partial_1^2 v + s_2\cdot\partial_2^2 v + \dots + s_n\cdot\partial_n^2 v\right)(x_1,\dots,x_n) = \\
&= s_1\cdot\langle b_1 \mid \partial\rangle^2 u(Bx) + s_2\cdot\langle b_2 \mid \partial\rangle^2 u(Bx) + \dots + \\
&\qquad + s_n\cdot\langle b_n \mid \partial\rangle^2 u(Bx) = \langle A\partial \mid \partial\rangle\, u(Bx).
\end{aligned}$$

Ezzel azt kaptuk, hogy a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixszal vett $v = u\circ B$ transzformációval

$$\left(\langle A\partial \mid \partial\rangle\, u\right)\circ B = s_1\cdot\partial_1^2(u\circ B) + s_2\cdot\partial_2^2(u\circ B) + \dots + s_n\cdot\partial_n^2(u\circ B).$$

Tehát $\langle A\partial \mid \partial\rangle$ – mint formális kvadratikus alak – négyzetösszeggé transzformálása a differenciáloperátorok szintjén is pontos egyenlőséget takar, mégpedig az $u \to v = u\circ B$ függvénytranszformációnak megfelelő egyenlőséget. Az eredeti jelölésekkel így

$$\left(\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n a_{k,j}\cdot\partial_k\partial_j u\right)\circ B = s_1\cdot\partial_1^2(u\circ B) + s_2\cdot\partial_2^2(u\circ B) + \dots + s_n\cdot\partial_n^2(u\circ B),$$

ahol $s_1,\dots,s_n \in \{-1,0,1\}$.

2.3.11. Definíció. Az $L_0 : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$L_0 u := \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n a_{k,j}\cdot\partial_k\partial_j u$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

tisztán másodrendű lineáris parciális differenciáloperátort **kanonikus alakú**nak mondjuk, ha négyzetösszeg alakú, azaz mindegyik $a_{k,k} \in \{-1,0,1\}$, továbbá $k \neq j$ esetén $a_{k,j} = 0$.

A fenti $v \mapsto s_1 \cdot \partial_1^2 v + s_2 \cdot \partial_2^2 v + \cdots + s_n \cdot \partial_n^2 v$ differenciáloperátor kanonikus alakú. Így bebizonyítottuk a következő tételt:

2.3.12. Tétel. *Tetszőleges állandó együtthatós* $L_0 : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$L_0 u := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot \partial_k \partial_j u$$

tisztán másodrendű lineáris parciális differenciáloperátor alkalmas $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *reguláris lineáris transzformációval kanonikus alakra hozható, azaz van olyan kanonikus alakú tiszta másodrendű* L_1 *differenciáloperátor, hogy minden* $u \in \in C^2(\Omega)$ *mellett*

$$(L_0 u) \circ B = L_1 (u \circ B).$$

2.3.13. Példa. Transzformáljuk kanonikus alakra a háromdimenziós

$$\partial_1 \partial_2 u + \partial_2 \partial_3 u + \partial_1 \partial_3 u = 0$$

egyenletet!

Megoldás: Szorozzunk föl 4-gyel. Az így nyert egyenlet (formális) kvadratikus alakja

$$4(\partial_1 \partial_2 + \partial_2 \partial_3 + \partial_1 \partial_3) = (\partial_1 + \partial_2 + 2\partial_3)^2 - (\partial_1 - \partial_2)^2 - (2\partial_3)^2,$$

(ez indefinit, tehát az egyenlet hiperbolikus), továbbá a neki megfelelő lineáris transzformáció ekkor (oszlopait a zárójelekből olvassuk ki)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

amivel az áttranszformált függvény

$$v(x,y,z) := u(x+y, x-y, 2x+2z).$$

Ezzel

$$\partial_1^2 v = (\partial_1 + \partial_2 + 2\partial_3)^2 u(\cdots), \quad \partial_2^2 v = (\partial_1 - \partial_2)^2 u(\cdots),$$

$$\partial_3^2 v = (2\partial_3)^2 u(\cdots),$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

így

$$4\left(\partial_1\partial_2+\partial_2\partial_3+\partial_1\partial_3\right)u\left(\cdots\right)=$$
$$=\left(\partial_1+\partial_2+2\partial_3\right)^2u\left(\cdots\right)-\left(\partial_1-\partial_2\right)^2u\left(\cdots\right)-\left(2\partial_3\right)^2u\left(\cdots\right)=$$
$$=\partial_1^2v-\partial_2^2v-\partial_3^2v,$$

tehát

$$\partial_1^2v-\partial_2^2v-\partial_3^2v=4\left(\partial_1\partial_2+\partial_2\partial_3+\partial_1\partial_3\right)u\left(\cdots\right)=0.$$

Tehát az eredeti egyenlet kanonikus alakja

$$\partial_1^2v-\partial_2^2v-\partial_3^2v=0.$$

2.3.14. Példa. Adott $a>0,b,c\in\mathbb{R}$ és $f\in C\left(\mathbb{R}^2\right)$ esetén (diszkusszióval) transzformáljuk kanonikus alakra az

$$a\cdot\partial_1^2u+2b\cdot\partial_1\partial_2u+c\cdot\partial_2^2u=f$$

egyenletet!

Megoldás: A differenciáloperátor (formális) kvadratikus alakja

$$a\partial_1^2+2b\partial_1\partial_2+c\partial_2^2=\left(\sqrt{a}\partial_1+\frac{b}{\sqrt{a}}\partial_2\right)^2\pm\left(\sqrt{\left|c-\frac{b^2}{a}\right|}\partial_2\right)^2,$$

a neki megfelelő lineáris transzformáció ekkor $ac\neq b^2$ esetén

$$B=\begin{bmatrix}\sqrt{a} & 0\\ \frac{b}{\sqrt{a}} & \sqrt{\left|c-\frac{b^2}{a}\right|}\end{bmatrix}.$$

Ezzel az áttranszformált függvény

$$v\left(x,y\right):=u\left(\sqrt{a}x,\ \frac{b}{\sqrt{a}}x+\sqrt{\left|c-\frac{b^2}{a}\right|}y\right),$$

a transzformált operátor pedig

$$\partial_1^2v\pm\partial_2^2v=\left(\sqrt{a}\partial_1+\frac{b}{\sqrt{a}}\partial_2\right)^2u\left(\cdots\right)\pm\left(\sqrt{\left|c-\frac{b^2}{a}\right|}\partial_2\right)^2u\left(\cdots\right)=$$
$$=a\partial_1^2u\left(\cdots\right)+2b\partial_1\partial_2u\left(\cdots\right)+c\partial_2^2u\left(\cdots\right)=f\left(\cdots\right).$$

Ha $ac>b^2$, akkor itt $\pm$ helyén $+$ áll, tehát az egyenlet elliptikus és a transzformált egyenlet a $\Delta v=f\left(\cdots\right)$ Poisson-egyenlet.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Ha $ac < b^2$, akkor itt $\pm$ helyén $-$ áll, tehát az egyenlet hiperbolikus és a transzformált egyenlet a $\partial_1^2 v - \partial_2^2 v = f(\cdots)$ hullámegyenlet.

Hátravan az $ac = b^2$ eset. Ekkor a fenti transzformáció formálisan a $v(x,y) = u\left(\sqrt{a}x,\ \frac{b}{\sqrt{a}}x\right)$ definícióhoz vezetne $\partial_1^2 v = f(\cdots)$ transzformált egyenlettel, de ez a transzformáció nem reguláris. Viszont u második változójában $\frac{b}{\sqrt{a}}x$-hez y bármely függvényét hozzáadva a transzformált egyenlet nem szenved változást. Így pl. $v(x,y) = u\left(\sqrt{a}x,\ \frac{b}{\sqrt{a}}x + y\right)$ már jó transzformáció lesz, ezzel a transzformált egyenlet $\partial_1^2 v = f(\cdots)$ és persze az egyenlet parabolikus.

Olyan L differenciáloperátor kanonikus alakjáról is beszélünk, amely elsőrendű tagokat is tartalmaz; persze a kanonikus alak fogalma némiképp módosul. A főrésznek természetesen a fenti értelemben kell kanonikusnak lennie.

2.3.15. Definíció. Az állandó együtthatós $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$Lu := \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot \partial_k^2 u + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k u + c \cdot u$$

differenciáloperátort ($s_k \in \{-1,0,1\}$) **kanonikus alakú**nak mondjuk, ha minden $1 \le k \le n$ esetén $s_k \cdot b_k = 0$ (azaz az elsőrendű részben nem lehetnek olyan irányú parciális deriváltak, amelyek a másodrendű részben már szerepelnek).

Ha $f \in C(\Omega)$, akkor magát az $Lu = f$ egyenletet is **kanonikus alakú**nak nevezzük, ha L kanonikus alakú.

2.3.16. Tétel. *Tetszőleges állandó együtthatós $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,*

$$Lu := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot \partial_k \partial_j u + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k u + c \cdot u$$

másodrendű lineáris parciális differenciáloperátor alkalmas $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguláris lineáris transzformációval és $\varphi \in C^2\left(B^{-1}(\Omega)\right)$ átparaméterezéssel kanonikus alakra hozható, azaz megadható olyan kanonikus alakú másodrendű L_1 differenciáloperátor, hogy minden $u \in C^2(\Omega)$ mellett $v := \varphi \cdot (u \circ B)$ választással

$$L_1 v = \varphi \cdot (Lu \circ B).$$

Bizonyítás. Mivel a másodrendű főrész az előző tétel értelmében külön is kanonizálható, így feltehető, hogy az L operátor eleve

$$Lu = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot \partial_k^2 u + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k u + c \cdot u$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

alakú ($s_k \in \{-1,0,1\}$), ezzel persze $B = I$. Legyen most $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(\mathbf{x}) := e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{s_k \neq 0} b_k s_k \cdot x_k}.$$

Tetszőleges $u \in C^2(\Omega)$-ra $v := \varphi \cdot u$ választással elemi számolással

$$\begin{aligned}
\sum_{s_k \neq 0} s_k \cdot \partial_k^2 v + \sum_{s_k = 0} b_k \cdot \partial_k v &= \sum_{s_k \neq 0} s_k \cdot \partial_k^2 (\varphi \cdot u) + \sum_{s_k = 0} b_k \cdot \partial_k (\varphi \cdot u) = \\
&= \varphi \cdot \sum_{s_k \neq 0} s_k \cdot \left(\frac{b_k^2}{4} u + b_k s_k \cdot \partial_k u + \partial_k^2 u \right) + \varphi \cdot \sum_{s_k = 0} b_k \cdot \partial_k u = \\
&= \varphi \cdot \left(\sum_{s_k \neq 0} \left(\frac{b_k^2 s_k}{4} u + b_k \cdot \partial_k u + s_k \cdot \partial_k^2 u \right) + \sum_{s_k = 0} b_k \cdot \partial_k u \right) = \\
&= \varphi \cdot \left(\sum_{s_k \neq 0} s_k \cdot \partial_k^2 u + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k u + \left(\sum_{s_k \neq 0} \frac{b_k^2 s_k}{4} \right) \cdot u \right) = \\
&= \varphi \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} s_k \cdot \partial_k^2 u + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k u + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2 s_k}{4} \right) \cdot u \right).
\end{aligned}$$

Tehát

$$L_1 v := \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot \partial_k^2 v + \sum_{s_k = 0} b_k \cdot \partial_k v + \left(c - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2 s_k}{4} \right) \cdot v$$

definícióval minden $u \in C^2(\Omega)$-ra $v := \varphi \cdot u$ választással

$$L_1 v = \varphi \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} s_k \cdot \partial_k^2 u + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \partial_k u + c \cdot u \right) = \varphi \cdot Lu,$$

és persze L_1 kanonikus alakú. □

2.3.17. Megjegyzés. Az L differenciáloperátor A együtthatómátrixa egyértelműen meghatározza, hogy a kvadratikus alakjának fenti négyzetösszeggé transzformálásakor hány darab s_k egyenlő 1-gyel, hány darab 0-val és hány -1-gyel. Ezek a számok rendre megegyeznek az A pozitív sajátértékű sajátvektorai kifeszítette altér dimenziójával, $\ker A$ dimenziójával, valamint az A negatív sajátértékű sajátvektorai kifeszítette altér dimenziójával. Ezért **a transzformált L_1 differenciáloperátor ugyanolyan típusú, mint L** (ha hiperbolikus, akkor hiperbolikus, ha parabolikus, akkor parabolikus, ha elliptikus, akkor elliptikus).

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.3.18. Példa. Transzformáljuk kanonikus alakra a háromdimenziós

$$\partial_1\partial_2 u + \partial_2\partial_3 u + \partial_1\partial_3 u + \partial_1 u - \partial_2 u = 0$$

egyenletet!

Megoldás: Az egyik előző példa egyenlete ettől csak annyiban különbözött, hogy abban csak főrész szerepelt, elsőrendű tagok nem. Az ott kapott

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

és

$$v(x,y,z) := u(x+y, x-y, 2x+2z)$$

áttranszformálással most egyrészt ugyanúgy

$$4\left(\partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_3 + \partial_1\partial_3\right) u(\cdots) = \partial_1^2 v - \partial_2^2 v - \partial_3^2 v,$$

másrészt $\partial_2 v = (\partial_1 - \partial_2)\, u(\cdots) = \partial_1 u(\cdots) - \partial_2 u(\cdots)$, így

$$\partial_1^2 v - \partial_2^2 v - \partial_3^2 v + 4\partial_2 v = 4\left(\partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_3 + \partial_1\partial_3 + \partial_1 - \partial_2\right) u(\cdots) = 0.$$

A $\partial_1^2 v - \partial_2^2 v - \partial_3^2 v + 4\partial_2 v = 0$ egyenlet persze még nem kanonikus alakú (csak a főrésze). Most (követve a legutóbbi bizonyítás gondolatát) $V(x,y,z) := e^{-2y} \cdot v(x,y,z)$ választással a kanonikus alak

$$\partial_1^2 V - \partial_2^2 V - \partial_3^2 V + 4V = 0.$$

2.3.4. Függvényegyütthatós egyenletek kanonikus alakra hozása kétdimenzióban. Karakterisztikus egyenlet

Kétdimenzióban az eddigieknél némileg többet is tudunk mondani: a síkbeli függvényegyütthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek főrésze sok esetben ugyanazon kanonikus alakra hozhatók, mint az állandó együtthatósaké a legutóbbi feladatban. Az egzakt tárgyalás nagyban támaszkodik a közönséges differenciálegyenletek elméletére, ehelyütt eltekintünk tőle (ha egy-egy konkrét feladat során megtaláljuk a „megfelelő” transzformációs függvényt, utólag már úgyis könnyű leellenőrizni, hogy tényleg jó-e).

2.3.19. Definíció. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt összefüggő halmaz és $a, b, c, f \in$ $\in C(\Omega)$. Az

$$a(x,y) \cdot \partial_1^2 u + 2b(x,y) \cdot \partial_1\partial_2 u + c(x,y) \cdot \partial_2^2 u = f(x,y)$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

másodrendű differenciálegyenlethez tartozó **karakterisztikus egyenlet** az

$$a(x,y)\cdot(dy)^2-2b(x,y)\cdot dx\cdot dy+c(x,y)\cdot(dx)^2=0$$

formális differenciálegyenlet, amelyik az Ω halmaz minden pontjának alkalmas környezetében az

$$a(x,y)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}+c(x,y)=0$$

és az

$$a(x,y)-2b(x,y)\cdot\frac{dx}{dy}+c(x,y)\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0$$

egyenletek valamelyikét (legalább egyikét) jelenti.

(Figyeljünk a különböző előjelekre!)

A karakterisztikus egyenlet megoldásainak grafikonjait **karakterisztikus görbék**nek (vagy csak **karakterisztikák**nak) nevezzük. Általában olyan függvényekkel való transzformációkkal lehet kanonizálni a fenti alakú egyenletet, amelyek a karakterisztikák mentén állandók, azaz *amelyeknek a karakterisztikák a szinthalmazai*. Nevezetesen hiperbolikus és elliptikus esetben általában két független karakterisztika-sereg (szinthalmaz-rendszer) létezik, parabolikus esetben pedig egy. (Elliptikus esetben kénytelenek vagyunk komplex változóra térni, de amíg a transzformációs függvényeket meg nem találjuk, nyugodtan maradhatunk a heurisztika talaján.) Most ha u kielégíti a

$$a\cdot\partial_1^2u+2b\cdot\partial_1\partial_2u+c\cdot\partial_2^2u=f$$

egyenletet, $\varphi,\psi\in C^2(\Omega)$ pedig olyanok, hogy

$$\det\begin{bmatrix}\partial_1\varphi & \partial_2\varphi\\ \partial_1\psi & \partial_2\psi\end{bmatrix}\neq 0,$$

továbbá hiperbolikus ill. elliptikus esetben φ az egyik, ψ pedig a másik karakterisztika-sereg mentén konstans (parabolikus esetben elég csak φ), akkor

$$u=v\circ(\varphi,\psi)$$

esetén v kanonikus alakú parciális differenciálegyenletet fog kielégíteni.

2.3.20. Megjegyzés. Az $a\cdot\partial_1^2u+2b\cdot\partial_1\partial_2u+c\cdot\partial_2^2u=f$ egyenlet – (x,y)-tól függő – együtthatómátrixa

$$A(x,y)=\begin{bmatrix}a(x,y) & b(x,y)\\ b(x,y) & c(x,y)\end{bmatrix},$$

aminek definitsége nagyon közismerten egyszerűen ellenőrizhető. Jelesül a fenti egyenlet az (x,y) pontban pontosan akkor

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

- hiperbolikus, ha $a(x,y)\cdot c(x,y) < b^2(x,y)$;
- parabolikus, ha $a(x,y)\cdot c(x,y) = b^2(x,y)$ (feltéve, hogy $A \neq \mathbf{0}$);
- elliptikus, ha $a(x,y)\cdot c(x,y) > b^2(x,y)$.

2.3.21. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra és oldjuk is meg a síkon az

$$x^2\cdot\partial_1^2 u - y^2\cdot\partial_2^2 u = 0$$

egyenletet!

Megoldás: Az egyenlet a tengelyeken kívül hiperbolikus. A karakterisztikus egyenlet

$$x^2\cdot(dy)^2 - y^2\cdot(dx)^2 = 0,$$

tehát $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$, azaz $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{x}$. A $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ egyenlet megoldásai $y = cx$ alakúak, a $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ egyenletei $y = \frac{c}{x}$ alakúak. Tehát az egyik ágon az $\frac{y}{x} = c$ egyenletű síkbeli ponthalmazok lesznek a karakterisztikák, a másik ágon pedig az $xy = c$ egyenletűek.

Legyen (például) $\varphi(x,y) := \frac{y}{x}$ és $\psi(x,y) := xy$. Az

$$u(x,y) = v\left(\frac{y}{x}, xy\right)$$

egyenlőséget garantálhatjuk a

$$v(x,y) := u\left(\sqrt{\frac{y}{x}}, \sqrt{xy}\right)$$

definícióval. Persze $\partial_1 u = -\frac{y}{x^2}\partial_1 v(\cdots) + y\partial_2 v(\cdots)$, $\partial_2 u = \frac{1}{x}\partial_1 v(\cdots) + x\partial_2 v(\cdots)$, innen aztán

$$\begin{aligned}\partial_1^2 u &= \frac{2y}{x^3}\partial_1 v(\cdots) - \frac{y}{x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\partial_1^2 v(\cdots) + y\partial_1\partial_2 v(\cdots)\right) + \\ &\quad + y\left(-\frac{y}{x^2}\partial_1\partial_2 v(\cdots) + y\partial_2^2 v(\cdots)\right) = \\ &= \frac{2y}{x^3}\partial_1 v(\cdots) + \frac{y^2}{x^4}\partial_1^2 v(\cdots) - 2\frac{y^2}{x^2}\partial_1\partial_2 v(\cdots) + y^2\partial_2^2 v(\cdots)\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\partial_2^2 u &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\partial_1^2 v(\cdots) + x\partial_1\partial_2 v(\cdots)\right) + x\left(\frac{1}{x}\partial_1\partial_2 v(\cdots) + x\partial_2^2 v(\cdots)\right) = \\ &= \frac{1}{x^2}\partial_1^2 v(\cdots) + 2\partial_1\partial_2 v(\cdots) + x^2\partial_2^2 v(\cdots),\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ahonnan

$$0 = x^2\partial_1^2 u - y^2\partial_1^2 u = \frac{2y}{x}\partial_1 v\left(\cdots\right) - 4y^2\partial_1\partial_2 v\left(\cdots\right),$$

ahonnan

$$\partial_1\partial_2 v\left(\frac{y}{x}, xy\right) - \frac{1}{2xy}\partial_1 v\left(\frac{y}{x}, xy\right) = 0,$$

változótranszformációval

$$\partial_1\partial_2 v\left(x, y\right) - \frac{1}{2y}\partial_1 v\left(x, y\right) = 0.$$

Ez ugyan még nem kanonikus alak, de fő részében már állandó együtthatós, sőt a megoldás kiszámolásához megfelelőbb is a kanonikus alaknál. Ennek kvadratikus alakja $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, így a kanonikus alak $w\left(x, y\right) := v\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$ transzformációval

$$\partial_1^2 w - \partial_2^2 w + \frac{2}{x-y}\left(\partial_1 w + \partial_2 w\right) = 0.$$

Visszatérve a $\partial_1\partial_2 v - \frac{1}{2y}\partial_1 v = 0$ egyenlet megoldásához: rögzített x-re $h\left(y\right) := \partial_1 v\left(x, y\right)$ választással

$$h'\left(y\right) = \frac{1}{2y}\cdot h\left(y\right),$$

ahonnan $\partial_1 v\left(x, y\right) = h\left(y\right) = c\left(x\right)\cdot\sqrt{|y|}$ $\left(c \in C^1\left(\mathbb{R}\right)\right)$. Innen integrálással

$$v\left(x, y\right) = C_1\left(x\right)\cdot\sqrt{|y|} + C_2\left(y\right),$$

ahol $C_1, C_2 \in C^2\left(\mathbb{R}\right)$. Ebből az eredeti egyenlet megoldása

$$u\left(x, y\right) = v\left(\frac{y}{x}, xy\right) = C_1\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\sqrt{|xy|} + C_2\left(xy\right).$$

2.3.22. Feladat. Transzformáljuk kanonikus alakra a síkon értelmezett

$$\partial_1^2 u - 2x\cdot\partial_1\partial_2 u + x^2\cdot\partial_2^2 u = 0$$

egyenletet!

Megoldás: Az egyenlet parabolikus. A karakterisztikus egyenlet

$$\left(dy\right)^2 + 2x\cdot dx\cdot dy + x^2\cdot\left(dx\right)^2 = 0,$$

azaz $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\cdot\frac{dy}{dx} + x^2 = 0$, tehát $\left(\frac{dy}{dx} + x\right)^2 = 0$, végül is $\frac{dy}{dx} = -x$. Innen a karakterisztikák az $y = -\frac{x^2}{2} + c$ egyenletű parabolák. Legyen hát (például)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$\varphi(x,y) := y + \frac{x^2}{2}$, ψ pedig tetszőleges olyan, hogy φ-vel együtt teljesíti a regularitást, mondjuk $\psi(x,y) := x$. Ezzel vehetjük az

$$u(x,y) = v\left(y + \frac{x^2}{2}, x\right)$$

transzformációt, persze

$$v(x,y) := u\left(y, x - \frac{y^2}{2}\right)$$

definícióval. Ezzel

$$\partial_1 v = \partial_2 u(\cdots) \quad \text{és} \quad \partial_2 v = \partial_1 u(\cdots) - y\partial_2 u(\cdots),$$

továbbá

$$\partial_2^2 v = \partial_1^2 u(\cdots) - 2y\partial_1\partial_2 u(\cdots) + y^2\partial_2^2 u(\cdots) - \partial_2 u(\cdots),$$

innen az u természetes változóira visszaírva

$$\partial_2^2 v\left(y + \frac{x^2}{2}, x\right) = \partial_1^2 u(x,y) - 2x\partial_1\partial_2 u(x,y) + x^2\partial_2^2 u(x,y) - \partial_2 u(x,y) =$$
$$= 0 - \partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v\left(y + \frac{x^2}{2}, x\right),$$

innen pedig (változó nélkül)

$$\partial_1 v + \partial_2^2 v = 0$$

a kanonikus alak.

2.3.23. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra a síkbeli

$$\left(1+x^2\right)\cdot\partial_1^2 u + \left(1+y^2\right)\cdot\partial_2^2 u + x\cdot\partial_1 u + y\cdot\partial_2 u = 0$$

egyenletet!

Megoldás: Az egyenlet természetesen elliptikus. A karakterisztikus egyenlet

$$\left(1+x^2\right)(dy)^2 + \left(1+y^2\right)(dx)^2 = 0,$$

azaz $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$. Ezt csak a komplex függvények körében tudjuk megoldani, de a transzformációs függvényhez nekünk csak ötlet kell, és csak a kanonikus alak fennálltát kell majd igazolnunk. Heurisztikusan pl. $\frac{dy}{dx} = i\cdot\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}$, ahonnan $\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = i\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Ezt formálisan kiintegrálva az

$$\operatorname{arsh} x := \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

szabály alapján $\operatorname{arsh} y = i \cdot \operatorname{arsh} x + c$, tehát a „kompex karakterisztikák" egyenletei $\operatorname{arsh} y - i \cdot \operatorname{arsh} x = c$, ahol persze x és y is kompex változósak, sőt c is komplex. Most

$$\varphi(x,y) = \operatorname{arsh} x \text{ és } \psi(x,y) = \operatorname{arsh} y \quad \text{választással} \quad \varphi - i \cdot \psi$$

valóban konstans e karaterisztikák mellett, tehát ha „minden" komplex, akkor a transzformációs függvény egyik koordiátájának meg is felel. A $\frac{dy}{dx} = -i \cdot \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}$ egyenletből ugyanakkor azt fogjuk kapni, hogy (ugyanezen φ-vel és ψ-vel) a $\varphi + i \cdot \psi$ függvény is jó. Innen $\varphi + i \cdot \psi$ és $\varphi - i \cdot \psi$ függetlensége biztosítani fogja (ha igazat írtunk fentebb) az

$$u = v \circ (\varphi + i \cdot \psi, \varphi - i \cdot \psi)$$

transzformáció kanonizálását. Ha ezt $\mathbb{C}^2$ bármely *lineáris* transzformációjával komponáljuk össze, az az egyenlet állandó együtthatós voltát már nem befolyásolja. Viszont (φ, ψ) lineáris transzformációval kapható $(\varphi + i \cdot \psi, \varphi - i \cdot \psi)$-ből. Eszerint (φ, ψ) is megfelelő transzformáció lesz a kanonizáláshoz, és itt már valós kereteken belül maradhatunk. Itt a heurisztika vége, legyen hát (az eredeti valós keretek között)

$\varphi(x,y) := \operatorname{arsh} x$ és $\psi(x,y) := \operatorname{arsh} y$, tehát

$$u(x,y) = v(\operatorname{arsh} x, \operatorname{arsh} y),$$

azaz

$$v(x,y) := u(\operatorname{sh} x, \operatorname{sh} y)$$

(ne feledjük, hogy $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ és $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$). Ezzel

$\partial_1 v = \operatorname{ch} x \cdot \partial_1 u(\cdots)$ és $\partial_2 v = \operatorname{ch} y \cdot \partial_2 u(\cdots)$, így aztán

$\partial_1^2 v = \operatorname{sh} x \cdot \partial_1 u(\cdots) + \operatorname{ch}^2 x \cdot \partial_1^2 u(\cdots)$ és

$\partial_2^2 v = \operatorname{sh} y \cdot \partial_2 u(\cdots) + \operatorname{ch}^2 y \cdot \partial_2^2 u(\cdots)$, ahonnan u változóira térve

$$\partial_1^2 v(\operatorname{arsh} x, \operatorname{arsh} y) + \partial_1^2 v(\operatorname{arsh} x, \operatorname{arsh} y) =$$

$$= x\partial_1 u(x,y) + \left(1+x^2\right)\partial_1^2 u(x,y) + y\partial_2 u(x,y) + \left(1+y^2\right)\partial_2^2 u(x,y) = 0,$$

tehát a

$$\Delta v = 0$$

Laplace-egyenlet a kanonikus alak.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.3.5. Állandó együtthatós másodrendű egyenletek alapmegoldása

Heurisztika: Közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismertek az

$$u'' + a \cdot u' + b \cdot u = 0$$

egyenletek megoldásai. Jelölje v az egyenlet azon megoldását, amelyre $v(0) = 0$ és $v'(0) = 1$. Ennek segítségével tetszőleges $f \in C(\mathbb{R})$ esetén elő tudjuk állítani az

$$u'' + a \cdot u' + b \cdot u = f$$

egyenlet egy megoldását (jelesül az $u(0) = u'(0) = 0$ feltételű megoldást), mégpedig az

$$u(x) = \int_0^x v(x-y) \cdot f(y)\, dy$$

formulával (az egyenlet kielégítése a Leibniz-formulával ellenőrizhető). Ha f egy küszöbtől balra azonosan 0, akkor az

$$u(x) = \int_{-\infty}^x v(x-y) \cdot f(y)\, dy$$

formula is megoldást ad meg, nevezetesen azon megoldást, amelyik szintén egy küszöbtől balra nulla. Ez utóbbit egy kicsit másképpen fogalmazva: $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$E(x) := \begin{cases} v(x), \text{ ha } x \geq 0, \\ 0, \quad \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvénnyel bármely – egy küszöbtől balra eltűnő – f-re a fenti inhomogén egyenlet megoldása

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} E(x-y) \cdot f(y)\, dy$$

(ezt úgy is hívják, hogy az E és f *konvolúció*ja).

2.3.24. Definíció. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő halmaz és minden $1 \leq \leq k, j \leq n$ esetén $a_{k,j}, b_k, c \in \mathbb{R}$, amelyekre $a_{j,k} = a_{k,j}$ minden k, j mellett; továbbá $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$Lu := \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{k,j} \cdot \partial_k \partial_j u + \sum_{k=1}^n b_k \cdot \partial_k u + c \cdot u$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciáloperátor. Egy $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, lokálisan integrálható függvényt az L operátor **alapmegoldás**ának mondunk, ha minden kompakt tartójú $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényre az

$$u(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} E(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

függvény kielégíti az $Lu = f$ egyenletet.

Hullámegyenletek alapmegoldása

1. *A legegyszerűbb hullámegyenletek* c. szakaszban a D'Alembert-formula utáni következményben szerepelt, hogy $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$E(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ ha } x \geq |y| \\ 0 \text{ ha } x < |y| \end{cases}$$

definícióval tetszőleges $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ esetén az

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} E(x-t, y-r) \cdot f(t,r)\, d(t,r)$$

függvény kielégíti a $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$ hullámegyenletet. Ha most $f \in \in C^1(\mathbb{R}^2)$ kompakt tartójú függvény, akkor alkalmas függetlenváltozó-transzformációval tartója $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-be kerül, másrészt u-ra ugyanez a transzformáció nem sérti az egyenlet kielégítését. Tehát a fenti u tetszőleges kompakt tartójú $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mellett is kielégíti az egyenletet. Ezért E alapmegoldása az egydimenziós $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = f$ hullámegyenletnek ($\partial_1^2 u - \partial_2^2 u$ hullámoperátornak).

2. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy a kétdimenziós

$$\partial_0^2 u(t,x,y) - \left(\partial_1^2 u(t,x,y) + \partial_2^2 u(t,x,y)\right) = f(t,x,y)$$

hullámegyenlet alapmegoldása $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$E(t,x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2-x^2-y^2}}, \text{ ha } t > \sqrt{x^2+y^2}, \\ 0, \qquad\quad \text{ha } t \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

függvény.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A diffúziós egyenlet alapmegoldása

A standard diffúziós formula (*Standard diffúziós Cauchy-feladat megoldása n dimenzióban* c. szakaszban) utáni megjegyzés alapján az n-dimenziós

$$\partial_0 u\,(t,\mathbf{x}) - \Delta u\,(t,\mathbf{x}) = f\,(t,\mathbf{x})$$

diffúziós egyenlet alapmegoldása az $E : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$E\,(t,\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}\cdot e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}}, & \text{ha } t>0,\\ 0, & \text{ha } t\le 0 \end{cases}$$

függvény.

A síkbeli Poisson-egyenlet alapmegoldása

Ez az előzőkhöz képest több munkát igényel.

Integrálás a körvonalon. Formulák ♦ Tekintsük $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ és $r>0$ esetén

$$S\,((a,b)\,,r) := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2 = r\right\},$$
$$B\,((a,b)\,,r) := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2 \le r\right\}$$

(a,b) közepű, r sugarú körvonalat, illetve zárt körlapot. Speciálisan $S := S\,((0{,}0)\,,1)$ és $B := B\,((0{,}0)\,,1)$, innen $S\,((0{,}0)\,,r) = r\cdot S$ és $B\,((0{,}0)\,,r) = r\cdot B$.

Az $S\,((a,b)\,,r)$ körvonalon értelmezett $f:\mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvénynek a $S\,((a,b)\,,r)$ körvonalon vett *vonalintegrál*ja

$$\int\limits_{S((a,b),r)} f\,d\nu := \int\limits_0^{2\pi} f\,(a+r\cos t, b+r\sin t)\cdot r\,dt.$$

2.3.25. Állítás (peremformula)**.** *Minden $f\in C^1\,(B\,((a,b)\,,r))$ esetén*

$$\int\limits_{B((a,b),r)} \partial_1 f = \int\limits_{S((a,b),r)} \frac{x}{r}\cdot f\,(x,y)\;d\nu\,(x,y)\,,$$
$$\int\limits_{B((a,b),r)} \partial_2 f = \int\limits_{S((a,b),r)} \frac{y}{r}\cdot f\,(x,y)\;d\nu\,(x,y)\,.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Feltehető, hogy $(a,b)=(0,0)$. A Newton–Leibniz-formulát alkalmazva minden $y\in[-r,r]$ mellett

$$\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\partial_1 f\,(\cdot,y)=\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}(f\,(\cdot,y))'=f\left(\sqrt{r^2-y^2},y\right)-f\left(-\sqrt{r^2-y^2},y\right),$$

ahonnan a síkbeli Lebesgue-mérték definíciója és a Fubini-tétel alapján, majd helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\int\limits_{r\cdot B}\partial_1 f &= \int\limits_{-r}^{r}\left(\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\partial_1 f\,(x,y)\;dx\right)dy=\\
&=\int\limits_{-r}^{r} f\left(\sqrt{r^2-y^2},y\right)-f\left(-\sqrt{r^2-y^2},y\right)\;dy=\\
&=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\,(r\cos t,r\sin t)\cdot r\cos t\,dt-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\,(r\cos t,r\sin t)\cdot r\cos t\,dt=\\
&=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\,(r\cos t,r\sin t)\cdot r\cos t\,dt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\,(r\cos t,r\sin t)\cdot r\cos t\,dt=\\
&=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\,(r\cos t,r\sin t)\cdot r\cos t\,dt=\int\limits_{0}^{2\pi} f\,(r\cos t,r\sin t)\cdot r\cos t\,dt=\\
&=\frac{1}{r}\int\limits_{0}^{2\pi} f\,(r\cos t,r\sin t)\cdot r\cos t\cdot r\,dt=\frac{1}{r}\int\limits_{r\cdot S} f\,(x,y)\cdot x\,d\nu\,(x,y)\,;
\end{aligned}$$

a másik integrál hasonlóan adódik. □

2.3.26. Állítás (komplementer peremformula)**.** *Minden* $f\in C^1\big(\mathbb{R}^2\backslash\{(a,b)\}\big)$ *kompakt tartójú függvényre*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\backslash B((a,b),r)}\partial_1 f=-\int\limits_{S((a,b),r)}\frac{x}{r}\cdot f\,(x,y)\;d\nu\,(x,y)\,,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\backslash B((a,b),r)}\partial_2 f=-\int\limits_{S((a,b),r)}\frac{y}{r}\cdot f\,(x,y)\;d\nu\,(x,y)\,.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Legyen $h \in C^1(\mathbb{R})$ olyan (egyváltozós) függvény, amely $\left(-\frac{r^2}{2}, \frac{r^2}{2}\right)$-n kívül azonosan 1, viszont 0 egy környezetében azonosan 0 (egyszerű konstrukció). Triviális, hogy az

$$f_0(x,y) := h\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right) \cdot f(x,y)$$

függvény folytonosan deriválható az egész síkon. Legyen $R > 0$ olyan, hogy $B((a,b),R)$ határán és azon kívül f már azonosan 0. Írjuk föl a peremformulákat f_0-ra a $B((a,b),R)$ és a $B((a,b),r)$ körön; majd a megfelelő egyenlőségeket vonjuk ki egymásból. Mivel $S((a,b),R)$-en f_0 azonosan 0, ezért a peremformula miatt $\int\limits_{B((a,b),R)} \partial_1 f_0 = 0$. Ugyanakkor

$$\int\limits_{B((a,b),r)} \partial_1 f_0 = \frac{1}{r} \cdot \int\limits_{S((a,b),r)} x \cdot f_0(x,y)\, d\nu(x,y) = \frac{1}{r} \cdot \int\limits_{S((a,b),r)} x \cdot f(x,y)\, d\nu(x,y),$$

így

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} \partial_1 f = \int\limits_{B((a,b),R)\setminus B((a,b),r)} \partial_1 f_0 = \int\limits_{B((a,b),R)} \partial_1 f_0 - \int\limits_{B((a,b),r)} \partial_1 f_0 =$$
$$= 0 - \int\limits_{S((a,b),r)} \frac{x}{r} \cdot f(x,y)\, d\nu(x,y).$$

A másik egyenlőség ugyanígy adódik. □

2.3.27. Állítás (Green-formula)**.** *Legyenek $u, v \in C^2\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}\right)$, továbbá v kompakt tartójú. Ekkor minden $r > 0$ esetén*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} (v\Delta u - u\Delta v) = \int\limits_{S((a,b),r)} u \cdot \left(\frac{x}{r}\partial_1 v + \frac{y}{r}\partial_2 v\right) - v \cdot \left(\frac{x}{r}\partial_1 u + \frac{y}{r}\partial_2 u\right) d\nu.$$

Bizonyítás. A komplementer peremformulát alkalmazva

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} v\Delta u =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} v\left(\partial_1^2 u + \partial_2^2 u\right) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} \left[\partial_1\left(v\partial_1 u\right) - \partial_1 v \cdot \partial_1 u\right] + \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} \left[\partial_2\left(v\partial_2 u\right) - \partial_2 v \cdot \partial_2 u\right] =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= - \int\limits_{S((a,b),r)} \frac{x}{r} \cdot v \partial_1 u \, d\nu - \int\limits_{S((a,b),r)} \frac{y}{r} \cdot v \partial_2 u \, d\nu - \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} \langle v'(\cdot) \mid u'(\cdot) \rangle .$$

Szerepcserével

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} u \Delta v =$$
$$= -\frac{1}{r} \int\limits_{S((a,b),r)} x \cdot u \partial_1 v \, d\nu - \frac{1}{r} \int\limits_{S((a,b),r)} y \cdot u \partial_2 v \, d\nu - \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} \langle u'(\cdot) \mid v'(\cdot) \rangle ,$$

ahonnan kivonással, egyszerűsítéssel és összevonással

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus B((a,b),r)} (v \Delta u - u \Delta v) = \int\limits_{S((a,b),r)} u \cdot \Big(\frac{x}{r} \partial_1 v + \frac{y}{r} \partial_2 v \Big) - v \cdot \Big(\frac{x}{r} \partial_1 u + \frac{y}{r} \partial_2 u \Big) \, d\nu.$$

□

Jelölje $E : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$E(x,y) := \frac{1}{4\pi} \ln \left(x^2 + y^2 \right).$$

Gondoljuk meg, hogy minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén

$$\Delta E(x,y) = 0.$$

2.3.28. Állítás. *Tetszőleges $u \in C(r \cdot B)$ függvényre*

$$\int\limits_{r \cdot S} u \cdot \Big(\frac{x}{r} \cdot \partial_1 E + \frac{y}{r} \cdot \partial_2 E \Big) \, d\nu = \frac{1}{2r\pi} \int\limits_{r \cdot S} u(x,y) \, d\nu(x,y).$$

Bizonyítás. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén

$$\partial_1 E(x,y) = \frac{x}{2\pi (x^2 + y^2)}, \qquad \partial_2 E(x,y) = \frac{y}{2\pi (x^2 + y^2)}.$$

Innen

$$\int\limits_{r \cdot S} u \cdot \Big(\frac{x}{r} \partial_1 E + \frac{y}{r} \partial_2 E \Big) \, d\nu = \frac{1}{r} \int\limits_{r \cdot S} \frac{u(x,y) \cdot \left(x^2 + y^2 \right)}{2\pi (x^2 + y^2)} \, d\nu(x,y) =$$
$$= \frac{1}{2r\pi} \int\limits_{r \cdot S} u(x,y) \, d\nu(x,y).$$

□

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.3.29. Következmény. *Tetszőleges $r_0 > 0$ és $u \in C(r_0 \cdot B)$ esetén*

$$\lim_{r\to 0+} \int\limits_{r\cdot S} u \cdot \left(\frac{x}{r}\partial_1 E + \frac{y}{r}\partial_2 E\right) d\nu = u(0{,}0).$$

Bizonyítás. Minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $0 < \delta \le r_0$, hogy $\|(x,y)\| \le \delta$ esetén

$$u(0{,}0) - \varepsilon \le u(x,y) \le u(0{,}0) + \varepsilon.$$

Így minden $0 < r \le \delta$ számra triviális meggondolással

$$u(0{,}0) - \varepsilon \le \frac{1}{2r\pi} \int\limits_{r\cdot S} u(x,y)\; d\nu(x,y) \le u(0{,}0) + \varepsilon,$$

azaz a fenti állításból minden $0 < r \le \delta$ esetén

$$u(0{,}0) - \varepsilon \le \int\limits_{r\cdot S} \left(\frac{x}{r}\cdot u\partial_1 E + \frac{y}{r}\cdot u\partial_2 E\right) d\nu \le u(0{,}0) + \varepsilon,$$

ezzel éppen a kívánt limeszrelációt mutattuk meg. □

2.3.30. Állítás. *Tetszőleges $r_0 > 0$ és $u \in C^1(r_0 \cdot B)$ esetén*

$$\lim_{r\to 0+} \int\limits_{r\cdot S} E \cdot \left(\frac{x}{r}\partial_1 u + \frac{y}{r}\partial_2 u\right) d\nu = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $0 < r \le 1 \wedge r_0$. Ekkor az $r \cdot S$ körön E állandó előjelű (negatív), így

$$\left|\int\limits_{r\cdot S} E \cdot \left(\frac{x}{r}\partial_1 u + \frac{y}{r}\partial_2 u\right) d\nu\right| \le \int\limits_{r\cdot S} (-E) \cdot \left|\frac{x}{r}\partial_1 u + \frac{y}{r}\partial_2 u\right| d\nu \le$$

$$\le -2 \max_{r_0\cdot B} \|u'(\cdot)\| \cdot \int\limits_{r\cdot S} E\, d\nu = -2 \max_{r_0\cdot B} \|u'(\cdot)\| \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \ln r^2 \cdot r\, dt =$$

$$= 2 \max_{r_0\cdot B} \|u'(\cdot)\| \cdot |r \cdot \ln r| \to 0,$$

midőn $r \to 0+$. □

Az E függvény alapmegoldás volta ♦

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.3.31. Megjegyzés. Tetszőleges kompakt tartójú $f \in C\left(\mathbb{R}^2\right)$ függvényre minden $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left|\ln\left((x_0-x)^2+(y_0-y)^2\right)\cdot f(x,y)\right| \, d(x,y) < +\infty,$$

azaz az $(x,y) \mapsto \ln\left((x_0-x)^2+(y_0-y)^2\right)\cdot f(x,y)$ függvény abszolút (Lebesgue-) integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $(x_0, y_0) = (0,0)$. f kompakt tartójú volta miatt elegendő egy korlátos tartományra szorítkozni. Az integrandus az origótól eltekintve folytonos, így tetszőleges origó közepű körlap komplementumán (a szóban forgó tartományon belül) korlátos. Elegendő hát megmutatnunk, hogy $\ln\left(x^2+y^2\right)$ az origó egy környezetében abszolút integrálható. Lássuk:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \, dy\,dx = -4\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \ln\left(x^2+y^2\right) \, dy\,dx =$$

$$= -4\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \left(2\ln x + \ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\right) dy\,dx \leq$$

$$\leq -4\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \ln x \, dx,$$

ami véges. □

Az alábbiakban $w = w(x_0, y_0, x, y)$ esetén jelölje formálisan

$$\Delta_{x_0,y_0} w(x_0,y_0,x,y) := \Delta\left((x_0,y_0) \mapsto w(x_0,y_0,x,y)\right).$$

2.3.32. Tétel. *Legyen $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ kompakt tartójú függvény. Jelölje $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$u(x_0,y_0) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} E(x_0-x, y_0-y)\cdot f(x,y) \, d(x,y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left((x_0-x)^2+(y_0-y)^2\right)\cdot f(x,y) \, d(x,y).$$

Ekkor $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, továbbá minden (x_0, y_0)-ra

$$\Delta u(x_0,y_0) = f(x_0,y_0).$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. $(x,y)\mapsto(x_0-x,y_0-y)$ helyettesítéssel triviálisan

$$u(x_0,y_0)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}E(x,y)\cdot f(x_0-x,y_0-y)\;d(x,y).$$

A $(\tau,\xi,x,y)\mapsto 1+|E(x,y)|$ egy alkalmas konstansszorosa majorálja a $(\tau,\xi,x,y)\mapsto E(x,y)\cdot f(\tau-x,\xi-y)$ függvényt a$(\tau,\xi)=(x_0,y_0)$ pont egy környezetében, majd ugyanez f helyett f parciális deriváltjaira is igaz. Ezért az integráljel mögé x_0 és y_0 szerint is be lehet deriválni, mégpedig kétszer is, vegyesen is. Az így kapott függvények persze folytonosak (x_0,y_0)-ban. Emiatt egyrészt valóban $u\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, másrészt (bederiválással)

$$\begin{aligned}\Delta u(x_0,y_0)&=\int\limits_{\mathbb{R}^2}E(x,y)\cdot\Delta_{x_0,y_0}f(x_0-x,y_0-y)\;d(x,y)=\\&=\int\limits_{\mathbb{R}^2}E(x,y)\cdot(\Delta f)(x_0-x,y_0-y)\;d(x,y)=\\&=\lim_{r\to0+}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus r\cdot B}E(x,y)\cdot(\Delta f)(x_0-x,y_0-y)\;d(x,y)\right)=\end{aligned}$$

($g(x,y):=f(x_0-x,y_0-y)$ jelöléssel)

$$=\lim_{r\to0+}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus r\cdot B}E(x,y)\cdot(\Delta g)(x,y)\;d(x,y)\right)=$$

($\Delta E=0$ miatt)

$$=\lim_{r\to0+}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus r\cdot B}(E\cdot\Delta g-\Delta E\cdot g)\right)=$$

(a Green-formula miatt)

$$\begin{aligned}&=\lim_{r\to0+}\left(\int\limits_{r\cdot S}g\cdot\left(\frac{x}{r}\partial_1E+\frac{y}{r}\partial_2E\right)-E\cdot\left(\frac{x}{r}\partial_1g+\frac{y}{r}\partial_2g\right)\;d\nu\right)=\\&=\lim_{r\to0+}\int\limits_{r\cdot S}g\cdot\left(\frac{x}{r}\partial_1E+\frac{y}{r}\partial_2E\right)\;d\nu-\lim_{r\to0+}\int\limits_{r\cdot S}E\cdot\left(\frac{x}{r}\partial_1g+\frac{y}{r}\partial_2g\right)\;d\nu=\end{aligned}$$

(egy fentebbi következmény és állítás alapján)

$$=g(0,0)-0=g(0,0)=f(x_0,y_0).\qquad\square$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

2.3.33. Következmény. *Az* $E : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$E(x,y) := \frac{1}{4\pi} \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

függvény alapmegoldása a kétdimenziós $\Delta u = f$ *Poisson-egyenletnek.*

2.3.34. Megjegyzés. A fenti alapmegoldásból (az előző tételben) származtatott u megoldás a $\Delta u = f$ Poisson-egyenletnek az egész síkon sosem lehet egyértelmű megoldása. Ugyanis tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ mellett $v(x,y) := u(x,y) + \alpha \cdot \left(x^2 - y^2\right)$ is nyilvánvalóan megoldás.

Az n-dimenziós Poisson-egyenlet alapmegoldása $(n \geq 3)$

Bizonyítás nélkül közöljük, hogy az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett $(n \geq 3)$

$$\Delta u = f$$

Poisson-egyenlet alapmegoldása az $E : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$E(\mathbf{x}) := -\frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}}$$

függvény, ahol ω_n az $\mathbb{R}^n$-beli egységgömb felületének felszíne:

$$\omega_{2n} = 2\frac{\pi^n}{(n-1)!} \qquad \omega_{2n+1} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{(2n-1)!!}.$$

Poisson-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat a körön ♦ A síkbeli Poisson-egyenlet fentebb levezetett alapmegoldása és a *Néhány nagyon elemi Laplace-, ill. Poisson-egyenlet* c. szakaszban szerepeltek alapján a körön értelmezett Poisson-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladatra is tudunk egzisztencia- (és persze unicitás-) tételt bizonyítani.

2.3.35. Tétel. *Legyen* f *egy a* B *zárt körlapot tartalmazó nyílt halmazon értelmezett kétszer folytonosan deriválható függvény, továbbá* $\varphi \in C(S)$*. Ekkor létezik egy és csak egy, a kör belsejében kétszer folytonosan deriválható* $u \in C(B)$ *megoldása a*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) & \left(x^2 + y^2 < 1\right), \\ u(x,y) = \varphi(x,y) & \left(x^2 + y^2 = 1\right) \end{cases}$$

Dirichlet-feladatnak, nevezetesen $x^2 + y^2 = 1$ *esetén*

$$u(x,y) = \varphi(x,y),$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$x^2+y^2<1$ *esetén pedig*

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_B \ln\left((x-\xi)^2+(y-\tau)^2\right) f(\xi,\tau)\, d(\xi,\tau)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(1-x^2-y^2\right)\varphi(\cos t,\sin t)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_B \ln\left((\cos t-\xi)^2+(\sin t-\tau)^2\right)\cdot f(\xi,\tau)\, d(\xi,\tau)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt.$$

Bizonyítás. f kétszer folytonosan deriválható egy origó közepű $\alpha>1$ sugarú körön. Legyen $h\in C^2(\mathbb{R})$ olyan (egyváltozós) függvény, amely [0,1]-en azonosan 1, az $\left[\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2,+\infty\right)$-en viszont azonosan 0. Ekkor az

$$f_0(x,y):=\begin{cases} h\left(x^2+y^2\right)\cdot f(x,y), & \text{ha } (x,y)\in\alpha\cdot B,\\ 0, & \text{ha } (x,y)\notin\alpha\cdot B\end{cases}$$

függvény kompakt tartójú és kétszer folytonosan deriválható az egész síkon. Így az alapmegoldás segítségével előállíthatjuk a síkon a $\Delta u=f_0$ egyenlet $u_0\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ megoldását:

$$u_0(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln\left((x-\xi)^2+(y-\tau)^2\right)\cdot f_0(\xi,\tau)\, d(\xi,\tau).$$

Speciálisan ez a kör peremén is igaz. Ekkor a körvonalon

$$\varphi_1(x,y):=\varphi(x,y)-u_0(x,y)$$

definícióval $\varphi_1\in C(S)$, így a korábban tárgyalt Poisson-formula alapján a kör belsejében

$$u_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(1-x^2-y^2\right)\cdot\varphi_1(\cos t,\sin t)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt,$$

és u_1 folytonosan terjed ki a körvonalra, mégpedig φ_1-ként. Mivel u_0 is, u_1 is folytonos a zárt egységgkörön, ezért $u:=u_0+u_1$ is, továbbá a kör belsejében

$$\Delta u(x,y)=f_0(x,y)+0=f_0(x,y)=f(x,y),$$

és u a peremre folytonosan terjed ki, mégpedig $u_0+\varphi_1=\varphi$-ként. Ezzel az egzisztenciát igazoltuk is. Ha most u mellett v is kielégíti a mondott

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

peremérték-feladatot, akkor $\Delta(v-u)=0$ és $v-u$ a kör peremén eltűnik, így a Poisson-formula egyértelműsége miatt $v-u=0$, azaz $v=u$. Ezzel az egyértelműséget is beláttuk.

Hátravan még az állításban szereplő formula igazolása. A definíció alapján minden $(x,y)\in B^{\mathrm{o}}$-re

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_0(x,y)+u_1(x,y)= \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\Big((x-\xi)^2+(y-\tau)^2\Big)\cdot f_0(\xi,\tau)\,d(\xi,\tau)+ \\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{\big(1-x^2-y^2\big)\cdot\varphi(\cos t,\sin t)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt- \\ &\quad-\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{\big(1-x^2-y^2\big)\cdot u_0(\cos t,\sin t)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt, \end{aligned}$$

ennek a legutolsó tagja részletesen

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln\big((\cos t-\xi)^2+(\sin t-\tau)^2\big)\cdot f_0(\xi,\tau)\,d(\xi,\tau)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt.$$

A már meggondolt egyértelműség miatt u a B pontjaiban nem függ a h konkrét megválasztásától, így más és más h mellett (amelyek persze eleget tesznek a h-ra fentebb rótt kitételeknek) is ugyanazt az $u(x,y)$ értéket kapjuk. Legyen most $\alpha_n\searrow 1$ sorozat és minden n-re $h_n\in C^2(\mathbb{R})$ olyan függvény, amely $[0,1]$-en azonosan 1, az $\left[\left(\frac{1+\alpha_n}{2}\right)^2,+\infty\right)$-en viszont azonosan 0. Feltehető, hogy a (h_n) függvénysorozat pontonként monoton fogyó, persze $[0,1]$-en azonosan 1, az 1-től jobbra viszont 0-hoz tart. Legyen minden n-re f_n az f_0-nak megfelelő függvény h helyett h_n-nel. Persze így B pontjaiban f_n megegyezik f-fel, a korön kívül pedig f_n monoton fogyólag 0-hoz tart. A látottak miatt B^{o} pontjaiban minden n-re is

$$\begin{aligned} &u(x,y)= \\ &=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln\Big((x-\xi)^2+(y-\tau)^2\Big)\,f_n(\xi,\tau)\,d(\xi,\tau)+ \\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\big(1-x^2-y^2\big)\,\varphi(\cos t,\sin t)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt- \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln\big((\cos t-\xi)^2+(\sin t-\tau)^2\big)\cdot f_n(\xi,\tau)\,d(\xi,\tau)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt.$$

Alkalmazzuk a Lebesgue-féle majorált konvergenciatételt ezekre a tagokra $n\to+\infty$ határátmenettel. Az integrandus B komplementumán elenyészik, így B^{o} pontjaiban

$$\begin{aligned}
&u(x,y)=\\
&=\frac{1}{4\pi}\int_B\ln\left((x-\xi)^2+(y-\tau)^2\right)f(\xi,\tau)\;d(\xi,\tau)+\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-x^2-y^2\right)\varphi(\cos t,\sin t)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt-\\
&\quad-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-x^2-y^2)\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_B\ln\big((\cos t-\xi)^2+(\sin t-\tau)^2\big)\cdot f(\xi,\tau)\,d(\xi,\tau)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}\,dt.
\end{aligned}$$

□

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

© Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3. fejezet

A funkcionálanalízis elemei

A bevezetésben már említettük, de most újra hangsúlyozzuk, hogy támaszkodunk a legalapvetőbb lineáris algebrai ismeretekre. Szintén építeni fogunk a bevezető matematikai analízisbeli kurzusból ismert metrikus terek és teljes metrikus terek fogalmára és legalapvetőbb fajta halmazok ismeretére (nyílt és zárt gömbök, nyílt, zárt, korlátos és kompakt halmazok, interior, lezárás, halmaztól vett távolságfüggvény). Egy (X,d) metrikus térben az $x \in X$ középpontú, $r > 0$ sugarú zárt gömböt a továbbiakban $\overline{\mathcal{B}}(x,r)$, míg a nyílt gömböt $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(x,r)$ jelöli. Egy M halmaz lezárása $\overline{M}$, míg az M belseje $\operatorname{int} M$. Szintén haszálni fogjuk a következő tényt: *Egy (X,d) metrikus térben egy $x \in X$ pont pontosan akkor esik egy M halmaz lezárásába, ha x közelíthető M-beli sorozattal.* Egy X halmazon értelmezett és egy Y halmazba képező függvények összességét Y^X jelöli.

Egy X vektortér egy M részhalmazának altér voltát az $M \leq X$ formula fejezi ki. Megjegyezzük, hogy egy $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) fölötti vektortérben egy nemüres M halmaz pontosan akkor altér, ha

$$M + M \subseteq M \qquad \text{és} \qquad \mathbb{K} \cdot M \subseteq M,$$

valamint egy M részhalmaz pontosan akkor konvex, ha minden $0 < t < 1$ esetén

$$t \cdot M + (1-t) \cdot M \subseteq M.$$

3.1. Normált terek, Banach-terek

3.1.1. Definíció. Ha X egy $\mathbb{K}$ fölötti vektortér ($\mathbb{K}$ mindig vagy $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$), akkor egy $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ függvényt ($\mathbb{K}$ fölötti) *normának* mondunk, ha minden $x, y \in X$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

1. $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = \mathbf{0}_X$;
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ekkor azt is mondjuk, hogy $(X, \|\cdot\|)$ *normált tér* $\mathbb{K}$ fölött.

3.1.2. Megjegyzés. A fenti definíció 1. pontjában az $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}_X$ ekvivalenciát is írhattuk volna, hiszen a másik irány a 2. pontból következik.

3.1.3. Megjegyzés. Ha $(X, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{C}$ fölött, akkor természetes módon valós normált tér is (tehát minden komplex norma egyúttal valós norma is), hiszen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Ha $(X, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött, akkor a $d(x, y) := \|x - y\|$ egyenlőség triviálisan metrikát definiál az X halmazon. Tehát minden normált tér egyúttal metrikus tér is, így normált térben is természetesnek veendők a metrikus térbeli alapfogalmak (gömb, nyílt, zárt, kompakt halmazok, interior, lezárás, halmaztól vett távolság stb.). Persze a „d-nyílt", „d-kompakt" stb. terminusok helyett nyugodtan haszálhatjuk – ha egyáltalán akarjuk – a „$\|\cdot\|$-nyílt", „$\|\cdot\|$-kompakt" stb. kifejezéseket. A továbbiakban tetszőleges $\mathbb{K}$ fölötti $(X, \|\cdot\|)$ normált térben jelölje

$$\overline{\mathcal{B}}_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\} = \overline{\mathcal{B}}(\mathbf{0}_X, 1).$$

A $\overline{\mathcal{B}}_X$ halmazt az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér zárt *egységgömb*jének mondjuk. Azonnal látható, hogy bármely $x \in X$ és $r > 0$ esetén az x-től legfeljebb r távolságra levő vektorok halmaza

$$\overline{\mathcal{B}}(x, r) = x + r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X,$$

amelyet az x közepű r sugarú $\|\cdot\|$-gömbnek is nevezünk. Egy $M \subseteq X$ halmaz belsejét $\mathrm{int}M$, lezárását pedig $\overline{M}$ jelöli.

A továbbiakban legyenek $(X, \|\cdot\|)$ és $(Y, \|\cdot\|_*)$ normált terek $\mathbb{K}$ fölött.

3.1.4. Definíció. Egy $f : X \to Y$ függvény *folytonos egy $x \in X$ pontban*, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$ szám, hogy bármely $y \in X$, $\|y - x\| \leq \delta$ esetén $\|f(y) - f(x)\|_* \leq \varepsilon$. Másképpen fogalmazva: f folytonos x-ben, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$ szám, hogy bármely $y \in x + \delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_X$ esetén $f(y) \in f(x) + \varepsilon \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y$. Ha f minden $x \in X$ pontban folytonos, akkor *folytonos függvény.*

Hasonlóan: egy X-beli (x_k) sorozat *konvergál* egy $x \in X$ vektorhoz, ha $\lim\limits_{k \to +\infty} \|x_k - x\| = 0$. (Jelölésben: $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ vagy egyszerűen csak $x_k \to x$, illetve $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x$.) Egy $(x_k) \subseteq X$ sorozat *korlátos*, ha a $(\|x_k\|)$ valós

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

sorozat korlátos. Egy $(x_k) \subseteq X$ sorozat pedig *Cauchy-sorozat*, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy bármely $k, \ell \geq N$ indexekre $\|x_k - x_\ell\| \leq$ $\leq \varepsilon$.

3.1.5. Állítás. *Legyenek $K, M \subseteq X$. Ha K kompakt és M zárt, akkor $K+M$ is zárt.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \overline{K+M}$. Ekkor létezik $(x_n) \subseteq K+M$, hogy $x_n \to x$. Persze minden n-re $x_n = u_n + v_n$, ahol $u_n \in K$ és $v_n \in M$. K kompaktsága miatt létezik (u_{n_k}) részsorozat és $u \in K$, hogy $u_{n_k} \to u$. Ezért $v_{n_k} = x_{n_k} -$ $- u_{n_k} \to x - u$. Innen M zártsága miatt $x - u \in M$. Innen pedig $x = u +$ $+ (x-u) \in K + M$. Tehát $\overline{K+M} \subseteq K+M$. □

Egy normált térben általában nem esnek egybe a Cauchy-sorozatok és a konvergens sorozatok. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$-ben például tudjuk, hogy igen. Amely normált térben ez az egybeesés fennáll, azt *Banach-tér*nek szokás nevezni. Viszont bármely normált térben minden Cauchy-sorozat korlátos.

3.1.6. Példa. Nem minden normált tér lesz Banach-tér. A $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ valós vektortéren (lásd később) az $\|f\| := \int_0^1 |f|$ egyenlőség triviálisan normát definiál, ezzel a normával viszont $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ nem teljes. Először ellenőrizzük le, hogy $f, g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ esetén $\|g \cdot f\| \leq \max_{[0,1]} g \cdot \|f\|$. Most $f_n := n \cdot \big(\mathrm{id} - \frac{1}{2}\big) \cdot \chi_{\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} +$ $+ \chi_{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1\right]}$ triviálisan $\|\cdot\|$-Cauchy-sorozatot definiál (az $f_n - f_m$ függvény 2-vel korlátozott, ugyanakkor egy $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$ hosszú szakaszon kívül azonosan nulla, így $\|f_n - f_m\| \leq 2\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$). Indirekt tegyük föl, hogy az (f_n) sorozat $\|\cdot\|$-ban tart egy $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ függvényhez. Ekkor az előbbi egyenlőtlenség alapján minden $g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ mellett $g \cdot f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} g \cdot f$. Válasszuk meg tetszőleges $0 <$ $< \varepsilon < \frac{1}{2}$ esetén a $g_\varepsilon \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ függvényt úgy, hogy $\frac{1}{2} - \varepsilon$-tól balra azonosan 1 legyen, $\frac{1}{2}$-től jobbra viszont azonosan 0. Ezzel $g_\varepsilon \cdot f_n$ azonosan 0 sorozat, ezért $g_\varepsilon \cdot f$ is az azonosan 0 függvény. Ezért f értékei $\frac{1}{2} - \varepsilon$-tól balra azonosan nullák. Mivel ez minden pozitív ε mellett áll, ezért $\left[0, \frac{1}{2}\right)$-en f azonosan 0. Hasonlóan adódik, hogy $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$-en f azonosan 1. Ez viszont ellentmondásban áll f folytonosságával.

3.1.7. Megjegyzés. A definícióból és a háromszög-egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy az X normált térben $x = \lim_{k\to+\infty} x_k$ és $y = \lim_{k\to+\infty} y_k$ esetén $\lim_{k\to+\infty}(x_k + y_k) = \lim_{k\to+\infty} x_k + \lim_{k\to+\infty} y_k$, továbbá minden $\alpha \in \mathbb{K}$ számra $\lim_{k\to+\infty}(\alpha \cdot x_k) = \alpha \cdot \lim_{k\to+\infty} x_k$. Sőt $\|x\| = \lim_{k\to+\infty} \|x_k\|$.

3.1.8. Következmény. *Legyen $M \subseteq X$. Ha M konvex, akkor $\overline{M}$ is konvex. Ha M altér, akkor $\overline{M}$ is altér.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. x pontosan akkor eleme $\overline{M}$-nak, ha közelíthető M-beli sorozattal. □

3.1.9. Állítás. *Ha $M \leq X$ zárt altér, akkor minden $v \in X$ esetén $\mathbb{K} \cdot v + M$ is zárt altér.*

Bizonyítás. Ha $v \in M$, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben $d(v, M) > 0$. Legyen $(x_k) \subseteq \mathbb{K} \cdot v + M$ és $x \in X$, amelyekre $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Persze ekkor (x_k) korlátos is. Megmutatjuk, hogy $x \in \mathbb{K} \cdot v + M$. Nyilván minden k-ra x_k előáll $x_k = u_k + t_k \cdot v$ alakban, ahol $u_k \in M$ és $t_k \in \mathbb{K}$; ezzel minden $t_k \neq 0$-ra

$$\|x_k\| = \|t_k \cdot v + u_k\| = |t_k| \cdot \left\| v + \frac{1}{t_k} u_k \right\| \geq |t_k| \cdot d(v, M),$$

ahonnan az (x_k) sorozat korlátosságából a $(t_k) \subseteq \mathbb{K}$ sorozat korlátossága azonnal adódik. A Bolzano–Weierstraß-tétel miatt ekkor van olyan (t_{k_ℓ}) részsorozat, amely konvergál egy $t \in \mathbb{K}$ számhoz. Ezzel azonnal

$$u_{k_\ell} = x_{k_\ell} - t_{k_\ell} \cdot v \longrightarrow x - t \cdot v,$$

így M zárt volta miatt $x - t \cdot v \in M$. Ezért persze $x \in \mathbb{K} \cdot v + M$. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathbb{K} \cdot v + M$ zárt. □

3.1.10. Következmény. *Ha $M \leq X$ zárt altér és $N \leq X$ véges dimenziós altér, akkor $M + N$ is zárt altér.*

3.1.11. Következmény. *Ha $M \leq X$ véges dimenziós altér, akkor zárt is.*

3.1.12. Megjegyzés. Általában egy normált térben két zárt altér összege már nem feltétlenül zárt, mint az alábbi példa is mutatja.

3.1.13. Példa. Tetszőleges $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ „$\mathbb{Z}$-sorozatra” jelölje $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2}$. Legyen

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \|\mathbf{a}\| < +\infty \right\}.$$

Persze – a szokásos sorozatműveletekkel – $\ell^2(\mathbb{Z})$ valós vektortér és az $\mathbf{a} \mapsto \|\mathbf{a}\|$ függvény norma ezen a vektortéren. Jelölje

$$M := \left\{ (\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \forall k \geq 0\text{-ra } \alpha_{-k} = 0 \right\}$$

és

$$N := \left\{ (\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \forall k > 0\text{-ra } \alpha_k = k \cdot \alpha_{-k} \right\}.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Gondoljuk meg, hogy M és N zárt alterei az $\left(\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|\right)$ normált térnek. Másrészt tetszőleges $\mathbf{c} = (\gamma_k)_{k=-\infty}^{+\infty} \in M+N$ vektor M-beli $(\alpha_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ komponensére és N-beli $(\beta_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ komponensére szükségszerűen fennáll, hogy a $k \leq 0$ indexekre $\beta_k = \gamma_k$ és $\alpha_k = 0$, míg $k > 0$ esetén $\beta_k = k \cdot \gamma_{-k}$ és $\alpha_k = \gamma_k - k \cdot \gamma_{-k}$. Ezért nyilván az $\left(\frac{1}{|k|+1}\right)_{k=-\infty}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ sorozat nem eleme $M+N$-nek, tehát $M+N \neq \ell^2(\mathbb{Z})$.

Ugyanakkor tetszőleges olyan $(\gamma_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ valós sorozat, **amelynek elemei véges sok indextől eltekintve nullák**, a fenti módon triviálisan előáll egy M-beli és egy N-beli vektor összegeként. Mivel $\ell^2(\mathbb{Z})$ tetszőleges eleme normában közelíthető ilyen tulajdonságú $(\gamma_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ vektorokkal, ezért $\overline{M+N}$ az egész $\ell^2(\mathbb{Z})$ tér. Így $M+N \neq \overline{M+N}$, tehát $M+N$ nem zárt, jóllehet mind M, mind N zárt altér.

3.1.14. Feladat. Adjunk példát normált térben zárt kúpra és egydimenziós altérre, amelyek összege nem zárt! (*Ötlet:* Vegyünk a háromdimenziós térben egy origó csúcsú hegyesszögű forgástölcsért, illetve ennek egyik alkotójára illeszkedő egyenest.)

3.2. Folytonos lineáris operátorok

A továbbiakban legyenek $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(Y, \|\cdot\|_2)$ normált terek $\mathbb{K}$ fölött. Mivel az X és Y tereknek egyaránt van vektortér- és metrikus struktúrájuk, kézenfekvő vizsgálni azt az esetet, mikor egy $A : X \to Y$ leképezés egyidejűleg folytonos és lineáris. Például az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések (számmal való szorzások) folytonosak.

Mostantól fogva – elkerülendő a jelölésekből adódó félreértéseket – az X-ről Y-ba menő *összes lineáris leképezés* halmazát $\mathrm{Hom}(X,Y)$-nal jelöljük, míg az $L(X,Y)$ jelölést azon lineáris leképezések halmazára tartjuk fönn, amelyek folytonosak is. $\mathrm{Hom}(X,Y)$ közismerten vektortér $\mathbb{K}$ fölött.

3.2.1. Definíció. Jelölje

$$L(X,Y) := \{A \in \mathrm{Hom}(X,Y) : \ A \ \textit{folytonos}\}$$

az $X \to Y$ folytonos lineáris operátorok halmaza. Speciálisan

$$X^* := L(X, \mathbb{K})$$

az X-en értelmezett folytonos lineáris funkcionálok összessége. X^*-ot az $(X, \|\cdot\|_1)$ normált tér *topológiai duális*ának mondjuk. Az összes lineáris funkcionált tartalmazó $X' := \mathrm{Hom}(X, \mathbb{K})$ halmazt pedig az X vektortér *algebrai duális*ának.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Megjegyezzük, hogy a funkcionálanalízis név onnan ered, hogy a matematika ezen ága a különféle speciális normált terek topológiai duálisának jellemzéseiből nőtte ki magát.

3.2.2. Tétel. *Legyen* $A \in \operatorname{Hom}(X,Y)$. *Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. $A \in L(X,Y)$, *azaz* A *folytonos;*
2. A *folytonos a* $\mathbf{0}_X$ *pontban;*
3. A *korlátos a* $\overline{\mathcal{B}}_X$ *egységgömbön;*
4. *létezik* $\alpha \geq 0$, *hogy minden* $x \in X$ *esetén*

$$\|Ax\|_2 \leq \alpha \cdot \|x\|_1 .$$

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. triviális.

2. $\Rightarrow$ 3.: az A $\mathbf{0}_X$-beli folytonossága miatt az $\varepsilon = 1$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in X$, $\|x\|_1 = \|x - \mathbf{0}_X\|_1 \leq \delta$ esetén

$$\|Ax\|_2 = \|Ax - \mathbf{0}_Y\|_2 = \|Ax - A\mathbf{0}_X\|_2 \leq 1.$$

Ekkor minden $x \in \overline{\mathcal{B}}_X$ esetén $\|\delta x\|_1 \leq \delta$, tehát $\|A\delta x\|_2 \leq 1$, ahonnan $\|Ax\|_2 \leq \leq \frac{1}{\delta}$. Azaz A-nak $\overline{\mathcal{B}}_X$-en $\frac{1}{\delta}$ egy korlátja.

3. $\Rightarrow$ 4.: Legyen $\alpha > 0$ A-nak egy $\overline{\mathcal{B}}_X$-en vett korlátja. Ekkor minden $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}_X$ esetén

$$\left\| \frac{1}{\|x\|_1} \cdot x \right\|_1 = \frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|_1 = 1,$$

tehát $\frac{1}{\|x\|_1} \cdot x \in \overline{\mathcal{B}}_X$, ahonnan

$$\frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|Ax\|_2 = \left\| \frac{1}{\|x\|_1} \cdot Ax \right\|_2 = \left\| A\left(\frac{1}{\|x\|_1} \cdot x \right) \right\|_2 \leq \alpha,$$

tehát

$$\|Ax\|_2 \leq \alpha \cdot \|x\|_1$$

minden $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}_X$ esetén. Ez utóbbi egyenlőtlenség viszont triviálisan $x = \mathbf{0}_X$ esetén is fennáll.

4. $\Rightarrow$ 1.: tegyük föl, hogy 4. teljesül egy alkalmas $\alpha \geq 0$ számmal. Ekkor tetszőleges $x \in X$ és $\varepsilon > 0$ esetén minden $y \in x + \frac{\varepsilon}{\alpha+1} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X$ számra $\|y - x\|_1 \leq \leq \frac{\varepsilon}{\alpha+1}$, innen

$$\|Ay - Ax\|_2 = \|A(y-x)\|_2 \leq \alpha \cdot \|y - x\|_1 \leq \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha+1} < \varepsilon,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

tehát azt mutattuk meg, hogy

$$y \in x + \frac{\varepsilon}{\alpha+1} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X \quad \Longrightarrow \quad \|Ay - Ax\|_2 < \varepsilon,$$

ami éppen azt jelenti, hogy A folytonos x-ben. □

3.2.3. Következmény. *$A \in L(X,Y)$ esetén*

$$\{\|Ax\|_2 : x \in X,\ \|x\|_1 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$$

korlátos halmaz.

3.2.4. Definíció. Jelölje $A \in L(X,Y)$ esetén

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_2 : x \in X,\ \|x\|_1 \leq 1\} = \sup_{x \in X,\ \|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$$

az $A \in L(X,Y)$ leképezés *operátornormája* (még nem tudjuk, hogy valóban norma!).

3.2.5. Állítás. *Legyen $A \in L(X,Y)$. Ekkor minden $x \in X$ vektorra*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 .$$

Bizonyítás. $\|A\|$ definíciója alapján minden $x \in X$, $\|x\|_1 \leq 1$ esetén

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| .$$

Legyen most $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}_X$, ekkor

$$\left\| \frac{1}{\|x\|_1} \cdot x \right\|_1 = \frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|_1 = 1,$$

innen

$$\frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|Ax\|_2 = \left\| \frac{1}{\|x\|_1} \cdot Ax \right\|_2 = \left\| A\left(\frac{1}{\|x\|_1} \cdot x \right) \right\|_2 \leq \|A\| ,$$

ahonnan

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 ,$$

és ez utóbbi egyenlőtlenség triviálisan $x = \mathbf{0}_X$ esetén is fennáll. □

3.2.6. Állítás. *Ha $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ és $\alpha \geq 0$, melyekre minden $x \in X$ esetén*

$$\|Ax\|_2 \leq \alpha \cdot \|x\|_1 ,$$

akkor $A \in L(X,Y)$ és

$$\|A\| \leq \alpha.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Ha mindezeken felül van egy $x_0 \in X$, $\|x_0\|_1 = 1$ *tulajdonságú vektor, melyre*

$$\|Ax_0\|_2 = \alpha,$$

akkor $\|A\| = \alpha$.

Bizonyítás. Ha minden $x \in X$ esetén $\|Ax\|_2 \leq \alpha \cdot \|x\|_1$, akkor egy fenti tétel alapján $A \in L(X,Y)$, továbbá

$$\|A\| = \sup_{x\in X,\ \|x\|_1\leq 1} \|Ax\|_2 \leq \sup_{x\in X,\ \|x\|_1\leq 1} \alpha \cdot \|x\|_1 \leq \alpha.$$

Az állítás második része $\|A\|$ definíciója alapján nyilvánvaló. □

3.2.7. Következmény. *Ha* X, Y, Z *normált terek* $\mathbb{K}$ *fölött és* $A \in L(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$, *akkor* $B \cdot A \in L(X,Z)$, *továbbá*

$$\|B \cdot A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in X$-re $\|(B \cdot A)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq$ $\leq (\|B\| \cdot \|A\|) \cdot \|x\|$. Innen az állítás nyilvánvaló. □

3.2.8. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $[a,b]$ intervallumon értelmezett folytonos valós függvények $C[a,b]$ vektorterén a

$$\|f\|_C := \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

egyenlőség normát definiál!

3.2.9. Példa. A $(C[a,b], \|\cdot\|_C)$ normált téren értelmezett $\int_a^b : C[a,b] \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálra minden $f \in C[a,b]$ esetén

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \|f\|_C = (b-a) \cdot \|f\|_C,$$

továbbá az $\mathrm{id}^0 \in C[a,b]$ 1 értékű konstans függvényre $\left\|\mathrm{id}^0\right\|_C = 1$ és

$$\left|\int_a^b \mathrm{id}^0\right| = \int_a^b 1 \,\mathrm{d}t = b-a,$$

tehát

$$\int_a^b \in C[a,b]^* \qquad \text{és} \qquad \left\|\int_a^b\right\| = b-a.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.2.10. Állítás. *Legyen* $(X, \|\cdot\|)$ *normált tér* $\mathbb{K}$ *fölött. Egy* $\varphi \in X'$ *lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos, ha* $\ker\varphi$ *zárt.*

Bizonyítás. Ha φ folytonos, akkor a $\mathbb{K}$-beli $\{0\}$ zárt halmaz φ általi $\ker\varphi$ ősképe zárt.

Megfordítva, tegyük föl, hogy $\ker\varphi$ zárt. Ha φ azonosan nulla, akkor persze folytonos. Tegyük föl, hogy φ nem azonosan nulla. Ekkor létezik $a \in X \setminus \ker\varphi$ vektor. Mivel ez utóbbi halmaz nyílt, ezért van olyan $r > 0$ szám, hogy az $a + r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X$ halmaz nem metsz $\ker\varphi$-be. Ez azt jelenti, hogy

$$0 \notin \varphi\left(a + r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right) = \varphi a + r \cdot \varphi\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right),$$

következésképp $\varphi\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right) \neq \mathbb{K}$. Vegyük észre, hogy tetszőleges nemnulla $\alpha \in$ $\in \varphi\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$ esetén $\varphi\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$ tartalmazza az egész 0 körüli $|\alpha|$ sugarú zárt körlapot (ill. intervallumot). Ez azt jelenti, hogy ha $\varphi\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$ nem volna korlátos, akkor meg kellene egyeznie az egész $\mathbb{K}$-val. Mivel pedig nem egyezik meg, ezért korlátos. $\varphi\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$ korlátossága viszont ekvivalens φ folytonosságával. □

3.2.11. Tétel. *Legyenek* $(X, \|\cdot\|_1)$ *és* $(Y, \|\cdot\|_2)$ *normált terek* $\mathbb{K}$ *fölött. Ekkor* $L(X,Y)$ *altere* $\mathrm{Hom}(X,Y)$*-nak, továbbá a* $\|\cdot\| : L(X,Y) \to \mathbb{R}_+$,

$$\|A\| := \sup_{x \in X,\ \|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$$

leképezés norma az $L(X,Y)$ *vektortéren. Ha* $(Y, \|\cdot\|_2)$ *Banach-tér, akkor* $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ *is Banach-tér.*

Bizonyítás. Először három dolgot jegyzünk meg:

1. $\mathbf{0}_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ nyilván eleme $L(X,Y)$-nak. Ha pedig $A \in L(X,Y)$ olyan operátor, amelyre $\|A\| = 0$, akkor minden $x \in X$-re

   $$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 = 0$$

   miatt A azonosan $\mathbf{0}_Y$, azaz $A = \mathbf{0}_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$.

2. Tetszőleges $A \in L(X,Y)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén minden $x \in X$-re

   $$\|(\alpha \cdot A)x\|_2 = \|\alpha \cdot Ax\|_2 = |\alpha| \cdot \|Ax\|_2 \leq (|\alpha| \cdot \|A\|) \cdot \|x\|_1,$$

   innen az egyik fenti állítás miatt $\alpha \cdot A \in L(X,Y)$ és $\|\alpha \cdot A\| \leq |\alpha| \cdot \|A\|$. Ha most $\alpha \neq 0$, akkor a kapottakat az $\frac{1}{\alpha}$ számra és az $\alpha \cdot A$ operátorra alkalmazva azt kapjuk, hogy

   $$\|A\| = \left\|\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot A\right\| \leq \frac{1}{|\alpha|} \cdot \|\alpha \cdot A\|,$$

   ahonnan $\|\alpha \cdot A\| \geq |\alpha| \cdot \|A\|$, ezt pedig a fentiekkel összevetve $\|\alpha \cdot A\| =$ $= |\alpha| \cdot \|A\|$. Ez utóbbi egyenlőség persze $\alpha = 0$ esetén is igaz.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3. $\|\cdot\|_2$ norma volta és az egyik fenti állítás miatt tetszőleges $A, B \in L(X,Y)$ esetén minden $x \in X$-re

$$\|(A+B)x\|_2 = \|Ax+Bx\|_2 \le \|Ax\|_2 + \|Bx\|_2 \le \\ \le \|A\| \cdot \|x\|_1 + \|B\| \cdot \|x\|_1 = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|_1$$

alapján $A+B \in L(X,Y)$ és $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$.

A fentiek miatt $L(X,Y)$ triviálisan altere Hom (X,Y)-nak. Ennek birtokában az 1., 2. és 3. pontokból a $\|\cdot\|$ operátornormára vonatkozó három normaaxióma is azonnal leolvasható. Tehát $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött.

Tegyük most föl, hogy $(Y, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér. Legyen $(A_n) \subseteq L(X,Y)$ $\|\cdot\|$-Cauchy-sorozat. Ekkor (A_n) korlátos is, azaz létezik $L \ge 0$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|A_n\| \le L.$$

Másrészt $\|A_n x - A_m x\|_2 = \|(A_n - A_m)x\|_2 \le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_1$ alapján minden rögzített $x \in X$ esetén $(A_n x)$ egy $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozat. Mivel Y teljes, ezért minden $x \in X$ esetén $(A_n x)$ konvergens sorozat Y-ban. Jelölje

$$A : X \to Y,$$
$$A(x) := \lim_{n \to +\infty} A_n x.$$

A normált térbeli sorozatok összegének és számszorosának konvergenciájára vonatkozó tétel alapján azonnal adódik, hogy A lineáris. Továbbá minden $x \in X$ esetén $\|A_n x\|_2 \le L \cdot \|x\|_1$ miatt

$$\|Ax\|_2 = \left\| \lim_{n \to +\infty} A_n x \right\|_2 = \lim_{n \to +\infty} \|A_n x\|_2 \le L \cdot \|x\|_1,$$

tehát $A \in L(X,Y)$. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel (A_n) $\|\cdot\|$-Cauchy-sorozat, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $m, n \ge N$ esetén

$$\|A_n - A_m\| \le \varepsilon,$$

következésképpen minden $x \in X$-re

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_1 \le \varepsilon \cdot \|x\|_1.$$

Legyen $n \ge N$ rögzített. Ekkor $m \to +\infty$ határátmenettel minden $x \in X$ esetén a fentiek miatt

$$\|(A_n - A)x\|_2 = \|A_n x - Ax\|_2 = \left\| \lim_{m \to +\infty} (A_n x - A_m x) \right\|_2 =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \lim_{m\to+\infty} \|A_n x - A_m x\|_2 \le \varepsilon \cdot \|x\|_1 ,$$

ami egy korábbi állítás alapján azt jelenti, hogy $\|A_n - A\| \le \varepsilon$ minden $n \ge N$ esetén. Ezzel megmutattuk, hogy $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$. Tehát $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött. □

3.2.12. Következmény. *Tetszőleges $(X,\|\cdot\|)$ $\mathbb{K}$ fölötti normált térre $(X^*,\|\cdot\|)$ Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött.*

3.2.13. Tétel. *Legyen $(X,\|\cdot\|)$ normált tér, $(Y,\|\cdot\|)$ pedig Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött. Legyen $M \le X$ sűrű altér (azaz $\overline{M} = X$) és $A \in L(M,Y)$. (A folytonosságot természetesen az X-beli norma M-re való leszűkítésére nézve értjük.) Ekkor A egyértelműen kiterjeszthető egy $\widehat{A} \in L(X,Y)$ operátorrá. Továbbá ekkor $\left\|\widehat{A}\right\| = \|A\|$.*

Bizonyítás. A feltétel miatt minden $x \in X$ vektorhoz van hozzá normában konvergáló $(x_n) \subseteq M$ sorozat. Legyen $(x_n) \subseteq M$ tetszőleges ilyen sorozat. Persze (x_n) Cauchy-sorozat is, ahonnan a minden $m,n \in \mathbb{N}$ indexek mellett fennálló

$$\|Ax_m - Ax_n\| \le \|A\| \cdot \|x_m - x_n\|$$

egyenlőtlenség alapján $(Ax_n) \subseteq Y$ is triviálisan Cauchy-sorozat. Mivel Y teljes, ezért (Ax_n) konvergens is. Gondoljuk meg, hogy a $\lim\limits_{n\to+\infty} Ax_n \in Y$ vektor nem függ az (x_n) sorozat választásától. Valóban, ha mind (x_n), mind (y_n) egy x-hez kovergáló M-beli sorozat, akkor a

$$z_n := \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ y_{\frac{n+1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

sorozat is x-hez tart, tehát mindaz igaz rá, amit ilyen sorozatról megállapítottunk, tehát az is, hogy (Az_n) konvergens. No de (Az_n)-nek mind (Ax_n), mind (Ay_n) részsorozata, ezért (Az_n) konvergenciája miatt $\lim\limits_{n\to+\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Ay_n$.

Így jóldefiniált az $\widehat{A} : X \to Y$,

$$\widehat{A}(x) := \lim_{n\to+\infty} Ax_n, \text{ ahol } (x_n) \subseteq M \text{ és } x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$$

leképezés. Ezzel a fentiek a következőképpen is fogalmazhatók: tetszőleges x-hez tartó $(x_n) \subseteq M$ sorozatra $Ax_n \to \widehat{A}(x)$. Ezzel a tétel összes állítása egyszerűen látható. Először tetszőleges $x \in M$ esetén az $x_n := x$ konstans sorozattal azonnal adódik, hogy $\widehat{A}(x) = Ax$, tehát $\widehat{A}$ valóban kiterjesztése A-nak. Legyen most $x,y \in X$ és $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. Ekkor afeltétel szerint létezik

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

x-hez tartó $(x_n) \subseteq M$ sorozat, és y-hoz tartó $(y_n) \subseteq M$ sorozat. Persze ekkor $(\alpha x_n + \beta y_n) \subseteq M$ és $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$. Így a fentiek szerint

$$\widehat{A}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to+\infty} A(\alpha x_n + \beta y_n) = \\ = \alpha \cdot \lim_{n\to+\infty} Ax_n + \beta \cdot \lim_{n\to+\infty} Ay_n = \alpha \cdot \widehat{A}(x) + \beta \cdot \widehat{A}(y),$$

tehát $\widehat{A}$ tényleg lineáris. Most megmutatjuk, hogy eme $\widehat{A}$-on kívül nincs $X \to Y$ folytonos kiterjesztése A-nak. Valóban, ha $B : X \to Y$ folytonos kiterjesztése A-nak, akkor tetszőleges $x \in X$ vektorra véve egy x-hez tartó $(x_n) \subseteq M$ sorozatot, B folytonossága és a fentiek miatt azonnal

$$B(x) = \lim_{n\to+\infty} B(x_n) = \lim_{n\to+\infty} Ax_n = \widehat{A}(x),$$

tehát B meg kell, hogy egyezzék $\widehat{A}$-pal. Most már elegendő igazolnunk, hogy $\widehat{A}$ maga is folytonos és normája $\|A\|$-nál nem nagyobb. Ez viszont azonnal következik a minden $x \in X$ és $(x_n) \subseteq M$, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ mellett fönnálló

$$\left\|\widehat{A}x\right\| = \lim_{n\to+\infty} \|Ax_n\| \le \lim_{n\to+\infty} (\|A\| \cdot \|x_n\|) = \|A\| \cdot \|x\|$$

egyenlőtlenségből. □

3.3. Neumann-sorok

Az alábbiakban legyen X Banach-tér a $\mathbb{K}$ test fölött és $A \in L(X)$ transzformáció. Az alábbi állítás a mértani sorok összegére vonatkozó tétel általánosítása lineáris transzformációkra.

3.3.1. Állítás. *Ha $\|A\| < 1$, akkor az $L(X)$-beli $\sum A^k$ sor abszolút konvergens, továbbá $I - A$-nak létezik $L(X)$-beli inverze és*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

Bizonyítás. A szubmultiplikativitás ($\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$) alapján teljes indukcióval azonnal adódik, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re $\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$. Másrészt $\|A\| < 1$ miatt a $\sum \|A\|^k$ mértani sor konvergens. Ezekből együtt az következik, hogy a $\sum A^k$ sor abszolút konvergens. Mivel $L(X)$ a legutóbbi tétel alapján teljes, ezért $\sum A^k$ konvergens is. Most

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} A^k \qquad \text{és} \qquad S := \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

jelöléssel $\lim S_n = S$, továbbá

$$\|(I-A)\cdot S_n - (I-A)\cdot S\| = \|(I-A)\cdot(S_n - S)\| \le \|I-A\|\cdot\|S_n - S\| \to 0$$

alapján $\lim\left((I-A)\cdot S_n\right) = (I-A)\cdot S = (I-A)\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$. Másrészt triviálisan

$$(I-A)\cdot S_n = I - A^{n+1},$$

ahonnan $\left\|A^{n+1}\right\| \le \|A\|^{n+1} \to 0$ miatt

$$\lim (I-A)\cdot S_n = I.$$

Összevetve

$$(I-A)\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = I.$$

Hasonlóan adódik, hogy $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k\cdot(I-A) = I$. Mindez éppen a bizonyítandó egyenlőséget jelenti. □

A fenti állítás fontos szerepet játszik a matematikai közgazdaságtanban. Különösen az a speciális eset, mikor $X = \mathbb{R}^n$ (és így $L(X)$ természetes módon azonosul $\mathbb{R}^{n\times n}$-nel). Ezen belül is fontos eset az, mikor az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix elemei nemnegatív számok. Ekkor persze minden k-ra A^k elemei is nemnegatívak, így a sorösszeg elemei is azok. A fenti állítás értelmében tehát ekkor $(I-A)^{-1}$ nemnegatív elemű mátrix. Az $(I-A)^{-1}$ mátrixot egyébként a közgazdászok az A mátrix Leontyiev-inverzének szokták nevezni. A most elmondottakat tehát a közgazdászok úgy szokták idézni, hogy *ha egy nemnegatív elemű $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $\|A\| < 1$, akkor van nemnegatív Leontyiev-inverze.*

3.4. Véges dimenziós normált terek

E szakaszban az $\mathbb{R}^n$ teret végig az

$$\left\|\begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{bmatrix}\right\|_{\mathrm{e}} := \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(a^{(j)}\right)^2}$$

euklideszi normával tekintjük. A konvergens valós sorozatok négyzetére, összegére és négyzetgyökére vonatkozó ismereteinkből azonnal adódik, hogy egy

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ sorozat pontosan akkor konvergál egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz, ha minden $1 \leq j \leq n$ esetén $x_k^{(j)}$ konvergál $x^{(j)}$-hez (midőn $k \to +\infty$), ugyanis

$$\|x_k - x\|_{\mathrm{e}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_k^{(j)} - x^{(j)}\right)^2}.$$

Innen az is triviális, hogy az (x_k) sorozat pontosan akkor korlátos, ha a komponensei mint valós sorozatok korlátosak.

3.4.1. Lemma. *Legyen* $\left(x_k^{(1)}\right), \left(x_k^{(2)}\right), \ldots, \left(x_k^{(n)}\right)$ *n darab korlátos valós sorozat. Ekkor van olyan (végtelen)* k_ℓ *indexsorozat, hogy az* $\left(x_{k_\ell}^{(1)}\right), \left(x_{k_\ell}^{(2)}\right), \ldots$ $\ldots, \left(x_{k_l}^{(n)}\right)$ *(rész)sorozatok mindegyike konvergens.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}$-beli Bolzano–Weierstraß-tételből n-re vonatkozó teljes indukcióval azonnal adódik. (Az $n+1$-re vonatkozó lépés pl. az alábbi módon igazolható: az első n darab sorozatra alkalmazzuk az indukciós feltevést; majd a kapott indexsorozatra az $n+1$-edik sorozatot is szűkítsük le. Ekkor van n darab konvergens és egy $n+1$-edik korlátos sorozatunk. Alkalmazzuk ezen $n+1$-edik sorozatra a Bolzano–Weierstraß-tételt. Ezzel egy olyan indexsorozatot nyerünk, amely mentén az $n+1$-edik sorozat is konvergens. Most erre az indexsorozatra a már konvergens első n darab sorozatot tovább szűkíthetjük. Mivel konvergens sorozatok az indexsorozat ritkításával konvergensek maradnak, ezért a legutóbb kapott indexsorozat mentén már mind az $n+1$ darab sorozat konvergens lesz.) □

3.4.2. Következmény. *Az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathrm{e}})$ *normált térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. A fenti lemmából következik az annakelőtte tett megállapítások alapján. □

Ha az Olvasó korábbi tanulmányaiban nem szerepelt a kompakt halmaz fogalma, akkor a továbbiakban egy X normált tér egy M részhalmazát kompaktnak nevezzük, ha minden M-ből vett sorozatnak van konvergens részsorozata, és annak határértéke is M-hez tartozik.

3.4.3. Következmény. *Az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathrm{e}})$ *normált térben a korlátos zárt halmazok kompaktak.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges korlátos és zárt halmaz. Legyen (x_k) tetszőleges M-ből vett sorozat. Ez persze korlátos sorozat, így a fentiek szerint van konvergens (x_{k_ℓ}) részsorozata. No de M zárt is; ezért az M-ből vett konvergens sorozat határértéke M-hez tartozik. □

3.4.4. Következmény. *Az* $\mathbb{R}^n$ *tér egységgömbje kompakt.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Weierstraß-tétel ♦

3.4.5. Tétel. *Ha $(X, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött és $M \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor minden $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény fölveszi mind a maximumát mind a minimumát az M halmazon.*

Bizonyítás. Jelölje α az f függvény felső határát az M halmazon (ami elvileg $+\infty$ is lehet). Nyilván az f értékkészletéből vehetünk egy α-hoz tartó sorozatot, azaz van olyan $(x_n) \subseteq M$ sorozat, amelyre $f(x_n) \to \alpha$. Mivel M kompakt, ezért (x_n)-nek van egy valamely $x \in M$ ponthoz konvergáló (x_{n_k}) részsorozata. Mivel f folytonos, ezért persze $f(x_{n_k}) \to f(x)$. No de $f(x_{n_k}) \to \alpha$ is fennáll, tehát $f(x) = \alpha$, ahonnan azonnal adódik, hogy f az x helyen fölveszi a maximumát.

A minimum fölvételének igazolása hasonlóan történik. □

Legyen mostantól $(X, \|\cdot\|)$ tetszőleges valós normált tér.

3.4.6. Állítás. *Minden $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, X)$ leképezés folytonos, azaz*

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, X) = L(\mathbb{R}^n, X).$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ esetén a normatulajdonságok és a Cauchy-egyenlőtlenség miatt

$$\left\| A\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) \right\| = \left\| A\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k\right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot Ae_k \right\| \le \sum_{k=1}^{n} \|a_k \cdot Ae_k\| =$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \|Ae_k\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2},$$

így $L := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2}$ választással

$$\left\| A\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) \right\| \le L \cdot \left\| \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right\|_{\mathrm{e}},$$

ami azt jelenti, hogy A folytonos. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.4.7. Tétel. *Minden $A : \mathbb{R}^n \to X$ izomorfizmusra A és A^{-1} is folytonos.*

Bizonyítás. Az A folytonosságát már tudjuk. Tekintsük $\mathbb{R}^n$-nek az

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_e = 1\}$$

ún. egységszféráját. Ez nyilván zárt, hiszen $(x_k) \subseteq S, x \in \mathbb{R}^n, x_k \to x$ esetén

$$|\|x\|_e - \|x_k\|_e| \leq \|x - x_k\|_e \to 0,$$

tehát $1 \equiv \|x_k\|_e \to \|x\|_e$, amiért is $\|x\|_e = 1$, azaz $x \in S$. Az S halmaz korlátos is, tehát $\mathbb{R}^n$ már ismert tulajdonsága miatt kompakt. Most a $\|\cdot\| \circ A$, $x \mapsto \|Ax\|$ függvény folytonos, így a Weierstraß-féle tétel értelmében az S halmazon fölveszi a minimumát. No de S elemei nemnullák, így A izomorfizmus volta miatt S elemeinek A-képei sem nullák, tehát ezek normái is mind pozitívak. Emiatt

$$L := \min_{x \in S} \|Ax\| > 0,$$

ahonnan azonnal adódik, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|Ax\| \geq L \cdot \|x\|_e$. Innen minden $u \in X$ esetén ($x = A^{-1}u$ választással) $\|u\| \geq L \cdot \left\|A^{-1}u\right\|_e$, azaz

$$\left\|A^{-1}u\right\|_e \leq \frac{1}{L} \cdot \|u\|,$$

következésképpen A^{-1} folytonos. □

3.4.8. Tétel. *Legyenek $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(Y, \|\cdot\|_2)$ normált terek $\mathbb{K}$ fölött. Ha X véges dimenziós, akkor minden $A : X \to Y$ lineáris leképezés folytonos.*

Bizonyítás. X és Y mindenképpen tekinthetők valós normált tereknek, és X mint valós vektortér is véges dimenziós (ha X komplex tér, akkor $\dim_{\mathbb{R}} X = 2 \dim_{\mathbb{C}} X$). Továbbá A mindenképpen $\mathbb{R}$-lineáris. Legyen $\dim_{\mathbb{R}} X = n$, ekkor létezik $C : \mathbb{R}^n \to X$ izomorfizmus. A fenti tétel értelmében $C^{-1} : X \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a megelőző tétel szerint pedig $A \cdot C : \mathbb{R}^n \to Y$ folytonos lineáris operátor. Így $A = (A \cdot C) \circ C^{-1}$ is folytonos. □

3.4.9. Következmény. *Ha X és Y véges dimenziós normált terek $\mathbb{K}$ fölött, akkor minden $A : X \to Y$ izomorfizmus folytonos, továbbá nyílt halmazt nyílt halmazba, zárt halmazt zárt halmazba, kompakt halmazt pedig kompakt halmazba visz.*

Bizonyítás. A és A^{-1} mindegyike folytonos. □

3.4.10. Megjegyzés. Ha $A \in L(X, Y)$, akkor triviálisan minden korlátos halmazt korlátos halmazba visz.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.4.11. Következmény. *Ha X véges dimenziós normált tér $\mathbb{K}$ fölött, akkor X-nek egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Következésképpen minden korlátos X-beli sorozatnak van X-ben konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. $n := \dim_{\mathbb{R}} X$ jelöléssel létezik $A : \mathbb{R}^n \to X$ $\mathbb{R}$-izomorfizmus. A bizonyítandó állítás igaz az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathrm{e}})$ normált térben, innen a legutóbbi következményt A-ra és A^{-1}-re alkalmazva azonnal adódik, hogy igaz X-ben is. □

3.4.12. Következmény. *Tetszőleges $\mathbb{K}$ fölötti X véges dimenziós normált tér teljes, azaz Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(x_k) \subseteq X$ Cauchy-sorozat. $x_k \to x$. Persze ekkor (x_k) korlátos is. A fentiek miatt ekkor van olyan (x_{k_ℓ}) részsorozat, amely konvergál egy $x \in X$ vektorhoz. A Cauchy-tulajdonság miatt azonnal látható, hogy az egész (x_k) sorozat tart x-hez. □

3.5. Néhány speciális Banach-tér

3.5.1. Megjegyzés. Legyen X vektortér $\mathbb{K}$ fölött. Egy $\|\cdot\| : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt ($\mathbb{K}$ fölötti) *nyers normá*nak mondunk, ha teljesíti a szokásos normatulajdonságokat (tehát csak abban más, hogy $+\infty$-t is fölvehet értékként). Legyen $\|\cdot\| : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ rögzített nyers norma. Jelölje

$$M := \{x \in X : \|x\| < +\infty\}.$$

Azonnal látható, hogy M altere X-nek, továbbá ezen az M vektortéren $\|\cdot\|_{|M}$ norma. Tehát $\left(M, \|\cdot\|_{|M}\right)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött.

3.5.1. Korlátos függvények terei (c-típusú terek)

Az $L^\infty(X)$ tér

Legyen X egy tetszőleges halmaz. Ekkor persze $\mathbb{K}^X$ vektortér $\mathbb{K}$ fölött. Jelölje $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^X \to \mathbb{R}_+$,

$$\|f\|_\infty := \sup_X |f|$$

(ami persze $+\infty$ is lehet). Azonnal látható, hogy $\|\cdot\|_\infty$ nyers norma a $\mathbb{K}^X$ vektortéren. Ezért a 3.5.1. Megjegyzés miatt

$$L^\infty_{\mathbb{K}}(X) := \left\{f \in \mathbb{K}^X : \|f\|_\infty < +\infty\right\} = \left\{f \in \mathbb{K}^X : f \text{ korlátos}\right\}$$

altere $\mathbb{K}^X$-nek és $\left(L^\infty_{\mathbb{K}}(X), \|\cdot\|_\infty\right)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött. Az ebben szereplő $\|\cdot\|_\infty$ normát *szuprémumnormá*nak is nevezzük.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.5.2. Állítás. *$(L^\infty_{\mathbb{K}}(X), \|\cdot\|_\infty)$ teljes, azaz Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n) \subseteq L^\infty_{\mathbb{K}}(X)$ Cauchy-sorozat. Ekkor (f_n) korlátos is, azaz létezik $L \geq 0$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|f_n\|_\infty \leq L.$$

Másrészt $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_X |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_\infty$ alapján minden rögzített $x \in X$ esetén $(f_n(x))$ egy $\mathbb{K}$-beli Cauchy-sorozat, tehát konvergens is. Jelölje

$$f : X \to \mathbb{K},$$
$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Most minden $x \in X$ esetén $|f_n(x)| \leq \sup_X |f_n| = \|f_n\|_\infty \leq L$ és $f_n(x) \to f(x)$ miatt $|f_n(x)| \leq L$, ahonnan

$$\|f\|_\infty \leq L,$$

tehát $f \in L^\infty_{\mathbb{K}}(X)$. Legyen most $\varepsilon > 0$. Mivel (f_n) $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy-sorozat, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $m, n \geq N$ esetén

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

következésképpen minden $x \in X$-re

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Legyen $n \geq N$ rögzített. Ekkor $m \to +\infty$ határátmenettel minden $x \in X$ esetén a fentiek miatt

$$|(f_n - f)(x)|_\infty = |f_n(x) - f(x)|_\infty = \left|\lim_{m\to+\infty} (f_n(x) - f_m(x))\right| =$$
$$= \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,$$

ami egy korábbi állítás alapján azt jelenti, hogy $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ minden $n \geq$ $\geq N$ esetén. Ezzel megmutattuk, hogy $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$. Tehát $(L^\infty_{\mathbb{K}}(X), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött. □

3.5.3. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az $(L^\infty_{\mathbb{K}}(X), \|\cdot\|_\infty)$ tér normakonvergenciája éppen az X halmazon való egyenletes konvergencia, azaz $(f_n) \subseteq$ $\subseteq L^\infty_{\mathbb{K}}(X)$, $f \in L^\infty_{\mathbb{K}}(X)$ esetén az $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$ feltétel éppen azt jelenti, hogy az X halmazon f_n egyenletesen tart f-hez.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.5.4. Megjegyzés. Egy $M \leq L^\infty_{\mathbb{K}}(X)$ altér nyilván pontosan akkor Banach-tér a szuprémumnormával, ha zárt altér az $(L^\infty_{\mathbb{K}}(X), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben. Ez pedig pontosan akkor áll fönn, ha az M-ből vett konvergens sorozatok limese is M-hez tartozik. Az előző megjegyzést is figyelembe véve tehát **egy $M \leq L^\infty_{\mathbb{K}}(X)$ altér nyilván pontosan akkor Banach-tér a szuprémumnormával, ha az M-ből vett egyenletesen konvergens sorozatok limesfüggvénye is M-hez tartozik.**

A $C(K)$ tér

Legyen K kompakt topologikus tér. Jelölje $C_{\mathbb{K}}(K)$ a $K \to \mathbb{K}$ folytonos függvények összességét. A Weierstraß-tétel miatt minden $f \in C_{\mathbb{K}}(K)$ függvény abszolútértéke fölveszi a K halmazon a maximumát, következésképpen korlátos. Ezért $C_{\mathbb{K}}(K)$ részhalmaza $L^\infty_{\mathbb{K}}(K)$-nak. Mivel nyilván nemüres, továbbá közismerten két folytonos függvény összege is, szorzata is folytonos, ezért $C_{\mathbb{K}}(K)$ altere $L^\infty_{\mathbb{K}}(K)$-nak. Mivel pedig – szintén közismerten – egy folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens függvénysorozat limesfüggvénye is folytonos, ezért a 3.5.4. Megjegyzés értelmében $C_{\mathbb{K}}(K)$ **Banach-tér a szuprémumnormával**. No de a Weierstraß-tétel alapján ilyenkor a szuprémum egyúttal maximum is, azaz minden $f \in C_{\mathbb{K}}(K)$ esetén

$$\|f\|_\infty = \sup_K |f| = \max_K |f|.$$

Ezért a $C_{\mathbb{K}}(K)$-ra leszűkített szuprémumnormát szokás *maximumnormá*nak, *C-normá*nak, vagy éppen *Csebisev-normá*nak is nevezni, és tradicionális okok miatt többnyire $\|\cdot\|_C$-vel jelölni. Ezen jelöléssel tehát $(C_{\mathbb{K}}(K), \|\cdot\|_C)$ Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött. Ebben a térben a normakonvergencia természetesen továbbra is a K halmazon való egyenletes konvergencia.

Speciális eset: ha $[a,b]$ kompakt intervallum, akkor $K = [a,b]$ választással nyerjük a $(C_{\mathbb{K}}[a,b], \|\cdot\|_C)$ $\mathbb{K}$ fölötti Banach-teret.

A $C^1[a,b]$ tér

Jelölje $C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$ az $[a,b] \to \mathbb{K}$ folytonosan deriválható függvények összességét, azaz

$$C^1_{\mathbb{K}}[a,b] := \{f \in C_{\mathbb{K}}[a,b] : f \text{ deriválható és } f' \in C_{\mathbb{K}}[a,b]\}.$$

A deriválás összegre és számszorosra vonatkozó szabálya miatt $C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$ triviálisan altere $C_{\mathbb{K}}[a,b]$-nak, tehát maga is vektortér $\mathbb{K}$ fölött. (Ha a $C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$ vektorteret a C-normával látjuk el, akkor nem kapunk Banach-teret. Ugyanis pl. $f(x) := |2x-a-b|$ és $f_n(x) := n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt$ definíciókkal $f_n \in C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$ és $f \notin C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$, ugyanakkor $|f(x) - f_n(x)| \leq 2n\int_x^{x+\frac{1}{n}} |x-t|\,dt \leq \frac{2}{n}$, ahonnan f_n $\|\cdot\|_C$-ben tart f-hez. Tehát $(f_n) \subseteq C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$ $\|\cdot\|_C$-Cauchy-sorozat, de $\left(C^1_{\mathbb{K}}[a,b], \|\cdot\|_C\right)$-ben nem konvergens.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Jelölje $\|\cdot\|_{C^1} : C^1_{\mathbb{K}}[a,b] \to \mathbb{R}_+$,

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_C + \|f'\|_C .$$

3.5.5. Állítás. *$C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$ a $\|\cdot\|_{C^1}$ normával Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött.*

Bizonyítás. $\|\cdot\|_{C^1}$-re a normatulajdonságok természetszerűleg teljesülnek. Tehát $\left(C^1_{\mathbb{K}}[a,b], \|\cdot\|_{C^1}\right)$ nrmált tér $\mathbb{K}$ fölött. Legyen most $(f_n) \subseteq C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$ egy $\|\cdot\|_{C^1}$-Cauchy sorozat. $\|\cdot\|_{C^1}$ definíciójából triviálisan adódólag mind (f_n), mind (f_n') $\|\cdot\|_C$-Cauchy-sorozat a $C_{\mathbb{K}}[a,b]$ térben. Mivel e tér teljes, ezért mind (f_n), mind pedig (f_n') $\|\cdot\|_C$-konvergens sorozat a $C_{\mathbb{K}}[a,b]$ térben, azaz mind (f_n), mind pedig (f_n') egyenletesen konvergensek $[a,b]$-n. A bevezető analíziskurzusból jól ismert állítás miatt ekkor az (f_n) függvénysorozat f limeszfüggvénye is folytonosan deriválható, továbbá f' éppen az (f_n') függvénysorozat egyenletes limeszfüggvénye. Azaz $f \in C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$, továbbá $\|f - f_n\|_C \to 0$ és $\|f' - f_n'\|_C \to 0$. E kettőt összeadva éppen

$$\|f - f_n\|_{C^1} \to 0 \qquad (n \to +\infty)$$

Tehát az (f_n) sorozat $\|\cdot\|_{C^1}$-konvergens. □

3.5.6. Feladat. Jelölje $\|\cdot\|^*_{C^1} : C^1_{\mathbb{K}}[a,b] \to \mathbb{R}_+$,

$$\|f\|^*_{C^1} := |f(a)| + \|f'\|_C .$$

Mutassuk meg, hogy $\|\cdot\|^*_{C^1}$ norma a $C^1_{\mathbb{K}}[a,b]$ vektortéren. Igazoljuk, hogy a $\|\cdot\|^*_{C^1}$ norma ekvivalens a $\|\cdot\|_{C^1}$ normával, azaz vannak olyan α, β pozitív konstansok, hogy $\|\cdot\|^*_{C^1} \le \alpha \cdot \|\cdot\|_{C^1}$ és $\|\cdot\|^*_C \le \beta \cdot \|\cdot\|^*_{C^1}$. (*Ötlet:* Newton–Leibniz-tétel.)

3.5.7. Megjegyzés. Legyen $k \in \mathbb{N}$. A fentiekhez teljesen hasonlóan végigvihető, hogy az $[a,b]$ intervallumon k-szor folytonosan deriválható $\mathbb{K}$-értékű függvények $C^k_{\mathbb{K}}[a,b]$ összessége Banach-tér a $\|\cdot\|_{C^k} : C^1_{\mathbb{K}}[a,b] \to \mathbb{R}_+$,

$$\|f\|_{C^k} := \|f\|_C + \sum_{j=1}^{k} \left\|f^{(j)}\right\|_C$$

normával. Azaz $\left(C^k_{\mathbb{K}}[a,b], \|\cdot\|_{C^k}\right)$ Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött.

Az ℓ^∞, c és c_0 terek

Az $L^\infty_{\mathbb{K}}(X)$ tér egyik fontos speciális esete az $X = \mathbb{N}$ választással adódó $\ell^\infty_{\mathbb{K}} := L^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ Banach-tér. Ez a korlátos $\mathbb{K}$-sorozatok tere a szuprémumnormával. Ezzel $(\ell^\infty_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Jelölje

$$c := \left\{ a = (a_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : a \text{ konvergens} \right\}.$$

Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért $c \subseteq \ell^\infty$. Mivel pedig konvergens sorozatok összege is, számszorosa is konvergens, ezért $c \leq \ell^\infty$ altér. Legyen most $\left(a^{(k)}\right) \subseteq c$ egy $\mathbb{N}$-en egyenletesen konvergens sorozat. (Ekkor persze minden k-ra $a^{(k)}$ maga is egy $\mathbb{K}$-beli $\left(a_n^{(k)}\right)_{n=1}^{+\infty}$ sorozat.) Mivel az $\left(a^{(k)}\right)$ sorozat egyenletesen Cauchy-típusú, ezért azonnal adódik, hogy az

$$\alpha^{(k)} := \lim a^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} a_n^{(k)}$$

értékek sorozata maga is $\mathbb{K}$-beli Cauchy-sorozat, ezért konvergál is egy $\alpha \in \mathbb{K}$ számhoz. Az $a^{(k)} \subseteq c$ sorozat $a \in \ell_{\mathbb{K}}^\infty$ egyenletes limeszsorozatának α-hoz való tartása már a szokásos módon adódik: Legyen ε tetszőleges pozitív szám; ekkor a fentiek szerint van olyan k_0 küszöbindex, hogy $k \geq k_0$ esetén $\left|\alpha - \alpha^{(k)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ugyanakkor van olyan n_0 küszöbindex, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$\left\| a - a^{(k)} \right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| a_n - a_n^{(k)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezért persze minden $k \geq k_0$ és $n \geq n_0$ esetén

$$|a_n - \alpha| \leq \left| a_n - a_n^{(k)} \right| + \left| a_n^{(k)} - \alpha \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz minden $n \geq n_0$ esetén $|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$, amivel éppen azt mutattuk meg, hogy

$$\lim a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha,$$

következésképp $a \in c$. Tehát c az $\ell_{\mathbb{K}}^\infty$ térnek olyan altere, amely zárt az egyenletes konvergenciára nézve. Így a 3.5.4. Megjegyzés miatt $(c, \|\cdot\|_\infty)$ **Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött**. A fentiekből ugyanakkor az is következik, hogy a lim mint c-n értelmezett $(a \mapsto \lim a)$ lineáris funkcionál folytonos. Jelölje most

$$c_0 := \left\{ a = (a_n)_{n=1}^{+\infty} \in c : \lim a = 0 \right\}.$$

Természetesen $c_0 = \ker(\lim)$, ami a lim funkcionál folytonossága miatt zárt altere c-nek. Ezért persze $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ **is Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött**. Ugyanakkor az is triviálisan látható, hogy tetszőleges $a \in c_0$ esetén az $|a|$ sorozat fölveszi maximumát az $\mathbb{N}$ halmazon, tehát a c_0-beli szuprémumnorma egyúttal maximumnorma is (éppúgy, mint a $C(K)$ téren).

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.5.2. Az L^p Banach-terek ($1 \leq p < +\infty$)

Az alábbiakban különösen támaszodunk a mértékelméleti ismeretekre.

3.5.8. Definíció. Legyen $(T, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér. Egy $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvényt integrálhatónak (abszolút integrálhatónak) mondunk, ha $\int\limits_T f_+ \, d\mu$ és $\int\limits_T f_- \, d\mu$ közül legalább az egyik (mindegyik) véges. Ha f integrálható, akkor jelölje

$$\int\limits_T f \, d\mu := \int\limits_T f_+ \, d\mu - \int\limits_T f_- \, d\mu.$$

f nyilván pontosan akkor abszolút integrálható, ha integrálható és integrálja véges.

3.5.9. Megjegyzés. Ha f abszolút integrálható, akkor μ-m.m. véges értékű, továbbá f egy alkalmas σ-véges halmazon kívül eltűnik. Ha $|f|$ intergálja 0, akkor $f = 0$ μ-m.m..

3.5.10. Definíció. Legyen $(T, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér. Jelölje

$$L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu) := \{f : T \to \mathbb{R} \text{ mérhető } \mid f \text{ abszolút integrálható}\}.$$

$L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ nyilván valós vektortér a szokásos függvényműveletekkel.

3.5.11. Megjegyzés. Bármely $f \in L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ és $g : T \to \overline{\mathbb{R}}$ esetén ha $f = g$ μ-m.m., akkor g abszolút μ-integrálható és $\forall E \in \mathcal{S}$-re $\int\limits_E f \, d\mu = \int\limits_E g \, d\mu$. Ha viszont adott egy abszolút integrálható $g : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, ahhoz van olyan $f \in L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$, hogy $f = g$ μ-m.m..

A fenti megjegyzésben szereplő f és g függvényeket tehát mértékelméleti szempontból nem szükséges megkülönböztetnünk egymástól, s a továbbiakban nem is fogjuk. Eszerint hát **„egy függvény pontosan akkor abszolút μ-integrálható, ha eleme $L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$-nek”**. Így persze $L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ elemeinél megengedhetjük – utólagosan –, hogy végtelen értéket is fölvegyenek — persze csak egy μ-nullmértékű halmazon.

Nyilván egy $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvényre ekkor

$$f \in L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu) \iff \int\limits_T |f| \, d\mu < +\infty.$$

Konvenció: *Ha $L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$-ben a μ-m.m. megegyező függvényeket nem különböztetjük meg, az a vektortérstruktúrát nem rontja el.*

(Egzakt nyelven arról van szó, hogy $L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$-ben a μ-m.m. eltűnő függvények egy M alteret alkotnak, s a továbbiakban az $L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu) \diagup_M$ faktorteret nevezzük $L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$-nek.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.5.12. Definíció. Legyen $(T, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér. Jelölje

$$L^1_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{S}, \mu) := \left\{ f : T \to \mathbb{C} \text{ mérhető } \mid \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu) \right\}.$$

$L^1_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{S}, \mu)$-ben a μ-m.m. megegyező függvényeket nem különböztetjük meg. Ezen konvencióval $L^1_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ vektortérstruktúrája megmarad.

Nyilván egy $f : T \to \mathbb{C}$ mérhető függvényre

$$f \in L^1_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{S}, \mu) \iff \int_T |f| \, d\mu < +\infty.$$

3.5.13. Definíció. $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ esetén jelölje

$$\int_T f \, d\mu := \int_T \operatorname{Re} f \, d\mu + i \cdot \int_T \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

Az $\int_T \cdot \, d\mu : L^1_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{S}, \mu) \to \mathbb{C}$ leképezés komplex lineáris funkcionál.

3.5.14. Megjegyzés. Tetszőleges $f, g \in L^1_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ esetén ha $\forall E \in \mathcal{S}$-re $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$, akkor$f = g$ μ-m.m.

3.5.15. Állítás. *Tetszőleges $f, g : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mérhető függvényekre és $\alpha \geq 0$ számra $\int_T f + g \, d\mu = \int_T f \, d\mu + \int_T g \, d\mu$ és $\int_T \alpha \cdot f \, d\mu = \alpha \cdot \int_T f \, d\mu$.*

3.5.16. Lemma. *Ha a $g, h : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvények egyike integrálható, a másik abszolút integrálható, akkor $\int_T g - h \, d\mu = \int_T g \, d\mu - \int_T h \, d\mu$.*

3.5.17. Következmény. *Ha a $g, h : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvények egyike integrálható, a másik abszolút integrálható, akkor $\int_T g + h \, d\mu = \int_T g \, d\mu + \int_T h \, d\mu$, továbbá minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\int_T \alpha \cdot g \, d\mu = \alpha \cdot \int_T g \, d\mu$.*

3.5.18. Tétel. *Tetszőleges $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ függvényekre $\int_T f + g \, d\mu = \int_T f \, d\mu + \int_T g \, d\mu$ és $\int_T \alpha \cdot f \, d\mu = \alpha \cdot \int_T f \, d\mu$.*

Konvenció: *Az eddig látottak alapján egységesítve a valós és komplex esetet, mondhatjuk, hogy $L^1_{\mathbb{K}}(T)$ vektortér K fölött. $L^1_{\mathbb{K}}(T)$-ben a μ-m.m. megegyező függvényeket nem különböztetjük meg. A vektortér-struktúra ekkor nyilván nem romlik el.*

3.5.19. Megjegyzés. $\left| \int_T f \, d\mu \right| \leq \int_T |f| \, d\mu \ \left(f \in L^1_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu) \right)$.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.5.20. Definíció. Mint láttuk, ha $L^1_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$-ben a μ-m.m. megegyező függvényeket nem különböztetjük meg, akkor $L^1_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ vektortér $\mathbb{K}$ fölött. Jelölje ezen vektortérben

$$\|\cdot\|_1 : L^1_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu) \to \mathbb{R}_+,$$
$$\|f\|_1 := \int_T |f|\, d\mu.$$

Azonnal látható, hogy $\|\cdot\|_1$ norma az $L^1_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ vektortéren, melyet L^1-normának nevezünk. Ezzel tehát $\left(L^1_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu), \|\cdot\|_1\right)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött.

3.5.21. Definíció. Legyen $p \geq 1$ valós szám és $f : T \to \mathbb{K}$ mérhető függvény. Jelölje

$$\|f\|_p := \left(\int_T |f|^{\,p} d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

amelyet az f függvény p-normájának nevezünk (ez még nem „igazi" norma, csupán „nyers félnorma"!).

Az alábbi lemma a korábbi tanulmányokból ismert Young-egyenlőtlenség:

3.5.22. Lemma. *Legyenek p,q olyan pozitív számok, amelyekre $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ekkor tetszőleges $a,b \geq 0$ számokra*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Hölder-egyenlőtlenség: ♦

3.5.23. Tétel. *Legyenek p,q olyan pozitív számok, amelyekre $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ekkor tetszőleges $f,g : T \to \mathbb{K}$ mérhető függvényekre*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

másképpen

$$\int_T |f \cdot g|\, d\mu \leq \left(\int_T |f|^{\,p} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_T |g|^{\,q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bizonyítás. Ha $\|f\|_p$ és $\|g\|_q$ közül valamelyik 0, akkor f vagy g triviálisan μ-m.m. nulla, tehát az egyenlőség teljesül. Ha $\|f\|_p$ és $\|g\|_q$ valamelyike $+\infty$,

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

akkor is triviális az egyenlőtlenség. Tegyük hát föl, hogy $\|f\|_p$ és $\|g\|_q$ mindegyike véges pozitív szám. Alkalmazzuk a Young-egyenlőtlenséget minden $t \in T$ mellett az

$$a_t := \frac{f(t)}{\|f\|_p} \qquad \text{és} \qquad b_t := \frac{g(t)}{\|g\|_q}$$

számokra, majd ezt az egyenlőséget integráljuk T-n μ szerint. Éppen a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. □

Minkowski-egyenlőtlenség ♦

3.5.24. Tétel. *Tetszőleges $p \geq 1$ valós számra és $f, g : T \to \mathbb{K}$ mérhető függvényekre*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Bizonyítás. $p = 1$ esetére az állítás triviális. Legyen $p > 1$. Az

$$|f+g|^p = |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \leq |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1}$$

egyenlőtlenséget integráljuk T-n μ szerint; majd a kapott jobb oldal két tagjára alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
&\int_T |f+g|^{\,p} d\mu \leq \\
&\leq \int_T |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_T |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \\
&\leq \left(\int_T |f|^{\,p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_T |f+g|^{q\cdot(p-1)} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad + \left(\int_T |g|^{\,p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_T |f+g|^{q\cdot(p-1)} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\int_T |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_T |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_T |g|^{\,p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_T |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\left(\int_T |f|^{\,p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_T |g|^{\,p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left(\int_T |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

azaz

$$\int_T |f+g|^{\,p} d\mu \le \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \cdot \left(\int_T |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ha $\int_T |f+g|^{\,p} d\mu = 0$, akkor persze az igazolandó egyenlőtlenség úgyis nyilvánvaló. Ha $\|f\|_p$ vagy $\|g\|_p$ végtelen, akkor is. Minden más esetben

$$0 < \int_T |f+g|^{\,p} d\mu \le \int_T \left[2\left(|f| \vee |g|\right)\right]^{\,p} d\mu \le 2^p \left(\int_T |f|^{\,p} d\mu + \int_T |g|^{\,p} d\mu \right) < +\infty,$$

tehát az előbb kapott egyenlőtlenséget leoszthatjuk $\left(\int_T |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$-val:

$$\left(\int_T |f+g|^{\,p} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_T |f+g|^{\,p} d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}} \le \|f\|_p + \|g\|_p ,$$

s éppen ezt akartuk bizonyítani. □

3.5.25. Definíció. Legyen $p \ge 1$ valós szám. Jelölje

$$L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu) := \left\{ f : T \to \mathbb{K} \text{ mérhető } \mid \|f\|_p < +\infty \right\}.$$

A $T \to \mathbb{K}$ mérhető függvények vektorterének vektortérstruktúrája nyilvánvalóan nem sérül, ha benne a μ-m.m. megegyező függvényeket nem különböztetjük meg. Ezen konvencióval $\|\cdot\|_p$ nyers norma ezen a vektortéren (használva, hogy $\|f\|_p = \left(\| |f|^p \|_1\right)^{\frac{1}{p}}$). Így a 3.5.1. Megjegyzés alapján $L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ vektortér $\mathbb{K}$ fölött, sőt $\left(L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu), \|\cdot\|_p \right)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött.

3.5.26. Lemma. *Legyen $(f_n) \subseteq L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ olyan sorozat, amelyre*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

Ekkor a $\sum f_k$ függvénysor μ-m.m. konvergens, továbbá a $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ összegfüggvényre

$$\left\| \sum_{k=1}^{+\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_p \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Definiáljuk a T-n értelmezett F_n, G_n és G függvényeket ($n \in \mathbb{N}$) a következőképpen:

$$F_n(t) := \sum_{k=1}^{n} f_k(t), \quad G_n(t) := \sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|, \quad G(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(t)|.$$

Persze minden t-re $G_n(t) \nearrow G(t)$, így aztán $G_n^p(t) \nearrow G^p(t)$, ahonnan a Beppo Levi-tétel, majd a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\int_T G^p \, d\mu = \lim \int_T G_n^p \, d\mu = \left(\left\| \sum_{k=1}^{n} |f_k| \right\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_p \right)^p,$$

ez utóbbi pedig véges korlát, tehát G^p abszolút integrálható. Ezért μ-m.m. t-re $G^p(t)$ véges, ahonnan aztán $G(t)$ is véges. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy μ-m.m. t-re $\sum f_k(t)$ abszolút konvergens, következésképp konvergens is. Jelölje F ezen függvénysor összegfüggvényét. Ekkor F_n pontonként μ-m.m. tart F-hez. Másrészt $G \geq G_n \geq |F_n| \to |F|$ alapján $G \geq |F|$, így $|F - F_n| \leq 2G$, amiért is $2^p \cdot G^p$ L^1-beli majoránsa az $(|F - F_n|^p)$ sorozatnak. Ugyanakkor $(|F - F_n|^p)$ pontonként μ-m.m. tart $\mathbf{0}$-hoz. Így a Lebesgue-féle dominált konvergenciatétel miatt

$$\int_T |F - F_n|^p \, d\mu \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

ami lényegében éppen a bizonyítandó állítás. □

3.5.27. Tétel (Riesz–Fischer). *$\left(L_{\mathbb{K}}^p(T, \mathcal{S}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött. Továbbá ha egy L^p-beli (f_n) sorozat ebben a térben konvergál egy $f \in L_{\mathbb{K}}^p(T, \mathcal{S}, \mu)$ függvényhez, akkor egy alkalmas részsorozata μ-m.m. is konvergál f-hez (Riesz-lemma).*

Bizonyítás. Legyen $(f_n) \subseteq L_{\mathbb{K}}^p(T, \mathcal{S}, \mu)$ Cauchy-sorozat. Válasszunk ki ebből olyan (f_{n_k}) részsorozatot, hogy minden k-ra

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Alkalmazzuk az előző lemmát az $\left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right) \subseteq L_{\mathbb{K}}^p(T, \mathcal{S}, \mu)$ függvénysorozatra. Ezzel $\sum \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$ pontonként μ-m.m. konvergál egy $h \in L_{\mathbb{K}}^p(T, \mathcal{S}, \mu)$ függvényhez, s a részletösszegek $\|\cdot\|_p$-ban is.tartanak h-hoz. Emiatt egyrészt

$$f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right)$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

pontonként μ-m.m. konvergál $f_{n_1}+h$-hoz, másrészt a részletösszegek $\|\cdot\|_p$-tartása miatt (f_{n_k}) $\|\cdot\|_p$-ben is tart $f_{n_1}+h$-hoz (ezzel igazoltuk is a Riesz-lemmát). Mindezzel megmutattuk, hogy (f_n) olyan Cauchy-sorozat, amelynek van konvergens részsorozata. Ekkor persze (f_n) maga is konvergens. □

3.5.28. Megjegyzés. Az $\left(L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu),\|\cdot\|_p\right)$ Banach-térben $(1\le p<+\infty)$ az $\mathcal{S}$-mérhető $\mathbb{K}$-értékű lépcsős függvények sűrű alteret alkotnak.

Bizonyítás. Tetszőleges $f\in L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ esetén a lépcsős függvények mértékelméletből jól ismert alaptulajdonsága szerint van olyan lépcsős függvényekből álló (φ_n) sorozat, amely pontonként μ-m.m. tart f-hez, továbbá amelyet $|f|$ majorál. A Lebesgue-féle majorált konvergenciatétel miatt ekkor (alkalmazva az $|f-\varphi_n|^p$ függvényekre) φ_n p-normában is tart f-hez. □

3.5.29. Definíció. A fentiek speciális eseteként jelölje tetszőleges $1\le p<+\infty$ esetén $\left(\ell^p_{\mathbb{K}},\|\cdot\|_p\right)$ az

$\left(L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\#),\|\cdot\|_p\right)$ Banach-teret, ahol $\#$ a számlálómérték.

$\ell^p_{\mathbb{K}}$ elemei éppen a $\mathbb{K}$-értékű p-adikusan felösszegezhető sorozatok, továbbá $\mathbf{a}=(a_n)_{n=1}^{+\infty}\in\ell^p_{\mathbb{K}}$ esetén $\|\mathbf{a}\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. A $p=+\infty$ esetet (mint a korlátos $\mathbb{K}$-sorozatok $(\ell^\infty_{\mathbb{K}},\|\cdot\|_\infty)$ Banach-terét) már az előző szakaszban definiáltuk.

Speciálisan $p=2$ esetén a fent tárgyalt Hölder-egyenlőtlenség miatt bármely $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\ell^2_{\mathbb{K}}$ esetén $\sum a_k\overline{b_k}$ abszolút konvergens sor. Jelölje $\langle\cdot\mid\cdot\rangle:\ell^2_{\mathbb{K}}\times\ell^2_{\mathbb{K}}\to\mathbb{K}$,

$$\langle\mathbf{a}\mid\mathbf{b}\rangle:=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\overline{b_k}.$$

Ez nyilván $\mathbb{K}$-skalárszorzat az $\ell^2_{\mathbb{K}}$ vektortéren, s az indukált norma éppen $\|\cdot\|_2$, amellyel ellátva $\ell^2_{\mathbb{K}}$ a már látottak miatt Banach-tér. Ezért $\left(\ell^2_{\mathbb{K}},\langle\cdot\mid\cdot\rangle\right)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött.

3.5.3. Az L^∞ Banach-tér

Legyen $(T,\mathcal{S},\mu)$ mértéktér. Jelölje tetszőleges $f:T\to\overline{\mathbb{R}}$ vagy $f:T\to\mathbb{C}$ esetén

$$\|f\|^{(\mu)}_\infty:=\inf\left\{\sup_E|f|:E\in\mathcal{S},\mu(T\setminus E)=0\right\}$$

az f függvény μ-abszolút szuprémuma (ez $+\infty$ is lehet). Azonnal látható, hogy mindig

$$\|f\|^{(\mu)}_\infty:=\min\left\{\sup_E|f|:E\in\mathcal{S},\mu(T\setminus E)=0\right\},$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

hiszen definíció szerint minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik $E_n \in \mathcal{S}$, hogy $\mu(T \setminus E_n) = 0$ és $\sup_{E_n} |f| > \|f\|_\infty^{(\mu)} - \frac{1}{n}$; ekkor $E := \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$ választással triviálisan $\sup_E |f| = \|f\|_\infty^{(\mu)}$ és $\mu(T \setminus E) = 0$.

A $T \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-mérhető függvények vektorterének vektortérstruktúrája nyilvánvalóan nem sérül, ha benne a μ-m.m. megegyező függvényeket nem különböztetjük meg. Ezen a vektortéren az $f \mapsto \|f\|_\infty^{(\mu)}$ hozzárendelés nyilvánvalóan nyers norma. Így a 3.5.1. Megjegyzés alapján a fenti konvencióval

$$L_{\mathbb{K}}^{\infty}(T, \mathcal{S}, \mu) := \left\{ f \in \mathbb{K}^T : \|f\|_\infty^{(\mu)} < +\infty \right\}$$

vektortér $\mathbb{K}$ fölött, sőt $\left(L_{\mathbb{K}}^{\infty}(T, \mathcal{S}, \mu), \|\cdot\|_\infty^{(\mu)} \right)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött.

3.5.30. Állítás. $\left(L_{\mathbb{K}}^{\infty}(T, \mathcal{S}, \mu), \|\cdot\|_\infty^{(\mu)} \right)$ *teljes, azaz Banach-tér* $\mathbb{K}$ *fölött.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n) \subseteq L_{\mathbb{K}}^{\infty}(T, \mathcal{S}, \mu)$ Cauchy-sorozat. Ekkor a fentiek alapján minden $m, n \in \mathbb{N}$-re van olyan $E_{m,n} \in \mathcal{S}$, hogy

$$\sup_{E_{m,n}} |f_m - f_n| = \|f_m - f_n\|_\infty^{(\mu)}$$

és $\mu(T \setminus E_{m,n}) = 0$. Jelölje $E := \bigcap_{m,n \in \mathbb{N}} E_{m,n}$. Persze $\mu(T \setminus E) = 0$. Továbbá

$$\sup_E |f_m - f_n| \leq \sup_{E_{m,n}} |f_m - f_n| = \|f_m - f_n\|_\infty^{(\mu)}$$

alapján az f_n függvények E-re való leszűkítései Cauchy-sorozatot alkotnak a $\left(L_{\mathbb{K}}^{\infty}(E), \|\cdot\|_\infty \right)$ Banach-térben. Így $\left(f_{n|E} \right)$ konvergens is e térben, azaz van olyan $f \in L_{\mathbb{K}}^{\infty}(E)$, hogy (f_n) egyenletesen tart f-hez az E halmazon. Az egyenletes konvergencia miatt f mérhető. Mivel E nullmértékű, ezért f természetes módon tekinthető $L_{\mathbb{K}}^{\infty}(T, \mathcal{S}, \mu)$ egy elemének. Most

$$\|f - f_n\|_\infty^{(\mu)} \leq \sup_E |f - f_n| \to 0$$

miatt f_n konvergál f-hez az $\left(L_{\mathbb{K}}^{\infty}(T, \mathcal{S}, \mu), \|\cdot\|_\infty^{(\mu)} \right)$ térben. □

3.5.31. Megjegyzés. A mértékelméletből tanultak miatt minden korlátos mérhető függvény egyenletesen közelíthető mérhető lépcsős függvényekkel. Innen triviálisan adódik, hogy az $\mathcal{S}$-mérhető $\mathbb{K}$-értékű lépcsős függvények sűrű alterét alkotják az $\left(L_{\mathbb{K}}^{\infty}(T, \mathcal{S}, \mu), \|\cdot\|_\infty^{(\mu)} \right)$ Banach-térnek.

A továbbiakban – hacsak nem okoz félreértést – $\|\cdot\|_\infty^{\mu}$ helyett rendszerint csak $\|\cdot\|_\infty$-t írunk.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.5.4. A Meyer-tétel és a Dynkin-tétel. Sűrűség L^p-ben

3.5.32. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha > 0$ esetén a $[-\alpha, \alpha]$ intervallumon értelmezett függvényekből álló,

$$f_0(t) := \alpha,$$
$$f_{n+1}(t) := \frac{1}{2\alpha} \cdot \left(f_n^2(t) + \alpha^2 - t^2\right)$$

rekurzióval értelmezett függvénysorozatra

1. minden n-re f_n polinom és $f_n \geq 0$ $[-\alpha, \alpha]$-n *(a definícióból közvetlenül)*;
2. minden $t \in [-\alpha, \alpha]$-ra $(f_n(t))$ monoton fogyó sorozat *(teljes indukcióval* $f_{n+1}(t) - f_{n+2}(t) = \frac{1}{2\alpha} \cdot (f_n(t) + f_{n+1}(t)) \cdot (f_n(t) - f_{n+1}(t)) \geq 0$ *alapján)*;
3. minden $t \in [-\alpha, \alpha]$-ra $(f_n(t))$ monoton fogyólag tart $\alpha - |t|$-hez *(az f limeszfüggvény triviálisan kielégíti az $f(t) = \frac{1}{2\alpha} \cdot \left(f^2(t) + \alpha^2 - t^2\right)$ egyenlőséget, amelyből kihozható $f(t) = \alpha - |t|$).*

3.5.33. Következmény. *Tetszőleges $\alpha > 0$ esetén létezik olyan valós polinomokból álló sorozat, amely a $[-\alpha, \alpha]$ intervallumon pontonként monoton növőleg tart $|\cdot|$-hez.*

Legyen T egy halmaz. Jelölje $L^\infty(T)$ a T-n értelmezett korlátos függvények vektorterét. Egy $H \subseteq L^\infty(T)$ halmazt szorzatzártnak mondunk, ha $f, g \in H$ esetén $f \cdot g \in H$. Jelölje $\mathbb{1} \in L^\infty(T)$ az azonosan 1 függvényt.

3.5.34. Definíció. Egy $M \leq L^\infty(T)$ alteret **Dynkin-tér**nek (vagy Dynkin-altérnek) nevezünk, ha $\mathbb{1} \in M$, továbbá

$$f \in L^\infty(T), (f_n) \subseteq M, f_n \geq 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}), f_n(t) \nearrow f(t) \ (\forall t \in T) \implies f \in M.$$

A Dynkin-tereket λ-rendszereknek is szokás nevezni.

Nyilván $L^\infty(T)$ maga Dynkin-altér, továbbá akárhány Dynkin-altér metszete is Dynkin-altér. Így bármely $H \subseteq L^\infty(T)$ halmazra a H-t tartalmazó Dynkin-alterek metszete a legszűkebb H-t tartalmazó Dynkin-altér. Ezt a Dynkin-alteret a H függvényhalmaz generálta Dynkin-altérnek nevezzük és $\mathcal{D}(H)$-val jelöljük.

3.5.35. Definíció. Egy $M \leq L^\infty(T)$ alteret **Stone-hálónak** nevezünk, ha minden $f \in M$ esetén

$$|f| \in M \qquad \text{és} \qquad \mathbb{1} \wedge f \in M.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3.5.36. Megjegyzés. Ha $M \leq L^\infty(T)$ Stone-háló, akkor minden $f, g \in M$ esetén $f \vee g$ és $f \wedge g \in M$. ($f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, stb.)

3.5.37. Tétel. *Ha $H \subseteq L^\infty(T)$ szorzatzárt, akkor $\mathcal{D}(H)$ is az.*

Bizonyítás. Jelölje $f \in \mathcal{D}(H)$ esetén

$$\mathcal{D}_f := \{g \in \mathcal{D}(H) : f \cdot g \in \mathcal{D}(H)\}.$$

$f \geq 0$ esetén triviálisan leellenőrizve adódik, hogy $\mathcal{D}_f$ Dynkin-altér. Ha most $f \in \mathcal{D}(H)$ tetszőleges előjelű, akkor a korlátosság miatt van olyan $t \in \mathbb{R}$, hogy $f + t \cdot \mathbb{1} \geq 0$. $\mathcal{D}(H)$ altér volta miatt triviálisan

$$\mathcal{D}_{f+t\cdot\mathbb{1}} = \mathcal{D}_f,$$

hiszen

$$(f + t \cdot \mathbb{1}) \cdot g = f \cdot g + t \cdot g \qquad \text{és} \qquad f \cdot g = (f + t \cdot \mathbb{1}) \cdot g - t \cdot g.$$

Innen persze adódik, hogy $\mathcal{D}_f$ ilyenkor is Dynkin-altér. Most ha $f \in H$, akkor minden $g \in H$-ra $f \cdot g \in H \subseteq \mathcal{D}(H)$ miatt $g \in \mathcal{D}_f$, azaz

$$H \subseteq \mathcal{D}_f,$$

ahonnan $\mathcal{D}_f$ Dynkin-altér volta miatt $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}_f$. Eszerint $f \in H$, $g \in \in \mathcal{D}(H)$ esetén $f \cdot g \in \mathcal{D}(H)$. Ezt újra átfogalmazva: tetszőleges rögzített $g \in \mathcal{D}(H)$-ra minden $f \in H$ esetén $f \in \mathcal{D}_g$, azaz

$$H \subseteq \mathcal{D}_g,$$

ahonnan most $\mathcal{D}_g$ Dynkin-altér volta miatt $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}_g$. Eszerint tehát tetszőleges $g, f \in \mathcal{D}(H)$ esetén $f \cdot g \in \mathcal{D}(H)$, azaz $\mathcal{D}(H)$ szorzatzárt. □

3.5.38. Tétel. *Ha $H \subseteq L^\infty(T)$ szorzatzárt, akkor $\mathcal{D}(H)$ Stone-háló.*

3.5.39. Definíció. $H \subseteq L^\infty(T)$ esetén jelölje

$$\sigma_H := \sigma\left(\bigcup_{f \in H} \sigma_f\right),$$

ez nyilván a legszűkebb T-beli σ-algebra, amelyre nézve minden $f \in H$ függvény mérhető. A σ_H σ-algebrát a H függvényhalmaz generálta σ-algebrának nevezzük.

3.5.40. Tétel. *Ha $M \leq L^\infty(T)$ olyan Dynkin-altér, amely egyúttal Stone-háló is, akkor M tartalmaz minden σ_M-mérhető korlátos valós függvényt. (Mivel M triviálisan ilyen függvényekből áll, ezért úgy is fogalmazhatunk, hogy M megegyezik a σ_M-mérhető korlátos valós függvények összeségével.)*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Jelölje

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq T : \chi_A \in M\}.$$

$\mathbb{1} \in M$ miatt persze $T \in \mathcal{A}$. Mivel két függvény alsó ill. felső burkolójára nézve M zárt, ezért $\mathcal{A}$ metszet- és uniózárt. A

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$$

egyenlőség és a metszetzártság miatt $\mathcal{A}$ különbségzárt is. A

$$\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} \nearrow \chi_{\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k}$$

határátmenet és M Dynkin-altér volta miatt $\mathcal{A}$ σ-uniózárt is. Ugyanakkor $\mathbb{1} \in M$ miatt $T \in \mathcal{A}$. Ezért $\mathcal{A}$ egy T alaphalmazú σ-algebra. Megmutatjuk, hogy $\sigma_M \subseteq \mathcal{A}$. Legyen $f \in M$ rögzített. Ekkor minden $\alpha \in \mathbb{R}$ mellett a

$$\mathbb{1} \wedge [n \cdot (f - \alpha\mathbb{1} + |f - \alpha\mathbb{1}|)] \nearrow \chi_{(f>\alpha)}$$

határátmenet alapján $\chi_{(f>\alpha)} \in M$, hiszen M Dynkin-altér és a szóban forgó függvénysorozat elemei nemnegatívak. Így $(f > \alpha) \in \mathcal{A}$, s mivel ez minden α-re igaz, ezért f $\mathcal{A}$-mérhető. Tehát M-nek minden eleme $\mathcal{A}$-mérhető, így $\sigma_M \subseteq \mathcal{A}$.

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy minden σ_M-mérhető karakterisztikus függvény M-ben van. Mivel M altér, ezért minden σ_M-mérhető lépcsős függvény is M-ben van. Mivel tetszőleges nemnegatív σ_M-mérhető függvény előáll nemnegatív σ_M-mérhető lépcsős függvények pontonként monoton növő limeszeként, ezért M Dynkin-tulajdonsága implikálja, hogy tetszőleges korlátos nemnegatív σ_M-mérhető függvény M-hez tartozik. Innen az $f = f_+ - f_-$ egyenlőség és M vektortér volta miatt nyerjük, hogy minden σ_M-mérhető korlátos valós függvény eleme M-nek. □

A legutóbbi három tételből triviálisan következik az ún. Meyer-tétel:

3.5.41. Tétel (Meyer)**.** *Ha $L \leq L^\infty(T)$ Dynkin-altér és $H \subseteq L$ szorzatzárt függvényhalmaz, akkor L tartalmaz minden σ_H-mérhető korlátos valós függvényt.*

Az alábbi tétel alapvetően fontos:

3.5.42. Tétel. *Legyen $(T, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér, $1 \leq p < +\infty$ és $\mathcal{H} \leq L^p_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ olyan korlátos függvényekből álló szorzatzárt altér, amelyre $\mathbb{1} \in \mathcal{H}$ és $\sigma_{\mathcal{H}} = \mathcal{S}$. Ekkor $\mathcal{H}$ sűrű altere $L^p_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$-nek.*

Bizonyítás. $\mathbb{1} \in \mathcal{H}$ miatt μ véges. Jelölje M a $\mathcal{H}$ tér $\|\cdot\|_p$-lezárásának $L^\infty(K)$-val való metszetét. A kis Lebesgue-tétel miatt triviálisan M Dynkin-tér. Ebben $\mathcal{H}$ szorzatzárt részhalmaz. Így a Meyer-tétel miatt M minden $\sigma_{\mathcal{H}}$-mérhető

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

(=$\mathcal{S}$-mérhető) korlátos valós függvényt tartalmaz. Mivel a $\mathcal{H}$ tér L^p-beli lezárása tartalmazza M-et, ezért tartalmaz minden K-n értelmezett korlátos $\mathcal{S}$-mérhető függvényt. Az $\mathbb{1} \in \mathcal{H}$ feltételből azonnal adódik, hogy a Lebesgue-tétel miatt ugyanakkor ezek a függvények maguk is sűrűek $L^p_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$-ben, ezért a $\mathcal{H}$ tér L^p-beli lezárása maga az $L^p_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ tér. □

3.5.43. Következmény. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz az n-dimenziós Lebesgue-mértékkel ellátva. Legyen $1 \leq p < +\infty$. Ekkor $C_{\mathbb{R}}(K)$ sűrű altere $L^p_{\mathbb{R}}(K)$-nak.*

Bizonyítás. $C_{\mathbb{R}}(K)$ szorzatzárt és $\mathbb{1} \in C_{\mathbb{R}}(K)$. Továbbá K-nak minden zárt C részhalmazára $d(\cdot, C)$ folytonos függvény, ahonnan $C \in \sigma_{C_{\mathbb{R}}(K)}$. Innen triviálisan $\mathcal{B}(K) = \sigma_{C_{\mathbb{R}}(K)}$, ahonnan a fenti tétel miatt $C_{\mathbb{R}}(K)$ sűrű $L^p_{\mathbb{R}}(K)$-ban. □

3.5.44. Következmény. *$1 \leq p < +\infty$ esetén $C_{\mathbb{C}}(K)$ sűrű altere $L^p_{\mathbb{C}}(K)$-nak.*

Az előbbi tételnek még néhány fontos következményét fogalmazzuk meg.

3.5.45. Következmény. *Ha I korlátos intervallum és $\mu : \mathcal{B}(I) \to \mathbb{R}_+$ véges Borel-mérték, akkor minden $1 \leq p < +\infty$ esetén a polinomok $\mathcal{P}$ altere sűrű $L^p_{\mathbb{R}}(I, \mathcal{B}(I), \mu)$-ben.*

Bizonyítás. Persze $\mathbb{1} \in \mathcal{P}$ szorzatzárt altere $L^p_{\mathbb{R}}(I, \mathcal{B}(I), \mu)$-nek. Az I-beli kompakt intervallumok már másodfokú polinomok nívóhalmazaként is előállnak. Ezek viszont generálják az I-beli Borel-halmazokat. Tehát $\sigma_{\mathcal{P}} = \mathcal{B}(I)$. A tétel alkalmazása innen már triviális. □

Egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt trigonometrikus polinomnak mondunk, ha előáll $(t \mapsto \cos kt)$, illetve $(t \mapsto \sin kt)$ alakú (k nemnegatív egész) függvények (véges) lineáris kombinációjaként.

3.5.46. Következmény. *Ha $\mu : \mathcal{B}((0,2\pi)) \to \mathbb{R}_+$ véges Borel-mérték, akkor $1 \leq p < +\infty$ esetén a trigonometrikus polinomok $\mathcal{T}$ tere sűrű altere $L^p_{\mathbb{R}}((0,2\pi), \mathcal{B}((0,2\pi)), \mu)$-nek.*

Bizonyítás. Minden $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ esetén a $\cos\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) > \cos\frac{\alpha}{2}$ nívóhalmaz éppen a $(0, \alpha)$ intervallum. Ezek viszont generálják a $(0,2\pi)$-beli Borel-halmazokat. Tehát $\sigma_{\mathcal{T}} = \mathcal{B}((0,2\pi))$. A tétel alkalmazása innen triviális. □

3.5.47. Következmény. *Legyenek $(T, \mathcal{S}, \mu)$ és $(X, \mathcal{A}, \nu)$ véges mértékterek és $1 \leq p < +\infty$. Ekkor a mérhető téglákból elkészített lépcsős függvények sűrű alterét alkotják $L^p_{\mathbb{R}}(T \times X, \mathcal{S} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \nu)$-nek.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A szóban forgó altér szorzatzárt, tartalmazza $\mathbb{1}$-et, továbbá az altér indukálta σ-algebra triviálisan tartalmazza a mérhető téglákat. Ez utóbbiak generálta σ-algebra viszont definíció szerint $\mathcal{S} \otimes \mathcal{A}$. □

3.5.48. Feladat. Mutassuk meg, hogy $1 \leq p < +\infty$ esetén $C_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n) \cap L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ sűrű altere $L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$-nek.

3.5.49. Megjegyzés. $C_{\mathbb{K}}(K)$ nem sűrű $L^\infty_{\mathbb{K}}\left(K, \mathcal{B}(K), \lambda^{(n)}\right)$-ban, az nyilvánvaló.

3.5.5. Szeparabilitás

3.5.50. Definíció. Legyen X topologikus tér. Egy $M \subseteq X$ halmazt *sűrű*nek mondunk, ha az $\overline{M}$ lezárás maga az X alaphalmaz. Egy $(x_k) \subseteq X$ sorozatot *sűrű*nek mondunk, ha $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sűrű halmaz. Az X topologikus teret *szeparábilis*nak mondjuk, ha van benne sűrű sorozat (azaz van sűrű megszámlálható részhalmaz).

3.5.51. Megjegyzés. Ha X valós normált tér és $S \subseteq X$, akkor $\overline{\mathrm{lin}}_{\mathbb{Q}}(S) = \overline{\mathrm{lin}}_{\mathbb{R}}(S)$ (hiszen tetszőleges S-ből vett véges lineáris kombináció együtthatói közelíthetők racionális sorozattal). Következésképp ha S legfeljebb megszámlálható, akkor $\overline{\mathrm{lin}}_{\mathbb{R}}(S)$ szeparábilis normált tér (hiszen maga $\mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}(S)$ megszámlálható).

3.5.52. Következmény. *Minden véges dimenziós valós normált tér szeparábilis.*

3.5.53. Állítás. *Egy végtelen dimenziós valós X normált tér pontosan akkor szeparábilis, ha van benne olyan $(f_n) \subseteq X$ lineárisan független sorozat, hogy*

$$X = \overline{\mathrm{lin}}\left(\{f_n : n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Bizonyítás. Először tegyük föl, hogy X szeparábilis. Ekkor van benne egy (x_k) sűrű sorozat. Definiáljuk rekurzióval a (k_j) indexsorozatot a következőképpen: legyen $k_1 := 1$, és ha már $k_1, k_2, \ldots, k_j$ definiáltak, akkor legyen

$$k_{j+1} := \min\left\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin \mathrm{lin}\left(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_j}\right)\right\}.$$

(Mivel X nem véges dimenziós, ezért ez a rekurzió jóldefiniált.) Az így kapott (k_j) sorozatra természetszerűleg igaz, hogy $\left(x_{k_j}\right)$ lineárisan független sorozat. Továbbá minden n-re vagy $x_n \in \mathrm{lin}\left(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n-1}}\right)$, vagy $x_n = x_{k_n}$. Eszerint

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{lin}\left(\left\{x_{k_j} : j \in \mathbb{N}\right\}\right),$$

ahonnan $X = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{\mathrm{lin}}\left(\left\{x_{k_j} : j \in \mathbb{N}\right\}\right) \subseteq X$.

Az állítás fordított iránya a legutóbbi megjegyzésből következik. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Mindezek valós normált terek helyett komplex normált terekre is triviálisan végigvihetők, csak $\mathbb{Q}$ helyett a $\{a+i\cdot b : a,b\in\mathbb{Q}\}$ megszámlálható testet kell venni.

3.5.54. Állítás. *Ha I korlátos intervallum és $\mu:\mathcal{B}(I)\to\mathbb{R}_+$ véges Borel-mérték, akkor minden $1\le p<+\infty$ esetén $L^p_{\mathbb{R}}(I,\mathcal{B}(I),\mu)$ szeparábilis.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\mathcal{P}$ sűrű altér $L^p_{\mathbb{R}}(I)$-ben. A $\mathcal{P}$ alteret viszont az (id^n) sorozat generálja. Ezért $L^p_{\mathbb{R}}(I)$ szeparábilis. □

3.5.55. Feladat. Gondoljuk meg, hogy $1\le p<+\infty$ esetén nem korlátos I intervallumra is szeparábilis $L^p_{\mathbb{R}}(I,\mathcal{B}(I),\lambda)$!

3.5.56. Feladat. Gondoljuk meg, hogy $1\le p<+\infty$ esetén a $\ell^p_{\mathbb{R}}$ sorozattér szeparábilis!

3.5.57. Feladat (*)**.** Legyen $K\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy $1\le p<+\infty$ esetén $L^p_{\mathbb{R}}\left(K,\mathcal{B}(K),\lambda^{(n)}\right)$ szeparábilis! (*Ötlet:* gondoljunk az n-változós polinomokra!)

3.5.58. Feladat. Igazoljuk, hogy ℓ^∞ nem szeparábilis! (*Ötlet:* ℓ^∞-nek van kontinuum sok, páronként egymástól egységnyi távolságra eső eleme.)

3.5.59. Definíció. Legyen $(T,\mathcal{S},\mu)$ mértéktér.Egy pozitív μ-mértékű $A\in\mathcal{S}$ halmazt μ-atomnak nevezünk, ha A bármely mérhető részének mértéke vagy $\mu(A)$, vagy nulla.

3.5.60. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(T,\mathcal{S},\mu)$ mértéktérre

$$\left(L^\infty(T,\mathcal{S},\mu),\|\cdot\|_\infty\right)$$

vagy nemszeparábilis, vagy véges dimenziós! (*Ötlet:* Ha végtelen sok atom van $\mathcal{S}$-ben, akkor a nemszeparabilitás a ℓ^∞-hez hasonlóan látható. Ha csak véges sok atom van, akkor két eset lehetséges: 1. az atomok komplementuma nullmértékű, ekkor a tér triviálisan véges dimenziós. 2. az atomok komplementuma pozitív mértékű, ekkor e halmaz triviálisan felbontható végtelen sok pozitív mértékű halmaz diszjunkt uniójára. Ezen halmazokkal operálva a nemszeparabilitás megint csak a ℓ^∞-hez hasonlóan végezhető.)

3.5.61. Megjegyzés. Weierstraß első sűrűségi tétele (lásd a Függelék megfelelő fejezetét) miatt a $\mathbb{K}$-polinomok – mint $[a,b]$-n értelmezett függvények – vektortere sűrű altere $C_{\mathbb{K}}[a,b]$-nak. Könnyű látni, hogy ebben a polinomtérben viszont a $\mathbb{K}$-racionális együtthatós polinomok vannak sűrűen, ez utóbbiak viszont megszámlálható sokan vannak.

3.5.62. Következmény. $\left(C_{\mathbb{K}}[a,b],\|\cdot\|_C\right)$ *szeparábilis Banach-tér.*

3.5.63. Feladat (*)**.** Legyen K kompakt metrikus tér. Mutassuk meg, hogy $\left(C_{\mathbb{K}}(K),\|\cdot\|_C\right)$ szeparábilis Banach-tér!

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

© Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4. fejezet

Hilbert-terekről

A következőkben különös hangsúllyal esnek latba a lineáris algebra skaláris szorzatos terekre vonatkozó fogalmai és állításai, a Hilbert-tér (= teljes skaláris szorzatos tér) fogalmával együtt [1], továbbá a Mértékelmélet c. kurzus anyaga, különös tekintettel azon állításra, hogy tetszőleges $(T, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér esetén $\langle f \mid g \rangle := \int\limits_T f\overline{g}\, d\mu \left(f, g \in L^2_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)\right)$ definícióval $\left(L^2_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu), \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$). Speciálisan $\ell^2_{\mathbb{K}} := L^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ a négyzetesen felösszegezhető $\mathbb{K}$-sorozatok Hilbert-tere ($\#$ a számlálómérték). Ez utóbbi esetben a skalárszorzatot természetesen az $\langle x \mid y \rangle := \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y}_k$ egyenlőség adja meg.

Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, akkor $L^2_{\mathbb{K}}(I)$ alatt az $L^2_{\mathbb{K}}(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ Hilbert-teret értjük, ahol $\mathcal{B}(I)$ az I-beli Borel-mérhető halmazok σ-algebrája és λ az ezen értelmezett Lebesgue-mérték.

Emlékeztetőül azonban felidézzük a Hilbert-terek bevezetését.

4.0.64. Definíció. Legyen H vektortér $\mathbb{K}$ fölött és $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ olyan függvény, hogy minden $x, y, z \in H$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

1. $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$;
2. $\langle \alpha \cdot x \mid y \rangle = \alpha \cdot \langle x \mid y \rangle$;
3. $\langle y \mid x \rangle = \overline{\langle x \mid y \rangle}$;
4. ha x nemnulla vektor, akkor $\langle x \mid x \rangle$ pozitív valós szám.

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ függvény egy skalárszorzat a $\mathbb{K}$ test fölötti H vektortéren; ezzel egyidejűleg azt is mondjuk, hogy $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ skalárszorzatos tér $\mathbb{K}$ fölött. H nullelemét a továbbiakban jelölje $\mathbf{0}_H$. $x \in H$ esetén

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

jelölje $\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy minden $x, y \in H$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ mellett

- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \mathbf{0}_H$;
- $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
- $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$.

4.0.65. Állítás (Cauchy–Schwarz–Minkowski)**.** *Legyen $(H, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ skalárszorzatos tér $\mathbb{K}$ fölött. Ekkor minden $x, y \in H$-ra*

- $|\langle x \mid y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ *(Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség);*
- $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *(Minkowski-egyenlőtlenség).*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $y \neq \mathbf{0}_H$. Ekkor a legutóbbiakat használva

$$0 \le \left\| x - \frac{\langle x \mid y\rangle}{\|y\|^2} \cdot y \right\|^2 = \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x \mid y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x \mid y\rangle|^2 \cdot \|y\|^2}{\|y\|^4} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x \mid y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

ahonnan azonnal $|\langle x \mid y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$. Innen aztán

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

□

A fentiek alapján minden $(H, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ skalárszorzatos tér normált tér is az $\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$ normával. H zárt egységgömbjét (a $\mathbf{0}_H$ körüli 1 sugarú zárt gömböt) jelölje $\overline{\mathcal{B}}_H$, míg H nyílt egységgömbjét (a $\mathbf{0}_H$ körüli 1 sugarú nyílt gömböt) $\mathcal{B}_H^{\mathrm{o}}$ jelölje.

4.0.66. Definíció. Legyen $(H, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ skalárszorzatos tér $\mathbb{K}$ fölött. Azt mondjuk, hogy $(H, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ *Hilbert-tér* $\mathbb{K}$ fölött ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén valós Hilbert-tér, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén pedig komplex Hilbert-tér), ha H-ban mint normált térben minden Cauchy-sorozat konvergens.

A „legalapvetőbb" Hilbert-terek a fent említett $L^2_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ terek az $\langle f \mid g\rangle := \int_T f\overline{g}\,d\mu$ skalárszorzattal. A nyilvánvaló $\langle f \mid f\rangle = \|f\|_2^2$ egyenlőségből nemcsak e $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ függvény skalárszorzat volta következik, de a fentebbi Riesz–Fischer-tétel alapján az is, hogy $L^2_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ valóban Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött.

A Banach-terek között a Hilbert-terek azok, amelyeknek van olyasmi „geometriája", amelyet „tér" és „geometria" gyanánt magunkban képileg megjelenítünk. Ebben a távolságon túlmenően nemcsak skalárszorzat van, de „szög" is (az x és y nemnulla vektorok közbezárt α szögét éppen a skalárszorzattal

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

és a távolsággal definiálhatjuk a $\cos\alpha = \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$ egyenlőség által, nem véletlenül a cosinustétel analógiája alapján). Ez a képi megjelenítés lehetővé teszi, hogy viszonyag mély függvénytani igazságokat mintegy „szinte három dimenzióban" lássunk.

4.0.67. Példa. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező (mértéktér, amelyre $P(\Omega) = 1$). Egy $\xi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ (vagy $\Omega \to \mathbb{C}$) $\mathcal{A}$-mérhető függvényt **valószínűségi változó**nak mondunk. Ha ξ abszolút P-integrálható, akkor

$$E(\xi) := \int_\Omega \xi \, dP$$

a ξ valószínűségi változó **várható érték**e. Innen a közismertnek számító definícióval a ξ valószínűségi változó **szórása**

$$D(\xi) := \sqrt{E\left((\xi - E(\xi))^2\right)},$$

amennyiben ez az utóbbi kifejezés véges. Ha a ξ és η valószínűségi változóknak van szórása, akkor

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) := E((\xi - E(\xi)) \cdot (\eta - E(\eta)))$$

a ξ és η valószínűségi változók **kovarianciája** és nemkonstans valószínűségi változók esetén

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) := \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{D(\xi) \cdot D(\eta)}$$

a ξ és η valószínűségi változók **korrelációs együtthatója**. Könnyű meggondolni, hogy ξ-nek pontosan akkor van szórása, ha $\xi \in L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Legyen most H az $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ azon elemeinek altere, amelyeknek a várható értéke nulla. Ekkor az $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$-beli skalárszorzattal H Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött, egy vektor hossza pedig éppen a szórása; két vektor skalárszorzata éppen a kovarianciájuk; és a két vektor közbezárt szögének cosinusa $\operatorname{corr}(\xi, \eta)$. Továbbá ξ pontosan akkor merőleges η-ra, ha korrelálatlanok. ξ és η pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha közbezárt szögük 0 vagy π, azaz korrelációs együtthatójuk 1 vagy -1. Mindezek könnyedén vizualizálhatók.

4.0.68. Definíció. Legyen H skalárszorzatos tér $\mathbb{K}$ fölött. Azt mondjuk, hogy egy $x \in H$ vektor **ortogonális** (merőleges) egy $y \in H$ vektorra (jelben: $x \perp y$), ha $\langle x \mid y\rangle = 0$.

$x \perp y$ nyilván egyenértékű $y \perp x$-szel, míg az $x \perp x$ reláció $x = \mathbf{0}_H$-val. $E, F \subseteq H$ esetén $E \perp F$, ha E minden eleme ortogonális F minden elemére. Sőt $x \perp F$, ha $\{x\} \perp F$. Jelölje $E^\perp$ az E-re ortogonális H-beli

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

vektorok összességét. Speciálisan $x^\perp := \{x\}^\perp$. Persze a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség miatt $\langle \cdot \mid x\rangle \in H^*$, amiért $x^\perp = \ker \langle \cdot \mid x\rangle$ zárt altér. Így persze $E^\perp = \bigcap_{x\in E} x^\perp$ is zárt altere H-nak. $E^\perp$ neve: az E halmaz H-beli *ortokomplementuma*.

4.0.69. Megjegyzés. Skalárszorzatos terekben az

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$$

azonosság miatt triviálisan fennáll az

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

ún. **paralelogramma-szabály** (vagy **Neumann-szabály**), illetve $x \perp y$ esetén az

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ún. **Pitagorasz-tétel** is. Ez utóbbinak evidens a következő alakja is: ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egymásra páronként ortogonális vektorok, akkor

$$\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x\|^2 .$$

Az alábbi feladatból kiderül, hogy a Neumann-szabály karakterizálja is a skalárszorzatos tereket.

4.0.70. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{K}$ fölötti $(X, \|\cdot\|)$ normált térben érvényes a paralelogramma-szabály, akkor $\|\cdot\|$ alkalmas skalárszorzat által indukált norma. (*Ötlet:* Jelölje $\Phi(x,y) := \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$. Az $\|a\|^2 + \|b\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2\right)$ egyenlőség felhasználásával a $\Phi(x,z) + \Phi(y,z)$ összeget hozzuk $\frac{1}{2}\Phi(x+y,2z)$ alakra. Az így nyert azonosságot $x \to x+y$, $y \to \mathbf{0}_X$ szereposztással alkalmazva triviálisan $\Phi(x+y,z) = \frac{1}{2}\Phi(x+y,2z)$, amit az eredetileg nyert azonosságba visszaírva $\Phi(x,z) + \Phi(y,z) = \Phi(x+y,z)$, azaz $\Phi(\cdot,z)$ additív. Innen persze $\mathbb{Q}$-lineáris. Ugyanakkor folytonos is, ahonnan egyszerű meggondolással $\Phi(\cdot,z)$ $\mathbb{R}$-lineáris. Φ persze szimmetrikus is és nyilván $\Phi(x,x) = 4\|x\|^2$. Most $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén $\langle x \mid y\rangle := \frac{1}{4}\Phi(x,y)$ a fentiek alapján éppen a $\|\cdot\|$ normát indukáló skalárszorzatot definiál. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén pedig $\langle x \mid y\rangle := \frac{1}{4}\Phi(x,y) - \frac{i}{4}\Phi(ix,y)$ definiálja a $\|\cdot\|$ normát indukáló skalárszorzatot.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.1. A Riesz-tétel. Szeparációk

Az alábbiakban legyen $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött. Emlékeztető: ha $x \in H$ és $\emptyset \neq M \subseteq H$, akkor az x pont és az M halmaz távolsága

$$d(x, M) := \inf \{\|x - y\| : y \in M\}.$$

4.1.1. Tétel (Riesz)**.** *Tetszőleges $\emptyset \neq M \subseteq H$ konvex zárt halmazra és $x \in H$ pontra egyértelműen létezik az M halmazban x-hez legközelebb fekvő pont, azaz $\exists!\, x_* \in M$, melyre*

$$\|x - x_*\| = d(x, M).$$

Bizonyítás. $d(x, M)$ definíciója alapján létezik olyan $(x_n) \subseteq M$ sorozat, melyre

$$\|x - x_n\| \to d(x, M) \qquad (n \to +\infty).$$

Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ esetén az $x - x_n$ és $x - x_m$ vektorokra alkalmazzuk a Neumann-szabályt (paralelogramma-szabály):

$$\|x - x_n + x - x_m\|^2 + \|(x - x_n) - (x - x_m)\|^2 = 2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_m\|^2,$$

azaz

$$4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 + \|x_m - x_n\|^2 = 2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_m\|^2.$$

Minthogy M konvexitása miatt $\frac{x_n + x_m}{2} \in M$, így a bal oldal első tagja legalább $4d^2(x, M)$. Megmutatjuk, hogy (x_n) Cauchy-sorozat. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $\|x - x_n\|^2 < d^2(x, M) + \frac{\varepsilon^2}{4}$. Így minden $n, m \geq N$ esetén a legutóbbi egyenlőség jobb oldala kisebb, mint $4d^2(x, M) + \varepsilon^2$, a bal oldal első tagja viszont legalább $4d^2(x, M)$. Innen $\|x_m - x_n\|^2 \leq \varepsilon^2$, azaz $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$. Tehát (x_n) Cauchy-sorozat. Mivel H teljes, ezért (x_n) konvergál egy $x_* \in H$ vektorhoz. Mivel pedig M zárt, ezért $x_* \in M$. Továbbá nyilván

$$\|x - x_*\| = \lim \|x - x_n\| = d(x, M).$$

Hátravan még az egyértelműség igazolása. Tegyük föl, hogy x_* és x^* egyaránt olyan M-beli pontok, melyeknek x-től vett távolsága minimális. Tekintsük azon $(x_n) \subseteq M$ sorozatot, amelynek páratlan indexű elemei x_*-gal, páros indexű elemei pedig x_*-gal egyeznek meg. Ez a sorozat eleget tesz a bizonyítás elején vett sorozatra kirótt kívánalmaknak. Tehát mindaz is igaz rá, amit arra a sorozatra beláttunk; nevezetesen hogy konvergens. Ez viszont csak úgy lehet, ha $x^* = x_*$. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.1.2. Feladat. Adjunk példát Banach-térben vektorra és zárt altérre, amelyek távolsága nem vétetik föl! Jelesül mutassuk meg, hogy a $(C_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_C)$ Banach-téren a $\varphi f := \int_0^1 f - f(0)$ egyenlőséggel definiált folytonos lineáris funkcionál $\ker\varphi$ magterének nincs $\mathrm{id}_{[0,1]}$-hez legközelebbi pontja! (Ötlet: gondoljuk meg, hogy minden $f \in \ker\varphi$-re $\left\|\mathrm{id}_{[0,1]} - f\right\|_C > \frac{1}{4}$, ugyanakkor minden $0 < \delta < 1$ esetén van olyan $f \in \ker\varphi$, amelyre $[\delta,1]$-en $f(t) = t - \frac{1}{4}$, és $[0,\delta]$-n is lineáris f. Leellenőrizhető, hogy ekkor $\left\|\mathrm{id}_{[0,1]} - f\right\|_C = f(0) = \frac{\delta+2}{8-4\delta}$, ami tetszőlegesen közel kerülhet $\frac{1}{4}$-hez.)

A továbbiakban e szakaszban legyen H valós Hilbert-tér.

4.1.3. Tétel (szigorú szeparáció)**.** *Legyen $M \subseteq H$ nemüres konvex zárt halmaz és $x \in H \setminus M$. Ekkor van olyan $y \in H$ vektor, amelyre*

$$\sup_{u\in M} \langle u \mid y\rangle < \langle x \mid y\rangle .$$

Sőt feltehető, hogy $\|y\| = 1$.

Bizonyítás. Riesz tétele szerint létezik M-ben x-hez legközelebb fekvő x_* pont. Persze $x \neq x_*$. Legyen $u \in M$ tetszőleges. Ekkor minden $t \in [0,1]$ esetén M konvexitásából

$$t \cdot u + (1-t) \cdot x_* \in M,$$

ahonnan x_* választása miatt

$$\|x - (t \cdot u + (1-t) \cdot x_*)\|^2 \geq \|x - x_*\|^2 .$$

Ezek szerint az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := \|x - (t \cdot u + (1-t) \cdot x_*)\|^2 = \|x - x_* + t \cdot (x_* - u)\|^2 =$$
$$= \|x - x_*\|^2 + 2t \cdot \langle x_* - u \mid x - x_*\rangle + t^2 \cdot \|x_* - u\|^2$$

nemnegatív értékű másodfokú (vagy konstans) polinomra minden $t \in [0,1]$ esetén $f(t) \geq f(0)$. Emiatt az elsőfokú tag együtthatója szükségképpen nemnegatív, azaz

$$\langle x_* - u \mid x - x_*\rangle \geq 0.$$

Innen $y := x - x_*$ választással minden $u \in M$-re

$$\langle x_* \mid y\rangle - \langle u \mid y\rangle = \langle x_* - u \mid y\rangle = \langle x_* - u \mid x - x_*\rangle \geq 0,$$

azaz $\langle x_* \mid y\rangle \geq \langle u \mid y\rangle$, ahonnan

$$\langle x_* \mid y\rangle \geq \sup_{u\in M} \langle u \mid y\rangle .$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Másrészt

$$\langle x \mid y\rangle - \langle x_* \mid y\rangle = \langle x - x_* \mid y\rangle = \|x - x_*\|^2 > 0,$$

ezért

$$\langle x \mid y\rangle > \langle x_* \mid y\rangle \geq \sup_{u\in M} \langle u \mid y\rangle .$$

A tétel legutolsó állítása $y \neq \mathbf{0}_H$ miatt magától értetődő. □

4.1.4. Következmény. *Legyenek $K, M \subseteq H$ diszjunkt nemüres konvex halmazok, továbbá K kompakt és M zárt. Ekkor van olyan $y \in H$ vektor, melyre*

$$\sup_{u\in M} \langle u \mid y\rangle < \inf_{v\in K} \langle v \mid y\rangle .$$

Bizonyítás. Mivel M zárt és $-K$ kompakt, ezért $M - K$ is zárt; továbbá $M \cap K = \emptyset$ miatt $\mathbf{0}_H \notin M - K$. A fenti tétel szerint ekkor létezik olyan $y \in H$ vektor, amelyre

$$\sup_{u\in M-K} \langle u \mid y\rangle < \langle \mathbf{0}_H \mid y\rangle = 0,$$

azaz

$$0 > \sup_{v\in M, w\in K} \langle v - w \mid y\rangle = \sup_{v\in M, w\in K} (\langle v \mid y\rangle - \langle w \mid y\rangle) = \\ = \sup_{v\in M} \langle v \mid y\rangle - \inf_{w\in K} \langle w \mid y\rangle ,$$

ami bizonyítja állításunkat. □

4.1.5. Következmény. *Egy $M \subseteq H$ halmaz pontosan akkor konvex zárt, ha előáll zárt félterek (azaz $\{x \in H : \langle x \mid y\rangle \leq \alpha\}$ alakú halmazok) metszeteként.*

Bizonyítás. Az egyik irány triviális. A másik úgy adódik, hogy a szigorú szeparációt alkalmazzuk x-re és M-re minden egyes $x \in H \setminus M$ mellett. □

A következő szeparációs elv az ún. „erős” (de a szigorúnál „gyengébb”) szeparáció. Ehhez néhány megelőző észrevételre lesz szükségünk.

4.1.6. Megjegyzés. Ha $M \subseteq H$ konvex halmaz, akkor $\overline{M}$ is triviálisan konvex (gondoljunk a lezárás sorozatokkali jellemzésére).

4.1.7. Lemma. *Legyen $M \subseteq H$ konvex halmaz, $x \in \operatorname{int} M$ és $y \in M$. Ekkor minden $0 < t < 1$ esetén*

$$t \cdot x + (1 - t) \cdot y \in \operatorname{int} M.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A feltétel szerint van olyan $r > 0$, hogy $x + r \cdot \mathcal{B}_H^{\circ} \subseteq M$. Ekkor M konvex volta miatt triviálisan

$$M \supseteq t \cdot (x + r \cdot \mathcal{B}_H^{\circ}) + (1-t) \cdot y = t \cdot x + (1-t) \cdot y + t \cdot r \cdot \mathcal{B}_H^{\circ},$$

amiért is $t \cdot x + (1-t) \cdot y \in \operatorname{int} M$. □

4.1.8. Következmény. *Ha $M \subseteq H$ konvex, akkor* $\operatorname{int} M$ *is konvex.*

4.1.9. Lemma. *Legyen $M \subseteq H$ konvex halmaz, $x \in \operatorname{int} M$ és $y \in \overline{M}$. Ekkor minden $0 < t < 1$ esetén*

$$t \cdot x + (1-t) \cdot y \in \operatorname{int} M.$$

Bizonyítás. A feltétel szerint van olyan $r > 0$, hogy $x + r \cdot \mathcal{B}_H^{\circ} \subseteq M$. Persze ekkor $x + r \cdot \mathcal{B}_H^{\circ} \subseteq \operatorname{int} M$ is fennáll. Továbbá létezik olyan $z \in M$ vektor, hogy $\|y - z\| < \frac{t}{1-t} \cdot r$. Most $t \cdot x + (1-t) \cdot y$ előáll $t \cdot u + (1-t) \cdot z$ alakban, mégpedig nyilván

$$u := x + \frac{1-t}{t} \cdot (y - z)$$

választással. Innen $\|u - x\| \leq \frac{1-t}{t} \cdot \|y - z\| < \frac{1-t}{t} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot r = r$ miatt $u \in x + r \cdot \mathcal{B}_H^{\circ} \subseteq \operatorname{int} M$. Az előző lemma miatt így

$$t \cdot x + (1-t) \cdot y = t \cdot u + (1-t) \cdot z \in \operatorname{int} M.$$ □

4.1.10. Tétel (erős szeparáció)**.** *Legyen $M \subseteq H$ olyan konvex halmaz, amelyre* $\operatorname{int} M \neq \varnothing$. *Ekkor minden $x \in H \setminus \operatorname{int} M$ vektorhoz létezik olyan $y \in H$ vektor, amelyre*

$$\begin{aligned} \langle u \mid y \rangle &< \langle x \mid y \rangle \qquad (\forall u \in \operatorname{int} M), \\ \langle u \mid y \rangle &\leq \langle x \mid y \rangle \qquad (\forall u \in M). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $x = \mathbf{0}_H$. Legyen $x_0 \in \operatorname{int} M$. Indirekt tegyük föl, hogy $-x_0 \in \overline{\mathbb{R}_+^{\circ} \cdot \operatorname{int} M}$. Mivel x_0 eleme a konvex nyílt $M_* := \mathbb{R}_+^{\circ} \cdot \operatorname{int} M$ halmaznak, így a legutóbbi lemma miatt

$$\mathbf{0}_H = \frac{1}{2} \cdot x_0 + \frac{1}{2} \cdot (-x_0) \in \operatorname{int} M_* = \mathbb{R}_+^{\circ} \cdot \operatorname{int} M,$$

ahonnan persze $\mathbf{0}_H \in \operatorname{int} M$, ami ellentmondás. Ezért $-x_0 \notin \overline{\mathbb{R}_+^{\circ} \cdot \operatorname{int} M}$. A szigorú szeparációs tétel miatt ekkor van olyan egységnormájú $y \in H$ vektor, amelyre

$$\sup_{u \in \mathbb{R}_+^{\circ} \cdot \operatorname{int} M} \langle u \mid y \rangle < \langle -x_0 \mid y \rangle,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ahonnan minden $t > 0$-ra

$$\sup_{u \in \operatorname{int} M} \langle u \mid y \rangle < \left\langle -\frac{x_0}{t} \mid y \right\rangle,$$

innen pedig $t \to +\infty$ határátmenettel $\sup\limits_{u \in \operatorname{int} M} \langle u \mid y \rangle \leq 0$. Legyen most $u \in \operatorname{int} M$ tetszőleges. Ekkor van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $u + \delta \cdot y \in \operatorname{int} M$, innen

$$\langle u \mid y \rangle < \langle u \mid y \rangle + \delta \cdot \|y\|^2 = \langle u + \delta \cdot y \mid y \rangle \leq 0 = \langle \mathbf{0}_H \mid y \rangle,$$

ami bizonyítja is az állításunk első felét. Legyen most $u \in M$ tetszőleges. Ekkor az egyik fenti lemma szerint minden $0 < t < 1$ esetén $t \cdot x_0 + (1-t) \cdot u \in \operatorname{int} M$, így a már látottak miatt

$$\langle t \cdot x_0 + (1-t) \cdot u \mid y \rangle < \langle \mathbf{0}_H \mid y \rangle,$$

ahonnan $t \to 0+$ határátmenettel $\langle u \mid y \rangle \leq \langle \mathbf{0}_H \mid y \rangle$, ami bizonyítja az állítás második felét. □

4.1.11. Következmény. *Legyenek $K, M \subseteq H$ diszjunkt nemüres konvex halmazok, és tegyük föl, hogy $\operatorname{int} M \neq \varnothing$. Ekkor van olyan $y \in H$ vektor, amelyre*

$$\langle u \mid y \rangle < \langle v \mid y \rangle \qquad (\forall u \in K,\, v \in \operatorname{int} M),$$
$$\langle u \mid y \rangle \leq \langle x \mid y \rangle \qquad (\forall u \in K,\, v \in M).$$

Bizonyítás. Ha $x \in K$, akkor $x - \operatorname{int} M$ egy olyan nemüres nyílt halmaz, amely $K - M$-ben fekszik, tehát $\operatorname{int}(K - M) \neq \varnothing$. Így alkalmazhatjuk a fenti tételt a konvex $K - M$ halmazra és a rajta kívül fekvő $\mathbf{0}_H$ vektorra, ebből éppen egy kívánt tulajdonságú szeparációt nyerünk. □

Véges dimenzióban a szeparációs elv tovább vihető. Ehhez egy (szemléletesen nyilvánvaló, de annál inkább fontos) technikai lemmára lesz szükségünk.

4.1.12. Lemma. *Legyen H véges dimenziós valós euklideszi tér és $M \subseteq H$ olyan konvex halmaz, amelyre $\mathbf{0}_H \notin M$. Ekkor van olyan $(x_k) \subseteq H \setminus \overline{M}$ sorozat, amely normában tart $\mathbf{0}_H$-hoz.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{0}_H \notin \overline{M}$, akkor konstans sorozattal készen vagyunk. Tegyük hát föl, hogy $\mathbf{0}_H \in \overline{M} \setminus M$. Most $\operatorname{lin} M$-nek vegyünk föl egy M-ből vett $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ bázisát. Indirekt tegyük föl, hogy van olyan $\alpha > 0$ szám, hogy

$$v := -\alpha \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_m) \in \overline{M}.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Ekkor van olyan$(y_n) \subseteq M$ sorozat, amely tart v-hez. Legyen $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ az $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ bázis duális bázisa. Persze minden $x \in \mathrm{lin}M$-re

$$x = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) \cdot u_j.$$

Továbbá $\mathrm{lin}M$ véges dimenziós volta miatt a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ funkcionálok folytonosak, így minden $j = 1, \ldots, m$-re $\varphi_j(y_n) \to \varphi_j(v) = -\alpha$. Ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, hogy mindegyik j-re $\varphi_j(y_n) < 0$. Ekkor

$$\frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j(y_n)} \cdot y_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{-\varphi_k(y_n)}{1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j(y_n)} \cdot u_k =$$

$$= \frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j(y_n)} \cdot \left(y_n - \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(y_n) \cdot u_k \right) = \mathbf{0}_H$$

bal oldala tényleg igazi konvex kombináció, így $y_n, u_1, u_2, \ldots, u_m \in M$ miatt eleme is M-nek, a jobb oldal pedig $\mathbf{0}_H$, tehát $\mathbf{0}_H \in M$. Ez ellentmondás. Így minden $\alpha > 0$ mellett $-\alpha \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_m) \notin \overline{M}$, tehát az

$$x_n := -\frac{1}{n} \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_m)$$

választással nyert (x_n) meg is felel a lemma állításának. □

4.1.13. Tétel (végesrangú szeparáció)**.** *Legyen H véges dimenziós valós euklideszi tér és $M \subseteq H$ olyan konvex halmaz, amelyre $\mathbf{0}_H \notin M$. Ekkor van olyan $y \in H$ nemnulla vektor, amelyre*

$$\sup_{u \in M} \langle u \mid y \rangle \leq 0.$$

Bizonyítás. A fenti lemma szerint van olyan $(x_n) \subseteq H \setminus \overline{M}$ sorozat, amely normában tart $\mathbf{0}_H$-hoz. A szigorú szeparációs tétel miatt minden n-re van olyan egységnormájú $y_n \in H$ vektor, hogy $\sup\limits_{u \in \overline{M}} \langle u \mid y_n \rangle < \langle x_n \mid y_n \rangle$. A Bolzano–Weierstraß-tétel miatt (y_n)-nek van olyan (y_{n_k}) részsorozata, amely normában tart egy $y \in H$ vektorhoz. Persze így $\|y\| = 1$. Továbbá $k \to +\infty$ határátmenettel minden $u \in M$-re

$$\langle u \mid y \rangle = \lim_{k \to +\infty} \langle u \mid y_{n_k} \rangle \leq \lim_{k \to +\infty} \langle x_{n_k} \mid y_{n_k} \rangle \leq \lim_{k \to +\infty} \|x_n\| \cdot \|y_n\| = 0,$$

ami igazolja a bizonyítandó állítást. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.1.14. Következmény. *Legyen H véges dimenziós valós euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $K, M \subseteq H$ diszjunkt nemüres konvex halmazokra van olyan $y \in H$ nemnulla vektor, hogy*

$$\sup_{u \in M} \langle u \mid y \rangle \leq \inf_{v \in K} \langle v \mid y \rangle .$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a tételt a konvex $M - K$ halmazra. □

4.1.15. Példa. A síkbeli $M := ((-\infty,1) \times (0,+\infty)) \cup \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] \right\}$ konvex halmaz diszjunkt az origótól, és a fenti tételben szereplő módon szeparálható is tőle (pl. a $-\mathrm{pr}_2$ lineáris funkcionállal), de szigorúan nem szeparálható, sőt abban az értelemben erősen sem, hogy nincs olyan $y \in \mathbb{R}^2$ nemnulla vektor, amelyre minden $u \in M$ esetén $\langle u \mid y \rangle < 0$ állna fönn.

4.1.16. Példa. Ha H véges dimenziós euklideszi tér és $f : [a,b] \to H$ folytonos, (a,b)-n deriválható függvény, amelyre $f(a) = f(b) = \mathbf{0}_H$, akkor könnyedén adódik, hogy

$$\mathbf{0}_H \in \operatorname{conv}(\{f'(t) : a < t < b\}) .$$

(Legyen $n := \dim \operatorname{lin}(\mathcal{R}_f)$. Persze föltehető, hogy $n \geq 1$. Indirekt tegyük föl, hogy mégis $\mathbf{0}_H \notin \operatorname{conv}(\{f'(t) : a < t < b\})$. Ekkor alkalmazhatjuk a végesrangú szeparációt, amelyből egy olyan nemnulla $y \in \operatorname{lin}(\mathcal{R}_f)$ vektort nyerünk, hogy $\langle \cdot \mid y \rangle \circ f$ deriváltja nempozitív, tehát $\langle \cdot \mid y \rangle \circ f$ monoton fogyó; no de a végpontokban nulla, így végül is $\langle \cdot \mid y \rangle \circ f$ azonosan nulla. Emiatt $\mathcal{R}_f \subseteq y^\perp$, ami $(n-1)$-dimenziós, s ez ellentmondás.) Innen tetszőleges $f : [a,b] \to H$ folytonos, (a,b)-n deriválható függvényre triviálisan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \operatorname{conv}(\{f'(t) : a < t < b\}) .$$

(Mint az közismert, a Lagrange-féle középértéktétel klasszikus alakjában már $\mathbb{R}^2$-be képező függvényre sem igaz, lásd pl. $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left[\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix} \right]$.)

4.1.17. Feladat. Igazoljuk a következőt: `ha` X valós vektortér, $A \subseteq X$ konvex halmaz, $f_1, f_2, \ldots, f_n : A \to \mathbb{R}$ pedig olyan konvex függvények, amelyek felső burkolója nemnegatív, `akkor` az $f_1, f_2, \ldots, f_n$ függvényeknek van olyan konvex kombinációja is, amely nemnegatív. (*Ötlet:* alkalmazzuk $\mathbb{R}^n$-ben a végesrangú szeparációs tételt az origóra és a

$$C := \{a \in \mathbb{R}^n : \exists x \in A, \text{ hogy } \forall j\text{-re } a_j > f_j(x)\}$$

konvex halmazra, majd lássuk be a kapott vektor nemnegativitását.)

4.1.18. Feladat (gyenge*-szeparáció)**.** Legyen X valós normált tér, $\emptyset \neq K \subseteq$ $\subseteq X^*$ konvex halmaz, $\varphi \in X^*$, $\varepsilon > 0$ és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ olyanok, hogy

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{\psi \in X^* : \psi(x_j) \in [\varphi(x_j) - \varepsilon, \varphi(x_j) + \varepsilon]\} \cap K = \emptyset.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $a \in X$ vektor, hogy

$$\sup_{\psi \in K} \psi(a) + \varepsilon \leq \varphi(a).$$

(*Ötlet:* Alkalmas eltolással elérhető, hogy $\mathbf{0}_{X^*} \in K$. A vektorok alkalmas átelőjelezésével és ε csökkentésével az is elérhető, hogy mindegyik $\varphi(x_j) - \varepsilon$ pozitív legyen. A feltétel, K konvex volta és $\mathbf{0}_{X^*} \in K$ alapján ekkor minden $\psi \in K$-ra van olyan j, hogy $\psi(x_j) \leq \varphi(x_j) - \varepsilon$. Alkalmazzuk az előző feladatot a $\psi \mapsto \varphi(x_j) - \varepsilon - \psi(x_j)$ konvex függvényekre a K halmazon.)

Véges dimenziós terekben a normák ekvivalenciája miatt már az eddigiek alapján is triviális, hogy a fenti típusú szeparációk tetszőleges norma mellett is igazak.

4.1.19. Tétel (Goldstine)**.** *Legyen X valós Banach-tér, $\Phi \in X^{**}$, $\|\Phi\| \leq 1$ és $H \subseteq X^*$ véges halmaz. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ vektor, hogy minden $\varphi \in H$ mellett $|\Phi\varphi - \varphi x| \leq \varepsilon$.*

Bizonyítás. Jelölje $x \in X$ vektorra $\widehat{x} \in X^{**}$, $\widehat{x}\varphi := \varphi x$. Indirekt tegyük föl, hogy a $\Phi_{|H} \in \mathbb{R}^H$ vektor nincs benne a véges dimenziós $\left(\mathbb{R}^H, \|\cdot\|_\infty\right)$ normált térben vett

$$K := \overline{\left\{\widehat{x}_{|H} : x \in \mathcal{B}_X\right\}}$$

konvex kompakt halmazban. Ekkor a szigorú szeparációs tétel miatt van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^H$ vektor, amelyre

$$\sum_{\varphi \in H} \alpha(\varphi) \cdot \Phi\varphi > \max_{a \in K} \sum_{\varphi \in H} \alpha(\varphi) \cdot a(\varphi) = \sup_{x \in \mathcal{B}_X} \sum_{\varphi \in H} \alpha(\varphi) \cdot \varphi x,$$

innen $\varphi_* := \sum_{\varphi \in H} \alpha(\varphi) \cdot \varphi$ választással persze

$$\Phi\varphi_* > \sup_{x \in \mathcal{B}_X} \varphi_* x = \|\varphi_*\|,$$

ami $\|\Phi\| \leq 1$ miatt ellentmondás.

Tehát $\Phi_{|H} \in K$, így ε sugarú környezete tartalmaz egy $\widehat{x}_{|H}$, $x \in \mathcal{B}_X$ alakú vektort. Ez az x éppen megfelel a tétel kívánalmainak. □

4.2. A Krein–Milman-tétel végesrangú verziója

Legyen X valós vektortér. Egy $M \subseteq X$ konvex halmaznak egy K konvex részhalmazát az M halmaz *extremális részhalmaz*ának mondjuk, ha

$$u, v \in M,\ 0 < t < 1,\ t \cdot u + (1-t) \cdot v \in K \implies u, v \in K.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Azt mondjuk, hogy egy $M \subseteq X$ konvex halmaznak egy $x \in M$ pont *extremális pont*ja, ha $\{x\}$ extremális részhalmaza M-nek, azaz

$$u, v \in M,\ 0 < t < 1,\ t \cdot u + (1-t) \cdot v = x \implies u = x = v.$$

4.2.1. Megjegyzés. Egy $x \in M$ vektor pontosan akkor extremális pontja M-nek, ha $M \setminus \{x\}$ is konvex.

Az $M \subseteq X$ konvex halmaz extremális pontjainak összességét jelölje $\operatorname{ext}(M)$. Egy $F \subseteq X$ halmaz konvex burkát jelölje $\operatorname{conv}(F)$.

4.2.2. Megjegyzés. Az $M \subseteq X$ konvex halmaz tetszőlegesen sok extremális részhalmazának metszete is triviálisan extremális részhalmaza M-nek (feltéve, hogy a metszet értelmezve van).

4.2.3. Megjegyzés. Ha K extremális részhalmaza M-nek és L extremális részhalmaza K-nak, akkor L extremális részhalmaza M-nek.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $u, v \in M,\ 0 < t < 1,\ t \cdot u + (1-t) \cdot v \in L$. Ekkor $L \subseteq K$ miatt $u, v \in M,\ 0 < t < 1,\ t \cdot u + (1-t) \cdot v \in K$. Mivel K extremális részhalmaza M-nek, ezért $u, v \in K$. Tehát $u, v \in K,\ 0 < t < 1,\ t \cdot u + (1-t) \cdot v \in L$ is igaz. Mivel L extremális részhalmaza K-nak, ezért innen $u, v \in L$. MIndezzel éppen azt mutattuk meg, hogy L extremális részhalmaza M-nek. □

4.2.4. Következmény. *Ha K extremális részhalmaza M-nek, akkor* $\operatorname{ext}(K) \subseteq \subseteq \operatorname{ext}(M)$.

A továbbiakban legyen H valós Hilbert-tér.

4.2.5. Definíció. Tetszőleges $M \subseteq H$ konvex halmaz és $y \in H$ esetén jelölje

$$M^{(y)} := \left\{ x \in M : \langle x \mid y \rangle = \sup_M \langle \cdot \mid y \rangle \right\}.$$

(Persze $M^{(y)}$ üres is lehet.)

4.2.6. Állítás. *Tetszőleges $M \subseteq H$ konvex halmazra és $y \in H$ vektorra $M^{(y)}$ extremális részhalmaza M-nek.*

Bizonyítás. Legyenek $u, v \in M, 0 < t < 1$ és tegyük föl, hogy $t \cdot u + (1-t) \cdot v \in \in M^{(y)}$. Ekkor

$$t \cdot \sup_M \langle \cdot \mid y \rangle + (1-t) \cdot \sup_M \langle \cdot \mid y \rangle = \sup_M \langle \cdot \mid y \rangle = \langle t \cdot u + (1-t) \cdot v \mid y \rangle = \\ = t \cdot \langle u \mid y \rangle + (1-t) \cdot \langle v \mid y \rangle,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ahonnan

$$0 = t \cdot \left(\sup_M \langle \cdot \mid y \rangle - \langle u \mid y \rangle \right) + (1-t) \cdot \left(\sup_M \langle \cdot \mid y \rangle - \langle v \mid y \rangle \right).$$

Mivel e legutóbbi összeg mindkét tagja nemnegatív, ezért szükségképpen $\langle u \mid y \rangle = \sup_M \langle \cdot \mid y \rangle = \langle v \mid y \rangle$, azaz $u, v \in M^{(y)}$. Tehát $M^{(y)}$ extremális részhalmaza M-nek. □

4.2.7. Következmény. *Tetszőleges $M \subseteq H$ konvex halmazra és $y \in H$ vektorra*

$$\operatorname{ext}\left(M^{(y)}\right) \subseteq \operatorname{ext}(M).$$

4.2.8. Megjegyzés. Ha $M \subseteq H$ nemüres konvex kompakt halmaz, akkor minden $y \in H$-ra $M^{(y)}$ is nemüres konvex kompakt (M-nek egy zárt affin halmazzal vett metszete, amely a Weierstraß-tétel alapján nemüres).

4.2.9. Tétel (Krein–Milman I.)**.** *Ha $M \subseteq H$ konvex kompakt halmaz és* $\operatorname{lin}(M)$ *véges dimenziós, akkor*

$$M = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M)).$$

Bizonyítás. $n = \dim(\operatorname{lin}(M))$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 0$-ra az állítás nyilvánvaló. Most tegyük föl, hogy az állítás n-ig igaz, és ebből bizonyítsunk $n+1$-re. Legyen hát H valós Hilbert-tér és $M \subseteq H$ olyan konvex kompakt halmaz, amelyre $\dim(\operatorname{lin}(M)) = n+1$.

Legyen $x \in M$. Ekkor M korlátos zárt volta miatt létezik legkisebb, illetve legnagyobb t_*, illetve t^* valós szám, hogy $t_* \cdot x$ és $t^* \cdot x \in M$. Persze $t_* \leq 1 \leq t^*$. Megmutatjuk, hogy $t_* \cdot x$ és $t^* \cdot x \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))$. Mivel a $\operatorname{lin}(M)$ $(n+1)$-dimenziós euklideszi térben M és $(t^*, +\infty) \cdot x$ nemüres diszjunkt konvex halmazok, ezért a végesrangú szeparációs tétel miatt van olyan $y \in \operatorname{lin}(M)$ nemnulla vektor, hogy bármely $u \in M$ és $t > t^*$ esetén

$$\langle u \mid y \rangle \leq \langle t \cdot x \mid y \rangle,$$

innen $t \to t^*$ határátmenettel $\sup_M \langle \cdot \mid y \rangle \leq \langle t^* \cdot x \mid y \rangle$, ahonnan $t^* \cdot x \in M$ miatt

$$\langle t^* \cdot x \mid y \rangle = \sup_M \langle \cdot \mid y \rangle,$$

azaz $t^* \cdot x \in M^{(y)}$. Ezért $M^{(y)} - t^* \cdot x \subseteq \ker \langle \cdot \mid y \rangle$, másrészt $y \neq \mathbf{0}_H$ miatt $\ker \langle \cdot \mid y \rangle$ az $(n+1)$-dimenziós $\operatorname{lin}(M)$ vektortérben n-dimenziós altér, így az indukciós feltevés alapján

$$M^{(y)} - t^* \cdot x = \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M^{(y)} - t^* \cdot x\right)\right),$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

speciálisan $\mathbf{0}_H \in \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M^{(y)} - t^* \cdot x\right)\right)$, ahonnan triviálisan
$t^* \cdot x \in \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M^{(y)}\right)\right)$, innen pedig a legutóbbi következmény alapján

$$t^* \cdot x \in \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M\right)\right).$$

Hasonlóan látható, hogy $t_* \cdot x \in \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M\right)\right)$. Innen $\operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M\right)\right)$ konvex volta miatt

$$x \in \operatorname{conv}\left(\{t_* \cdot x,\, t^* \cdot x\}\right) \subseteq \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M\right)\right).$$

Ezzel megmutattuk, hogy $M \subseteq \operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M\right)\right)$. Persze M konvexitása miatt $\operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(M\right)\right) \subseteq M$. Tehát az állítás $n+1$-re igazolt. □

4.2.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\left(C_{\mathbb{R}}[a,b], \|\cdot\|_C\right)$ valós Banach-térben a $\overline{\mathcal{B}}_{C_{\mathbb{R}}[a,b]}$ egységgömbnek pontosan két extremális pontja van, és $\operatorname{conv}\left(\operatorname{ext}\left(\overline{\mathcal{B}}_{C_{\mathbb{R}}[a,b]}\right)\right)$ csupa konstans függvényből áll (tehát benne van egy egydimenziós altérben!), jóllehet maga az egységgömb végtelen dimenziós teret feszít ki.

4.3. Ortonormált sorozatok

A továbbiakban legyen $(H, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött.

4.3.1. Definíció. Egy $(x_k) \subseteq H$ sorozatot *ortogonális*nak mondunk, ha különböző indexű elemei páronként ortogonálisak egymásra. Az $(x_k) \subseteq H$ ortogonális sorozatot *ortonormált*nak nevezzük, ha minden eleme egységnyi normájú. Ha $(x_k) \subseteq H$ ortogonális sorozat, akkor a H-beli $\sum x_k$ sort *ortogonális sor*nak mondjuk.

4.3.2. Állítás. *Egy H-beli $\sum x_k$ ortogonális sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum \|x_k\|^2$ numerikus sor konvergens. Továbbá a sor konvergenciája esetén*

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\|^2.$$

Bizonyítás. $\sum x_k$ konvergenciája az $\left(n \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ sorozat konvergenciáját jelenti, ez pedig a Cauchy-tulajdonsággal ekvivalens. Azaz $\sum x_k$ pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > m \geq N$ esetén $\left\|\sum_{k=m}^{n} x_k\right\| \leq \varepsilon$, ami persze úgy is fogalmazható, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > m \geq N$ esetén $\left\|\sum_{k=m}^{n} x_k\right\|^2 \leq \varepsilon$. No de a sor ortogonális volta miatt a Pitagorasz-tétel alapján ilyenkor mindig $\left\|\sum_{k=m}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \|x_k\|^2$. Tehát $\sum x_k$ pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > m \geq N$ esetén $\sum_{k=m}^{n} \|x_k\|^2 \leq \varepsilon$. Ez pedig a fentebbihez hasonlóan

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

pontosan azt jelenti, hogy a numerikus $\sum \|x_k\|^2$ sor konvergens. Ezzel az állításban szereplő ekvivalenciát igazoltuk is.

Most minden n-re a Pitagorasz-tétel miatt

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 ,$$

s ha most $\sum x_k$ konvergens, akkor egyszerű határátmenettel

$$\left\| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\|^2 . \qquad \square$$

4.3.3. Állítás (erős Bessel-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $(u_k) \subseteq H$ ortonormált sorozat. Ekkor minden $x \in H$ esetén*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x \mid u_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$-re a lineáris algebrából jól ismert Bessel-egyenlőtlenség miatt $\sum_{k=1}^{n} |\langle x \mid u_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Az állítás innen $n \to +\infty$ határátmenettel adódik. $\square$

4.3.4. Következmény. *Legyen $(u_k) \subseteq H$ ortonormált sorozat. Ekkor minden $x \in H$ vektorra a H-beli $\sum \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$ sor konvergens, továbbá $y := \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$ definícióval minden n-re $\langle y \mid u_n \rangle = \langle x \mid u_n \rangle$.*

Bizonyítás. Mivel $\sum \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$ ortogonális sor, ezért a fenti két állítás alapján konvergens is. Továbbá minden n-re az $\langle \cdot \mid u_n \rangle$ függvény folytonossága és linearitása miatt

$$\langle y \mid u_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k \mid u_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot \langle u_k \mid u_n \rangle = \langle x \mid u_n \rangle ,$$

hiszen a legutóbbi szumma tagjai az n-ediktől eltekintve mind nullák. $\square$

E ponton emlékeztetünk a (korábban tárgyalt) négyzetesen felösszegezhető $\mathbb{K}$-sorozatok $\mathbb{K}$ fölötti $\left(\ell^2_{\mathbb{K}}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ Hilbert-terére.

4.3.5. Megjegyzés. Ha $(u_k) \subseteq H$ ortonormált sorozat, akkor minden $x \in H$ esetén az $\widehat{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto \langle x \mid u_n \rangle$ sorozat az erős Bessel-egyenlőtlenség miatt eleme $\ell^2_{\mathbb{K}}$-nek.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.3.6. Definíció. Egy $(u_k) \subseteq H$ ortonormált sorozatot *teljes ortonormált sorozat*nak mondunk, ha minden $x \in H$-ra

$$\forall n \in \mathbb{N} : \langle x \mid u_n \rangle = 0 \Longrightarrow x = \mathbf{0}_H.$$

4.3.7. Megjegyzés. Ha $(u_k) \subseteq H$ tetszőleges ortonormált sorozat, akkor az $M := \overline{\text{lin}}\,(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$ Hilbert-térben (u_k) teljes ortonormált sorozat.

Bizonyítás. Legyen $x \in M$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $\langle x \mid u_n \rangle = 0$. Eszerint minden n-re $u_n \in x^\perp$. Mivel $x^\perp$ altér, ezért persze $\text{lin}\,(\{u_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq$ $\subseteq x^\perp$. Mivel pedig $x^\perp$ zárt is, ezért $M \subseteq x^\perp$, innen $x \in x^\perp$, ahonnan $x =$ $= \mathbf{0}_H$. □

4.3.8. Tétel. *Legyen $(u_k) \subseteq H$ ortonormált sorozat. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *az (u_k) ortonormált sorozat maximális abban az értelemben, hogy semmilyen $x \in H$ esetén sem lesz $x, u_1, u_2, u_3, \ldots$ ortonormált sorozat;*
2. *az $(u_k) \subseteq H$ ortonormált sorozat teljes;*
3. *minden $x \in H$-ra $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$;*
4. *minden $x, y \in H$-ra $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot \overline{\langle y \mid u_k \rangle}$;*
5. *minden $x \in H$-ra $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x \mid u_k \rangle|^2$ (Parseval-formula).*

Bizonyítás. 1⇒2: Legyen $x \in H$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $\langle x \mid u_n \rangle = 0$. Indirekt tegyük föl, hogy $x \neq \mathbf{0}_H$. Ekkor $y := \frac{x}{\|x\|}$ választással természetesen minden $n \in \mathbb{N}$-re $\langle y \mid u_n \rangle = 0$, így viszont $y, u_1, u_2, u_3, \ldots$ ortonormált sorozat, ami ellentmondásban áll 1.-gyel.

2⇒3: Legyen $x \in H$. Ekkor a korábban már látottak miatt $\sum \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$ konvergens sor, s ekkor $y := \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$ választással minden n-re $\langle y \mid u_n \rangle =$ $= \langle x \mid u_n \rangle$. Innen minden n-re $\langle x - y \mid u_n \rangle = 0$, ahonnan 2. miatt $x - y = \mathbf{0}_H$, azaz $x = y = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$.

3⇒4: Az $\langle \cdot \mid y \rangle$ függvény folytonossága és linearitása miatt

$$\langle x \mid y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k \mid y \right\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot \langle u_k \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot \overline{\langle y \mid u_k \rangle}.$$

4⇒5: $y = x$ választással triviális.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

5⇒1: Indirekt tegyük föl, hogy van olyan $x \in H$ vektor, amelyre $x, u_1, u_2, u_3, \ldots$ ortonormált sorozat. Ekkor persze egyrészt $\|x\| = 1$, másrészt minden $n \in \mathbb{N}$-re $\langle x \mid u_n \rangle = 0$, ahonnan 4. miatt

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x \mid u_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0,$$

ami ellentmondás. Tehát az $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ortonormált sorozat maximális. □

4.3.9. Állítás. *Egy $(u_k) \subseteq H$ ortonormált sorozat pontosan akkor teljes, ha*

$$H = \overline{\operatorname{lin}}\left(\{u_k : k \in \mathbb{N}\}\right).$$

Bizonyítás. Ha (u_k) teljes, akkor a fenti tétel 3. pontja miatt H minden eleme normában közelíthető $\operatorname{lin}(\{u_k : k \in \mathbb{N}\})$-ból vett sorozattal. Megfordítva, ha $H = \overline{\operatorname{lin}}\left(\{u_k : k \in \mathbb{N}\}\right)$, akkor a legutóbbi megjegyzés értelmében (u_k) teljes ortonormált sorozat $\overline{\operatorname{lin}}\left(\{u_k : k \in \mathbb{N}\}\right) = H$-ban. □

4.3.10. Következmény. *Ha H-ban létezik egy $(u_k) \subseteq H$ teljes ortonormált sorozat, akkor H szeparábilis.*

Bizonyítás. A *Szeparabilitás* c. korábbi szakaszban szerepelt, hogy a

$$\overline{\operatorname{lin}}\left(\{f_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$$

alakú alterek mindig szeparábilisak. □

4.3.11. Példa. A $\ell^2_{\mathbb{K}}$ Hilbert-térben minden $n \in N$-re $e_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $j \mapsto \delta_{n,j}$ definícióval triviálisan $(e_n) \subseteq \ell^2_{\mathbb{K}}$ teljes ortonormált sorozat. Következésképp $\ell^2_{\mathbb{K}}$ szeparábilis.

4.3.12. Tétel. *Ha $(u_k) \subseteq H$ teljes ortonormált sorozat, akkor a $\Phi : H \to \ell^2_{\mathbb{K}}$,*

$$\Phi(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{K},\ n \mapsto \langle x \mid u_n \rangle$$

leképezés normatartó izomorfizmus (ún. izometrikus izomorfizmus*).*

Bizonyítás. Egy fentebbi megjegyzés alapján Φ a H halmazt valóban $\ell^2_{\mathbb{K}}$-ba képezi. A $\langle \cdot \mid u_n \rangle$ függvények linearitása miatt Φ maga is lineáris. A Parseval-formula miatt minden $x \in H$-ra

$$\|x\|^2_H = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x \mid u_k \rangle|^2 = \|\Phi x\|^2_{\ell^2_{\mathbb{K}}},$$

tehát Φ normatartó is, persze ekkor injektív is. Már csak a szürjektivitást kell megindokolnunk. Legyen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell^2_{\mathbb{K}}$ tetszőleges. Ekkor persze

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$+\infty > \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|\alpha_k \cdot u_k\|^2$. Innen a már látottak alapján $(\alpha_k \cdot u_k)$ ortogonális volta miatt H-ban $\sum (\alpha_k \cdot u_k)$ konvergens sor. Jelölje e sor összegét x. Minden n-re az $\langle \cdot \mid u_n \rangle$ függvény folytonossága és linearitása miatt triviálisan $\langle x \mid u_n \rangle = \alpha_n$, ahonnan persze

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \Phi x.$$

Tehát Φ szürjektív is. □

Már sok mindent tudunk a teljes ortonormált sorozatokról, de létezésükre eleddig még nem láttunk feltételt.

4.3.13. Tétel (erős Gram–Schmidt)**.** *Minden végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-térben létezik teljes ortonormált sorozat. Sőt ha $(f_n) \subseteq H$ olyan lineárisan független sorozat, hogy*

$$H = \overline{\operatorname{lin}}\left(\{f_n : n \in \mathbb{N}\}\right),$$

akkor $u_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}$,

$$u_{n+1} := \frac{f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle f_{n+1} \mid u_k \rangle \cdot u_k}{\left\| f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle f_{n+1} \mid u_k \rangle \cdot u_k \right\|} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzióval egy olyan H-beli teljes ortonormált (u_n) sorozatot kapunk, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\operatorname{lin}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \operatorname{lin}(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Bizonyítás. Először az állítás második felét indokoljuk. Mivel a megadott rekurzió egybeesik a véges dimenzióból jól ismert Gram–Schmidt-eljárással (nevezetesen a fenti jóldefiniált rekurzió minden n-re a $\operatorname{lin}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ térben az $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ bázishoz éppen az $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ortonormált bázist állítja elő), ezért minden n-re $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ortonormált rendszer H-ban és $\operatorname{lin}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \operatorname{lin}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Ebből az is azonnal következik, hogy (u_n) ortonormált sorozat és

$$\operatorname{lin}\left(\{u_n : n \in \mathbb{N}\}\right) = \operatorname{lin}\left(\{f_n : n \in \mathbb{N}\}\right),$$

ahonnan $\overline{\operatorname{lin}}\left(\{u_n : n \in \mathbb{N}\}\right) = \overline{\operatorname{lin}}\left(\{f_n : n \in \mathbb{N}\}\right) = H$. Az egyik fenti állítás értelmében viszont ekkor (u_n) teljes ortonormált sorozat H-ban.

Az állítás első fele a most bizonyítottakból azon korábbi állítás alapján következik, mely szerint egy végtelen dimenziós szeparábilis normált tér előáll lineárisan független sorozat zárt lineáris burkaként. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.3.14. Következmény. *Egy végtelen dimenziós Hilbert-tér pontosan akkor szeparábilis, ha van benne teljes ortonormált sorozat.*

4.3.15. Következmény. *Ha H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött, akkor* izometrikusan izomorf *$\ell^2_{\mathbb{K}}$-vel, azaz létezik $\Phi : H \to \ell^2_{\mathbb{K}}$ izometrikus izomorfizmus.*

4.3.16. Állítás. *Tetszőleges végtelen dimenziós H Hilbert-térben is létezik ortonormált sorozat (de nem feltétlenül létezik teljes).*

Bizonyítás. Vegyük H egy megszámlálható lineárisan független részhalmazának zárt lineáris burkát. Ez szeparábilis Hilbert-tér, amelyben van ortonormált sorozat. □

4.3.17. Példa. Korábbiak alapján a polinomok $L^2_{\mathbb{R}}\,[-1,1]$-nek sűrű alterét alkotják. Az $L^2_{\mathbb{R}}\,[-1,1]$ Hilbert-térben a lineárisan független $(t^n)_{n=0}^{+\infty}$ polinomsorozatból Gram–Schmidt-eljárással kapható teljes ortonormált (u_n) polinomsorozatot Legendre-polinomoknak szokás nevezni.

4.3.18. Tétel. *Az $L^2_{\mathbb{R}}\,[0,2\pi]$ Hilbert–térben az $u_1\,(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,*

$$u_{2k}\,(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt,$$
$$u_{2k+1}\,(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt$$

definícióval nyert (u_n) sorozat egy teljes ortonormált sorozat $L^2_{\mathbb{R}}\,[0,2\pi]$-ben.

Bizonyítás. Az ortonormáltság egy egyszerű integrálási gyakorlat. Ugyanakkor $\operatorname{lin}\left(\{u_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$ megegyezik a trigonometrikus polinomok terével, amely viszont sűrű altere $L^2_{\mathbb{K}}\,[0,2\pi]$-nek *A Meyer-tétel és a Dynkin-tétel. Sűrűség L^p-ben* c. szakaszban foglaltak szerint. Tehát $L^2_{\mathbb{R}}\,[0,2\pi] = \overline{\operatorname{lin}}\left(\{u_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$, tehát a fentebb látottak miatt (u_n) teljes. □

4.3.19. Definíció. A fenti tételben szereplő teljes ortonormált sorozatot *klasszikus trigonometrikus rendszer*nek vagy *klasszikus Fourier-rendszer*nek nevezzük.

4.3.20. Feladat. Írjuk föl a fenti (u_n) ortonormált sorozatra és az $f\,(t) = \frac{\pi - t}{2}$ függvényre a Parseval-formulát! Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.3.21. Feladat. Mutassuk meg, hogy $L^2_{\mathbb{C}}[0,2\pi]$-ben $u_1(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

$$u_{2k}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikt},$$
$$u_{2k+1}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-ikt}$$

definícióval (u_k) teljes ortonormált sorozat!

4.3.22. Következmény (klasszikus Parseval-formula)**.** *Tetszőleges* $f \in L^2_{\mathbb{R}}[0,2\pi]$ *függvényre*

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\right|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\cos kt\,\mathrm{d}t\right|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin kt\,\mathrm{d}t\right|^2,$$

illetve bármely $f \in L^2_{\mathbb{C}}[0,2\pi]$ *függvényre*

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cdot e^{ikt}\,\mathrm{d}t\right|^2.$$

4.3.23. Feladat. Közismerten minden $n \geq 0$ egészre egy és csak egy olyan p_n valós polinom létezik, amelyre minden t mellett $p_n(\cos t) = \cos nt$ (Csebisev-polinomok). Mutassuk meg, hogy az $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot p_0$ és $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot p_n$ polinomok $(n \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált sorozatot alkotnak a $L^2_{\mathbb{K}}([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \mu)$ Hilbert-térben, ahol $\mu(A) := \int\limits_A \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. (*Ötlet:* Az ortonormáltsághoz a $t = \cos u$ integráltranszformációval térjünk a $[-\pi,0]$ intervallumra, és használjuk föl a klasszikus trigonometrikus rendszerre már látottakat. A teljesség a polinomok sűrű voltából adódik.)

4.3.24. Megjegyzés. Ha $M \leq H$ altér, akkor minden $x \in H$ esetén legfeljebb egyetlen olyan $y \in M$ vektor létezik, amelyre $x - y \perp M$. (Tudniillik ha $y_1, y_2 \in M$, ugyanakkor $x - y_1, x - y_2 \perp M$, akkor $y_1 - y_2$ egyrészt M-ben van, másrészt $y_1 - y_2 = (x - y_2) - (x - y_1)$, ami $M^\perp$ altér volta miatt $M^\perp$-ba esik. Speciálisan $y_1 - y_2$ ortogonális sajátmagára, amiért is nullával egyenlő, azaz $y_1 = y_2$.)

4.3.25. Definíció. Ha $M \leq H$ altér, és egy $x \in H$ vektorhoz létezik olyan $y \in M$ vektor, amelyre $x - y \perp M$, akkor ezen y vektort az x vektor M-re eső ortogonális vetületének nevezzük és $P_M(x)$-szel jelöljük.

4.3.26. Állítás. *Ha* $M \leq H$ *zárt szeparábilis altér, akkor minden* $x \in H$ *esetén létezik* $P_M(x) \in M$. *Az így nyert* $P_M : H \to M$ *leképezés eleme*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$L(H)$-nak és $\|P_M\| \in \{0,1\}$. Ha (u_k) teljes ortonormált sorozat M-ben, akkor minden $x \in H$-ra

$$P_M x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k.$$

Bizonyítás. Először az utolsó állítást indokoljuk. Legyen (u_k) teljes ortonormált sorozat M-ben. Minden $x \in H$-ra az erős Bessel-egyenlőtlenség miatt $\sum |\langle x \mid u_k \rangle|^2$ konvergens, továbbá egy másik tétel miatt az M Hilbert-térben $\sum \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$ konvergens, ezért az $A : H \to M$,

$$Ax := \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k$$

leképezés jóldefiniált. A sorösszegzésre vonatkozó legalapvetőbb szabályok miatt A lineáris. Az ortogonális sorok összegének normájára vonatkozó korábbi formula miatt pedig minden $x \in H$-ra

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|\langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x \mid u_k \rangle|^2,$$

ami az erős Bessel-egyenlőtlenség miatt $\|x\|^2$-nál nem nagyobb. Ugyanakkor nyilván $\|Au_1\| = \|u_1\|$, amiért is $\|A\| = 1$.

Most az erős Bessel-egyenlőtlenség következménye miatt minden n-re $\langle Ax \mid u_n \rangle = \langle x \mid u_n \rangle$, ahonnan $u_n \in (x - Ax)^\perp$. Mivel ez utóbbi zárt altér, ezért azonnal adódik, hogy

$$M = \overline{\operatorname{lin}}\,(\{u_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq (x - Ax)^\perp.$$

Azaz $x - Ax \perp M$. Ezzel igazoltuk, hogy Ax éppen az M-re eső ortogonális vetülete x-nek, azaz $Ax = P_M(x)$. Ezzel $P_M : H \to M$ definiált és $P_M = A$ (s persze így $\|P_M\| = 1$). Éppen ezt akartuk igazolni.

Az állítás első fele véges dimenziós M esetén lineáris algebrából ismert (azzal együtt, hogy $\|P_M\| \in \{0,1\}$). Tegyük föl, hogy M végtelen dimenziós. Az erős Gram–Schmidt-tétel miatt ekkor van benne teljes ortonormált sorozat. Így az állítás bizonyítandó első fele a már bizonyított részből azonnal következik. □

4.3.27. Tétel (Riesz)**.** *Ha $M \leq H$ tetszőleges zárt altér, akkor is minden $x \in H$ esetén létezik $P_M(x) \in M$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in H$. Egy korábbi Riesz-tétel alapján létezik olyan $x_* \in M$, amelyre $\|x - x_*\| = d(x, M)$. Megmutatjuk, hogy $x_* = P_M(x)$. Valóban, minden $y \in M$ vektorra és $t > 0$ számra

$$d^2(x, M) \leq \|x - (x_* + t \cdot y)\|^2 = \|(x - x_*) - t \cdot y\|^2 =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \|x - x_*\|^2 + 2t \cdot \mathrm{Re}\,\langle x - x_* \mid y\rangle + t^2 \cdot \|y\|^2 =$$
$$= d^2(x, M) + 2t \cdot \mathrm{Re}\,\langle x - x_* \mid y\rangle + t^2 \cdot \|y\|^2,$$

ahonnan $0 \le 2t \cdot \mathrm{Re}\,\langle x - x_* \mid y\rangle + t^2 \cdot \|y\|^2$, tehát $0 \le 2\mathrm{Re}\,\langle x - x_* \mid y\rangle + t \cdot \|y\|^2$, innen pedig $t \to 0+$ határátmenettel

$$0 \le 2\mathrm{Re}\,\langle x - x_* \mid y\rangle.$$

Most y helyébe $-y$-t írva, azonnal $0 = \mathrm{Re}\,\langle x - x_* \mid y\rangle$. Innen triviálisan $0 = \langle x - x_* \mid y\rangle$ is fennáll (ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor írjunk y helyébe $i \cdot y$-t). Mivel ez minden $y \in M$-re áll, ezért $x - x_* \perp M$, tehát x_* valóban $P_M(x)$. □

4.3.28. Állítás. *Legyenek $M, N \subseteq H$, $x \in H$. Ekkor*

1. $\mathbf{0}_H^\perp = H$ *és* $H^\perp = \{\mathbf{0}_H\}$;
2. $x \in M^\perp \iff M \subseteq x^\perp$;
3. $M \subseteq N \Longrightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$;
4. $M^\perp = (\mathrm{lin}M)^\perp = \left(\overline{\mathrm{lin}M}\right)^\perp$;
5. $\left(M^\perp\right)^\perp = \overline{\mathrm{lin}M}$.

Bizonyítás. 1., 2. és 3. triviális. Lássuk 4.-et: tetszőleges $u \in H$-ra 2. alapján az $u \in M^\perp$ feltétel ekvivalens az $M \subseteq u^\perp$ feltétellel, s mivel $u^\perp$ altér (ill. zárt altér), ezért e feltétel a $\mathrm{lin}M \subseteq u^\perp$ feltétellel (ill. a $\overline{\mathrm{lin}M} \subseteq u^\perp$ feltétellel) ekvivalens; ami újra 2. alapján az $u \in (\mathrm{lin}M)^\perp$ feltétellel (ill. az $u \in \left(\overline{\mathrm{lin}M}\right)^\perp$ feltétellel) ekvivalens. Épp ezt akartuk látni.

5.: A definíció alapján $\overline{\mathrm{lin}M} \subseteq \left(\overline{\mathrm{lin}M^\perp}\right)^\perp$, s ez utóbbi a már látott 4. alapján $\left(M^\perp\right)^\perp$-mal egyezik meg. Így most már elegendő megmutatnunk, hogy $\left(M^\perp\right)^\perp \subseteq \overline{\mathrm{lin}M}$. Legyen $x \in \left(M^\perp\right)^\perp$. A legutóbbi tétel szerint létezik $P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x)$. Ekkor persze $x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) \in M^\perp$. Ezért $x \in \left(M^\perp\right)^\perp$ miatt

$$0 = \left\langle x \mid x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x)\right\rangle =$$
$$= \left\langle P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) \mid x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x)\right\rangle + \left\langle x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) \mid x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x)\right\rangle.$$

Mivel pedig $x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) \perp \overline{\mathrm{lin}M}$ és $P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) \in \overline{\mathrm{lin}M}$, ezért $\left\langle P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) \mid x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x)\right\rangle = 0$, így a legutóbbi egyenlőségsorozatból

$$0 = \left\langle x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) \mid x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x)\right\rangle,$$

azaz $x - P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) = \mathbf{0}_H$, tehát $x = P_{\overline{\mathrm{lin}M}}(x) \in \overline{\mathrm{lin}M}$. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.4. Gyenge konvergencia Hilbert-terekben

Az alábbiakban legyen H Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött.

4.4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $(x_n) \subseteq H$ sorozat *gyengén konvergál* az $x \in H$ vektorhoz (jelben: $x_n \overset{w}{\to} x$), ha minden $y \in H$ esetén $\langle x_n \mid y\rangle \to \langle x \mid y\rangle \ \ (n \to +\infty)$. Az (x_n) sorozat *gyengén konvergens*, ha van ahova gyengén konvergáljon.

4.4.2. Megjegyzés. A „gyenge limesz" egyértelmű, azaz ha $x_n \overset{w}{\to} x$ és $x_n \overset{w}{\to} z$, akkor a $\mathbb{K}$-beli limesz egyértelműsége miatt minden $y \in H$-ra $\langle x \mid y\rangle = \langle z \mid y\rangle$, ahonnan triviálisan $x = z$.

4.4.3. Megjegyzés. Nyilván $x_n \overset{w}{\to} x$ esetén $\|x_n\| \cdot \|x\| \geq \langle x_n \mid x\rangle \to \|x\|^2$ miatt triviálisan

$$\liminf \|x_n\| \geq \|x\| .$$

4.4.4. Állítás. *Legyen $(x_n) \subseteq H$ és $x \in H$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. $x_n \overset{w}{\to} x$ *és* $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$;
2. $x_n \overset{w}{\to} x$ *és* $\lim \|x_n\| = \|x\|$;
3. $x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x$.

Bizonyítás. 1⇒2: A fenti megjegyzésből nyilvánvaló.

2⇒3: A feltétel alapján

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x_n \mid x\rangle + \|x\|^2 \to \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid x\rangle + \|x\|^2 = 0.$$

3⇒1: Tegyük föl, hogy $x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x$. Innen $x_n \overset{w}{\to} x$ a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján következik. Az állítás másik fele az $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$ egyenlőtlenségből következik triviálisan. □

4.4.5. Példa. Tetszőleges $(u_n) \subseteq H$ ortonormált sorozat az erős Bessel-egyenlőtlenség alapján gyengén tart $\mathbf{0}_H$-hoz, ugyanakkor $\|u_n\| = 1 \not\to 0 = \|\mathbf{0}_H\|$.

Ortogonális *sorok*ra viszont már elég „éles" fegyver a gyenge konvergencia:

4.4.6. Tétel. *Egy H-beli $\sum x_k$ ortogonális sorra az alábbiak ekvivalensek:*

1. $\sum \|x_k\|^2 < +\infty$;
2. $\sum x_k$ *normában konvergens;*
3. $\sum x_k$ *gyengén konvergens.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. 1. és 2. ekvivalenciája az előző szakaszban szerepelt. A fenti állítás értelmében így elegendő megmutatnunk, hogy ha $\sum_{k=1}^{n} x_k \overset{w}{\to} x$, akkor minden n-re $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \|x\|$.

Tetszőleges $n \geq m$ természetes számokra az ortogonalitás miatt azonnal

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \mid \sum_{k=1}^{m} x_k \right\rangle = \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|^2,$$

így a gyenge határátmenet miatt $\left\langle x \mid \sum_{k=1}^{m} x_k \right\rangle = \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|^2$. Innen a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség és egy triviális egyszerűsítés után valóban

$$\|x\| \geq \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\|. \qquad \square$$

4.4.7. Állítás. *Legyen $M \subseteq H$ konvex zárt halmaz, $x \in H$ és $(x_n) \subseteq M$. Ha $x_n \overset{w}{\to} x$, akkor $x \in M$. (E tényt úgy is ki szokás fejezni, hogy egy Hilbert-térben egy konvex zárt halmaz ún.* gyengén is zárt*.)*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy $x \notin M$. Ekkor a szigorú szeparációs tétel miatt van olyan $y \in H$ vektor, melyre

$$\alpha := \sup_{u \in M} \langle u \mid y \rangle < \langle x \mid y \rangle.$$

Ekkor persze $\alpha \geq \langle x_n \mid y \rangle \to \langle x \mid y \rangle > \alpha$, ami ellentmondás. $\square$

Szakaszunk fő állítása előtt néhány további konzekvenciára lesz szükségünk.

4.4.8. Tétel (Riesz)**.** *Minden $\varphi \in H^*$ funkcionálhoz létezik egy és csak egy olyan $y \in H$ vektor, amelyre*

$$\varphi = \langle \cdot \mid y \rangle.$$

Sőt ekkor $\|y\| = \|\varphi\|$.

Bizonyítás. Először igazoljuk az egyértelműséget. Ha $y_1, y_2 \in H$ olyan vektorok, hogy mind $\varphi = \langle \cdot \mid y_1 \rangle$, mind $\varphi = \langle \cdot \mid y_2 \rangle$ fennáll, akkor persze $\langle \cdot \mid y_1 - y_2 \rangle$ azonosan nulla, így speciálisan $\langle y_1 - y_2 \mid y_1 - y_2 \rangle = 0$, ahonnan $y_1 = y_2$.

Most lássuk az egzisztenciát. Ha $\ker \varphi = H$, az állítás $y = \mathbf{0}_H$-val triviális. Tegyük föl, hogy létezik $z \in H \setminus \ker \varphi$. Mivel $\ker \varphi$ zárt altér, ezért a korábbi

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Riesz-tétel miatt létezik $P_{\ker\varphi}z$, és persze $u := z - P_{\ker\varphi}z \in (\ker\varphi)^{\perp}$ nemnulla vektor, amiért is $u \notin \ker\varphi$. Másrészt minden $x \in H$-ra természetszerűleg

$$(\varphi x)\cdot u - (\varphi u)\cdot x \in \ker\varphi,$$

innen $u \perp \ker\varphi$ miatt

$$0 = \langle (\varphi x)\cdot u - (\varphi u)\cdot x \mid u\rangle = \langle u \mid u\rangle \cdot \varphi x - (\varphi u)\cdot\langle x \mid u\rangle,$$

innen pedig

$$\varphi x = \frac{\varphi u}{\langle u \mid u\rangle}\cdot\langle x \mid u\rangle = \left\langle x \mid \frac{\overline{\varphi u}}{\|u\|^2}\cdot u\right\rangle,$$

tehát $y := \frac{\overline{\varphi u}}{\|u\|^2}\cdot u$ választással $\langle\cdot \mid y\rangle = \varphi$. A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján ugyanakkor triviálisan $\|\langle\cdot \mid y\rangle\| = \|y\|$, tehát $\|\varphi\| = \|y\|$. □

Tetszőleges $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ végtelen halmazon értelmezett függvényt *kvázisorozat*nak nevezünk. Ha például (x_n) tetszőleges sorozat és $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ végtelen halmaz, akkor $(x_n)_{|A}$ kvázisorozat. A kvázisorozatok konvergenciáját természetes módon értelmezzük.

4.4.9. Megjegyzés. A valós, illetve síkbeli Bolzano–Weierstraß-tételnek nyilván ekvivalens alakja a következő: Ha $f : A \to \mathbb{K}$ korlátos kvázisorozat (ahol $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ végtelen halmaz), akkor van olyan $B \subseteq A$ végtelen halmaz, hogy $f_{|B}$ konvergens kvázisorozat.

4.4.10. Lemma (Cantor-féle átlós elv)**.** *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ mellett adott egy $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos sorozat. Ekkor van olyan $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ végtelen halmaz, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ mellett az $(f_n)_{|A}$ kvázisorozat konvergens.*

Bizonyítás. Rekurzióval definiáljunk egy végtelen halmazokból álló monoton szűkülő $(A_n) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sorozatot, a rekurzió minden lépésében a fenti megjegyzést használjuk. Az A_1 halmazt válasszuk úgy, hogy $(f_1)_{|A_1}$ konvergens legyen. Ha már A_n definiált, akkor a fenti megjegyzést alkalmazzuk a korlátos $(f_{n+1})_{|A_n}$ kvázisorozatra: eszerint van olyan $A_{n+1} \subseteq A_n$ végtelen halmaz, hogy $(f_{n+1})_{|A_{n+1}}$ konvergens kvázisorozat.

Ezzel definiáltuk az $(A_n) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sorozatot; egyidejűleg minden $n \in \mathbb{N}$-re az $(f_n)_{|A_n}$ kvázisorozat konvergens. Most az $\alpha_n := \min(A_n \setminus \{1,\dots,n\})$ monoton növő sorozat triviálisan $+\infty$-be tart, így $A := \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ olyan végtelen halmaz, amelyiknek tetszőleges A_n-ből csupán véges sok eleme lóg ki. Eszerint tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett igaz, hogy az $(f_n)_{|A}$ kvázisorozat az $(f_n)_{|A\cap A_n}$ kvázisorozattól csak véges sok pontban különbözik, tehát ugyanoda konvergál, mint $(f_n)_{|A\cap A_n}$, ami persze viszont ugyanoda tart, mint $(f_n)_{|A_n}$. Azaz minden $n \in \mathbb{N}$ mellett az $(f_n)_{|A}$ kvázisorozat konvergens. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.4.11. Következmény (Átfogalmazás)**.** *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ mellett adott egy $\left(\alpha_k^{(n)}\right)$ korlátos $\mathbb{K}$-beli sorozat. Ekkor van olyan (végtelen) $(k_\ell) \subseteq \mathbb{N}$ szigorúan növő indexsorozat, hogy az $\left(\alpha_{k_\ell}^{(n)}\right)$ sorozatok mindegyike konvergens.*

4.4.12. Tétel. *Minden $(x_k) \subseteq H$ korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $(x_k) \subseteq H$ korlátos sorozat. Legyen e sorozat egy korlátja $L > 0$. Jelölje minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_k^{(n)} := \langle x_k \mid x_n \rangle$. Ezzel minden $n \in \mathbb{N}$-re definiáltunk egy $\left(\alpha_k^{(n)}\right)$ korlátos $\mathbb{K}$-beli sorozatot. A fenti következmény miatt van olyan (végtelen) $(k_\ell) \subseteq \mathbb{N}$ szigorúan növő indexsorozat, hogy az $\left(\alpha_{k_\ell}^{(n)}\right)$ sorozatok mindegyike konvergens, azaz minden n-re $(\ell \mapsto \langle x_{k_\ell} \mid x_n \rangle)$ konvergens. Rögzítsük e (k_ℓ) indexsorozatot. Meg fogjuk mutatni, hogy minden $y \in H$ mellett $(\ell \mapsto \langle x_{k_\ell} \mid y \rangle)$ konvergens $\mathbb{K}$-beli sorozat. Jelölje

$$M := \{y \in H : (\ell \mapsto \langle x_{k_\ell} \mid y \rangle) \text{ konvergens } \mathbb{K}\text{-beli sorozat}\}.$$

Persze $(x_n) \subseteq M$. A konvergens sorozatok összegére és számszorosára vonatkozó tétel alapján M triviálisan altere H-nak. Megmutatjuk, hogy M zárt is. Legyen $u \in H$ és $(u_n) \subseteq M$, $u_n \to u$. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq n_0$ esetén $\|u - u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3L}$. Mivel $u_{n_0} \in M$, ezért van olyan $\ell_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $\ell, j \geq \ell_0$ esetén

$$\left|\langle x_{k_\ell} - x_{k_j} \mid u_{n_0} \rangle\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ekkor minden $\ell, j \geq \ell_0$ esetén

$$\begin{aligned}\left|\langle x_{k_\ell} - x_{k_j} \mid u \rangle\right| &\leq \left|\langle x_{k_\ell} - x_{k_j} \mid u_{n_0} \rangle\right| + \left|\langle x_{k_\ell} - x_{k_j} \mid u - u_{n_0} \rangle\right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left\|x_{k_\ell} - x_{k_j}\right\| \cdot \|u - u_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2L \cdot \frac{\varepsilon}{3L} = \varepsilon,\end{aligned}$$

amivel igazoltuk, hogy $(\ell \mapsto \langle x_{k_\ell} \mid y \rangle)$ $\mathbb{K}$-beli Cauchy-sorozat. Ez persze konvergens is. Ezzel $u \in M$, amivel megmutattuk, hogy M zárt altér. Emiatt $\overline{\operatorname{lin}}\,(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq M$. Most legyen $y \in H$ tetszőleges. Az egyik Riesz-tétel miatt létezik $y_1 \in \overline{\operatorname{lin}}\,(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$, hogy $y - y_1 \perp \overline{\operatorname{lin}}\,(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$. Persze $y_1 \in M$. Ugyanakkor $y - y_1 \perp \overline{\operatorname{lin}}\,(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ miatt az $(\ell \mapsto \langle x_{k_\ell} \mid y - y_1 \rangle)$ sorozat azonosan nulla, amiért is természetszerűleg $y - y_1 \in M$. Mivel pedig M altér, ezért $y \in M$. Ezzel igazoltuk, hogy $M = H$, tehát minden $y \in H$ mellett $(\ell \mapsto \langle x_{k_\ell} \mid y \rangle)$ konvergens $\mathbb{K}$-beli sorozat.

Jelölje most $\Phi : H \to \mathbb{K}$,

$$\Phi(y) := \overline{\lim_{\ell \to +\infty} \langle x_{k_\ell} \mid y \rangle} = \lim_{\ell \to +\infty} \langle y \mid x_{k_\ell} \rangle.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A konvergens sorozatok összegére és számszorosára vonatkozó tétel alapján Φ triviálisan lineáris funkcionál. Ugyanakkor minden $y \in H$-ra

$$|\Phi(y)| = \lim_{\ell\to+\infty} |\langle y \mid x_{k_\ell}\rangle| \le \limsup_{\ell\to+\infty} \|y\| \cdot \|x_{k_\ell}\| \le L \cdot \|y\|,$$

tehát Φ folytonos is. Ezért a legutóbbi Riesz-tétel alapján létezik egy és csak egy olyan $x \in H$ vektor, amelyre $\Phi = \langle \cdot \mid x\rangle$. Ezzel minden $y \in H$-ra

$$\langle x_{k_\ell} \mid y\rangle \to \overline{\Phi(y)} = \overline{\langle y \mid x\rangle} = \langle x \mid y\rangle \qquad (\ell \to +\infty).$$

Azaz $x_{k_\ell} \overset{w}{\to} x$. □

4.4.13. Állítás. *Legyen $M \subseteq H$ nemüres korlátos zárt konvex halmaz és $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos (elég: alulról félig folytonos) és konvex (elég: kvázikonvex) függvény. Ekkor f az M halmazon fölveszi a minimumát.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \inf_M f$. Legyen $(\beta_n) \subseteq \mathbb{R}$ olyan sorozat, amely szigorúan fogyólag tart α-hoz. f (kvázi)konvexitása és (alulról félig) folytonos volta miatt minden n-re $\beta_n > \alpha$ alapján

$$M_n := \{x \in M : f(x) \le \beta_n\}$$

nemüres korlátos zárt konvex halmaz. Vegyünk egy olyan (x_n) sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in M_n$. Mivel M korlátos, ezért e sorozatból kiválaszthatunk egy valamely x vektorhoz gyengén konvergáló (x_{n_k}) részsorozatot. Az (M_n) sorozat monoton szűkülő; ezért tetszőleges j-re az (x_{n_k}) sorozat egy indextől kezdve M_j-be esik. Mivel pedig M_j konvex és zárt, ezért $x \in M_j$, azaz $f(x) \le \beta_j$. Mivel ez tetszőleges j-re igaz, ezért $f(x) \le \alpha$, tehát x-ben f fölveszi a minimumát. □

4.4.14. Következmény. *Tetszőleges $M \subseteq H$ nemüres korlátos zárt konvex halmaz és $y \in H$ esetén $\langle \cdot \mid y\rangle$ fölveszi M-en mind a minimumát, mind a maximumát.*

Bizonyítás. Mind $\langle \cdot \mid y\rangle$, mind $-\langle \cdot \mid y\rangle$ konvex és folytonos függvény. □

4.4.15. Megjegyzés. A fenti következmény az egyik Riesz-tétel alapján azt jelenti, hogy egy Hilbert-téren értelmezett folytonos lineáris funkcionál tetszőleges nemüres korlátos zárt konvex halmazon fölveszi a maximumát és a minimumát.

4.4.16. Feladat. Adjunk példát arra, hogy egy Hilbert-téren értelmezett folytonos lineáris A `transzformációra` $\|\cdot\| \circ A$ az egységgömbön nem feltétlenül veszi föl a maximumát. (Ez egyúttal példa folytonos konvex függvényre, amely egy nemüres korlátos zárt konvex halmazon nem veszi föl a

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

maximumát.) Jelesül mutassuk meg, hogy az $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $f \mapsto \mathrm{id}_{[0,1]} \cdot f$ folytonos lineáris transzformációra $A\left(\mathcal{B}_{L^2[0,1]}\right)$-nek nincs az origótól legtávolabbi eleme! ($\|A\| = 1$)

4.4.17. Feladat. Mutassuk meg, hogy általában egy Banach-tér esetén már az is előfordulhat, hogy egy a téren értelmezett folytonos lineáris funkcionál nem veszi föl a tér egységgömbjén a maximumát! Nevezetesen gondoljuk meg, hogy a $(C_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_C)$ Banach-téren a $\varphi f := \int_0^1 f - f(0)$ egyenlőséggel definiált folytonos lineáris funkcionálra $\|\varphi\| = 2$, de minden $f \in \mathcal{B}_{C[0,1]}$ esetén $|\varphi f| < 2$! (*Ötlet:* a $-1 \le f \le 1$, $\varphi f \ge 2$ feltételegyüttes triviális kalkulációval vezet ellentmondásra. Ugyanakkor $\varphi\left(2\sqrt[n]{\cdot} - 1\right) \to 2$.)

4.4.18. Feladat. Mutassuk meg, hogy végtelen dimenziós H esetén tetszőleges $x \in \overline{\mathcal{B}}_H$ vektorhoz van olyan csupa egységvektorból álló H-beli sorozat, amely gyengén konvergál x-hez! (*Ötlet:* legyen $(u_n) \subseteq x^\perp$ ortonormált sorozat és $x_n := x + \sqrt{1 - \|x\|^2} \cdot u_n$.)

4.4.19. Feladat (Banach–Saks-tétel)**.** Mutassuk meg, hogy egy $x_n \overset{w}{\to} x$ tulajdonságú $(x_n) \subseteq H$ (korlátos) sorozatnak van olyan (x_{n_k}) részsorozata, amelyre

$$y_k := \frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k}}{k} \overset{\|\cdot\|}{\to} x.$$

(*Ötlet:* Feltehető, hogy $x = \mathbf{0}_H$. A gyenge konvergencia miatt választható olyan (x_{n_k}) részsorozat, hogy minden k és $1 \le j \le n_k$ esetén $\langle x_j \mid x_{n_{k+1}} \rangle < \frac{1}{k+1}$. Ennek átlagsorozata közvetlenül becsülhető.)

4.4.20. Feladat. Legyen $(u_n) \subseteq H$ ortonormált sorozat. Mutassuk meg, hogy $x_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} u_k \overset{w}{\to} \mathbf{0}_H$! Igazoljuk, hogy $y_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ normában nem konvergens! (*Ötlet:* Az u_k vektorok véges lineáris kombinációival való skalárszorzás az (x_n) sorozat mentén triviálisan 0-hoz tart. Innen $\|x_n\| = 1$ alapján egyszerű becsléssel az u_k vektorok zárt lineáris burkának elemeivel való skalárszorzás is 0-hoz tart az (x_n) sorozat mentén. Ezen altér ortokomplementumán a tartás triviális, ezzel $x_n \overset{w}{\to} \mathbf{0}_H$. Most a Parseval-formula alapján $\|y_n\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n^2} \left(\sum_{\sqrt{j} \le k \le n} \frac{1}{k} \right)^2$, ahonnan például triviális becsléssel $\|y_{3n}\|^2 \ge \frac{1}{9n^2} \sum_{j=1}^{4n^2} \left(\sum_{2n \le k \le 3n} \frac{1}{k} \right)^2 \ge \frac{4}{81}$.)

4.4.21. Feladat. Mutassuk meg, hogy Hilbert-térben egy konvex zárt és egy konvex zárt korlátos halmaz összege is zárt! (*Ötlet:* használjuk a zárt

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

halmazok sorozatokkali jellemzését, a gyengén konvergens részsorozat kiválasztására konatkozó tételt, valamint a konvex zárt halmazok gyenge limeszre való zártságát.)

4.4.22. Következmény (szigorú szeparáció II.)**.** *Legyen H valós Hilbert-tér és $K, M \subseteq H$ diszjunkt nemüres konvex zárt halmazok, továbbá K korlátos is. Ekkor van olyan $y \in H$ vektor, melyre*

$$\sup_{u \in M} \langle u \mid y \rangle < \min_{v \in K} \langle v \mid y \rangle .$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a szigorú szeparációs tételt $\mathbf{0}_H$-ra és a konvex zárt $K - M$ halmazra. □

4.4.23. Megjegyzés. A fenti következmény mintha elsőre azt sugallná, hogy nem is a kompaktság, hanem közvetlenül a korlátos zártság az oka a szigorú szeparációnak. Ám ne feledjük, hogy a Hilbert-terek nagyon is speciális helyzetet foglalnak el a Banach-terek között, s általánosabb keretek között bizony már a korlátos zártsággal nem sokra megyünk. Egyébként nagyon is kompaktsági gondolaton keresztül sikerült e szeparációig jutnunk. Banach-terekben ez az állítás ebben a megfogalmazásban már nem igaz, lásd az alábbi példát.

4.4.24. Példa. Tekintsük a 4.4.17. és 4.1.2. Feladatokban szereplő $\varphi \in \in (C_{\mathbb{R}}[0,1])^*$ funkcionált. A 4.1.2. Feladatból azonnal következik, hogy $C_{\mathbb{R}}[0,1]$-ben a $K := \mathrm{id}_{[0,1]} + \frac{1}{4}\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}}[0,1]}$ és $M := 2\mathcal{B}_{C_{\mathbb{R}}[0,1]} \cap \ker \varphi$ korlátos zárt konvex halmazoknak bármilyen pozitív ε-nál vannak egymáshoz közelebbi elemeik. Ez triviálisan kizárja a szigorú szeparációt a K és M halmazok között. (Erős szeparáció ugyanakkor van, mégpedig éppen a φ funkcionállal.)

4.5. A Krein–Milman-tétel végtelen dimenziós változata

Az alábbiakban legyen H valós Hilbert-tér.

4.5.1. Megjegyzés. Ha $M \subseteq H$ nemüres korlátos zárt konvex halmaz, akkor minden $y \in H$-ra

$$M^{(y)} = \left\{ x \in M : \langle x \mid y \rangle = \sup_{M} \langle \cdot \mid y \rangle \right\}$$

is nemüres nemüres korlátos zárt konvex halmaz.

Bizonyítás. Mivel $\langle \cdot \mid y \rangle$ fölveszi M-en a maximumát, így $M^{(y)}$ nemüres. Továbbá $M^{(y)}$ egy korlátos zárt konvex halmaz és egy folytonos lineáris funkcionál magtere eltoltjának metszete. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.5.2. Lemma. *Egy $M \subseteq H$ nemüres korlátos zárt konvex halmaznak minden $\varepsilon > 0$ mellett létezik ε-nál kisebb átmérőjű nemüres zárt extremális K részhalmaza.*

Bizonyítás. Tekintsük az $\alpha := \sup\{\|x\| : x \in M\} \in \mathbb{R}_+$ számot. Legyen $x_* \in M$ olyan, hogy $\|x_*\|^2 > \alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{8}$. Jelölje

$$C := \left\{x \in M : \langle x \mid x_* \rangle \geq \alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{8}\right\}.$$

Ekkor $x_* \in C$, továbbá minden $x \in C$-re

$$\|x - x_*\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid x_* \rangle + \|x_*\|^2 \leq \alpha^2 - 2\left(\alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{8}\right) + \alpha^2 = \frac{\varepsilon^2}{4},$$

tehát $\|x - x_*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ahonnan $\mathrm{diam} C \leq \varepsilon$. Jelölje

$$K := M^{(x_*)} = \left\{x \in M : \langle x \mid x_* \rangle = \sup_M \langle \cdot \mid x_* \rangle\right\}.$$

Persze $x_* \in M$ miatt $\sup_M \langle \cdot \mid x_* \rangle \geq \|x_*\|^2 > \alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{8}$, ahonnan $K \subseteq C$, tehát $\mathrm{diam} K \leq \varepsilon$. A korábban már látottak miatt ugyanakkor K extremális részhalmaza M-nek, amely ugyanakkor a fenti megjegyzés értelmében nemüres. □

4.5.3. Tétel (Krein–Milman II.)**.** *Tetszőleges $M \subseteq H$ korlátos zárt konvex halmazra*

$$M = \overline{\mathrm{conv}\,(\mathrm{ext}\ (M))}.$$

Ha M nemüres, akkor van extremális pontja.

Bizonyítás. Először nézzük az állítás második részét. Tegyük föl, hogy M nemüres. A fenti lemma alapján rekurzióval kiválaszthatunk egy nemüres korlátos zárt konvex halmazokból álló monoton szűkülő olyan (M_n) sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ mellett

1. M_{n+1} extremális részhalmaza M_n-nek;
2. $\mathrm{diam} M_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$;
3. $M_1 = M$.

Ekkor az „extremális részhalmaznak lenni” tulajdonság korábban már látott tranzitivitása miatt mindegyik M_n extremális részhalmaza M-nek. Ezért $\bigcap_{n=1}^{+\infty} M_n$ is zárt extremális részhalmaz. Ugyanakkor minden n-re kiválasztva egy $x_n \in M_n$ elemet, 2. miatt triviálisan $\|\cdot\|$-Cauchy-sorozathoz jutunk,

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

amelynek a teljesség miatt van egy valamely x vektorhoz konvergáló (x_{n_k}) részsorozata. Az (M_n) sorozat monoton szűkülő volta miatt tetszőleges j-re az (x_{n_k}) sorozat egy indextől kezdve M_j-be esik. Mivel pedig M_j zárt, ezért $x \in M_j$ minden j-re. Tehát $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} M_n$. Ugyanakkor minden $n \geq 2$ esetén $\operatorname{diam} M_n \leq \frac{1}{n}$, ezért szükségszerűen $\bigcap_{n=1}^{+\infty} M_n = \{x\}$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $x \in \operatorname{ext}(M)$.

Most térjünk az állítás első részére. Ha $M = \emptyset$, akkor az állítás triviális. Tegyük föl, hogy $M \neq \emptyset$. Ekkor a már látottak szerint $\operatorname{ext}(M)$ sem üres. Így $\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))}$ nemüres korlátos zárt konvex halmaz, amely triviálisan részhalmaza M-nek. Indirekt tegyük föl, hogy $\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))} \neq M$. Ekkor létezik $x \in M \setminus \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))}$. A szigorú szeparációs tétel értelmében van olyan $y \in H$ vektor, amelyre

$$\sup_{u \in \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))}} \langle u \mid y \rangle < \langle x \mid y \rangle .$$

A legutóbbi megjegyzés alapján $M^{(y)}$ nemüres nemüres korlátos zárt konvex halmaz, amelynek az állítás most igazolt második része miatt van egy z extremális pontja. Mivel pedig $M^{(y)}$ extremális részhalmaza M-nek, ezért $z \in \operatorname{ext}(M)$. Igen ám, de ekkor $x \in M$ és $z \in M^{(y)}$ miatt

$$\langle z \mid y \rangle \leq \sup_{u \in \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))}} \langle u \mid y \rangle < \langle x \mid y \rangle \leq \sup_{M} \langle \cdot \mid y \rangle = \langle z \mid y \rangle ,$$

ami ellentmondás. Tehát mégis $\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))} = M$. □

4.5.4. Megjegyzés. Egy végtelen dimenziós Hilbert-térben előfordulhat, hogy egy konvex kompakt halmaz nem áll elő az extremális pontjainak konvex burkaként (mint a végesrangú esetben), csupán az extremális pontok konvex burkának **lezártjaként** (a fenti tétel értelmében). Lásd az alábbi két példát, s az őket követő feladatot.

4.5.5. Példa. Legyen $H = L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$ és jelölje

$$N := \left\{ u \in L^2_{\mathbb{R}}[0,1] : 0 \leq u \leq 1 \right\}$$

Ekkor N nemüres korlátos zárt konvex halmaz. Megmutatjuk, hogy N extremális pontjai éppen a Borel-halmazok karakterisztikus függvényei, azaz a $\{0,1\}$-be képező mérhető függvények. Ez utóbbiak persze triviálisan extremális pontok. Legyen most $f \in \operatorname{ext}(N)$ tetszőleges. Ha f pozitív mértékű halmazon venne föl $(0,1)$-beli értéket, akkor létezne $\varepsilon > 0$ és $A \subseteq [0,1]$ pozitív mértékű Borel-halmaz, hogy $\varepsilon \leq f_{|A} \leq 1 - \varepsilon$. Ekkor viszont

$$f = \frac{1}{2}(f - \varepsilon \cdot \chi_A) + \frac{1}{2}(f + \varepsilon \cdot \chi_A) ,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

mivel pedig $f-\varepsilon\cdot\chi_A$ és $f+\varepsilon\cdot\chi_A$ különböző elemei N-nek, ezért f nem lehet N-nek extremális pontja. Ezért valóban

$$\operatorname{ext}(N)=\{\chi_A : A\in\mathcal{B}([0,1])\}.$$

Persze ekkor $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(N))$ elemei lépcsős függvények, tehát például $\mathrm{id}_{[0,1]}\in$ $\in N\setminus\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(N))$, azaz $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(N))\neq N$.

4.5.6. Példa. Legyen H és N ugyanaz, mint az előző példában. Jelölje A : $: L^2_{\mathbb{R}}[0,1]\to L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$,

$$Af:=\int_0 f\,d\lambda.$$

Ekkor könnyen látható, hogy minden $(f_n)\subseteq N$, $f\in L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$, $f_n\overset{w}{\to}f$ esetén $Af_n\overset{\|\cdot\|}{\to}Af$ (a pontonkénti konvergencia nyilvánvaló, innen a normakonvervencia a Lebesgue-féle majorált konvergenciatételből adódik). Emiatt az eddig igazolt tételek alapján $M:=A(N)$ triviálisan kompakt, persze konvex is. Mivel A lineáris és injektív, ezért triviálisan $\operatorname{ext}(M)=A(\operatorname{ext}(N))$; innen azonnal adódik, hogy $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))\neq M$; jóllehet M konvex és kompakt.

4.5.7. Feladat. Legyen $H=\ell^2_{\mathbb{K}}$ és

$$M:=\left\{(\alpha_n)\in\ell^2_{\mathbb{K}} : \sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot\alpha_k\leq 1 \quad \text{és minden } n\text{-re} \quad \alpha_n\geq 0\right\}.$$

Mutassuk meg, hogy M konvex és kompakt, ám $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))\neq M$! (*Ötlet:* M zárt volta a $\sum_{k=1}^{N}k\cdot\alpha_k\leq 1$ tulajdonságon keresztül nyilvánvaló, M persze konvex is. M elemeit az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat majorálja, innen a kompaktság is adódik. Azonnal látható, hogy M extremális pontjait a $\mathbf{0}$ és az $\frac{1}{k}\cdot\chi_{\{k\}}$ alakú sorozatok alkotják. Innen $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))$ csupa olyan sorozatból áll, amelyek egy index után eltűnnek. Viszont például $\left(\frac{1}{2k^3}\right)\in M$, tehát $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(M))\neq M$.)

4.5.8. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy H Hilbert-térben a $\overline{\mathcal{B}}_H$ egységgömb extremális pontjai éppen az egységvektorok. Következésképp $\operatorname{conv}\big(\operatorname{ext}(\overline{\mathcal{B}}_H)\big)=$ $=\overline{\mathcal{B}}_H$. (Hasonlítsuk össze ezt az eredményt a végesrangú verziót tárgyaló szakasz végén levő, a $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ Banach-térre vonatkozó feladattal.)

4.6. Adjungálás

A következőkben legyen $(H,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.6.1. Megjegyzés. Tetszőleges $A \in L(H)$ és $y \in H$ esetén létezik egy és csak egy olyan $z_y \in H$ vektor, amelyre minden $x \in H$ mellett

$$\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid z_y \rangle .$$

Bizonyítás. Mivel $\langle \cdot \mid y \rangle \in H^*$ és $A \in L(H)$, ezért $\langle \cdot \mid y \rangle \circ A \in H^*$. Így az egyik Riesz-tétel alapján létezik egy és csak egy olyan $z_y \in H$ vektor, amelyre $\langle \cdot \mid y \rangle \circ A = \langle \cdot \mid z_y \rangle$, azaz amelyre minden $x \in H$ mellett $\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid z_y \rangle$. □

4.6.2. Tétel. *Tetszőleges $A \in L(H)$ operátorhoz létezik egy és csak egy olyan $A^* : H \to H$ lineáris operátor, amelyre minden $x, y \in H$ esetén*

$$\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid A^* y \rangle ,$$
$$\langle A^* y \mid x \rangle = \langle y \mid Ax \rangle .$$

Bizonyítás. A skalárszorzat alaptulajdonságai miatt az állításban szereplő két egyenlőség ekvivalens, így csak az elsőre fogunk szorítkozni. Előbb lássuk az egyértelműséget: ha $B, C : H \to H$ olyan lineáris operátor, amelyekre minden $x, y \in H$ esetén

$$\langle x \mid By \rangle = \langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid Cy \rangle ,$$

akkor $\langle x \mid (B - C) y \rangle = 0$, speciálisan $x := (B - C) y$ választással

$$\langle (B - C) y \mid (B - C) y \rangle = 0.$$

Emiatt $(B - C) y = \mathbf{0}_H$, azaz $By = Cy$ minden $y \in H$-ra, tehát $B = C$.

Nézzük az egzisztenciát. A fenti megjegyzés szerint minden $y \in H$ vektorhoz létezik egy és csak egy olyan $z_y \in H$ vektor, amelyre $\langle \cdot \mid y \rangle \circ A = \langle \cdot \mid z_y \rangle$. Jelölje hát

$$A^* : H \to H,$$
$$A^*(y) := z_y.$$

Ezzel a definícióval persze minden $x, y \in H$ esetén

$$\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid A^*(y) \rangle ,$$

ami éppen az igazolandó egyenlőség. Innen ugyanakkor minden $y_1, y_2 \in H$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén minden $x \in H$ mellett

$$\langle x \mid A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle = \langle Ax \mid \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle Ax \mid y_1 \rangle + \overline{\beta} \cdot \langle Ax \mid y_2 \rangle =$$
$$= \overline{\alpha} \cdot \langle x \mid A^*(y) \rangle + \overline{\beta} \cdot \langle x \mid A^*(y) \rangle = \langle x \mid \alpha \cdot A^*(y_1) + \beta \cdot A^*(y_2) \rangle ,$$

ami x tetszőleges volta miatt éppen azt jelenti, hogy

$$A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \cdot A^*(y_1) + \beta \cdot A^*(y_2) .$$

Ezzel megmutattuk, hogy A^* lineáris. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.6.3. Definíció. Tetszőleges $A \in L(H)$ esetén a fenti tételen szereplő A^* operátort az A operátor adjungáltjának nevezzük (és a továbbiakban mindig A^*-gal jelöljük).

4.6.4. Megjegyzés. A definíciót megelőző tételben szereplő egyenlőség-pár és az adjungált operátor egyértelműsége miatt minden $A, B \in L(H)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

- $(A+B)^* = A^* + B^*$;
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;
- $(AB)^* = B^* A^*$.

Ugyanígy triviális, hogy $I^* = I$.

4.6.5. Megjegyzés (csillagbecslés)**.** Tetszőleges $A \in L(H)$ és $x \in H$ esetén

$$\|A^* x\|^2 \leq \|A(A^* x)\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|A^* x\| \cdot \|x\|.$$

Bizonyítás. $\|A^* x\|^2 = \langle A^* x \mid A^* x \rangle = \langle A(A^* x) \mid x \rangle \leq \|A(A^* x)\| \cdot \|x\| \leq$ $\leq \|A\| \cdot \|A^* x\| \cdot \|x\|$. □

4.6.6. Tétel. *Tetszőleges $A \in L(H)$ esetén A^* folytonos és $\|A^*\| = \|A\|$.*

Bizonyítás. A csillagbecslést $\|A^* x\|$-val egyszerűsítve azonnal $\|A^* x\| \leq$ $\leq \|A\| \cdot \|x\|$. Emiatt A^* folytonos, sőt $\|A^*\| \leq \|A\|$. A kapott eredményt A helyett A^*-ra alkalmazva $\|A^*\| \geq \|A\|$. Összevetve $\|A^*\| = \|A\|$. □

4.6.7. Megjegyzés. A definiáló egyenlőségből triviális, hogy minden $A \in$ $\in L(H)$ esetén $(A^*)^* = A$.

Az alábbi állítást matematika-szerte *C^*-feltétel* néven ismerik:

4.6.8. Állítás (C^*-feltétel)**.** *Tetszőleges $A \in L(H)$ esetén*

$$\|A^* A\| = \|A A^*\| = \|A\|^2.$$

Bizonyítás. A és A^* folytonossága miatt $A^* A$ is folytonos. A szubmultiplikativitás és a fenti tétel alapján ekkor

$$\|A^* A\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2.$$

Másrészt tetszőleges $x \in H$ vektorra a csillagbecslést A^*-ra alkalmazva

$$\|Ax\|^2 \leq \|A^* A x\| \cdot \|x\| \leq \|A^* A\| \cdot \|x\| \cdot \|x\|,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

azaz $\|Ax\| \leq \sqrt{\|A^*A\|}\cdot\|x\|$, innen azonnal $\|A\| \leq \sqrt{\|A^*A\|}$,ahonnan $\|A\|^2 \leq$ $\leq \|A^*A\|$. Összevetve

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 .$$

A kapott eredményt A helyett A^*-ra alkalmazva a már látottak miatt

$$\|AA^*\| = \|A^{**}A^*\| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2 . \qquad \square$$

4.6.9. Állítás. *Tetszőleges $A \in L(H)$ esetén*

$$\ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp \quad \textit{és} \quad \ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp .$$

Bizonyítás. $A^{**} = A$ miatt elegendő csupán az első egyenlőséget igazolni. Tetszőleges $x \in H$ esetén $x \in (\operatorname{im} A)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in H : \langle x \mid Ay\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in H :$ $: \langle A^*x \mid y\rangle = 0 \Leftrightarrow A^*x = \mathbf{0}_H \Leftrightarrow x \in \ker A^*$. $\square$

4.6.10. Következmény. *Tetszőleges $A \in L(H)$ esetén* $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{im} A^*}$.

Bizonyítás. Tetszőleges $M \leq H$ altérre $\left(M^\perp\right)^\perp = \overline{M}$. $\square$

4.6.11. Állítás. *Legyen $A \in L(H)$. Ha $M \leq H$ A-invariáns altér, akkor $M^\perp$ A^*-invariáns.*

Bizonyítás. Legyen $x \in M^\perp$. Ekkor tetszőleges $y \in M$ esetén $Ay \in M$, tehát $x \perp Ay$. Azaz

$$0 = \langle x \mid Ay\rangle = \langle A^*x \mid y\rangle ,$$

így $A^*x \perp y$ minden $y \in M$ mellett, következésképp $A^*x \in M^\perp$. $\square$

4.6.12. Definíció. Legyen $A \in L(H)$. Azt mondjuk, hogy A *normális*, ha $A^*A = AA^*$. Azt mondjuk, hogy A *önadjungált*, ha $A^* = A$. Azt mondjuk, hogy A unitér, ha $A^*A = AA^* = I$.

4.6.13. Megjegyzés. Minden önadjungált operátor normális. Minden unitér operátor normális.

4.6.14. Megjegyzés. Egy $A \in L(H)$ operátor pontosan akkor önadjungált, ha minden $x, y \in H$ esetén

$$\langle Ax \mid y\rangle = \langle x \mid Ay\rangle .$$

4.6.15. Megjegyzés. Egy $U \in L(H)$ operátor pontosan akkor unitér, ha U szürjektív és minden $x, y \in H$ esetén

$$\langle Ux \mid Uy\rangle = \langle x \mid y\rangle ,$$

következésképp ha U unitér, akkor minden $x \in H$-ra $\|Ux\| = \|x\|$.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.6.16. Megjegyzés. Ha $A \in L(H)$ önadjungált, akkor minden $x \in H$-ra triviálisan $\langle Ax \mid x\rangle \in \mathbb{R}$.

4.6.17. Állítás. *Legyenek $A, B \in L(H)$ önadjungált operátorok. Ez esetben az $A = B$ feltétel ekvivalens az*

$$\langle Ax \mid x\rangle = \langle Bx \mid x\rangle \qquad (\forall x \in H)$$

feltétellel.

Bizonyítás. Csak azt kell megmutatnunk, hogy e második feltételből következik $A = B$. Tegyük hát föl, hogy minden $x \in H$-ra $\langle Ax \mid x\rangle = \langle Bx \mid x\rangle$, azaz $\langle (A-B)\,x \mid x\rangle = 0$. Eszerint minden $x, y \in H$-ra is

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (A-B)\,(x+y) \mid x+y\rangle = \\ &= \langle (A-B)\,x \mid x\rangle + \langle (A-B)\,y \mid y\rangle + \langle (A-B)\,x \mid y\rangle + \langle (A-B)\,y \mid x\rangle = \\ &= \langle (A-B)\,x \mid y\rangle + \langle (A-B)\,y \mid x\rangle = \langle (A-B)\,x \mid y\rangle + \langle y \mid (A-B)\,x\rangle \end{aligned}$$

(a legutóbbi lépésben $A - B$ önadjungált voltát használtuk), ahonnan $y := (A-B)\,x$ választással $0 = 2\,\langle (A-B)\,x \mid (A-B)\,x\rangle$, innen pedig

$$(A-B)\,x = \mathbf{0}_H,$$

azaz $Ax = Bx$ minden $x \in H$ esetén, tehát $A = B$. □

4.6.18. Következmény. *Egy $A \in L(H)$ operátor pontosan akkor normális, ha minden $x \in H$-ra $\|Ax\| = \|A^*x\|$.*

Bizonyítás. E legutóbbi feltétel négyzetre emeléssel vett ekvivalens alakja nyilván

$$\langle A^*Ax \mid x\rangle = \langle AA^*x \mid x\rangle \qquad (\forall x \in H),$$

ami a fenti tétel alapján A^*A és AA^* önadjungáltsága miatt ekvivalens az $A^*A = AA^*$ feltétellel. □

4.6.19. Következmény. *Ha $A \in L(H)$ normális operátor, akkor* $\ker A^* = \ker A$, *következésképp* $\ker A = (\operatorname{im} A)^\perp$ *és* $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{im} A}$.

4.6.20. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy $U \in L(H)$ szürjektív operátor pontosan akkor unitér, ha minden $x \in H$-ra $\|Ux\| = \|x\|$.

4.6.21. Feladat. Legyen H **komplex** Hilbert-tér és $A \in L(H)$ olyan operátor, amelyre minden $x \in H$ mellett $\langle Ax \mid x\rangle \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy A önadjungált! (*Ötlet:* Alkalmazzuk a fenti állítást a $\mathbf{0}$ és $i \cdot (A - A^*)$ önadjungált operátorokra.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.6.22. Megjegyzés. Legyen H komplex Hilbert-tér és $A \in L(H)$. Ekkor

$$B := \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad \text{és} \qquad C := \frac{i}{2}(A^* - A)$$

választással $A = B + i \cdot C$, továbbá B és C triviálisan önadjungáltak. Sőt adjungálással nyilvánvaló, hogy az $A = B + i \cdot C$ (B, C önadjungáltak) előállítás egyértelmű. Ekkor a B operátort az A operátor **valós rész**ének, a C operátort pedig az A **képzetes rész**ének nevezzük.

4.6.23. Megjegyzés. Legyen H komplex Hilbert-tér. Egy $A \in L(H)$ operátor pontosan akkor normális, ha valós és képzetes része felcserélhető ($BC = CB$).

Bizonyítás. Ha A normális, akkor A és A^* felcserélhetősége miatt B és C is felcserélhetők. Megfordítva, ha $A = B + i \cdot C$, ahol $B, C \in L(H)$ felcserélhető önadjungált operátorok, akkor $A^* = B - i \cdot C$ alapján triviálisan $A^*A = B^2 + C^2 = AA^*$. □

4.6.24. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $A, B \in L\left(\ell^2_{\mathbb{C}}\right)$,

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) := (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$
$$B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) := (\alpha_2, \alpha_3, \ldots)$$

operátorok egymás adjungáltjai. Gondoljuk meg, hogy $A^*A = I$, de persze A nem unitér!

4.6.25. Feladat. Mutassunk példát olyan $A \in L\left(\ell^2_{\mathbb{C}}\right)$ önadjungált transzformációra, amely injektív, de nem szürjektív. (Persze az egyik fenti állítás értelmében ekkor im (A) sűrű altér.) (*Ötlet: pl.* $(A\mathbf{a})(k) := \frac{1}{k} \cdot \mathbf{a}(k)$.)

4.7. Kompakt operátorok

A továbbiakban legyen ismét $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött.

4.7.1. Definíció. Egy $A \in L(H)$ operátort **kompakt**nak mondunk, ha az H-beli $\overline{\mathcal{B}}_H$ egységgömb A általi képének lezártja kompakt halmaz H-ban.

Tehát $A \in L(H)$ kompakt operátor, ha $\overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_H\right)} \subseteq H$ kompakt halmaz.

4.7.2. Megjegyzés. Egy $A \in L(H)$ operátorra triviálisan ekvivalensek:

1. A kompakt;
2. A minden korlátos halmazt teljesen korlátos halmazba visz;

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

3. A minden korlátos sorozatot olyan sorozatba visz, amelynek van konvergens részsorozata;
4. A minden korlátos sorozatot olyan sorozatba visz, amelynek van Cauchy-részsorozata.

4.7.3. Megjegyzés. Ha $A, B \in L(H)$ és A kompakt, akkor AB és BA is triviálisan kompakt. Ha A és B is kompakt, akkor $A+B$ is kompakt.

4.7.4. Tétel (Schauder)**.** *Ha $A \in L(H)$ kompakt operátor, akkor A^* is kompakt.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy A^* minden korlátos sorozatot olyan sorozatba visz, amelynek van Cauchy-részsorozata. Legyen $(x_n) \subseteq H$ korlátos sorozat. Ekkor AA^* kompakt volta miatt (AA^*x_n)-nek létezik konvergens $(AA^*x_{n_k})$ részsorozata. Most tetszőleges $j, \ell \in \mathbb{N}$ indexek esetén az $x_{n_j} - x_{n_\ell}$ vektorra a csillagbecslés alapján

$$\left\|A^*x_{n_j} - A^*x_{n_\ell}\right\|^2 = \left\|A^*\left(x_{n_j} - x_{n_\ell}\right)\right\|^2 \leq \left\|A\left(A^*\left(x_{n_j} - x_{n_\ell}\right)\right)\right\| \cdot \left\|x_{n_j} - x_{n_\ell}\right\|.$$

Mivel az $(AA^*x_{n_k})$ sorozat Cauchy-sorozat, az (x_{n_k}) sorozat pedig korlátos, ezért a fenti egyenlőtlenség miatt $(A^*x_{n_k})$ is triviálisan Cauchy-sorozat. Ezt akartuk megmutatni. □

4.7.5. Tétel. *Ha $A \in L(H)$ kompakt operátor, akkor minden $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén $\ker(A - \alpha I)$ véges dimenziós.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy $\ker(A - \alpha I)$ végtelen dimenziós; ekkor egy korábbi 4.3.16. Állítás miatt a $\ker(A - \alpha I)$ Hilbert-térben létezik teljes ortonormált (u_n) sorozat. Világos, hogy az $(Au_n) = (\alpha \cdot u_n)$ sorozatnak nincs konvergens részsorozata, lévén az elemei páronként $\sqrt{2}\,|\alpha|$ távolságra egymástól. Ez ellentmond A kompaktságának. □

4.7.6. Megjegyzés. A fenti tételt másképp is bizonyíthatjuk, amely Hilbert-tér helyett tetszőleges Banach-tér esetén is működik.

Ez a következő: a $\ker(A - \alpha I)$ altér egységgömbjét az A operátor teljesen korlátos halmazba viszi, viszont e kép ugyanezen altérben a $\mathbf{0}_H$ körüli $|\alpha| > 0$ sugarú gömb. Tehát $\ker(A - \alpha I)$ tartalmaz teljesen korlátos gömböt, ami a Függelékben (Rådström-féle törlési szabály utáni tétel) szerepeltek szerint éppen azt jelenti, hogy $\ker(A - \alpha I)$ véges dimenziós.

4.7.7. Tétel. *Legyen $H \neq \{\mathbf{0}_H\}$ és $A \in L(H)$ kompakt operátor. Ekkor az $x \mapsto \|Ax\|$ függvény a H tér $\mathcal{S}_H = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ egységszféráján fölveszi a maximumát (ami persze $\|A\|$).*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\|A\| > 0$. Legyen $(x_n) \subseteq \mathcal{S}_H$ olyan sorozat, amelyre $\|Ax_n\| \to \|A\|$. Ekkor egy korábbi tétel miatt A kompaktsága alapján (x_n)-nek kiválaszthatunk olyan (x_{n_k}) részsorozatát, amely gyengén konvergál egy $x \in H$ vektorhoz, ugyanakkor Ax_{n_k} normában tart egy $y \in H$ vektorhoz. Továbbá minden $u \in H$-ra $\langle x_{n_k} \mid A^*u \rangle \to \langle x \mid A^*u \rangle$, azaz $\langle Ax_{n_k} \mid u \rangle \to \langle Ax \mid u \rangle$, tehát $Ax_{n_k} \overset{w}{\to} Ax$. Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy $Ax_{n_k} \overset{w}{\to} y$. A gyenge limesz egyértelműsége miatt ekkor $Ax = y$, emiatt $Ax_{n_k} \overset{\|\cdot\|}{\to} Ax$. Innen azonnal $\|Ax_{n_k}\| \to \|Ax\|$, azaz $\|Ax\| = \|A\|$.

Már csak azt kell meggondolnunk, hogy $x \in \mathcal{S}_H$. A gyenge konvergencia alaptulajdonságai miatt $(x_{n_k}) \subseteq \mathcal{B}_H$ és $\mathcal{B}_H$ konvex zárt volta alapján $x \in \mathcal{B}_H$. Ugyanakkor $\|A\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ és $\|A\| > 0$ miatt $\|x\| \geq 1$. Tehát $x \in \mathcal{S}_H$. □

4.7.8. Feladat. Tekintsük az $\ell^2_{\mathbb{R}}$ Hilbert-téren

$$(T\mathbf{a})(n) := \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 1, \\ \frac{\mathbf{a}(n-1)}{n}, & \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$$

módon értelmezett T operátort. Mutassuk meg, hogy T kompakt, ugyanakkor egyetlenegy sajátértéke sincs. Mi a helyzet a T^* operátorral?

4.7.9. Feladat (*)**.** Legyen $A \in L(H)$ kompakt operátor és $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Mutassuk meg, hogy

- $(A - \alpha I)_{|(\ker(A-\alpha I))^\perp}$ inverze folytonos;
- $\operatorname{im}(A - \alpha I)$ zárt;
- ha α sajátértéke A-nak, akkor $\overline{\alpha}$ is A^*-nak!

(*Ötlet* az elsőhöz: ellenkező esetben vehetünk $(\ker(A - \alpha I))^\perp$-beli egységvektorok egy olyan (x_n) sorozatát, amelyre $(A - \alpha I)x_n \to \mathbf{0}_H$. Erre alkalmazva A kompaktságát, rövid úton ellentmondásra jutunk. A harmadikhoz: Ellenkező esetben $\operatorname{im}(A - \alpha I)$ sűrű, így a második pont alapján $A - \alpha I$ szürjektív. Így $\ker(A - \alpha I) \neq \{\mathbf{0}_H\}$ miatt $(\ker((A - \alpha I)^n))$ egy szigorúan bővülő altérsorozat. Így vehető egy egységvektorokból álló

$$x_n \in \ker((A - \alpha I)^n) \cap \left(\ker\left((A - \alpha I)^{n-1}\right)\right)^\perp$$

tulajdonságú (x_n) sorozat. Tetszőleges $m < n$ indexekre $Ax_m, (A - \alpha I)x_n \in \ker\left((A - \alpha I)^{n-1}\right)$ alapján ezért $\|Ax_n - Ax_m\| =$

$$= \|\alpha \cdot x_n - [Ax_m - (A - \alpha I)x_n]\| = |\alpha| \cdot \left\| x_n - \frac{Ax_m - (A - \alpha I)x_n}{\alpha} \right\| \geq |\alpha| \cdot 1,$$

tehát (Ax_n)-nek nem lehet konvergens részsorozata. Ez ellentmondás.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.8. Kompakt normális operátorok spektrálfelbontása

A továbbiakban legyen $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött.

4.8.1. Állítás. *Ha $A \in L(H)$ normális, $v \in H$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor*

$$Av = \alpha \cdot v \quad \Longleftrightarrow \quad A^* v = \overline{\alpha} \cdot v.$$

Bizonyítás. Összeszorzással azonnal ellenőrizhető, hogy A normális volta alapján mind az $(A - \alpha I)^* \cdot (A - \alpha I)$ operátor, mind az $(A - \alpha I) \cdot (A - \alpha I)^*$ operátor megegyezik az

$$A^* A - \overline{\alpha} A - \alpha A^* + |\alpha|^2 I$$

operátorral. Tehát $A - \alpha I$ normális. Így egy korábbi következmény miatt $\ker(A - \alpha I) = \ker(A^* - \overline{\alpha} I)$, tehát

$$(A - \alpha I) v = \mathbf{0}_H \quad \Longleftrightarrow \quad (A^* - \overline{\alpha} I) v = \mathbf{0}_H,$$

ami éppen a kívánt ekvivalenciát jelenti. □

4.8.2. Következmény. *Ha $v \in H$ sajátvektora az $A \in L(H)$ normális operátornak $\alpha \in \mathbb{K}$ sajátértékkel, akkor v sajátvektora A^*-nak is, mégpedig $\overline{\alpha}$ sajátértékkel.*

4.8.3. Következmény. *Ha $A \in L(H)$ normális operátor és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor*

$$S_\alpha(A) = S_{\overline{\alpha}}(A^*)$$

(ahol $S_\alpha(A) := \ker(A - \alpha I)$ az A α-sajátaltere).

4.8.4. Következmény. *Egy $A \in L(H)$ önadjungált operátor minden sajátértéke valós. Egy $U \in L(H)$ unitér operátor minden sajátértéke egységnyi abszolút értékű szám.*

Bizonyítás. Ha $\alpha \in \mathbb{K}$ sajátértéke A-nak egy $v \neq \mathbf{0}_H$ sajátvektorral, akkor a fenti állítás miatt

$$\alpha \cdot v = Av = A^* v = \overline{\alpha} \cdot v,$$

ahonnan $\alpha = \overline{\alpha}$, tehát $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ha most $\beta \in \mathbb{K}$ sajátértéke U-nak egy $w \neq \mathbf{0}_H$ sajátvektorral, akkor U unitér volta alapján

$$|\beta| \cdot \|w\| = \|\beta \cdot w\| = \|Uw\| = \|w\|,$$

ahonnan $|\beta| = 1$. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.8.5. Állítás. *Legyen $A \in L(H)$ normális operátor és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq \beta$. Ekkor*

$$S_\alpha(A) \perp S_\beta(A).$$

Bizonyítás. Legyen $x \in S_\alpha(A)$ és $y \in S_\beta(A)$. Ekkor $Ax = \alpha \cdot x$ és $Ay = \beta \cdot y$, így $A^*y = \overline{\beta} \cdot y$. Innen

$$\alpha \cdot \langle x \mid y \rangle = \langle \alpha \cdot x \mid y \rangle = \langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid A^*y \rangle = \left\langle x \mid \overline{\beta} \cdot y \right\rangle = \beta \cdot \langle x \mid y \rangle,$$

ami $\alpha \neq \beta$ miatt csak úgy lehet, ha $\langle x \mid y \rangle = 0$, azaz $x \perp y$. Tehát

$$S_\alpha(A) \perp S_\beta(A). \qquad \square$$

4.8.6. Következmény. *Ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{K}$ az $A \in L(H)$ normális operátor csupa különböző sajátértékei és $u_1, u_2, \ldots \in H$ rendre hozzájuk tartozó sajátvektorok, akkor $u_1, u_2, \ldots$ páronként ortogonális vektorok (tehát pl. megszámlálható sajátérték esetén ortogonális sorozat).*

Egy $A \in L(H)$ önadjungált operátort *pozitív szemidefinit*nek hívunk, ha minden $x \in H$-ra

$$\langle Ax \mid x \rangle \geq 0.$$

4.8.7. Lemma. *Legyen $A \in L(H)$ pozitív szemidefinit önadjungált operátor és $x \in H$ olyan vektor, amelyre $\langle Ax \mid x \rangle = 0$. Ekkor $Ax = \mathbf{0}_H$.*

Bizonyítás. Tetszőleges $u \in H$ és $t > 0$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle A(x + t \cdot u) \mid x + t \cdot u \rangle = \\ &= \langle Ax \mid x \rangle + t \cdot (\langle Ax \mid u \rangle + \langle Au \mid x \rangle) + t^2 \cdot \langle Au \mid u \rangle = \\ &= t \cdot (\langle Ax \mid u \rangle + \langle Au \mid x \rangle) + t^2 \cdot \langle Au \mid u \rangle, \end{aligned}$$

ahonnan t-vel való osztással

$$0 \leq \langle Ax \mid u \rangle + \langle Au \mid x \rangle + t \cdot \langle Au \mid u \rangle,$$

innen pedig $t \to 0+$ határátmenettel

$$0 \leq \langle Ax \mid u \rangle + \langle Au \mid x \rangle = \langle Ax \mid u \rangle + \langle u \mid Ax \rangle.$$

Ebből $u := -Ax$ választással azonnal adódik, hogy $2\|Ax\|^2 = 0$, azaz $Ax = \mathbf{0}_H$. $\square$

Mostantól tegyük föl, hogy $H \neq \{\mathbf{0}_H\}$.

4.8.8. Lemma. *Legyen $A \in L(H)$ nemnulla kompakt operátor.*
Ekkor $\ker\left(A^*A - \|A\|^2 \cdot I\right)$ *véges, de nem nulladimenziós altér.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Az előző szakasz utolsó tétele miatt $\|\cdot\| \circ A$ az $\mathcal{S}_H$ egységszférán fölveszi a maximumát, mondjuk egy v helyen. Így tetszőleges $x \in H$ vektorra triviálisan

$$\langle A^*Ax \mid x\rangle \leq \|A^*A\| \cdot \|x\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|x\|^2 = \left\langle \|A\|^2 \cdot x \mid x \right\rangle,$$

ahonnan

$$\left\langle \left(\|A\|^2 \cdot I - A^*A\right) x \mid x \right\rangle \geq 0.$$

Mivel $\|A\|^2 \cdot I - A^*A$ triviálisan önadjungált , ezért a legutóbbi egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $\|A\|^2 \cdot I - A^*A$ pozitív szemidefinit. Másrészt v választása miatt

$$\left\langle \left(\|A\|^2 \cdot I - A^*A\right) v \mid v \right\rangle = \|A\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle A^*Av \mid v\rangle = \|A\|^2 - \|Av\|^2 = 0,$$

így az előző lemma alapján $\left(\|A\|^2 \cdot I - A^*A\right) v = \mathbf{0}_H$. Mivel $\|v\| \neq 0$, ezért $v \in \ker\left(A^*A - \|A\|^2 \cdot I\right)$ nemnulla altér, másrészt A^*A kompaktsága és $\|A\|^2 \neq 0$ miatt véges dimenziós. □

4.8.9. Állítás. *Legyen H véges dimenziós és $A \in L(H)$ önadjungált operátor. Ekkor A-nak létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértéke.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{S}_H$ kompakt egységszférán a $Q_A : H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle Ax \mid x\rangle$ folytonos kvadratikus alak fölveszi a maximumát. Ennek értéke legyen λ, és $w \in \mathcal{S}_H$ olyan vektor, ahol ezt az értéket Q_A fölveszi, azaz amelyre

$$\langle Aw \mid w\rangle = \lambda.$$

Ugyanakkor tetszőleges $x \in H$ vektorra triviálisan

$$\langle Ax \mid x\rangle \leq \lambda \cdot \|x\|^2 = \langle \lambda \cdot x \mid x\rangle,$$

ahonnan

$$\langle (\lambda \cdot I - A)\, x \mid x\rangle \geq 0.$$

Mivel pedig $\lambda \cdot I - A$ is triviálisan önadjungált , ezért a legutóbbi egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $\lambda \cdot I - A$ pozitív szemidefinit. Másrészt w választása miatt

$$\langle (\lambda \cdot I - A)\, w \mid w\rangle = \lambda \cdot \|w\|^2 - \langle Aw \mid w\rangle = \lambda - \langle Aw \mid w\rangle = 0,$$

így az eggyel korábbi lemma alapján $(\lambda \cdot I - A)\, w = \mathbf{0}_H$. Mivel $\|w\| \neq 0$, ezért w sajátvektora A-nak a λ sajátértékkel. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.8.10. Állítás. *Legyen H véges dimenziós és legyenek $A, B \in L(H)$ felcserélhető önadjungált operátorok, azaz amelyekre $AB = BA$. Ekkor A-nak és B-nek van közös v sajátvektora.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint A-nak létezik $\alpha \in \mathbb{R}$ sajátértéke. Ekkor a

$$S_\alpha(A) := \{x \in H : Ax = \alpha \cdot x\} = \ker(A - \alpha \cdot I)$$

sajátaltér nem nulladimenziós. Továbbá minden $x \in S_\alpha(A)$-ra $AB = BA$ alapján

$$A(Bx) = B(Ax) = B(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot Bx,$$

azaz $Bx \in S_\alpha(A)$. Ez éppen azt jelenti, hogy $S_\alpha(A)$ egy B-invariáns altér, tehát B-nek az $S_\alpha(A)$-ra való megszorítása éppen a véges (de nem nulla-) dimenziós $S_\alpha(A)$ skalárszorzatos tér egy önadjungált transzformációja. Így ismét az előző tétel miatt B-nek van $S_\alpha(A)$-ban egy v sajátvektora. Mivel $v \in S_\alpha(A)$ és $v \neq \mathbf{0}_H$, ezért v A-nak is sajátvektora. □

4.8.11. Következmény. *Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, H véges dimenziós és $A \in L(H)$ normális operátor. Ekkor A-nak létezik $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértéke.*

Bizonyítás. A korábbiak szerint vannak olyan $B, C \in L(H)$ felcserélhető önadjungált operátorok, hogy $A = B + i \cdot C$. Ha $v \in H$ közös sajátvektora B-nek és C-nek, akkor persze sajátvektora A-nak is. □

4.8.12. Tétel. *Legyen $A \in L(H)$ kompakt normális operátor, továbbá vagy A önadjungált, vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ekkor A-nak létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértéke, amelyre $|\lambda| = \|A\|$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy A nemnulla. Az egyik fenti lemma szerint ekkor $\ker\left(A^*A - \|A\|^2 \cdot I\right)$ véges, de nem nulldimenziós altér. Ez az altér persze A normális volta miatt A-invariáns is, sőt a normálisságot karakterizáló $\|A^*x\| = \|Ax\|$ egyenlőség alapján $A_{|\ker\left(A^*A - \|A\|^2 \cdot I\right)}$ normális transzformáció. Ha netán $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor önadjungált is. A legutóbbi két állítás és következmény alapján ekkor létezik $w \in \ker\left(A^*A - \|A\|^2 \cdot I\right)$ sajátvektora A-nak egy $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértékkel. A normalitás miatt persze ekkor $A^*w = \overline{\lambda} \cdot w$.

Innen pedig $w \in \ker\left(A^*A - \|A\|^2 \cdot I\right)$ alapján

$$\|A\|^2 \cdot w = A^*Aw = A^*(\lambda w) = \lambda \cdot A^*w = |\lambda|^2 w,$$

ahonnan $|\lambda| = \|A\|$. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.8.13. Következmény. *Legyen $A \in L(H)$ kompakt normális operátor, továbbá vagy A önadjungált, vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ekkor az A operátor $\mathbb{K}$-beli sajátértékei abszolútértékének van maximuma, továbbá*

$$\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{K} \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\} = \max_{\|x\|\le 1} |\langle Ax \mid x\rangle|,$$

sőt $|\langle Ax \mid x\rangle|$ ezen maximumát fölveszi a maximális abszolút értékű sajátértékekhez tartokó egységnyi sajátvektorokon.

Bizonyítás. Az első egyenlőség a fenti tételből triviális. Ha most $\lambda \in \mathbb{K}$ az A transzformáció maximális abszolút értékű sajátértéke (tehát $|\lambda| = \|A\|$) egy hozzátartozó egységnyi u sajátvektorral, akkor

$$\begin{aligned}\|A\| = |\lambda| = |\lambda \cdot \langle u \mid u\rangle| = |\langle \lambda \cdot u \mid u\rangle| = |\langle Au \mid u\rangle| \le \\ \le \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Ax \mid x\rangle| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \cdot \|x\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \|A\|,\end{aligned}$$

következkezésképp a fentiekben mindenütt egyenlőségnek kell állnia (s emiatt a szuprémumok is valójában maximumok, s legalábbis mindazokon a helyeken föl is vétetnek, ahol $|\lambda|$ fölveszi az $\|A\|$ értéket). Így persze

$$\|A\| = \max_{\|x\|\le 1} |\langle Ax \mid x\rangle|. \qquad \square$$

4.8.14. Következmény. *Legyen $A \in L(H)$ tetszőleges kompakt operátor. Ekkor*

$$\|A\| = \sqrt{\max\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ sajátértéke } A^*A\text{-nak}\}}.$$

Bizonyítás. A^*A önadjungált (sőt pozitív szemidefinit, tehát az összes sajátértéke nemnegatív), így a fenti következmény és a C*-feltétel miatt

$$\max\{\lambda : \lambda \in \mathbb{R} \text{ sajátértéke } A^*A\text{-nak}\} = \|A^*A\| = \|A\|^2. \qquad \square$$

4.8.15. Lemma. *Legyen $A \in L(H)$ kompakt normális operátor, $(\lambda_k) \subseteq \mathbb{K}$ pedig az A sajátértékeiből álló injektív sorozat. Ekkor (λ_k) tart 0-hoz. (Tehát az A sajátértékeinek a nullán kívül nincs torlódási pontja.)*

Bizonyítás. Legyen minden $k \in \mathbb{N}$-re $u_k \in H$ a λ_k-hoz tartozó egységnyi hosszú sajátvektor. A normalitása és a λ_k számok páronkénti különböző volta miatt (u_k) ortonormált sorozat. Indirekt tegyük föl, hogy λ_k nem tart 0-hoz. Ekkor a (λ_k) sorozat korlátossága és A kompakt volta miatt van olyan λ_{k_ℓ} és (Au_{k_ℓ}) részsorozat, hogy λ_{k_ℓ} tart egy nemnulla $\lambda \in \mathbb{K}$ számhoz, (Au_{k_ℓ}) pedig normában egy $y \in H$ vektorhoz. Ekkor persze $Au_{k_\ell} = \lambda_{k_\ell} \cdot u_{k_\ell}$ miatt $\lambda_{k_\ell} \cdot u_{k_\ell} \to y$. Továbbá

$$\left\| \frac{y}{\lambda} - u_{k_\ell} \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|y - \lambda u_{k_\ell}\| \le \frac{1}{|\lambda|} \cdot (\|y - \lambda_{k_\ell} u_{k_\ell}\| + |\lambda_{k_\ell} - \lambda|)$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

alapján $u_{k_\ell} \overset{\|\cdot\|}{\to} \frac{y}{\lambda}$, persze ekkor $u_{k_\ell} \overset{w}{\to} \frac{y}{\lambda}$ és $1 = \|u_{k_\ell}\| \to \left\|\frac{y}{\lambda}\right\|$. Ezért egyrészt $\left\|\frac{y}{\lambda}\right\| = 1$. No de az ortonormáltság miatt $u_{k_\ell} \overset{w}{\to} \mathbf{0}_H$, innen pedig a gyenge limesz egyértelműsége miatt $\frac{y}{\lambda} = \mathbf{0}_H$, ami ellentmondás. Tehát (λ_k) tart 0-hoz. □

4.8.16. Definíció. Tetszőleges $x, y \in H$ esetén legyen $x \otimes y : H \to H$,

$$(x \otimes y)(z) := \langle z \mid y \rangle \cdot x.$$

Persze $x \otimes y \in L(H)$, sőt $x \otimes x$ önadjungált. Ha $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ortonormált rendszer H-ban, akkor triviálisan $\sum_{k=1}^{n} u_k \otimes u_k = P_{\mathrm{lin}(u_1,u_2,\ldots,u_n)}$.

4.8.17. Lemma (Hilbert–Schmidt)**.** *Legyen $A \in L(H)$ kompakt normális operátor, továbbá vagy A önadjungált, vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ekkor A-nak van olyan λ sajátértéke egy hozzátartozó egységnyi u sajátvektorral, hogy*

1. *$A - \lambda \cdot u \otimes u$ kompakt normális ill. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén önadjungált;*
2. *$|\lambda| = \|A\|$;*
3. *$\mathrm{im}\,(A - \lambda \cdot u \otimes u) \subseteq \mathrm{im}\,A$ és $\mathrm{im}\,(A - \lambda \cdot u \otimes u) \perp u$.*

Bizonyítás. Egy korábbi tétel miatt A-nak van olyan λ sajátértéke, hogy $|\lambda| = \|A\|$. Ezzel 2. teljesül is. Legyen u a λ sajátértékhez tartozó egységnyi sajátvektor. Ekkor minden $x \in H$-ra

$$\begin{aligned}(A - \lambda \cdot u \otimes u)\, x &= Ax - \lambda \cdot (u \otimes u)\, x = \\ &= Ax - \lambda \cdot \langle x \mid u \rangle \cdot u = Ax - \left\langle x \mid \overline{\lambda} \cdot u \right\rangle \cdot u = \\ &= Ax - \langle x \mid A^* u \rangle \cdot u = Ax - \langle Ax \mid u \rangle \cdot u = P_{u^\perp}(Ax),\end{aligned}$$

ahonnan $A - \lambda \cdot u \otimes u = P_{u^\perp} \cdot A$. Ugyanígy

$$\begin{aligned}(A - \lambda \cdot u \otimes u)^*\, x &= A^* x - \overline{\lambda} \cdot (u \otimes u)\, x = \\ &= A^* x - \overline{\lambda} \cdot \langle x \mid u \rangle \cdot u = A^* x - \langle x \mid \lambda \cdot u \rangle \cdot u = \\ &= A^* x - \langle x \mid Au \rangle \cdot u = A^* x - \langle A^* x \mid u \rangle \cdot u = P_{u^\perp}(A^* x),\end{aligned}$$

ahonnan $(A - \lambda \cdot u \otimes u)^* = P_{u^\perp} \cdot A^*$. Innen adjungálással

$$A \cdot P_{u^\perp} = A - \lambda \cdot u \otimes u = P_{u^\perp} \cdot A.$$

Ebből 3. mindkét állítása következik, valamint $A - \lambda \cdot u \otimes u$ kompaktsága is. Sőt mivel $P_{u^\perp} \cdot A \cdot P_{u^\perp} = P_{u^\perp} \cdot P_{u^\perp} \cdot A = P_{u^\perp} \cdot A$, azaz

$$A - \lambda \cdot u \otimes u = P_{u^\perp} \cdot A \cdot P_{u^\perp}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

is fennáll, így A normális volta miatt

$$(A-\lambda\cdot u\otimes u)^*(A-\lambda\cdot u\otimes u)=P_{u^\perp}A^*AP_{u^\perp}=P_{u^\perp}AA^*P_{u^\perp}=\\ =(A-\lambda\cdot u\otimes u)(A-\lambda\cdot u\otimes u)^*,$$

tehát $A-\lambda\cdot u\otimes u$ normális. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén pedig A és $u\otimes u$ önadjungált volta miatt önadjungált is. □

4.8.18. Tétel (Hilbert–Schmidt)**.** *Legyen $A\in L(H)$ nemnulla kompakt normális operátor, továbbá vagy A önadjungált, vagy $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Ekkor*

- *vagy van az A sajátvektoraiból álló olyan $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ véges ortonormált rendszer a megfelelő nemnulla $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ sajátértékekkel, hogy*

$$A=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot u_k\otimes u_k\ ;$$

- *vagy van az A sajátvektorainak olyan $(u_k)\subseteq H$ ortonormált sorozata a megfelelő nemnulla sajátértékek $(\lambda_k)\subseteq\mathbb{K}$ sorozatával, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|A-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot u_k\otimes u_k\right\|=0.$$

Bizonyítás. Rekurzióval definiáljuk az $(A_n)\subseteq L(H)$ kompakt normális ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén önadjungált) operátorsorozatot az $(u_n)\subseteq H$ és $(\lambda_n)\subseteq\mathbb{K}$ sorozatokkal együtt. A fenti lemma miatt A-nak van olyan λ_1 sajátértéke egy hozzátartozó egységnyi u_1 sajátvektorral, hogy

1. $A_1:=A-\lambda_1\cdot u_1\otimes u_1$ kompakt normális ill. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén önadjungált;
2. $|\lambda_1|=\|A\|$;
3. $\operatorname{im}A_1\subseteq\operatorname{im}A$ és $\operatorname{im}A_1\perp u_1$.

Most tegyük föl, hogy A_n, u_n és λ_n már definiáltak. Ekkor ismét a fenti lemma miatt A_n-nek van olyan λ_{n+1} sajátértéke egy hozzátartozó egységnyi u_{n+1} sajátvektorral, hogy

1. $A_{n+1}:=A_n-\lambda_{n+1}\cdot u_{n+1}\otimes u_{n+1}$ kompakt normális ill. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén önadjungált;
2. $|\lambda_{n+1}|=\|A_n\|$;
3. $\operatorname{im}A_{n+1}\subseteq\operatorname{im}A_n$ és $\operatorname{im}A_{n+1}\perp u_{n+1}$.

Mindezzel definiáltuk az (A_n), (u_n) és (λ_n) sorozatokat. Teljes indukcióval azonnal adódik, hogy minden n-re

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

1. $A_n = A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k$;
2. $|\lambda_{n+1}| = \left\| A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k \right\|$;
3. minden $k \leq n$ esetén $\operatorname{im} A_n \subseteq \operatorname{im} A_k \perp u_k$, tehát $\operatorname{im} A_n \perp u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Ez utóbbiból az is adódik – lévén u_{n+1} sajátvektora A_n-nek –, hogy $\lambda_{n+1} \neq 0$ esetén $u_{n+1} \in \operatorname{im} A_n$, tehát $u_{n+1} \perp u_1, u_2, \ldots, u_n$. Persze λ_1 nemnulla. Most két eset lehetséges:

I. létezik legkisebb n, hogy $\lambda_{n+1} = 0$. Ekkor azonnal $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k \otimes \otimes u_k$, továbbá a legutóbbiak miatt $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ortonormált rendszer. Az egyenlőségből adódólag triviálisan $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sajátvektorai A- nak és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a nekik megfelelő nemnulla A-sajátértékek.

II. minden n-re $\lambda_n \neq 0$. Ekkor a fenti megállapítás miatt (u_n) ortonormált sorozat. Innen persze minden n-re

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k \right) u_{n+1} = \mathbf{0}_H,$$

amiért is $Au_{n+1} = A_n u_{n+1} = \lambda_{n+1} \cdot u_{n+1}$, tehát minden n-re u_n sajátvektora A-nak is λ_n sajátértékkel. Mivel minden $\alpha \neq 0$-ra $\ker(A - \alpha I)$ véges dimenziós és (u_n) független, ezért a (λ_n) sorozat minden értékét véges sokszor veszi csak föl. Ugyanakkor $\|A\|$-val korlátozott is, de semmilyen injektív részsorozata nem tarthat 0-tól különböző számhoz. Ebből már következik, hogy $\lambda_n \to 0$. Így aztán a kapottakból

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k \right\| = |\lambda_{n+1}| \to 0 \qquad (n \to +\infty). \qquad \square$$

4.8.19. Definíció. A Hilbert–Schmidt-tételben szereplő $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k$, illetve $\lim_{n \to +\infty} \left\| A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k \right\| = 0$ formulát az A operátor *spektrálfelbontás*ának nevezzük. Az utóbbi formula a sorösszeg definíciója alapján úgy is írható, hogy

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k.$$

A fenti két formulát egyesíthetjük a hanyagabb $A = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k$ formulával, ami egyaránt jelölhet véges összeget és sorösszeget.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.8.20. Megjegyzés. Legyen $A \in L(H)$ kompakt normális operátor, továbbá vagy A önadjungált, vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Legyen A spektrálfelbontása $A = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \cdot u_k \otimes u_k$ (tehát az u_k vektorok az A egymásra páronként ortogonális egységhosszú sajátvektorai, a $\lambda_k \in \mathbb{K}$ számok pedig a rendre hozzájuk tartozó sajátértékek). Ekkor minden $x \in H$ vektorra

1. $$Ax = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \cdot \langle x \mid u_k \rangle \cdot u_k;$$

2. $$\langle Ax \mid x \rangle = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \cdot |\langle x \mid u_k \rangle|^2;$$

3. $$\|Ax\|^2 = \sum_{k\geq 1} |\lambda_k|^2 \cdot |\langle x \mid u_k \rangle|^2.$$

Bizonyítás. A legelső formula csupán x behelyettesítése a spektrálfelbontásba. A következő ebből triviális behelyettesítéssel adódik. A harmadik képlet is az elsőből következik az ortogonális sorok összegének (illetve a véges ortogonális összegek) normanégyzetére vonatkozó képlet alapján. □

4.8.21. Megjegyzés. A Hilbert–Schmidt-tételben szereplő, nemnulla sajátértékekhez tartozó $u_1, u_2, \ldots$ sajátvektorok teljes ortonormált sorozatot (ill. rendszert) alkotnak $\overline{\operatorname{im} A}$-ban.

Bizonyítás. A megfelelő sajátértékek nemnulla volta miatt e vektorok $\operatorname{im} A$-beliek. Az

$$M := \{u_1, u_2, \ldots\}^\perp \cap \overline{\operatorname{im} A}$$

altér minden elemét A a fenti megjegyzés miatt nullába viszi, tehát $M \subseteq \ker A \perp \overline{\operatorname{im} A}$, ahonnan $M = \{\mathbf{0}_H\}$. Ez éppen az $(u_1, u_2, \ldots)$ ortonormált sorozat (ill. rendszer) $\overline{\operatorname{im} A}$-beli teljességét jelenti. □

4.8.22. Megjegyzés. Ha A kompakt önadjungált operátor, akkor az egyik fenti megjegyzésben szereplő $\langle Ax \mid x \rangle = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \cdot |\langle x \mid u_k \rangle|^2$ egyenlőség és a Parseval-formula alapján triviálisan

$$m \cdot \|x\|^2 \leq \langle Ax \mid x \rangle \leq M \cdot \|x\|^2,$$

ahol m az A sajátértékeinek alsó, M pedig a felső határa (amelyikük 0-tól különbözik, az maga is biztosan sajátérték).

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.8.23. Megjegyzés. Tekintsük a Hilbert–Schmidt-tételben szereplő A operátor nemnulla sajátértékeihez tartozó $u_1, u_2, \dots$ ortonormált sajátvektorokat. Legyen $f \in H$. Vizsgáljuk meg az

$$Au = f$$

egyenletet. A megoldhatóság szükséges és elegendő felététele $f \in \operatorname{im} A$, s ezt a továbbiakban tegyük is föl. Keressük meg az egyenlet egy (partikuláris) megoldását. $(\ker A)^{\perp} = \overline{\operatorname{im} A}$ alapján az egyenletnek nyilván egy és csak egy $u \in \overline{\operatorname{im} A}$ megoldása létezik. Ezt a megoldást fogjuk az alábbiakban előállítani (s ez lényegében egy numerikus eljárást biztosít számunkra a megoldás meghatározására).

Induljunk ki abból, hogy tudjuk: ez az $u \in \overline{\operatorname{im} A}$ vektor létezik. Ekkor minden az A spektrálfelbontásában szereplő k indexre

$$\langle f \mid u_k \rangle = \langle Au \mid u_k \rangle = \langle u \mid A^* u_k \rangle = \left\langle u \mid \overline{\lambda_k} u_k \right\rangle = \lambda_k \cdot \langle u \mid u_k \rangle$$

és $\lambda_k \neq 0$ alapján $\langle u \mid u_k \rangle = \frac{\langle f | u_k \rangle}{\lambda_k}$, így $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{\langle f | u_k \rangle}{\lambda_k} \cdot u_k$ normában konvergens H-beli sor (ha ugyan eleve nem véges összeg), továbbá $u \in \overline{\operatorname{im} A}$ miatt

$$u = \sum_{k \geq 1} \langle u \mid u_k \rangle \cdot u_k = \sum_{k \geq 1} \frac{\langle f \mid u_k \rangle}{\lambda_k} \cdot u_k.$$

Tehát a keresett megoldást az A nemnulla sajátértékeinek és sajátvektorainak ismeretében az

$$u = \sum_{k \geq 1} \frac{\langle f \mid u_k \rangle}{\lambda_k} \cdot u_k$$

összeg adja meg.

4.9. Egy alkalmazás: Hilbert–Schmidt-operátorok

4.9.1. Megjegyzés. Közismert, hogy ha $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Borel-mérhető és

$$\int_a^b f(t)\, dt < +\infty,$$

akkor f λ-m.m. véges.

4.9.2. Megjegyzés. A fenti megjegyzés és a Fubini-tétel alapján triviálisan tetszőleges $f \in L^2_{\mathbb{K}}\left([a, b] \times [c, d], \mathcal{B}([a, b] \times [c, d]), \lambda^{(2)}\right)$ függvényre λ-m.m. $s \in [c, d]$ esetén $f(\cdot, s) \in L^2_{\mathbb{K}}[a, b]$.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4.9.3. Megjegyzés. A legutóbbi megjegyzés alapján tetszőleges

$$f \in L^2_{\mathbb{K}}\left([a,b]\times[c,d], \mathcal{B}([a,b]\times[c,d]), \lambda^{(2)}\right)$$

és $u \in L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$ függvényekre λ-m.m. $s \in [c,d]$ esetén $f(\cdot,s)\cdot u \in L^1_{\mathbb{K}}[a,b]$, következésképp $\int_a^b f(t,s)\cdot u(t)\,dt$ jóldefiniált $\mathbb{K}$-beli érték.

4.9.4. Megjegyzés. A Fubini-tétel alapján triviálisan tetszőleges

$$f \in L^2_{\mathbb{K}}\left([a,b]\times[c,d], \mathcal{B}([a,b]\times[c,d]), \lambda^{(2)}\right)$$

függvényre az $s \mapsto \int_a^b |f(t,s)|^2\,dt$ függvény eleme $L^1_{\mathbb{K}}[c,d]$-nek, tehát az $s \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t,s)|^2\,dt}$ függvény eleme $L^2_{\mathbb{K}}[c,d]$-nek.

4.9.5. Megjegyzés. Tetszőleges $f \in L^2_{\mathbb{K}}\left([a,b]\times[c,d], \mathcal{B}([a,b]\times[c,d]), \lambda^{(2)}\right)$ és $u \in L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$ függvényekre a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség és a legutóbbi megjegyzés alapján λ-m.m. $s \in [c,d]$ mellett

$$\left|\int_a^b f(t,s)\cdot u(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_a^b |f(t,s)|^2\,dt}\cdot \|u\|_{L^2},$$

továbbá az $(t,s)\mapsto f(t,s)\cdot u(t)$ függvény Borel-mérhető, tehát a Fubini-tétel miatt az $s \mapsto \int_a^b f(t,s)\cdot u(t)\,dt$ függvény is mérhető, így a fenti egyenlőtlenség miatt eleme $L^2_{\mathbb{K}}[c,d]$-nek.

4.9.6. Definíció. Tetszőleges $f \in L^2_{\mathbb{K}}\left([a,b]\times[a,b], \mathcal{B}([a,b]\times[a,b]), \lambda^{(2)}\right)$ függvényre jelölje

$$K_f : L^2_{\mathbb{K}}[a,b] \to L^2_{\mathbb{K}}[a,b],$$
$$[K_f(u)](s) := \int_a^b f(t,s)\cdot u(t)\,dt.$$

Ezt a K_f leképezést *az f magfüggvényű Hilbert–Schmidt-féle integráloperátor*nak nevezzük.

4.9.7. Feladat. Mutassuk meg, hogy $K_f = \mathbf{0}$ esetén $f = 0$ $\lambda^{(2)}$-m.m. (tehát $K_f = K_g$ esetén $f = g$ $\lambda^{(2)}$-m.m.)! (*Ötlet:* $\overline{f(\cdot,s)} \in L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$ miatt m.m. s-re $\int_a^b |f(t,s)|^2\,dt = 0$, ahonnan a Fubini-tétel miatt $f = 0$ $\lambda^{(2)}$-m.m.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A továbbiakban legyen $f \in L^2_{\mathbb{K}}\left([a,b]\times[a,b], \mathcal{B}([a,b]\times[a,b]), \lambda^{(2)}\right)$ rögzített.

A K_f operátor nyilván lineáris. A legutóbbi megjegyzés alapján minden $u \in L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$ függvényre

$$\|K_f u\|^2 \le \int_a^b \int_a^b |f(t,s)|^2 \, dt \cdot \|u\|^2_{L^2} \, ds = \|f\|^2_{L^2} \cdot \|u\|^2_{L^2},$$

emiatt K_f folytonos is, sőt

$$\|K_f\| \le \|f\|_{L^2}.$$

4.9.8. Megjegyzés. A Fubini-tételből triviálisan adódik, hogy $K_f^* = K_g$, ahol λ-m.m. $t,s \in [a,b]$ esetén $g(t,s) = \overline{f(s,t)}$.

4.9.9. Megjegyzés. Ha λ-m.m. $t,s \in [a,b]$ esetén $f(s,t) = \overline{f(t,s)}$, akkor az előző megjegyzés értelmében K_f önadjungált.

4.9.10. Feladat (*)**.** Legyenek $f,g \in L^2_{\mathbb{K}}([a,b]\times[a,b])$. Mutassuk meg, hogy $h(t,s) := \int_a^b f(z,s)\cdot g(t,z)\, dz$ definícióval $h \in L^2_{\mathbb{K}}([a,b]\times[a,b])$, továbbá $K_f \cdot K_g = K_h$. Mutassuk meg, hogy K_f pontosan akkor normális, ha λ-m.m. $t,s \in [a,b]$ esetén

$$\int_a^b f(z,s)\cdot \overline{f(z,t)}\, dz = \int_a^b \overline{f(s,z)}\cdot f(t,z)\, dz.$$

4.9.11. Tétel. *$K_f \in L\left(L^2_{\mathbb{K}}[a,b]\right)$ kompakt operátor.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$-beli korlátos sorozat K_f-képének van konvergens részsorozata. Legyen $(u_n) \subseteq L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$ korlátos sorozat. A korábban már látottak miatt (u_n)-nek létezik olyan (u_{n_k}) részsorozata, amely gyengén konvergál egy $u \in L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$ függvényhez. Mivel λ-m.m. $s \in [a,b]$-re $\overline{f(\cdot,s)} \in L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$, ezért a gyenge tartás miatt

$$\int_a^b u_{n_k}(t)\cdot f(t,s)\, dt \to \int_a^b u(t)\cdot f(t,s)\, dt$$

λ-m.m. s-re, ami éppen azt jelenti, hogy $K_f u_{n_k}$ pontonként λ-m.m. tart $K_f u$-hoz. Ugyanakkor az egyik fenti megjegyzés alapján λ-m.m. s-re

$$|[K_f(u_{n_k})](s)| \le \sqrt{\int_a^b |f(t,s)|^2\, dt} \cdot \|u_{n_k}\|_{L^2} \le \alpha \cdot \sqrt{\int_a^b |f(t,s)|^2\, dt},$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ahol α az (u_n) sorozat egy korlátja. Eszerint a $(K_f(u_{n_k}))$ sorozatnak van L^2-beli majoránsa, így a Lebesgue-tétel miatt $K_f(u_{n_k})$ L^2-normában tart $K_f(u)$-hoz. □

4.9.12. Következmény. *Ha Ha λ-m.m. $t,s\in[a,b]$ esetén $f(s,t)=\overline{f(t,s)}$, akkor K_f kompakt önadjungált transzformációja az $L^2_{\mathbb{K}}[a,b]$ Hilbert-térnek.*

4.9.13. Feladat. Írjuk föl a $K:L^2_{\mathbb{R}}[0,1]\to L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$,

$$(Ku)(t):=\int_0^1 (t\wedge s)\cdot u(s)\,ds$$

kompakt önadjungált operátor spektrálfelbontását (itt $t\wedge s:=\min\{t,s\}$). Állítsuk elő az ebben szereplő sajátfüggvények $L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$-beli sorösszegeként, majd polinomiális kifejezésként is a

$$Ku=\frac{1}{6}\mathrm{id}^3_{[0,1]}-\frac{1}{2}\mathrm{id}_{[0,1]}$$

egyenlet megoldását! Igazoljuk, hogy $L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$-ben (u_k) teljes ortonormált sorozatot alkot, ahol minden $k\in\mathbb{N}$-re

$$u_k(t)=\sqrt{2}\sin\left(k\cdot\pi-\frac{\pi}{2}\right)t.$$

Mennyi a K operátor normája? (*Ötlet:* $(Ku)(t)=\int_0^t s\cdot u(s)\,ds+t\cdot\int_t^1 u(s)\,ds$ alapján mutassuk meg, hogy $(Ku)(t)=\int_0^t\int_s^1 u(r)\,dr\,ds$, innen minden folytonos u-ra a $Ku=f$ feltétel ekvivalens azzal, hogy f kétszer folytonosan deriválható, továbbá $f''=-u$ és $f(0)=0=f'(1)$. Mutassuk meg ebből, hogy csak pozitív sajátérték létezik; továbbá λ pontosan akkor sajátérték egy u sajátfüggvénnyel, ha az u nemnulla függvény kétszer deriválható, $\lambda u''+u=0$ és $u(0)=0=u'(1)$. Innen a sajátértékek és az ortonormált sajátvektorok: minden $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$\lambda_k=\frac{1}{\left(k\cdot\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2}\qquad\text{és}\qquad u_k(t)=\sqrt{2}\sin\left(k\cdot\pi-\frac{\pi}{2}\right)t.$$

Az u_k függvények teljes ortonormált sorozatot alkotnak $\overline{\operatorname{im}K}=L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$-ben, és persze $\|K\|=\frac{4}{\pi^2}$.)

4.9.14. Feladat. Tetszőleges $f\in L^2_{\mathbb{K}}\left([a,b]\times[a,b],\mathcal{B}([a,b]\times[a,b]),\lambda^{(2)}\right)$ függvényre jelölje

$$V_f:L^2_{\mathbb{K}}[a,b]\to L^2_{\mathbb{K}}[a,b],$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$[V_f(u)](s) := \int_a^s f(t,s) \cdot u(t)\, dt.$$

(A V_f operátort Volterra-féle integráloperátornak mondjuk.) Igazoljuk, hogy V_f kompakt! (*Ötlet:* Gondoljuk meg, hogy V_f igazából Hilbert–Schmidt-típusú.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

5. fejezet

Szoboljev-terek és lineáris elliptikus egyenletek

Deriválni akarunk —
ha törik, ha szakad.

5.1. A $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ Szoboljev-terek

Ebben a fejezetben különös súllyal esik latba a mértékelmélet és a funkcionálanalízis több eredménye. Ez utóbbiakat a jegyzet korábbi részeiben tárgyaltuk, de most külön is ki szeretnénk őket emelni, nevezetesen

- a normált tér sűrű alterén értelmezett folytonos lineáris operátor kiterjesztési tételét;
- a tényt, hogy $L^2(T, \mathcal{S}, \mu)$ Hilbert-tér (Riesz–Fischer-tétel);
- a Hilbert-terek legalapvetőbb fogalmait és állításait, különös tekintettel a kompakt normális operátok spektrálfelbontására (Hilbert–Schmidt-tétel).

A továbbiakban végig egy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra

$$L^2(\Omega) = L^2\left(\Omega, \Lambda(\Omega), \lambda^{(n)}\right),$$

ahol $\Lambda(\Omega)$ az Ω halmaz Lebesue-mérhető részhalmazainak σ-algebrája és $\lambda^{(n)}$ az n-dimenziós Lebesgue-mérték.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

5.1.1. Előkészületek

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő halmaz. Jelölje $C_c^1(\Omega)$ a kompakt tartójú $C^1(\Omega)$-beli függvények vektorterét, tehát azon $f \in C^1(\Omega)$ függvények összességét, amelyekre

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega$$

(az f függvény *tartója*) kompakt halmaz. Nyilván minden $f \in C_c^1(\Omega)$ függvény természetes módon tekinthető $C_c^1(\mathbb{R}^n)$-belinek (nullaként terjedve ki Ω komplementumára).

5.1.1. Megjegyzés. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$ és $0 < r < R$ esetén van olyan [0,1]-be képező $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ függvény, amely $B(a,r)$-en azonosan 1, $B(a,R)$-en kívül pedig azonosan 0. Ugyanis egyszerűen megkonstruálható olyan [0,1]-be képező $h \in C^1(\mathbb{R})$ függvény, amely $\left[0, r^2\right]$-en 1 és $\left[R^2, +\infty\right)$-en 0. Ezzel $g := h \circ \|\cdot\|^2$ éppen megfelel.

5.1.2. Megjegyzés. Ha egy $f \in C^1(\Omega)$ függvény egy nyílt G halmazon azonosan 0, akkor bármely parciális deriváltja is azonosan 0 a G halmazon.

Most következzék a parciális integrálás egy fontos (ún. variációs) változata.

5.1.3. Lemma. *Tetszőleges $f \in C^1(\Omega)$, $g \in C_c^1(\Omega)$ és rögzített $1 \leq k \leq n$ esetén*

$$\int_\Omega (\partial_k f \cdot g) = -\int_\Omega (f \cdot \partial_k g).$$

Bizonyítás. Az $f \cdot g$ függvényt terjesszük ki $\mathbb{R}^n$-re Ω-n kívül nullaként. Persze a k-adik változó szerint integrálva

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_k (f \cdot g)\, dx_k = [f \cdot g]_{x_k \to -\infty}^{x_k \to +\infty} = 0 - 0 = 0.$$

Most ezt az egyenlőséget integráljuk ki sorra az összes többi változó szerint. Így az n-dimenziós Lebesgue-mérték definíciója és a Fubini-tétel szerint

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_k (f \cdot g) = 0.$$

Tekintve, hogy $f \cdot g$ az Ω-n kívül eltűnik, így az Ω-n hatályos $\partial_k (f \cdot g) = \partial_k f \cdot g + f \cdot \partial_k g$ egyenlőséget is alkalmazva,

$$\int_\Omega (\partial_k f \cdot g) + \int_\Omega (f \cdot \partial_k g) = \int_\Omega \partial_k (f \cdot g) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k (f \cdot g) = 0. \qquad \square$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

5.1.4. Megjegyzés. Ha egy $g \in L^2(\Omega)$ függvény integrálja bármely véges sok Ω-ba eső zárt gömb metszetén 0, akkor $g = 0$ m.m.

Bizonyítás. Mivel elegendő igazolni, hogy g az Ω bármely korlátos részén m.m. nulla, ezért feltehető, hogy Ω korlátos. Most azonnal látható, hogy ha $G_1, \dots, G_m, H_1, \dots, H_q$ Ω-ba eső zárt gömbök, akkor g integrálja a

$$\bigcap_{j=1}^{q} H_j \setminus \bigcup_{k=1}^{m} G_k$$

halmazon is 0. (Ez m-re vonatkozó teljes indukcióval adódik határozatlan q mellett

$$\bigcap_{j=1}^{q} H_j \setminus \bigcup_{k=1}^{m+1} G_k = \left(\bigcap_{j=1}^{q} H_j \setminus \bigcup_{k=1}^{m} G_k\right) \setminus \left(\left(\bigcap_{j=1}^{q} H_j \cap G_{m+1}\right) \setminus \bigcup_{k=1}^{m} G_k\right)$$

alapján.) Innen a halmazadditivitás miatt triviális, hogy g integrálja bármely véges sok Ω-ba eső zárt gömb unióján is 0. Innen pedig Lebesgue-tétellel adódik ($|g| \in L^1(\Omega)$ majoránssal), hogy g integrálja bármely megszámlálható sok Ω-ba eső zárt gömb unióján is 0, tehát minden Ω-beli nyílt halmazon is 0. Ahonnan minden zárt halmazon is 0, következésképp minden Borel-halmazon is 0. Innen nyilvánvaló, hogy $g = 0$ m.m. □

5.1.5. Állítás. *Legyen $(f_j) \subseteq L^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ olyan függvénysorozat, amelyre $f_j \overset{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$. Ha most valamely $1 \le k \le n$ indexre és $g \in L^2(\Omega)$ függvényre $\partial_k f_j \overset{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}{\longrightarrow} g$, akkor $g = 0$. (Természetesen az egyenlőség $L^2(\Omega)$-ban értendő, azaz $g = 0$ m.m.)*

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ tetszőleges. Ekkor $\partial_k \varphi$ is kompakt tartójú, ezért $\partial_k \varphi \in L^2(\Omega)$, így

$$\int_\Omega (f_j \cdot \partial_k \varphi) \to 0.$$

A fenti parciális integrálási elv miatt tehát

$$\int_\Omega (\partial_k f_j \cdot \varphi) \to 0.$$

Ugyanakkor triviálisan

$$\int_\Omega (\partial_k f_j \cdot \varphi) \to \int_\Omega (g \cdot \varphi),$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

tehát $\int\limits_{\Omega}(g\cdot\varphi)=0$ minden $\varphi\in C_c^1(\Omega)$ mellett. Megmutatjuk, hogy g-nek bármely véges sok Ω-ba eső gömb metszetén vett integrálja 0.

Legyenek ugyanis $B(a_p,r_p)$ Ω-ba eső zárt gömbök $(1\le p\le P)$. Ekkor vannak olyan $r_p^{(j)}\searrow r_p$ sorozatok, hogy mindegyik $B\left(a_p,r_p^{(1)}\right)$ is Ω-ban fekszik.Az egyik fenti megjegyzés miatt minden j-re van olyan [0,1]-be képező $\varphi_p^{(j)}\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ függvény, amely $B(a_p,r_p)$-en azonosan 1, $B\left(a_p,r_p^{(j)}\right)$-n kívül pedig azonosan 0. Legyen $\varphi^{(j)}$ a $\varphi_p^{(j)}$ függvények szorzata $(1\le p\le P)$. Ekkor minden j-re $\int\limits_{\Omega}\left(g\cdot\varphi^{(j)}\right)=0$, ahonnan a Lebesgue-tétel miatt triviálisan

$$\int\limits_{\bigcap\limits_{p=1}^{P}B(a_p,r_p)} g=0.$$

Egy fenti megjegyzés miatt ezért $g=0$ m.m. □

5.1.2. A $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ Hilbert-terek konstrukciója

5.1.6. Állítás. *Legyen $(H,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött és $M\le H$ altér, amely a $[\cdot\mid\cdot]:M\times M\to\mathbb{K}$ skalárszorzattal (szintén) skalárszorzatos tér. Tegyük föl, hogy a $[\cdot\mid\cdot]$-ból származó norma erősebb, mint M-en a $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$-ból származó. Tegyük föl továbbá, hogy ha egy $(x_n)\subseteq M$ sorozat $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ normájában $\mathbf{0}$-hoz tart, $[\cdot\mid\cdot]$ normájában pedig Cauchy-sorozat, akkor $[\cdot\mid\cdot]$ normájában is $\mathbf{0}$-hoz tart. Ekkor létezik egy és csak egy olyan $(M_*,[\cdot\mid\cdot]_*)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött, amelyre*

- *$M\le M_*\le H$;*
- *M sűrű altere az $(M_*,[\cdot\mid\cdot]_*)$ Hilbert-térnek;*
- *$[\cdot\mid\cdot]_*$ leszűkítése $M\times M$-re éppen $[\cdot\mid\cdot]$;*
- *a $[\cdot\mid\cdot]_*$-ból származó norma erősebb a $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$-ból származónál.*

Bizonyítás. Jelölje $\|\cdot\|_1$ a $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$-ból származó normát, $\|\cdot\|_2$ pedig a $[\cdot\mid\cdot]$-ból származót. Tehát alkalmas pozitív c-vel minden $x\in M$-re $\|x\|_2\ge c\cdot\|x\|_1$. Jelölje

$$M_*:=\left\{x\in H:\exists\,(x_n)\subseteq M, x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}x \text{ és } (x_n)\ \ \|\cdot\|_2\text{-Cauchy-sorozat}\right\}.$$

A konvergens, ill. Cauchy-sorozatokra érvényes alapszabályok (összeg, számszoros) miatt M_* altér és persze $M\le M_*$ (konstans sorozatok).

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Rögzítsük a következő észrevételt: ha az M-beli (x_n) és (u_n) $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozatok mindegyike $\|\cdot\|_1$-ben tart egy $x \in H$ vektorhoz, akkor a feltétel alapján $\|x_n - u_n\|_2 \to 0$.

Legyen most $x, y \in M_*$. Ha most $(x_n), (u_n), (y_n), (v_n)$ $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozatok, amelyekre $x_n, u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$, és $y_n, v_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} y$, akkor a rögzítettek miatt

$$|[x_n \mid y_n] - [u_n \mid v_n]| \leq \|x_n\|_2 \cdot \|y_n - v_n\|_2 + \|x_n - u_n\|_2 \cdot \|v_n\|_2 \to 0$$

(használva a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget). Ugyanígy

$$|[x_n \mid y_n] - [x_m \mid y_m]| \leq \|x_n\|_2 \cdot \|y_n - y_m\|_2 + \|x_n - x_m\|_2 \cdot \|y_m\|_2 ,$$

ahonnan azonnal adódik, hogy $\mathbb{K}$-ban $([x_n \mid y_n])$ Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Erre az x-re és y-ra az

$$[x \mid y]_* := \lim_{n \to +\infty} [x_n \mid y_n]$$

definíció a fenti nullatartás miatt nem függ (x_n) és (y_n) választásától, csak attól a ténytől, hogy (x_n) és (y_n) $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozatok, amelyekre $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$ és $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} y$. Ezzel definiáltuk a $[\cdot \mid \cdot]_* : M_* \times M_* \to \mathbb{K}$ függvényt.

A sorozatok összegének és számszorosának határértékére vonatkozó szabály, valamint $[\cdot \mid \cdot]$ skalárszorzat volta miatt $[\cdot \mid \cdot]_*$ is skalárszorzat. Konstans sorozatokkal adódik, hogy $[\cdot \mid \cdot]_*$ kiterjesztése $[\cdot \mid \cdot]$-nak. Ezzel $(M_*, [\cdot \mid \cdot]_*)$ skalárszorzatos tér, amelynek M altere. Jelölje $\|\cdot\|_*$ a $[\cdot \mid \cdot]_*$ normáját. Ha most $x \in M_*$, továbbá $(x_n) \subseteq M$ olyan $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozat, amelyre $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$, akkor minden n-re $[\cdot \mid \cdot]_*$ definíciója alapján

$$\|x - x_n\|_*^2 = [x - x_n \mid x - x_n]_* = \lim_{m \to +\infty} [x_m - x_n \mid x_m - x_n] = \\ = \lim_{m \to +\infty} \|x_m - x_n\|_2^2 ,$$

ami a sorozat Cauchy-tulajdonsága miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám alatt marad kellően nagy n-re. Ez azt jelenti, hogy e fentiek esetén $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_*} x$.

Most tetszőleges $x \in M_*$ vektorhoz létezik ilyen fenti típusú sorozat. Eszerint x közelíthető $\|\cdot\|_*$-ban M-beli sorozattal. Ezért M sűrű altere M_*-nak, továbbá $\|\cdot\|_2$ éppen $\|\cdot\|_*$ M-re való leszűkítése.

Most megmutatjuk, hogy $(M_*, [\cdot \mid \cdot]_*)$ teljes. Legyen $(x_n) \subseteq M_*$ $\|\cdot\|_*$-Cauchy-sorozat. M sűrű volta miatt minden n-re létezik $u_n \in M$, hogy $\|x_n - u_n\|_* < \frac{1}{n}$. Ekkor $(u_n) \subseteq M$ is $\|\cdot\|_*$-Cauchy-sorozat, azaz $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozat. Mivel $\|\cdot\|_2$ erősebb $\|\cdot\|_1$-nél, ezért (u_n) $\|\cdot\|_1$-Cauchy-sorozat is. Tehát H teljes volta miatt (u_n) $\|\cdot\|_1$-ben konvergál egy $x \in H$ vektorhoz. No de mivel (u_n) $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozat is, ezért $x \in M_*$. Fentebb láttuk, hogy ezen

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

szituáció esetén $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_*} x$. Innen persze $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_*} x$. Tehát tényleg minden $(M_*, [\cdot \mid \cdot]_*)$-beli Cauchy-sorozat konvergens, tehát $(M_*, [\cdot \mid \cdot]_*)$ Hilbert-tér.

Lássuk, hogy $\|\cdot\|_*$ miért erősebb $\|\cdot\|_1$-nél: Tetszőleges $x \in M_*$-ra vehetünk egy olyan $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozatot, amelyre $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$. Fentebb láttuk, hogy ekkor $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_*} x$. Feltételünk szerint minden n-re $\|x_n\|_2 \geq c \cdot \|x_n\|_1$, ahonnan határátmenetekkel $\|x\|_* \geq c \cdot \|x\|_1$.

Egyértelműség: Tegyük föl, hogy egy $(N, [\cdot \mid \cdot]_{**})$ Hilbert-tér is megfelel a tétel állításának. Mivel tetszőleges $x \in N$ vektor közelíthető $\|\cdot\|_{**}$-ban egy M-beli (x_n) sorozattal (amiért is (x_n) Cauchy-sorozat $(M, [\cdot \mid \cdot])$-ben), továbbá e tartás az erősebbségi feltétel szerint $\|\cdot\|_1$-beli is, ezért definíció szerint $x \in$ $\in M_*$. Tehát $N \leq M_*$. Továbbá tetszőleges $x, y \in N$ esetén M-bőli $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{**}} x$ és $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{**}} y$ közelítésekkel

$$[x \mid y]_{**} = \lim_{n\to+\infty} [x_n \mid y_n]_{**} = \lim_{n\to+\infty} [x_n \mid y_n] = [x \mid y]_* ,$$

tehát az N-beli skalárszorzat az M_*-belinek leszűkítése. Mivel N teljes, ezért zárt altere M_*-nak. No de N tartalmazza az M_*-ban sűrű M alteret, ezért szükségképp $N = M_*$, sőt a skalárszorzat is ugyanaz. Tehát az $(M_*, [\cdot \mid \cdot]_*)$ Hilbert-tér egyértelmű. □

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő halmaz. Ekkor $L^2(\Omega)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött. Legyen M azon $\overline{C^1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$-beli függvények összessége, amelyeknek mindegyik parciális deriváltja is $L^2(\Omega)$-ban van. (Korlátos Ω-ra tehát $M = \overline{C^1}(\Omega)$.) Az $L^2(\Omega)$-beli skalárszorzat természetesen

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f \cdot \overline{g}.$$

Jelölje $[\cdot \mid \cdot] : M \times M \to \mathbb{K}$,

$$[f \mid g] := \langle f \mid g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n} \langle \partial_k f \mid \partial_k g \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

$[\cdot \mid \cdot]$ nyilvánvalóan skalárszorzat az M altéren, és a belőle származtatott normára

$$\|f\|_M^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^{n} \|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)}^2 ,$$

s e norma majorálja az L^2-normát. Legyen most $(f_j) \subseteq M$ L^2-normában $\mathbf{0}$-hoz tartó olyan sorozat, amely $[\cdot \mid \cdot]$-Cauchy-sorozat is. Ekkor mindegyik

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$\partial_k f_j$ parciális derivált L^2-normában Cauchy-sorozat, amely a Riesz–Fischer-tétel értelmében konvergens is L^2-normában. Az előző pont egy állítása alapján ekkor mindegyik $\partial_k f_j$ parciális derivált L^2-normában $\mathbf{0}$-hoz tart, tehát $\|f_j\|_M \to 0$. Tehát az M skalárszorzatos tér az $L^2(\Omega)$ Hilbert-tér vonatkozásában teljesíti a legutóbbi állítás feltételeit. Így $(M, [\cdot \mid \cdot])$ egyértelműen kiterjeszthető az $L^2(\Omega)$-ban fekvő, az $(M, [\cdot \mid \cdot])$ skalárszorzatos teret sűrű altérként tartalmazó $\mathbb{K}$ fölötti olyan Hilbert-térré, amelynek normája erősebb az L^2-normánál. Jelölje ezt a Hilbert-teret

$$\left(H^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}\right).$$

5.1.7. Definíció. A fenti $\left(H^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}\right)$ Hilbert-teret az Ω tartomány 1,2-rendű (inhomogén) **Szoboljev-terének** nevezzük.

5.1.8. Definíció. Jelölje $H_0^1(\Omega)$ a $C_c^1(\Omega) \leq H^1(\Omega)$ altér $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$-ban való lezártját. A $H_0^1(\Omega)$ alteret lássuk el a $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ skalárszorzat $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ leszűkítésével. Ezzel $\left(H_0^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}\right)$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ fölött, amelyet az Ω tartomány 1,2-rendű (homogén) **Szoboljev-terének** nevezünk.

A konstrukció alapján tehát M sűrű altere $H^1(\Omega)$-nak, $C_c^1(\Omega)$ pedig sűrű altere $H_0^1(\Omega)$-nak.

Mostantól Ω legyen **korlátos**. (Tehát $M = \overline{C^1}(\Omega)$.)

5.1.9. Megjegyzés. Rögzített $1 \leq k \leq n$ mellett a $\partial_k : \overline{C^1}(\Omega) \to C(\Omega)$ parciális differenciáloperátor tekinthető a $H^1(\Omega)$ Hilbert-tér egy sűrű alterén értelmezett, $L^2(\Omega)$-ba képező lineáris operátornak. $f \in \overline{C^1}(\Omega)$ esetén nyilván

$$\|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{H^1(\Omega)},$$

így $H^1(\Omega)$ teljes volta miatt ∂_k egyértelműen kiterjeszthető egy $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ folytonos lineáris operátorrá, amelyet továbbra is ∂_k-val jelölünk. Tehát

$$\partial_k : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

folytonos lineáris operátor.

5.1.10. Feladat. $n = 1$ esetén a fenti kiterjesztés természetesen a közönséges derivált általánosítását jelenti. Mutassuk meg, hogy egy korlátos nyílt $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumra $H^1(I)$ elemei éppen az $L^2(I)$-beli függvények integrálfüggvényei (ill. ezek eltoltjai). Igazoljuk, hogy $a \in I$ és $u \in L^2(I)$ esetén e kiterjesztett deriválttal

$$\left(\int_a u\right)' = u.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A fenti feladat értelmében az intervallumon értelmezett Szoboljev-függvények folytonosak (sőt `abszolút folytonosak`). Az alábbi feladat értelmében általános esetben ez már nem áll:

5.1.11. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $f:\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{R}$,

$$f(\mathbf{x}):=\begin{cases}\ln^2\left(-\ln\|\mathbf{x}\|\right) & \text{ha } 0<\|\mathbf{x}\|\le 1/e\\ 0 & \text{ha } \|\mathbf{x}\|>1/e\end{cases}$$

függvény – mint $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$-beli függvény – eleme $H_0^1\left(\mathbb{R}^3\right)$-nak, jóllehet f nem eleme $C\left(\mathbb{R}^3\right)$-nak (ami precízen azt jelenti, hogy bármely $C\left(\mathbb{R}^3\right)$-beli függvénytől pozitív mértékű halmazon különbözik)!

(*Ötlet:* az $\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ halmazon léteznek f klasszikus értelemben vett folytonos parciális deriváltjai és f-fel együtt $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$-beliek, ez utóbbi $\int\limits_{\mathcal{B}}\frac{1}{\|\cdot\|^2}<$ $<+\infty$ alapján triviális. Most legyen $h\in C^1(\mathbb{R})$ az $\frac{1}{2}$-től balra azonosan 0, az 1-től jobbra pedig azonosan 1, egyébként is [0,1]-be menő függvény. Ekkor $h_j(\mathbf{x}):=h(j\cdot\|\mathbf{x}\|)$ és $f_j:=h_j\cdot f$ definícióval triviálisan $(f_j)\subseteq C_c^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ és Lebesgue-tétellel $f_j\overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow}f$. Továbbá klasszikus értelemben $\partial_1 f_j-\partial_1 f=$ $=(h_j-1)\cdot\partial_1 f+\partial_1 h_j\cdot f$. Ennek első tagja megint csak Lebesgue-tétellel tart L^2-ben $\mathbf{0}$-hoz; a második tag L^2-normanégyzetét pedig – amelynél elég az $\frac{1}{2j}<\|\mathbf{x}\|<\frac{1}{j}$ gömbhéjra szorítkozni – triviálisan becsülhetjük a

$$\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{\max|h'|^2\cdot\ln^4(\ln 2j)}{j}$$

kifejezéssel, amely 0-hoz tart. Ezért $\partial_1 f_j\overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow}\partial_1 f$, és ugyanígy kapjuk, hogy $\partial_2 f_j\overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow}\partial_2 f$ és $\partial_3 f_j\overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow}\partial_3 f$. Így aztán $(\partial_1 f_j),(\partial_2 f_j)$ és $(\partial_3 f_j)$ $\|\cdot\|_{L^2}$-Cauchy-sorozatok, tehát (f_j) $\|\cdot\|_{H_0^1}$-Cauchy-sorozat, midőn $f_j\overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow}f$. Ezzel a $H_0^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ tér definíciója miatt f – mint $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$-beli függvény – eleme $H_0^1\left(\mathbb{R}^3\right)$-nek, sőt klasszikus értelemben számított parciális deriváltjai – mint $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$-beli függvények – megegyeznek a kiterjesztett értelmű megfelelő parciális deriváltakkal.)

5.1.12. Megjegyzés. A legutóbbi megjegyzés értelmében minden $f\in H^1(\Omega)$ függvényre

$$\|f\|_{H^1(\Omega)}^2=\|f\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{k=1}^n\|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

hiszen $(f_j) \subseteq C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap L^2(\Omega)$, $f_j \overset{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}{\longrightarrow} f$ esetén $f_j \overset{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}{\longrightarrow} f$ és $\partial_k f_j \overset{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}{\longrightarrow} \partial_k f$, ahonnan $\|f_j\|_{L^2(\Omega)} \to \|f\|_{L^2(\Omega)}$ és $\|\partial_k f_j\|_{L^2(\Omega)} \to \|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)}$, tehát

$$\|f_j\|^2_{H^1(\Omega)} = \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^n \|\partial_k f_j\|^2_{L^2(\Omega)} \to \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

másrészt triviálisan $\|f_j\|^2_{H^1(\Omega)} \to \|f\|^2_{H^1(\Omega)}$.

5.1.13. Tétel. *Tetszőleges $f \in H^1(\Omega)$, $g \in H_0^1(\Omega)$ és rögzített $1 \leq k \leq n$ esetén*

$$\int_\Omega (\partial_k f \cdot g) = -\int_\Omega (f \cdot \partial_k g).$$

Bizonyítás. A $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ terek konstrukciója miatt vannak olyan $(f_j) \subseteq \subseteq \overline{C^1}(\Omega)$ és $(g_j) \subseteq C_c^1(\Omega)$ sorozatok, hogy $H^1(\Omega)$-normában $f_j \to f$ és $g_j \to g$. Ekkor persze $L^2(\Omega)$-normában $\partial_k f_j \to \partial_k f$ és $\partial_k g_j \to g$, ezért

$$\int_\Omega (\partial_k f_j \cdot g_j) \to \int_\Omega (\partial_k f \cdot g) \qquad \text{és} \qquad \int_\Omega (f_j \cdot \partial_k g_j) \to \int_\Omega (f \cdot \partial_k g).$$

Ugyanakkor a legutóbbi lemma miatt minden j-re

$$\int_\Omega (\partial_k f_j \cdot g_j) = -\int_\Omega (f_j \cdot \partial_k g_j),$$

így a fenti határátmenetekkel

$$\int_\Omega (\partial_k f \cdot g) = -\int_\Omega (f \cdot \partial_k g). \qquad \square$$

Ekvivalens normák a $H_0^1(\Omega)$ térben

Egy $\mathbb{K}$ fölötti X vektortéren értelmezett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normákat *ekvivalens*eknek mondjuk, ha alkalmas véges $c, d > 0$ konstansokkal

$$c \cdot \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq d \cdot \|\cdot\|_1.$$

A normaekvivalencia nyilván ekvivalencia jellegű tulajdonság: reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Mostantól legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ **korlátos** nyílt összefüggő halmaz.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

5.1.14. Lemma. *Tetszőleges $f \in C_c^1(\Omega)$ függvényre*

$$\int_\Omega |f(x)|^2\,dx \le \operatorname{diam}^2(\Omega)\cdot\int_\Omega |\partial_1 f(x)|^2\,dx$$

(ahol $\operatorname{diam}(\Omega)$ *az* Ω *tartomány átmérője).*

Bizonyítás. Az Ω halmazt foglaljuk bele egy olyan $T=\times_{k=1}^n[a_k,b_k]$ téglába, amelyre $b_1-a_1\le\operatorname{diam}(\Omega)$. Az Ω-n kívül azonosan 0 kiterjesztéssel persze $f\in C_c^1(T)$. Most tetszőleges $x=(x_1,\dots,x_n)\in T$ esetén a Newton–Leibniz-tétel miatt

$$f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\int_{a_1}^{x_1}\partial_1 f(t,x_2,\dots,x_n)\,dt.$$

Innen a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséggel

$$|f(x)|^2=\left|\int_{a_1}^{x_1}1\cdot\partial_1 f(t,x_2,\dots,x_n)\,dt\right|^2\le(x_1-a_1)\cdot\int_{a_1}^{x_1}|\partial_1 f(t,x_2,\dots,x_n)|^2\,dt,$$

ahonnan a Fubini-tétel alapján

$$\int_\Omega|f|^2=\int_T|f|^2=\int_{\times_{k=2}^n[a_k,b_k]}\left(\int_{a_1}^{b_1}|f(x_1,x_2,\dots,x_n)|^2\,dx_1\right)d(x_2,\dots,x_n)\le$$

$$\le\int_{\times_{k=2}^n[a_k,b_k]}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left((x_1-a_1)\cdot\int_{a_1}^{x_1}|\partial_1 f(t,x_2,\dots,x_n)|^2\,dt\right)dx_1\right)d(x_2,\dots,x_n)\le$$

$$\le(b_1-a_1)\cdot\int_{\times_{k=2}^n[a_k,b_k]}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_1}^{b_1}|\partial_1 f(t,x_2,\dots,x_n)|^2\,dt\right)dx_1\right)d(x_2,\dots,x_n)\le$$

$$\le(b_1-a_1)^2\cdot\int_{\times_{k=2}^n[a_k,b_k]}\left(\int_{a_1}^{b_1}|\partial_1 f(t,x_2,\dots,x_n)|^2\,dt\right)d(x_2,\dots,x_n)=$$

$$=(b_1-a_1)^2\cdot\int_T|\partial_1 f|^2=(b_1-a_1)^2\cdot\int_\Omega|\partial_1 f|^2\le\operatorname{diam}^2(\Omega)\cdot\int_\Omega|\partial_1 f|^2.\qquad\square$$

5.1.15. Következmény. *Tetszőleges $f\in H_0^1(\Omega)$ függvényre is*

$$\int_\Omega|f(x)|^2\,dx\le\operatorname{diam}^2(\Omega)\cdot\int_\Omega|\partial_1 f(x)|^2\,dx.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Vehetünk egy $(f_j) \subseteq C_c^1(\Omega)$ sorozatot, amelyre $f_j \overset{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}}{\longrightarrow} f$. Ekkor $\partial_1 f_j \overset{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}{\longrightarrow} \partial_1 f$ és persze $f_j \overset{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}{\longrightarrow} f$. Mivel minden j-re a lemma miatt

$$\int_\Omega |f_j(x)|^2 \, dx \leq \operatorname{diam}^2(\Omega) \cdot \int_\Omega |\partial_1 f_j(x)|^2 \, dx,$$

így $\int_\Omega |f_j(x)|^2 \, dx \to \int_\Omega |f(x)|^2 \, dx$ és $\int_\Omega |\partial_1 f_j(x)|^2 \, dx \to \int_\Omega |\partial_1 f(x)|^2 \, dx$ alapján

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \leq \operatorname{diam}^2(\Omega) \cdot \int_\Omega |\partial_1 f(x)|^2 \, dx. \qquad \square$$

5.1.16. Következmény. *Tetszőleges $f \in H_0^1(\Omega)$ függvényre*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \operatorname{diam}(\Omega) \cdot \|\partial_1 f\|_{L^2(\Omega)} \leq \operatorname{diam}(\Omega) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

5.1.17. Következmény. *A $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ norma ekvivalens a*

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)}^* := \sqrt{\sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)}^2} = \sqrt{\int_\Omega \|f'(x)\|^2 \, dx}$$

normával a $H_0^1(\Omega)$ vektortéren, sőt minden $f \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\operatorname{diam}^2(\Omega) + 1} \cdot \|f\|_{H_0^1(\Omega)}^*.$$

Bizonyítás. $\|f\|_{H_0^1(\Omega)}^* \leq \|f\|_{H_0^1(\Omega)}$. Ugyanakkor a fenti következmény miatt minden $f \in H_0^1(\Omega)$ függvényre

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\operatorname{diam}^2(\Omega) + 1\right) \cdot \sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)}^2 =$$
$$= \left(\operatorname{diam}^2(\Omega) + 1\right) \cdot \left(\|f\|_{H_0^1(\Omega)}^*\right)^2,$$

Tehát $\|f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\operatorname{diam}^2(\Omega) + 1} \cdot \|f\|_{H_0^1(\Omega)}^*$. $\square$

5.1.18. Megjegyzés. Az eggyel korábbi következményt átfogalmazva, minden $f \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \operatorname{diam}(\Omega) \cdot \|f\|_{H_0^1(\Omega)}^*.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Kompakt beágyazás L^2-be

Az alábbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

A Poincaré-egyenlőtlenség ♦

5.1.19. Lemma. *Tekintsük a $Q = (a,b)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ kockát. Tetszőleges $f \in \overline{C^1}(Q)$ függvényre*

$$\|f\|^2_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{(b-a)^n}\left(\int\limits_Q f\right)^2 + \frac{n}{2}\cdot(b-a)^2\cdot\sum_{k=1}^n\int\limits_Q (\partial_k f)^2\,.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a = 0$. Tetszőleges $x, y \in Q$-ra

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(y_1,\ldots,y_n) - f(x_1,\ldots,x_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(f(y_1,\ldots,y_k,x_{k+1},\ldots,x_n) - f(y_1,\ldots,y_{k-1},x_k,\ldots,x_n)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_k}^{y_k} \partial_k f\,(y_1,\ldots,y_{k-1},t_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\;dt_k\,. \end{aligned}$$

Innen négyzetre emeléssel és a Cauchy-egyenlőtlenséggel, **majd** Bunyakovszkij-egyenlőtlenséggel

$$\begin{aligned} &f^2(y) - 2f(x)f(y) + f^2(x) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n 1\cdot\int\limits_{x_k}^{y_k}\partial_k f\,(y_1,\ldots,y_{k-1},t_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\;dt_k\right)^2 \leq \\ &\leq n\cdot\sum_{k=1}^n\left(\int\limits_{x_k}^{y_k}\partial_k f\,(y_1,\ldots,y_{k-1},t_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\;dt_k\right)^2 \leq \\ &\leq n\cdot\sum_{k=1}^n\left|(y_k-x_k)\cdot\int\limits_{x_k}^{y_k}\left(\partial_k f\,(y_1,\ldots,y_{k-1},t_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\right)^2\;dt_k\right| \leq \\ &\leq n\cdot b\cdot\sum_{k=1}^n\int\limits_0^b\left(\partial_k f\,(y_1,\ldots,y_{k-1},t_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\right)^2\;dt_k. \end{aligned}$$

A kapott egyenlőtlenséget integráljuk ki x szerint, majd y szerint is a Q kockán (vegyük észre, hogy eközben a jobb oldal k-adik tagjában végül is az

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$y_1, \dots, y_{k-1}$, $t_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ változók mindegyike szerint 0-tól b-ig integráltunk, és ezen túlmenően még az $x_1, \dots, x_k, y_k, \dots, y_n$ változók szerint is; ám ez utóbbiak vonatkozásában már konstans függvényt integráltunk):

$$2b^n \cdot \int_Q f^2(x)\, dx - 2\left(\int_Q f(x)\, dx\right)^2 \le n \cdot b \cdot \sum_{k=1}^n \int_Q (\partial_k f)^2 \cdot b^{n+1} = \\ = n \cdot b^{n+2} \sum_{k=1}^n \int_Q (\partial_k f)^2,$$

ahonnan

$$\int_Q f^2(x)\, dx \le \frac{1}{b^n}\left(\int_Q f(x)\, dx\right)^2 + \frac{n}{2} b^2 \cdot \sum_{k=1}^n \int_Q (\partial_k f)^2. \qquad \square$$

A Friedrichs-egyenlőtlenség ♦ Tekintsük a $Q = (0,a)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ kockát.

5.1.20. Lemma. *Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan véges sok $g_1, \dots, g_N \in$ $\in L^2(Q)$ egységnormájú függvény, hogy bármely $f \in H^1(Q)$ esetén*

$$\|f\|^2_{L^2(Q)} \le \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{p=1}^N \langle f \mid g_p\rangle^2_{L^2(Q)}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszuk meg az $m \in \mathbb{N}$ számot úgy, hogy $m^2 > \frac{na^2}{2\varepsilon}$ teljesüljön. Bontsuk föl a Q kockát m^n db. egybevágó kockára (Q éleit m egyenlő részre osztva, és az osztópontokon át a lapokkal párhuzamos hipersíkokkal szétvágva). Így nyerjük az egybevágó, $\frac{a}{m}$ élű $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ kockákat, ahol $N := m^n$. Tetszőleges $f \in \overline{C^1}(Q)$ és $1 \le p \le N$ esetén a Poincaré-egyenlőtlenségből

$$\int_{Q_p} f^2(x)\, dx \le \frac{m^n}{a^n}\left(\int_{Q_p} f(x)\, dx\right)^2 + \frac{n}{2m^2} a^2 \cdot \sum_{k=1}^n \int_{Q_p} (\partial_k f)^2,$$

így $g_p := \left(\frac{m}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \chi_{Q_p}$ választással

$$\int_{Q_p} f^2(x)\, dx \le \left(\int_Q f \cdot g_p\right)^2 + \frac{n}{2m^2} a^2 \cdot \sum_{k=1}^n \int_{Q_p} (\partial_k f)^2,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

és $\|g_p\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Összegezzünk p szerint:

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{p=1}^{N} \langle f \mid g_p \rangle^2_{L^2(\Omega)} + \frac{n}{2m^2} a^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \int_Q (\partial_k f)^2 \leq$$
$$\leq \sum_{p=1}^{N} \langle f \mid g_p \rangle^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \cdot \left(\|f\|^*_{H^1_0(\Omega)} \right)^2 .$$

Legyen most $M \subseteq H^1(Q)$ azon f függvények összessége, amelyekre e fenti egyenlőtlenség áll. A már látottak szerint $C^1(Q) \subseteq M$. Ugyanakkor mindegyik $\partial_k : H^1(Q) \to L^2(Q)$ operátor folytonos, így M zárt halmaz. Mivel $C^1(Q)$ sűrű $H^1(Q)$-ban, ezért $M = H^1(Q)$. □

A második Friedrichs-egyenlőtlenség ♦ Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő **korlátos** halmaz.

5.1.21. Lemma. *Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan véges sok $g_1, \ldots, g_N \in L^2(\Omega)$ függvény, hogy bármely $f \in H^1_0(\Omega)$ esetén*

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \cdot \left(\|f\|^*_{H^1_0(\Omega)} \right)^2 + \sum_{p=1}^{N} \langle f \mid g_p \rangle^2_{L^2(\Omega)} .$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy Ω része egy $Q = (0,a)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ kockának. Az előző Friedrichs-egyenlőtlenség miatt van olyan véges sok $\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_N \in L^2(Q)$ egységnormájú függvény, hogy bármely $f \in H^1(Q)$ esetén

$$\|f\|^2_{L^2(Q)} \leq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} \|\partial_k f\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{p=1}^{N} \langle f \mid \widetilde{g}_p \rangle^2_{L^2(Q)} .$$

Ez az egyenlőtlenség speciálisan minden $f \in C^1_c(Q)$-ra is áll, így (triviális kiterjesztés alkalmazásával) minden $f \in C^1_c(\Omega)$-ra is. Most a $\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_N$ Ω-ra szűkítésével kapott $g_1, \ldots, g_N \in L^2(\Omega)$ függvényekkel is természetesen minden $f \in C^1_c(\Omega)$-ra (használva a $\|\cdot\|^*_{H^1_0(\Omega)}$ jelölést)

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \cdot \left(\|f\|^*_{H^1_0(\Omega)} \right)^2 + \sum_{p=1}^{N} \langle f \mid g_p \rangle^2_{L^2(\Omega)} .$$

Legyen $M \subseteq H^1_0(\Omega)$ azon f függvények összessége, amelyekre e fenti egyenlőtlenség áll. A már látottak szerint tehát $C^1_c(\Omega) \subseteq M$. Ugyanakkor mindegyik $\partial_k : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ operátor folytonos, így M zárt halmaz. Mivel $C^1_c(\Omega)$ sűrű $H^1_0(\Omega)$-ban, ezért $M = H^1_0(\Omega)$. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$H^1(Q)$ kompakt beágyazása $L^2(Q)$-ba ♦ Tekintsük újra a $Q = (0,a)^n \subseteq \subseteq \mathbb{R}^n$ kockát.

5.1.22. Tétel. *Ha egy $(f_j) \subseteq H^1(Q)$ sorozat a $\left(H^1(Q), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(Q)}\right)$ Hilbert-térben gyengén tart egy $f \in H^1(Q)$ függvényhez, akkor (f_j) $L^2(Q)$-normában is tart f-hez.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f = \mathbf{0}$. Legyen $K > 0$ az (f_j) sorozat egy $H^1(Q)$-beli korlátja. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. A Friedrichs-egyenlőtlenség alapján ekkor van olyan véges sok $g_1, \ldots, g_N \in L^2(Q)$ egységnormájú függvény, hogy bármely $v \in H^1(Q)$ esetén

$$\|v\|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2K} \cdot \left(\|v\|_{H^1(Q)}^*\right)^2 + \sum_{p=1}^{N} \langle v \mid g_p \rangle_{L^2(Q)}^2 ,$$

speciálisan minden j-re

$$\|f_j\|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2K} \cdot \left(\|f_j\|_{H^1(Q)}^*\right)^2 + \sum_{p=1}^{N} \langle f_j \mid g_p \rangle_{L^2(Q)}^2 .$$

Mivel az L^2-beli függvényekkel vett (L^2-beli) skalárszorzások folytonosak $H^1(Q)$-n, ezért (f_j) $L^2(Q)$-gyengén is tart $\mathbf{0}$-hoz. Így azonnal

$$\sum_{p=1}^{N} \langle f_j \mid g_p \rangle_{L^2(Q)}^2 \to 0.$$

Tehát van olyan j_0 index, hogy $j \geq j_0$ esetén $\sum_{p=1}^{N} \langle f_j \mid g_p \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$. Innen azonnal minden $j \geq j_0$ esetén $\|f_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$. □

5.1.23. Következmény. *A $\left(H^1(Q), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(Q)}\right)$ Hilbert-tér $\mathcal{B}_{H^1(Q)}$ egységgömbje kompakt részhalmaza az $\left(L^2(Q), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{L^2(Q)}\right)$ Hilbert-térnek. Következésképp a $H^1(Q) \to L^2(Q)$, $f \mapsto f$ beágyazás kompakt operátor.*

Bizonyítás. Legyen $(f_j) \subseteq \mathcal{B}_{H^1(Q)}$ tetszőleges sorozat. Mivel $H^1(Q)$ Hilbert-tér, így e sorozatnak van egy $f \in H^1(Q)$ függvényhez gyengén konvergáló részsorozata. $\mathcal{B}_{H^1(Q)}$ konvex zárt volta miatt $f \in \mathcal{B}_{H^1(Q)}$. A fenti tétel értelmében a szóban forgó részsorozat L^2-normában is tart f-hez. Mindez éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{B}_{H^1(Q)}$ sorozatkompakt halmaz $L^2(Q)$-ban. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$H_0^1(\Omega)$ kompakt beágyazása $L^2(\Omega)$-ba ♦ Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő **korlátos** halmaz.

5.1.24. Tétel. *Ha egy $(f_j) \subseteq H_0^1(\Omega)$ sorozat a $\left(H_0^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}\right)$ Hilbert-térben gyengén tart egy $f \in H_0^1(\Omega)$ függvényhez, akkor (f_j) $L^2(\Omega)$-normában is tart f-hez.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f = \mathbf{0}$. Legyen $K > 0$ az (f_j) sorozat egy $H_0^1(\Omega)$-beli korlátja. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. A második Friedrichs-egyenlőség alapján ekkor van olyan véges sok $g_1, \ldots, g_N \in L^2(\Omega)$ függvény, hogy bármely $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2K} \cdot \left(\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^*\right)^2 + \sum_{p=1}^{N} \langle v \mid g_p \rangle_{L^2(\Omega)}^2 ,$$

speciálisan minden j-re

$$\|f_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2K} \cdot \left(\|f_j\|_{H_0^1(\Omega)}^*\right)^2 + \sum_{p=1}^{N} \langle f_j \mid g_p \rangle_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Mivel az L^2-beli függvényekkel vett (L^2-beli) skalárszorzások folytonosak $H_0^1(\Omega)$-n, ezért (f_j) $L^2(\Omega)$-gyengén is tart $\mathbf{0}$-hoz. Így azonnal

$$\sum_{p=1}^{N} \langle f_j \mid g_p \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \to 0.$$

Tehát van olyan j_0 index, hogy $j \geq j_0$ esetén $\sum_{p=1}^{N} \langle f_j \mid g_p \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$. Innen azonnal minden $j \geq j_0$ esetén $\|f_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$. □

5.1.25. Következmény. *A $\left(H_0^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}\right)$ Hilbert-tér $\mathcal{B}_{H_0^1(\Omega)}$ egységgömbje kompakt részhalmaza az $\left(L^2(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}\right)$ Hilbert-térnek. Következésképp a $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $f \mapsto f$ beágyazás kompakt operátor.*

Bizonyítás. Legyen $(f_j) \subseteq \mathcal{B}_{H_0^1(\Omega)}$ tetszőleges sorozat. Mivel $H_0^1(\Omega)$ Hilbert-tér, így e sorozatnak van egy $f \in H_0^1(\Omega)$ függvényhez gyengén konvergáló részsorozata. $\mathcal{B}_{H_0^1(\Omega)}$ konvex zárt volta miatt $f \in \mathcal{B}_{H_0^1(\Omega)}$. A fenti tétel értelmében a szóban forgó részsorozat L^2-normában is tart f-hez. Mindez éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{B}_{H_0^1(\Omega)}$ kompakt halmaz $L^2(\Omega)$-ban. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

5.1.3. Egy Dirichlet-feladat megoldása. Sajátérték-feladat. Numerikus előállítás

A klasszikus és az általánosított feladat megfogalmazása

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő **korlátos** halmaz. Jelölje $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ az Ω tartomány határát, ami kompakt. Legyen minden $1 \leq k, j \leq n$ esetén adott $a_{k,j} \in \overline{C^1}(\Omega), c \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, és tegyük föl, hogy $a_{j,k} = a_{k,j}$ minden k, j mellett. Legyen $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$Lu := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \left(a_{k,j} \cdot \partial_k u\right) + c \cdot u.$$

5.1.26. Definíció. Az L differenciáloperátort az Ω tartományon **egyenletesen elliptikus**nak mondjuk, ha vannak olyan $p, q > 0$ számok, hogy az

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixra minden $z \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$p \cdot \|z\|^2 \leq \left\langle \Big(A(x) \Big) z \mid z \right\rangle \leq q \cdot \|z\|^2.$$

(A Δ Laplace-operátor például egyenletesen elliptikus.)
A továbbiakban tegyük föl, hogy L egyenletesen elliptikus.
Tekintsük tetszőleges $f \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ függvényre az

$$(*) \qquad \begin{cases} Lu(x) = f(x) & (x \in \Omega), \\ u(x) = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

homogén peremfeltételű Dirichlet-feladatot. Ennek megoldásán olyan $u \in \in C^2(\Omega)$ függvény értünk, amelyik folytonosan terjed ki $\overline{\Omega}$-ra, e kiterjesztés a $\partial\Omega$ határon azonosan 0, továbbá $Lu = f$.

5.1.27. Állítás. *Egy $u \in \overline{C^2}(\Omega)$ függvényre $Lu = f$ pontosan akkor, ha minden $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén*

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot \partial_k u \cdot \partial_j \overline{v} - c \cdot u \cdot \overline{v} \right) = -\int_\Omega f \cdot \overline{v}.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. $Lu = f$ azt jelenti, hogy az Ω tartományon

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_j\left(a_{k,j}\cdot\partial_k u\right)+c\cdot u=f,$$

ami (mindkét oldal $L^2(\Omega)$-beli) azzal ekvivalens, hogy $L^2(\Omega)$ egy tetszőleges sűrű alterét képező v függvényekkel skalárszorozva áll fenn az egyenlőség:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left(\partial_j\left(a_{k,j}\cdot\partial_k u\right)\cdot\overline{v}\right)+\int_\Omega\left(c\cdot u\cdot\overline{v}\right)=\int_\Omega\left(f\cdot\overline{v}\right).$$

Most $C_c^1(\Omega)$ sűrű $L^2(\Omega)$-ban (lásd a Függeléket), így $H_0^1(\Omega)$ is az. Tehát $Lu=f$ azzal ekvivalens, hogy minden $v\in H_0^1(\Omega)$ mellett fennáll a legutóbbi egyenlőség. Alkalmazzuk most a parciális integrálásra vonatkozó 5.1.13. Tételt minden (k,j) pár mellett $(1\le k,j\le n)$ az $a_{k,j}\cdot\partial_k u\in H^1(\Omega)$ és $\overline{v}\in$ $\in H_0^1(\Omega)$ függvényekre, valamint a ∂_j differenciáloperátorra. Eszerint

$$\int_\Omega\left(\partial_j\left(a_{k,j}\cdot\partial_k u\right)\cdot\overline{v}\right)=-\int_\Omega\left(a_{k,j}\cdot\partial_k u\cdot\partial_j\overline{v}\right),$$

amit a megelőző egyenlőségbe visszahelyettesítve azonnal megkapjuk a kívánt formula $Lu=f$-fel való ekvivalenciáját.

Mostantól f-ről csak annyit tegyünk föl, hogy $f\in L^2(\Omega)$. □

5.1.28. Definíció. Egy $u\in H^1(\Omega)$ függvényt az $Lu=f$ egyenlet **általánosított megoldás**ának mondunk, ha minden $v\in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}\cdot\partial_k u\cdot\partial_j\overline{v}-c\cdot u\cdot\overline{v}\right)=-\int_\Omega f\cdot\overline{v}.$$

A fenti állítás szerint tehát ha egy $u\in\overline{C^2}(\Omega)$ függvény az eredeti értelemben vett (ún. `klasszikus`) megoldása az $Lu=f$ egyenletnek, akkor általánosított megoldása is.

Tekintsük most a homogén peremfeltétel esetét. Igazolható (bonyolult), hogy ha egy $u\in C^2(\Omega)$ függvény $\overline{\Omega}$-ra úgy terjed ki folytonosan, hogy a $\partial\Omega$ határon azonosan 0, akkor $u\in H_0^1(\Omega)$. Tehát a homogén peremfeltételt az „általánosítás” során az a követelmény fejezi ki, hogy az $u\in H^1(\Omega)$ feltételen túlmenően $u\in H_0^1(\Omega)$. Ezzel kézenfekvő a következő definíció.

5.1.29. Definíció. Ha egy $u\in H_0^1(\Omega)$ függvény általánosított megoldása az $Lu=f$ egyenletnek, akkor azt mondjuk, hogy u általánosított megoldása a $(*)$ homogén peremfeltételű Dirichlet-feladatnak.

(A fentiek értelmében tehát ha $u\in\overline{C^2}(\Omega)$ eredeti értelemben vett /azaz klasszikus/ megoldása $(*)$-nak, akkor általánosított megoldása is.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Egzisztencia és unicitás a $c \leq 0$ esetben

Az eddigi feltételeinken túl, **e pontban tegyük föl, hogy** $c \leq 0$.

5.1.30. Tétel. *A $(*)$ homogén peremfeltételű Dirichlet-feladatnak tetszőleges $f \in L^2(\Omega)$ mellett létezik egy és csak egy általánosított $u \in H_0^1(\Omega)$ megoldása, továbbá erre a megoldásra*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\operatorname{diam}^2(\Omega)+1}{p} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Bizonyítás. Vezessünk be új skalárszorzatot a $H_0^1(\Omega)$ vektortéren, nevezetesen

$$[u \mid v] := \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{k,j} \cdot \partial_k u \cdot \partial_j \overline{v} - c \cdot u \cdot \overline{v} \right),$$

másképpen

$$[u \mid v] := \int_\Omega \left(\left\langle \left(A(x) \quad \right) (u'(x)) \mid v'(x) \right\rangle_{\mathbb{K}^n} - c(x) \cdot \langle u(x) \mid v(x) \rangle_{\mathbb{K}^n} \right) dx.$$

Az u változóban ez nyilván lineáris, a konjugált szimmetria abból adódik, hogy az $A(x)$ együtthatómátrix minden x-re szimmetrikus. Az egyenletes ellipticitás és $c \leq 0$ miatt pedig $[\cdot \mid \cdot]$ pozitív definit.

Szintén az egyenletes ellipticitás feltételét felhasználva minden u-ra és x-re

$$p \cdot \|u'(x)\|^2 \leq \left\langle \left(A(x) \quad \right) u'(x) \mid u'(x) \right\rangle_{\mathbb{K}^n} \leq q \cdot \|u'(x)\|^2,$$

ahonnan integrálással

$$p \cdot \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^* \right)^2 \leq \int_\Omega \left\langle \left(A(x) \quad \right) u'(x) \mid u'(x) \right\rangle_{\mathbb{K}^n} dx \leq q \cdot \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^* \right)^2.$$

Innen pedig $c \leq 0$ miatt triviálisan

$$\begin{aligned} p \cdot \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^* \right)^2 \leq [u \mid u] &\leq q \cdot \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^* \right)^2 + \|c\|_\infty \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq q \cdot \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^* \right)^2 + \|c\|_\infty \cdot \operatorname{diam}^2(\Omega) \cdot \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^* \right)^2 = \\ &= \left(q + \|c\|_\infty \cdot \operatorname{diam}^2(\Omega) \right) \cdot \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^* \right)^2 \end{aligned}$$

(itt a 5.1.18. Megjegyzést is használtuk). Eszerint a $[\cdot \mid \cdot]$-ból származtatott norma ekvivalens $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}^*$-val, így persze $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$-val is. Tehát $H_0^1(\Omega)$ a $[\cdot \mid \cdot]$ normájával is teljes, azaz Hilbert-tér.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A $\left(H_0^1(\Omega), [\cdot \mid \cdot]\right)$ Hilbert-téren a $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{K}$,

$$\Phi(v) := -\int_\Omega (f \cdot v)$$

lineáris funkcionál folytonos (mert egy ekvivalens normára nézve triviálisan az), így Riesz tétele szerint létezik egy és csak egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény, hogy $\Phi = [\cdot \mid u]$, azaz minden $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén $-\int_\Omega (f \cdot v) = [v \mid u]$, ahonnan konjugálással

$$-\int_\Omega (f \cdot \overline{v}) = [u \mid v] = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{k,j} \cdot \partial_k u \cdot \partial_j \overline{v} - c \cdot u \cdot \overline{v} \right),$$

ami éppen azt jelenti, hogy u általánosított megoldása a $(*)$ homogén peremfeltételű Dirichlet-feladatnak. Megfordítva, ha egy $u_* \in H_0^1(\Omega)$ függvény általánosított megoldása a $(*)$-nak, akkor $[\cdot \mid \cdot]$ definíciója miatt minden $v \in H_0^1(\Omega)$-ra $-\int_\Omega (f \cdot v) = [v \mid u_*]$, azaz u_* is a Φ funkcionált reprezentálja. Így a Riesz-tétel egyértelműségi része miatt u az egyetlen általánosított megoldás.

Most az L^2-beli Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség és a 5.1.18. Megjegyzés alapján, majd az egyik fenti becslés miatt minden $v \in H_0^1(\Omega)$-ra

$$|\Phi v| = \left| \int_\Omega (f \cdot v) \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \operatorname{diam}(\Omega) \cdot \|v\|^*_{H_0^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \operatorname{diam}(\Omega) \cdot \sqrt{\frac{1}{p} \cdot [v \mid v]},$$

így $[\cdot \mid \cdot]$ normájára nézve $\|\Phi\| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{\sqrt{p}}$. Így (újra csak Riesz tétele miatt)

$$\sqrt{[u \mid u]} = \|\Phi\| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{\sqrt{p}}.$$

Innen pedig újra az idézett fenti becslés, majd a 5.1.17. Következmény alapján

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{\sqrt{p}} \geq \sqrt{[u \mid u]} \geq \sqrt{p} \cdot \|u\|^*_{H_0^1(\Omega)} \geq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\operatorname{diam}^2(\Omega) + 1}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

ebből pedig

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\operatorname{diam}(\Omega) \cdot \sqrt{\operatorname{diam}^2(\Omega) + 1}}{p} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\operatorname{diam}^2(\Omega) + 1}{p} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

5.1.31. Következmény. *A $(*)$ homogén peremfeltételű Dirichlet-feladatnak legfeljebb egy $u \in \overline{C^2}(\Omega)$ klasszikus megoldása lehet.*

Sajátérték-feladat a $c \leq 0$ esetben

Továbbra is álljanak fönn eddigi feltételeink.

5.1.32. Tétel. *Létezik olyan $(u_j) \subseteq H_0^1(\Omega)$ az $L^2(\Omega)$-ban teljes ortogonális sorozat és $(\lambda_j) \subseteq \mathbb{R}^{\circ}_{-}$ számsorozat, hogy minden j-re u_j a fenti értelemben vett általánosított megoldása az*

$$Lu = \lambda_j \cdot u_j$$

egyenletnek. (Ezt úgy is szokás fogalmazni, hogy (u_j) ***teljes ortogonális általánosított sajátfüggvényrendszer****e az L operátornak, a megfelelő λ_j sajátértékekkel.) Továbbá $\lambda_j \to -\infty$ és mindegyik λ_j sajátaltere véges dimenziós. Végül tetszőleges $f \in L^2(\Omega)$ függvényre az $Lu = f$ egyenlet u_f általánosított megoldására*

$$u_f = -\sum_{j=1}^{+\infty} \langle f \mid u_j \rangle_{L^2(\Omega)} \cdot u_j$$

(az összeg $H_0^1(\Omega)$-normában értendő).

Bizonyítás. Vezessük be a $H_0^1(\Omega)$ vektortéren a legutóbbi tétel bizonyításában már szereplő

$$[u \mid v] := \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_{k,p} \cdot \partial_k u \cdot \partial_p \overline{v} - c \cdot u \cdot \overline{v} \right)$$

skalárszorzatot. A szóban forgó bizonyítás ezen részét felhasználva $\left(H_0^1(\Omega), [\cdot \mid \cdot]\right)$ Hilbert-tér és normája ekvivalens a $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ normával. Most az idézett tétel értelmében a $(*)$ feladatnak minden $f \in L^2(\Omega)$ mellett létezik egy és csak egy általánosított $u \in H_0^1(\Omega)$ megoldása, továbbá

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\operatorname{diam}^2(\Omega) + 1}{p} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Jelölje $G : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ azt a leképezést, amelyik minden $f \in L^2(\Omega)$ függvényhez hozzárendeli a neki megfelelő megoldást. G persze lineáris. A fenti becslés (és a normaekvivalencia) miatt G folytonos is. Az előző pont egy eredményének (5.1.25. Következmény) értelmében a $B : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $u \mapsto u$ beágyazás kompakt operátor. Így $\widetilde{G} := G \cdot B : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ is

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

kompakt operátor. Tetszőleges $f \in H_0^1(\Omega)$ mellett tehát $\widetilde{G}f$ általánosított megoldása $(*)$-nak, így minden $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\left[\widetilde{G}f \mid v\right] = \int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_{k,p} \cdot \partial_k\left(\widetilde{G}f\right) \cdot \partial_p \overline{v} - c \cdot \left(\widetilde{G}f\right) \cdot \overline{v}\right) = -\int\limits_\Omega f \cdot \overline{v}.$$

Most f és v felcserélésével a jobb oldal egyszerűen konjugálódik, ezért $\widetilde{G}$ önadjungált $[\cdot \mid \cdot]$-ra nézve. Továbbá $\left[\widetilde{G}f \mid f\right] = -\int\limits_\Omega |f|^2$, így $\widetilde{G}$ negatív definit. (Tehát $\ker \widetilde{G} = \{\mathbf{0}\}$ és $\overline{\operatorname{im} \widetilde{G}} = H_0^1(\Omega)$.) Alkalmazzuk a Hilbert–Schmidt-tételt a $\left(H_0^1(\Omega), [\cdot \mid \cdot]\right)$ Hilbert-térben a $\widetilde{G}$ kompakt önadjungált operátorra. Eszerint $H_0^1(\Omega)$-nak van a $\widetilde{G}$ sajátvektoraiból álló teljes ortonormált $(u_j) \subseteq H_0^1(\Omega)$ sorozata rendre a megfelelő α_j sajátértékekkel. $\widetilde{G}$ negatív definitsége miatt mindegyik α_j negatív, így persze $\widetilde{G}$ kompakt volta miatt véges rangú is. Mindezek szerint minden $j \in \mathbb{N}$ mellett $\widetilde{G}u_j = \alpha_j \cdot u_j$, azaz a legutóbbi kiemelt formula alapján bármely $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_{k,p} \cdot \partial_k(\alpha_j \cdot u_j) \cdot \partial_p \overline{v} - c \cdot (\alpha_j \cdot u_j) \cdot \overline{v}\right) = -\int\limits_\Omega u_j \cdot \overline{v},$$

azaz

$$\int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_{k,p} \cdot \partial_k u_j \cdot \partial_p \overline{v} - c \cdot u_j \cdot \overline{v}\right) = -\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{\alpha_j} \cdot u_j\right) \cdot \overline{v},$$

tehát valóban u_j általánosított megoldása az $Lu = \frac{1}{\alpha_j} \cdot u_j$ egyenletnek. Most tetszőleges j, ℓ indexekre a fentiekből

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega u_j \cdot \overline{u_\ell} &= -\int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_{k,p} \cdot \partial_k(\alpha_j \cdot u_j) \cdot \partial_p \overline{u_\ell} - c \cdot (\alpha_j \cdot u_j) \cdot \overline{u_\ell}\right) = \\ &= -\alpha_j \cdot [u_j \mid u_\ell],\end{aligned}$$

tehát egyrészt az (u_j) sorozat az $L^2(\Omega)$-beli skalárszorzatra nézve is ortogonális, másrészt $\|u_j\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{-\alpha_j}$. A sorozat lineáris burka sűrű $H_0^1(\Omega)$-ben a $H_0^1(\Omega)$-normára nézve, továbbá az $L^2(\Omega)$-norma gyengébb a $H_0^1(\Omega)$-normánál és rá nézve $H_0^1(\Omega)$ sűrű $L^2(\Omega)$-ban; emiatt az (u_j) sorozat lineáris burka is sűrű $L^2(\Omega)$-ban. Azaz (u_j) teljes $L^2(\Omega)$-ban is. $\widetilde{G}$ kompakt volta miatt $\alpha_j \to 0-$. Így $\lambda_j := \frac{1}{\alpha_j}$ jelöléssel a tétel állításának első fele kész.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Legyen most $f \in L^2(\Omega)$. Mivel $\left(\frac{u_j}{\sqrt{-\alpha_j}}\right)$ ortonormált sorozat $L^2(\Omega)$-ban, ezért a Parseval-formula miatt

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left| \frac{\langle f \mid u_j \rangle}{\sqrt{-\alpha_j}} \right|^2 < +\infty,$$

így $\alpha_j \to 0$ miatt $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} |\langle f \mid u_j \rangle|^2 < +\infty$. Tehát a $\left(H_0^1(\Omega), [\cdot \mid \cdot]\right)$ Hilbert-térben konvergens a $-\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \langle f \mid u_j \rangle_{L^2(\Omega)} \cdot u_j$ ortogonális sor. Jelölje u_f e sor $H_0^1(\Omega)$-beli összegét. Ekkor tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$ mellett

$$[u_f \mid v] = -\sum_{j=1}^{+\infty} \langle f \mid u_j \rangle \cdot [u_j \mid v] = -\sum_{j=1}^{+\infty} \langle f \mid [v \mid u_j] \cdot u_j \rangle =$$
$$= -\left\langle f \mid \sum_{j=1}^{+\infty} [v \mid u_j] \cdot u_j \right\rangle = -\langle f \mid v \rangle$$

(itt felhasználtuk, hogy az $\langle f \mid \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ funkcionál folytonos $H_0^1(\Omega)$-en), azaz

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_{k,p} \cdot \partial_k u \cdot \partial_p \overline{v} - c \cdot u \cdot \overline{v} \right) = -\int_\Omega f \cdot \overline{v},$$

tehát az imént definiált u_f nem más, mint az $Lu = f$ egyenlet (az előző tétel értelmében egyértelműen létező) általánosított megoldása. □

A sorösszeg numerikus előállítása

5.1.33. Megjegyzés. A fenti tétel utolsó állítása numerikus eljárást ad az $Lu = f$ egyenlet általánosított megoldásának előállítására az egyenlet általánosított sajátfüggvényei és sajátértékei ismeretében. A véges részletösszegek integrálos kvadratúraképletekkel számolhatók; és tudjuk, hogy e részletösszegek Szoboljev-normában közelítik a tényleges u_f megoldást.

5.1.34. Megjegyzés. A fenti tételből triviálisan következik, hogy a tétel feltételeinek fennállása esetén a $H_0^1(\Omega)$ Hilbert-tér szeparábilis. Márpedig tetszőleges korlátos összefüggő nyílt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra könnyű teljesíteni a tétel feltételeit, pl. akár az $L := \Delta$ Laplace-operátorral. Tehát **tetszőleges korlátos összefüggő nyílt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra a $H_0^1(\Omega)$ Hilbert-tér szeparábilis.**

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Az előjelkötetlen c esete

A fenti tétel bizonyításával az eredeti feladat $c \leq 0$ feltétele is némileg kiküszöbölhető. Legyen adott minden $1 \leq k, j \leq n$ esetén $a_{k,j} \in \overline{C^1}(\Omega), c \in \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, és tegyük föl, hogy $a_{j,k} = a_{k,j}$ minden k, j mellett (tehát c `tetszőleges előjelű`). **Viszont tegyük cserébe föl, hogy az** $Lu = 0$ **egyenletnek általánosított megoldása csak a konstans** 0. (Ez a c-re tett megkötés felszabadításával önmagában már nem maradna igaz.) Tekintsük az $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,

$$Lu := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j (a_{k,j} \cdot \partial_k u) + c \cdot u$$

differenciáloperátort, és tegyük föl, hogy L egyenletesen elliptikus. Legyen $\alpha > 0$ olyan szám, hogy $c - \alpha \leq 0$ (c korlátossága miatt van ilyen α). Ekkor az $L - \alpha I$ operátorra

$$(L - \alpha I) u := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j (a_{k,j} \cdot \partial_k u) + (c - \alpha) \cdot u,$$

tehát $L - \alpha I$ olyan tulajdonságú differenciáloperátor, mint amilyennel a fentiekben foglalkoztunk. A fentiek értelmében tehát van olyan $(u_j) \subseteq H_0^1(\Omega)$ az $L^2(\Omega)$-ban teljes ortogonális sorozat és $(\lambda_j) = \left(\frac{1}{\alpha_j}\right) \subseteq \mathbb{R}_-^{\circ}$ $(\alpha_j \to 0)$ számsorozat, hogy minden j-re u_j általánosított megoldása az

$$(L - \alpha I) u = \lambda_j \cdot u_j$$

egyenletnek. Ezért aztán minden u_j általánosított megoldása az

$$Lu = (\lambda_j + \alpha) \cdot u_j$$

egyenletnek. (Azaz (u_j) általánosított teljes sajátfüggvényrendszere L-nek is, $\lambda_j + \alpha$ sajátértékekkel.) Mivel feltettük, hogy az $Lu = 0$ egyenletnek általánosított megoldása csak a konstans 0, ezért $\lambda_j + \alpha \neq 0$, így $\alpha_j \cdot \alpha \neq -1$. Legyen $[\cdot \mid \cdot]$ a fenti bizonyításban szereplő – de L helyett természetesen az $L - \alpha I$ operátorból származtatott – skalárszorzat. Legyen most $f \in L^2(\Omega)$. Mivel $\left(\frac{u_j}{\sqrt{-\alpha_j}}\right)$ ortonormált sorozat $L^2(\Omega)$-ban, ezért a Parseval-formula miatt

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left| \frac{\langle f \mid u_j \rangle}{\sqrt{-\alpha_j}} \right|^2 < +\infty,$$

így $\alpha_j \to 0$ és $\alpha_j \cdot \alpha \neq -1$ miatt $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \left| \frac{\langle f | u_j \rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1} \right|^2 < +\infty$. Tehát a $\left(H_0^1(\Omega), [\cdot \mid \cdot]\right)$ Hilbert-térben konvergens a $-\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f | u_j \rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1} \cdot u_j$ ortogonális sor. Jelölje u_f e sor

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$H_0^1(\Omega)$-beli összegét. Ekkor tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$ mellett (használva a legutóbbi tétel bizonyításában levő $\widetilde{G}$ operátor definíciójából adódó $\left[\widetilde{G}u_j \mid v\right] = -\int\limits_\Omega (u_j \cdot \overline{v})$ azonosságot):

$$\int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_{k,p} \cdot \partial_k u_f \cdot \partial_p \overline{v} - c \cdot u_f \cdot \overline{v}\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1} \cdot \int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_{k,p} \cdot \partial_k u_j \cdot \partial_p \overline{v} - c \cdot u_j \cdot \overline{v}\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1} \cdot \int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n a_{k,p} \cdot \partial_k u_j \cdot \partial_p \overline{v} - (c-\alpha) \cdot u_j \cdot \overline{v} - \alpha \cdot u_j \cdot \overline{v}\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1} \cdot \left([u_j \mid v] - \alpha \cdot \int\limits_\Omega (u_j \cdot \overline{v})\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1} \cdot \left(\lambda_j \cdot \left[\widetilde{G}u_j \mid v\right] - \alpha \cdot \int\limits_\Omega (u_j \cdot \overline{v})\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1} \cdot \left(-\lambda_j \cdot \int\limits_\Omega (u_j \cdot \overline{v}) - \alpha \cdot \int\limits_\Omega (u_j \cdot \overline{v})\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1} \cdot (\lambda_j + \alpha) \int\limits_\Omega (u_j \cdot \overline{v}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\alpha_j} \cdot \int\limits_\Omega (u_j \cdot \overline{v}) = -\int\limits_\Omega \left(\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\langle f \mid u_j\rangle}{-\alpha_j} \cdot u_j\right) \cdot \overline{v}\right) = -\int\limits_\Omega (f \cdot \overline{v}).$$

tehát $u_f \in H_0^1(\Omega)$ valóban általánosított megoldása az $Lu = f$ egyenletnek. Mivel feltételünk szerint a homogén egyenlet álalánosított megoldása egyértelmű, ezért ez a megoldás is egyértelmű.

Gondoljuk meg végül, hogy ezen $f \mapsto u_f$ hozzárendelés (ami persze lineáris) $\left(\|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{H_0^1}\right)$-folytonos. Minden $f \in L^2(\Omega)$ esetén az $\left(\frac{u_j}{\sqrt{-\alpha_j}}\right)$ sorozat teljes L^2-ortonormált volta miatt

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\sqrt{-\alpha_j}}\right|^2 \geq \min_{j\in\mathbb{N}} \frac{(\alpha_j \cdot \alpha + 1)^2}{-\alpha_j} \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\frac{\langle f \mid u_j\rangle}{\alpha_j \cdot \alpha + 1}\right|^2 = K^2 \cdot \|u_f\|_{[\cdot|\cdot]}^2,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ahol $K := \sqrt{\min_{j\in\mathbb{N}} \frac{(\alpha_j\cdot\alpha+1)^2}{-\alpha_j}} > 0$. Ezzel a K-val tehát tetszőleges $f \in L^2(\Omega)$ függvényre

$$\|u_f\|_{[\cdot|\cdot]} \leq \frac{1}{K}\cdot\|f\|_{L^2}.$$

Alternatívatétel

A fenti pontban foglaltak triviális átfogalmazásával az alábbi alternatívatétel adódik:

5.1.35. Következmény. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő korlátos halmaz, legyen minden $1 \leq k,j \leq n$ esetén adott $a_{k,j} \in \overline{C^1}(\Omega)$, $c \in C(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, és tegyük föl, hogy $a_{j,k} = a_{k,j}$ minden k,j mellett. Legyen $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$,*

$$Lu := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j\left(a_{k,j}\cdot\partial_k u\right) + c\cdot u.$$

Tegyük föl, hogy az L differenciáloperátor egyenletesen elliptikus. Ekkor az alábbi két feltétel közül pontosan az egyik teljesül:

- *az $Lu = 0$ egyenletnek létezik nemtriviális általánosított megoldása.*
- *minden $f \in L^2(\Omega)$ esetén az $Lu = f$ egyenletnek létezik egy és csak egy általánosított $u_f \in H_0^1(\Omega)$ megoldása, továbbá ezen $f \mapsto u_f$ hozzárendelés $\left(\|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{H_0^1}\right)$-folytonos.*

Egy alkalmazás: Poisson-sajátérték-feladat az egységnégyzeten. A változók szétválasztása

Tekintsük a $Q := (0,1)\times(0,1)$ egységnégyzetet. Q határa ekkor

$$\partial Q = (\{0,1\}\times(0,1)) \cup ((0,1)\times\{0,1\}).$$

Keressük meg a $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ Laplace-operátor $H_0^1(Q)$-beli teljes általánosított saját függvényrendszerét a megfelelő sajátértékekkel együtt. Ez azt jelenti, hogy a

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = \lambda\cdot u(x,y) & ((x,y)\in Q), \\ u(x,y) = 0 & ((x,y)\in\partial Q) \end{cases}$$

Dirichlet-feladat általánosított megoldásait keressük, miközben λ is befutja a valós számokat.

Először keressük csak a fenti feladat(ok) $u(x,y) = \varphi(x)\cdot\psi(y)$ szorzat alakú megoldásait. (Utána látni fogjuk, hogy másféle megoldás nincs is.) Ekkor

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

azonnal

$$\begin{cases} \varphi''(x)\cdot\psi(y)+\varphi(x)\cdot\psi''(y)=\lambda\cdot\varphi(x)\cdot\psi(y), & (0<x,y<1), \\ \varphi(0)=\varphi(1)=0, \qquad \psi(0)=\psi(1)=0. \end{cases}$$

Most feltételezzük egyelőre, hogy φ és ψ nem azonosan 0, és az egyenletet vizsgáljuk csak a $\varphi(x),\psi(y)\neq 0$ változók mentén. Ekkor

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=\lambda-\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}.$$

Mivel a bal oldal nem függ y-tól (és a jobb oldal x-től), ezért mindkét oldal konstans, persze ugyanaz a c konstans. Ezzel tehát $\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=c$ és $\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}=\lambda-c$, ahonnan $\varphi''(x)=c\cdot\varphi(x)$ és $\psi''(y)=(\lambda-c)\cdot\psi(y)$. (Ez utóbbi feltételekbe már az is belefér, ha φ vagy ψ azonosan 0.)

Gondoljuk meg, hogy ekkor a $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ és $\psi(0)=\psi(1)=0$ peremfeltételek miatt sem c, sem $\lambda-c$ nem lehet sem pozitív, sem 0. Tehát $\lambda<c<0$. Ezért ismét a homogén peremfeltételek miatt φ és ψ triviálisan csak $\varphi(x)=c_1\cdot\sin\sqrt{-c}x$ és $\psi(y)=c_2\cdot\sin\sqrt{c-\lambda}y$ alakúak lehetnek $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$. Megint csak a peremfeltételek miatt $\sqrt{-c}=k\pi$ és $\sqrt{c-\lambda}=j\pi$ $(k,j\in\mathbb{Z})$. Innen $c=-k^2\pi^2$ és $\lambda=-\left(k^2+j^2\right)\pi^2$, tehát az általánosított sajátértékek és sajátfüggvények

$$\lambda_{k,j}=-\left(k^2+j^2\right)\pi^2$$
$$u_{k,j}(x,y)=c_1\cdot\sin k\pi x\cdot c_2\cdot\sin j\pi y,$$

ahol $c_1^2+c_2^2>0$. Ellenőrizzük le, hogy ezek klasszikus sajátértékek és sajátfüggvények is.

A Hilbert-terek elméletéből ismert, hogy $\left(x\mapsto\sqrt{2}\sin k\pi x\right)_{k=1}^{\infty}$ teljes ortonormált sorozat $L^2[0,1]$-ben, sőt $\left((x,y)\mapsto 2\sin k\pi x\cdot\sin j\pi y\right)_{k,j\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer $L^2(Q)$-ban. Ez azt jelenti, hogy a Δ Laplace-operátornak nincs a fentiektől különböző általánosított sajátfüggvénye. (Tehát az összes általánosított sajátfüggvény szorzat alakú, mégpedig a fenti alakú.) Ezért a Δ operátornak a fentebbi tétel alapján adódó teljes ortonormált általánosított sajátfüggvényrendszere éppen (konstans szorzóktól eltekintve) a $\left((x,y)\mapsto 2\sin k\pi x\cdot\sin j\pi y\right)_{k,j\in\mathbb{N}}$ függvényrendszer, rendre a

$$\lambda_{k,j}=-\left(k^2+j^2\right)\pi^2$$

sajátértékekkel.

Mivel a megfelelő tétel bizonyításában szereplő (u_j) sorozatra fennállt az

$$\|u_j\|_{L^2(\Omega)}=\sqrt{-\alpha_j}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

egyenlőség, így abból visszaszámolva a Szoboljev-térbeli ortonormált $(u_{k,j})$ függvényrendszer most $\left((x,y)\mapsto \frac{2}{\sqrt{-\lambda_{k,j}}}\sin k\pi x\cdot\sin j\pi y\right)_{k,j\in\mathbb{N}}$, azaz

$$\left((x,y)\mapsto \frac{2}{\sqrt{k^2+j^2}\cdot\pi}\sin k\pi x\cdot\sin j\pi y\right)_{k,j\in\mathbb{N}}.$$

Ez alapján tetszőleges $f\in L^2(Q)$ esetén a $\begin{cases} u=f, \\ u_{|\partial Q}=0 \end{cases}$ Dirichlet-feladat általánosított megoldása

$$u_f(x,y)=$$
$$=-\sum_{k,j\in\mathbb{N}}\frac{4}{(k^2+j^2)\pi^2}\int\limits_Q (f(t,s)\cdot\sin k\pi t\cdot\sin j\pi s)\,dtds\cdot\sin k\pi x\cdot\sin j\pi y.$$

A megoldás előállításának a fenti példán bemutatott módszerére mint **a változók szétválasztásának módszeré**re szokás hivatkozni. Ez lényegében tehát a következőkből áll:

- találni szorzat alakú (szeparált változójú) sajátfüggvényeket;
- valós függvénytannal kimutatni (ha lehet), hogy az így nyert függvényrendszer már teljes;
- adott jobb oldal esetén a megoldást a már ismert teljes ortonormált sajátfüggvényrendszerrel numerikusan előállítani.

5.1.4. Egy általánosabb numerikus eljárás: A Rytz–Galjorkin-módszer

5.1.36. Megjegyzés. Legyen H valós Hilbert-tér, $M\leq H$ zárt altér és $\Phi\in H^*$. Ha az $a\in H$ vektor H-beli reprezentációja a Φ funkcionálnak (azaz $\Phi=\langle\cdot\mid a\rangle$), akkor a P_Ma vetület éppen M-beli reprezentációja a $\Phi_{|M}$ funkcionálnak.

Bizonyítás. Minden $x\in M$-re $x\perp a-P_Ma$, így $\langle x\mid P_Ma\rangle=\langle x\mid a\rangle$. □

5.1.37. Tétel (Rytz–Galjorkin)**.** *Legyen H valós Hilbert-tér és $(z_n)\subseteq H$ olyan lineárisan független sorozat, amelyre $\lin(\{z_n:n\in\mathbb{N}\})$ sűrű altere H-nak, továbbá $\Phi\in H^*$. Jelölje minden n indexre a $\Phi_{|H_n}$ funkcionál reprezentációját $a_n\in H_n$. Ekkor (a_n) normában tart a Φ funkcionál $a\in H$ reprezentációjához.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A Riesz-tétel alapján Φ-nek létezik egy és csak egy $a \in H$ reprezentációja. A fentiek értelmében minden n-re $a_n = P_{H_n} a$.

Most $\operatorname{lin}(\{z_n : n \in \mathbb{N}\})$ sűrű volta miatt van a z_n vektorok lineáris kombinációiból álló olyan sorozat, amely normában tart a-hoz. Innen triviálisan olyan a-hoz tartó $(u_n) \subseteq H$ sorozat is van, hogy minden n-re $u_n \in H_n$. Így a vetületi tulajdonság miatt $\|a - a_n\| \leq \|a - u_n\| \to 0$. □

5.1.38. Megjegyzés. Konkrét feladatok során természetesen az érdekel bennünket, hogy a fenti tételbeli a_n vektor milyen együtthatókkal áll elő a z_k vektorok lineáris kombinációjaként. A $z_1, \ldots, z_n$ vektorok lineáris kombinációira térve, a reprezentációból azonnal kapjuk, hogy (rögzített n-re)

$$a_n = \xi_1 \cdot z_1 + \xi_2 \cdot z_2 + \cdots + \xi_n \cdot z_n,$$

ahol $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ megoldása a

$$\begin{aligned}
\langle z_1 \mid z_1 \rangle \cdot \xi_1 + \langle z_1 \mid z_2 \rangle \cdot \xi_2 + \cdots + \langle z_1 \mid z_n \rangle \cdot \xi_n &= \Phi(z_1), \\
\langle z_2 \mid z_1 \rangle \cdot \xi_1 + \langle z_2 \mid z_2 \rangle \cdot \xi_2 + \cdots + \langle z_2 \mid z_n \rangle \cdot \xi_n &= \Phi(z_2), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\langle z_n \mid z_1 \rangle \cdot \xi_1 + \langle z_n \mid z_2 \rangle \cdot \xi_2 + \cdots + \langle z_n \mid z_n \rangle \cdot \xi_n &= \Phi(z_n)
\end{aligned}$$

egyenletrendszernek. (Ami azt is maga után vonja, hogy az egyenletrendszer megoldhatóságát külön nem kell vizsgálnunk.) Minden n-re megoldva ezt az ($n \times n$ méretű) egyenletrendszert, majd a kapott értékeket visszahelyettesítve az $a_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k z_k$ képletbe, megkapjuk az a_n vektort; s ezen vektorok sorozata az a vektorhoz normában konvergál. A most leírt numerikus eljárást hívják **Rytz–Galjorkin-módszer**nek.

5.1.39. Megjegyzés. A fenti Rytz–Galjorkin-módszert alkalmazhatjuk például az egyik korábbi szakaszban (*Egzisztencia és unicitás a $c \leq 0$ esetben*) megfogalmazott feladatra. A feladat és az ott szereplő tétel jelöléseit használva, a módszert a $\left(H_0^1(\Omega), [\cdot \mid \cdot]\right)$ Hilbert-térben a

$$\Phi(v) := -\int_\Omega (f \cdot v)$$

funkcionálra alkalmazhatjuk, ahol

$$[u \mid v] := \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot \partial_k u \cdot \partial_j \overline{v} - c \cdot u \cdot \overline{v} \right).$$

Persze még rögzítenünk kell egy lineárisan független $(z_j) \subseteq H_0^1(\Omega)$ sorozatot. Ezután a $[z_k \mid z_j]$ értékeket (pl. valamilyen kvadratúraképlettel) kiszámolva,

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

majd a fenti egyenletrendszereket megoldva és az $a_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k z_k$ képletbe visszahelyettesítve, megkapjuk a feladat általánosított megoldásához $H_0^1(\Omega)$-normában konvergáló sorozatot.

Ha például $(z_j) \subseteq H_0^1(\Omega)$ sorozat gyanánt speciálisan a *Sajátérték-feladat a $c \leq 0$ esetben* c. szakaszban megkapott teljes ortonormált általánosított sajátfüggvényrendszert vesszük, akkor a Rytz–Galjorkin-módszer éppen azt a numerikus közelítő eljárást adja vissza, amelyet a szóban forgó szakaszban ismertettünk. Persze ebben az esetben a közelítő megoldásra vonatkozó egyenletrendszerek tautológiává egyszerűsödnek; ennek árát viszont az általánosított sajátfüggvények kiszámításával kell megfizetnünk, míg általános esetben (z_j) tetszőleges olyan $H_0^1(\Omega)$-beli lineárisan független sorozat lehet, amelynek értékkészlete sűrű alteret generál $H_0^1(\Omega)$-ban. Tehát a (z_j) sorozat megválasztásának döntő szerepe lehet abban, hogy a Rytz–Galjorkin-módszer alkalmazása során mely részszámítások fognak nehezebbnek vagy könnyebbnek bizonyulni.

5.1.40. Megjegyzés. Az előző (*Poisson-sajátérték-feladat az egységnégyzeten*) pontban szereplő

$$u_{k,j}(x,y) = 2 \sin k\pi x \cdot \sin j\pi y$$

függvényrendszer teljes általánosított sajátfüggvényrendszere a $Q = (0,1) \times (0,1)$ egységnégyzeten előírt homogén peremfeltételű Poisson-egyenletnek. Ha most egy másik homogén peremfeltételű egyenletesen elliptikus Dirichlet-feladatot akarunk a Q egységnégyzeten megoldani, akkor e fentiek ugyan általában már nem lesznek általánosított sajátfüggvények, viszont lineárisan függetlenek és lineáris burkuk sűrű $H_0^1(Q)$-ban; tehát a fenti $u_{k,j}$ függvényeket használhatjuk a Rytz–Galjorkin-módszerhez. Nevezetesen legyenek $a_{1,1}, a_{1,2} = a_{2,1}, a_{2,2} \in C^1\left(\overline{Q}\right), c \in C(Q) \cap L^\infty(Q)$, $c \leq 0$, és ekkor jelölje $L : C^2(Q) \to C(Q)$,

$$Lu := \partial_1(a_{1,1} \cdot \partial_1 u) + \partial_2(a_{1,2} \cdot \partial_1 u) + \partial_1(a_{2,1} \cdot \partial_2 u) + \partial_2(a_{2,2} \cdot \partial_2 u) + c \cdot u.$$

Tegyük föl, hogy ez az L differenciáloperátor egyenletesen elliptikus. Most felírhatjuk az L-hez tartozó általánosított homogén peremfeltételű peremértékfeladatot, majd a belőle származtatott $H_0^1(Q)$-beli $[\cdot \mid \cdot]$ skalárszorzatot. Ekkor a vonatkozó lineáris egyenletrendszerek együtthatói

$$[u_{p,q} \mid u_{r,s}] = \int_Q (a_{1,1} \cdot \partial_1 u_{p,q} \cdot \partial_1 \overline{u_{r,s}} + a_{1,2} \cdot \partial_1 u_{p,q} \cdot \partial_2 \overline{u_{r,s}} + \\ + a_{2,1} \cdot \partial_2 u_{p,q} \cdot \partial_1 \overline{u_{r,s}} + a_{2,2} \cdot \partial_2 u_{p,q} \cdot \partial_2 \overline{u_{r,s}} - c u_{p,q} \overline{u_{r,s}}),$$

ami az $u_{p,q}$ függvények választása miatt az $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}$ és c függvények és deriváltjaik egységnégyzeten vett megfelelő Fourier-együtthatóiból adódik.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Tehát jelen esetben a Rytz–Galjorkin-módszerben szereplő egyenletrendszerek együtthatói egyszerűen az együtthatófüggvények, ill. deriváltjaik Fourier-együtthatóiból adódnak.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

© Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

6. fejezet

A funkcionálanalízis három alapelve

A klasszikus funkcionálanalízisben három tételt, illetve tételkört szoktak úgy számontartani, mint a funkcionálanalízis három fő alapelvét. Ezek: A **Banach–Steinhaus-tétel** és köre, **a Banach-féle nyíltleképezés-tétel** és köre, valamint a **Hahn–Banach-tétel** és köre. A Banach–Steinhaus-tételkör azon kérdés köré tömörül, hogy végtelen sok lineáris operátor pontonkénti korlátossága milyen terekben implikál egyenletes korlátosságot; illetve pontonkénti konvergenciából mikor következtethetünk egyenletes konvergenciára. Ennek elsősorban a numerikus módszerek elméletében, például az interpolációelméletben van nagy szerepe. A Banach-féle nyíltleképezés-tételkör lineáris operátorok folytonossági kérdéseit feszegeti más, egyszerűbben leellenőrizhető feltételekre alapozva, például folytonos operátor inverzének folytonosságát, illetve egy operátor folytonosságát egyszerűbb topológiai feltételekre (pl. grafikon zárt voltára) alapozva vizsgálja. Mindez például egyenletek megoldásainak bizonyos paraméterektől való folytonos függésének biztosításában szokott hasznosnak bizonyulni. De a Banach-féle nyíltleképezés-tétel legalább ennyire fontos szereppel bír a feltételes szélsőérték-feladatok elméleti megalapozásában is. A Hahn–Banach-tételkör kiterjesztési, szeparációs és beágyazási kérdések köré tömörül, illetve a gyenge konvergencia, illetve topológia megalapozásában fontos. A három elv közül talán a Hahn–Banach-tételkör a „legteoretikusabb”, bár a kezdetek kezdetén a technikailag legegyszerűbb is; ritkán használatos közvetlenül az alkalmazott diszciplínákban, leginkább magában az „absztrakt” funkcionálanalízisben. Például Hilbert-terekben minden ismertebb funkcionálanalízisbeli tétel Hahn–Banach-tétel nélkül, sőt ami ebből igazán lényeges: transzfinit okoskodás nélkül is egyszerűen kihozható. („Transzfinit okoskodás” alatt természetesen itt nem általában a kiválasztási axiómát

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

és ekvivalens alakjait, hanem pusztán azok *megszámlálhatónál nagyobb* halmazrendszerekben való alkalmazásait értjük.) Tehát a Hahn–Banach-tételnek bizonyos értelemben „Hilbert-terektől távolodva" nő meg a szerepe.

E három alapelv közül kettő nagymértékben támaszkodik a Baire-féle kategóriatételre, amelyet joggal nevezhetünk a funkcionálanalízis „nulladik" alapelvének. Legelőször ezt tárgyaljuk.

6.1. A Baire-féle kategóriatétel

Legyen (X,τ) topologikus tér és $H \subseteq X$. Azt mondjuk, hogy a H halmaz az (X,τ) topologikus térben

- *seholsem sűrű* vagy *sovány*, ha $\operatorname{int}\overline{H} = \emptyset$;
- *első kategóriás*, ha előáll megszámlálható sok sovány halmaz uniójaként;
- *második kategóriás*, ha nem első kategóriás.

Maga az (X,τ) topologikus tér első, illetve második kategóriás, ha az X alaphalmaz e térben első, illetve második kategóriás. Persze minden üres belsejű zárt halmaz sovány, és minden sovány halmaz első kategóriás. Egy zárt részhalmaz pontosan akkor sovány, ha belseje üres. Egy első kategóriás halmaz minden részhalmaza is első kategóriás. Egy sovány halmaz lezárása is persze sovány. Következésképp egy első kategóriás tér előáll megszámlálható sovány zárt részhalmazának uniójaként.

6.1.1. Megjegyzés. Egy második kategóriás részhalmaz nem állhat elő megszámlálható sok első kategóriás részhalmaz uniójaként. Egy második kategóriás tér nem állhat elő megszámlálható sok első kategóriás részhalmazának uniójaként.

6.1.2. Megjegyzés. A számegyenesnek mind a racionális számok, mind az irracionális számok sűrű részhalmazát alkotják, így egyikük sem sovány. Ugyanakkor $\mathbb{Q}$ triviálisan első kategóriás, és a Baire-tételből azonnal következni fog, hogy $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ pedig második kategóriás.

6.1.3. Megjegyzés. Ha az X tér topológiáját egy első kategóriás részhalmazára szűkítjük, akkor a kapott tér még mindig lehet második kategóriás. (Gondoljunk $\mathbb{R}$ egyelemű részhalmazaira.) Viszont ha X egy M részhalmaza **mint topologikus tér** első kategóriás, akkor M mint részhalmaz is első kategóriás. Következésképp egy második kategóriás részhalmaz mint tér is második kategóriás.

Bizonyítás. Elegendő meggondolnunk, hogy az M topologikus tér egy A sovány részhalmaza az X térnek is sovány részhalmaza. Ehhez pedig elegendő belátni, hogy ha A X-beli lezárásának belseje nemüres, akkor A M-beli lezárásának belseje sem üres. Ez utóbbi pedig elemi kalkuláció. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

6.1.4. Tétel (Baire)**.** *Legyen (X,d) nemüres teljes metrikus tér és (F_n) az X zárt részhalmazaiból álló olyan sorozat, amelyre $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n = X$. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, hogy* $\mathrm{int} F_n \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy mindegyik F_n belseje üres. Ekkor triviálisan igaz a következő: *minden $\emptyset \neq G \subseteq X$ nyílt halmaz, $\varepsilon > 0$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\overline{\mathcal{B}}(x,r) \subseteq G \setminus F_k$ gömb, hogy $r \leq \varepsilon$.* Ez alapján rekurzióval definiálunk az F_n halmazoktól rendre diszjunkt $\overline{\mathcal{B}}(x_n,r_n)$ gömbök egy monoton szűkülő sorozatát a következőképpen: $n = 1$-re $G = X$, $\varepsilon = 1$ és $k = 1$, ekkor a $\overline{\mathcal{B}}(x_1,r_1)$ gömb diszjunkt F_1-től. Ha már $\overline{\mathcal{B}}(x_n,r_n)$ definiált, akkor ($n+1$-re) $G = \mathrm{int}\overline{\mathcal{B}}(x_n,r_n)$, $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ és $k = n+1$ szereposztással a fentiek alapján válasszuk a $\overline{\mathcal{B}}(x_{n+1},r_{n+1})$ gömböt, ami diszjunkt F_{n+1}-től. Ezzel definiáltuk a $\left(\overline{\mathcal{B}}(x_n,r_n)\right)$ sorozatot. A konstrukció miatt minden n-re $r_n \leq \frac{1}{n}$, így a gömbök monoton szűkülése miatt (x_n) Cauchy-sorozat. Mivel X teljes, ezért az (x_n) sorozat konvergál egy $x \in X$ ponthoz. Mivel pedig tetszőleges n-re $\forall k \geq n$ esetén $x_k \in \overline{\mathcal{B}}(x_n,r_n)$, ezért $x \in \overline{\mathcal{B}}(x_n,r_n)$ minden n-re. Ami miatt $x \notin F_n$ minden n-re. Ez ellentmondás. □

6.1.5. Következmény. *Egy nemüres teljes metrikus tér mindig második kategóriás. Tehát egy Banach-tér is mindig második kategóriás. Egy nemüres teljes metrikus térben egy első kategóriás halmaz komplementuma mindig második kategóriás.*

6.1.6. Következmény. $\mathbb{R}$*-ben* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *második kategóriás.*

6.1.7. Feladat. Igazoljuk, hogy egy nemüres lokálisan kompakt T_2-tér is mindig második kategóriás!

6.1.8. Feladat. Igazoljuk, hogy a racionális számok halmaza nem áll elő megszámlálható sok $\mathbb{R}$-beli nyílt halmaz metszeteként! Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ halmazon nincs olyan metrika, amelynek a sorozatkonvergencia-fogalma egybeesne az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények pontonkénti konvergenciájának fogalmával! (*Ötlet:* $\mathbb{Q}$ véges részhalmazainak karakterisztikus függvényei triviálisan pontonként közelíthetők $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények alkalmas sorozatával. Maga $\chi_{\mathbb{Q}}$ is pontonként közelíthető $\mathbb{Q}$ véges részhalmazai karakterisztikus függvényeinek alkalmas sorozatával. Viszont $\chi_{\mathbb{Q}}$ pontonként sem közelíthető folytonos függvényekből álló sorozattal — és ez a „dupla csavar" az, ami metrikus terekben kizárt {gondoljunk a zárt halmazok sorozatokkali jellemzésére és $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$-ben a folytonos függvények halmazának eme szóban forgó hipotetikus metrikában vett lezártjára}. Indirekt tegyük ugyanis föl, hogy $\chi_{\mathbb{Q}}$ előáll $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények egy (f_n) sorozatának pontonkénti limeszeként. Ekkor viszont a $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} \left(f_m > \frac{1}{2}\right)$ halmaz egyrészt előáll megszámlálható sok

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

nyílt halmaz metszeteként, másrészt $\mathbb{Q}$-val is megegyezik, ami a fenti következmény értelmében ellentmondás.)

6.1.9. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy végtelen dimenziós Banach-tér nem állhat elő megszámlálható sok véges dimenziós alterének uniójaként! Igazoljuk, hogy a valós polinomok $\mathbb{R}[t]$ vektorterét nem lehet olyan normával ellátni, amellyel teljes volna! Mutassuk meg, hogy egy Banach-térnek nem lehet megszámlálhatóan végtelen algebrai bázisa!

6.1.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $C[a,b]$ Banach-térben azon függvények, amelyek legalább egy pontban, legalább egyik oldalról deriválhatók, első kategóriás halmazt alkotnak! (Tehát a „tipikus" folytonos függvények sehol sem deriválhatók.) (*Ötlet:* a legalább egy pontban jobbról deriválható függvények halmazához fedésül tekintsük az

$$F_n = \Big\{ f \in C[a,b] : \exists 0 \le \alpha \le 1 - \frac{1}{n}, \\ \text{hogy } \forall \alpha \le x \le 1\text{-re } |f(x) - f(\alpha)| \le n|x-\alpha| \Big\}$$

($n \in \mathbb{N}$) zárt halmazokat.)

6.1.11. Feladat. Igazoljuk az Osgood-tételt: Ha egy X topologikus téren értelmezett folytonos függvények egy (f_n) sorozata pontonként tart egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvényhez, akkor f szakadási helyeinek halmaza első kategóriás. (*Ötlet:* tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett vizsgáljuk az $\omega_f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ folytonossági modulus $(\omega_f > \varepsilon)$ nívóhalmazának kategóriáját az

$$F_n := \Big\{ x \in \overline{(\omega_f > \varepsilon)} : \forall k, j \ge n,\ |f_k(x) - f_j(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} \Big\}$$

zárt halmazokkal.)

6.2. A Banach–Steinhaus-tétel

6.2.1. Tétel (Banach–Steinhaus)**.** *Legyenek X, Y normált terek $\mathbb{K}$ fölött, $E \subseteq X$ egy második kategóriás halmaz és $\mathcal{A} \subseteq L(X,Y)$ olyan operátorhalmaz, hogy minden $x \in E$ mellett*

$$\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$$

korlátos halmaz Y-ban. Ekkor $\mathcal{A}$ korlátos részhalmaza az $L(X,Y)$ normált térnek.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Jelölje

$$U := \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}}_Y\right).$$

Persze U zárt halmaz, ezért minden $n \in \mathbb{N}$-re $n \cdot U$ is zárt. Most tetszőleges $x \in E$ vektorhoz a feltétel miatt van olyan n index, hogy $\{Ax : A \in \mathcal{A}\} \subseteq$ $\subseteq n \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y$, eszerint $\frac{x}{n} \in A^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}}_Y\right)$ minden $A \in \mathcal{A}$ mellett, tehát $\frac{x}{n} \in U$, azaz $x \in n \cdot U$. Ezzel megmutattuk, hogy

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (n \cdot U).$$

Mivel E második kategóriás, ezért nem lehet mindegyik $n \cdot U$ zárt halmaz sovány, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, hogy $\operatorname{int}(n \cdot U) \neq \emptyset$. Azaz létezik $x \in X$ és $\delta > 0$, hogy $x + \delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_X \subseteq n \cdot U$. Ezzel

$$\begin{aligned} 2\delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_X \subseteq \left(x + \delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right) - \left(x + \delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right) \subseteq n \cdot U - n \cdot U = n \cdot (U - U) \subseteq \\ \subseteq n \cdot \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \left(A^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}}_Y\right) - A^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}}_Y\right)\right) = n \cdot \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{-1}\left(2 \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y\right) = 2n \cdot U \end{aligned}$$

alapján $\overline{\mathcal{B}}_X \subseteq \frac{n}{\delta} \cdot U$. Ez U definíciója alapján azt jelenti, hogy minden $A \in$ $\in \mathcal{A}$ esetén $A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right) \subseteq \frac{n}{\delta} \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y$, azaz $\|A\| \leq \frac{n}{\delta}$. Tehát $\mathcal{A} \subseteq L(X,Y)$ korlátos halmaz. □

6.2.2. Következmény. *Legyen X Banach-tér, Y pedig normált tér $\mathbb{K}$ fölött. Legyen $\mathcal{A} \subseteq L(X,Y)$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *minden $x \in X$-re $\{Ax : A \in \mathcal{A}\} \subseteq Y$ korlátos halmaz;*
2. *van olyan $E \subseteq X$ második kategóriás halmaz, hogy minden $x \in E$-re $\{Ax : A \in \mathcal{A}\} \subseteq Y$ korlátos halmaz;*
3. *$\mathcal{A} \subseteq L(X,Y)$ $\|\cdot\|$-korlátos halmaz.*

Bizonyítás. Mivel X teljes, ezért második kategóriás, tehát 1. ⇒ 2. nyilvánvaló. 2. ⇒ 3. a fenti tételből következik. 3. ⇒ 1. pedig magától értetődő. □

6.2.3. Tétel. *Legyenek X és Y Banach-terek $\mathbb{K}$ fölött, továbbá $(A_n) \subseteq$ $\subseteq L(X,Y)$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *minden $x \in X$-re $(A_n x) \subseteq Y$ konvergens;*
2. *$(A_n) \subseteq L(X,Y)$ korlátos sorozat, továbbá van olyan $M \subseteq X$ halmaz, hogy $\overline{\operatorname{lin}}(M) = X$ és minden $x \in M$-re $(A_n x) \subseteq Y$ konvergens;*
3. *$(A_n) \subseteq L(X,Y)$ korlátos sorozat, továbbá van olyan $A \in L(X,Y)$ és $M \subseteq X$ halmaz, hogy $\overline{\operatorname{lin}}(M) = X$ és minden $x \in M$-re $A_n x \xrightarrow{\|\cdot\|} Ax$;*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

4. *van olyan* $A \in L(X,Y)$ *operátor, hogy minden* $x \in X$*-re* $A_n x \xrightarrow{\|\cdot\|} Ax$.

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. Mivel az $(A_n) \subseteq L(X,Y)$ sorozat pontonként konvergens, ezért pontonként korlátos is, így a fenti következmény miatt (A_n) normában korlátos. Így $M := X$ választással teljesül 2.

2. $\Rightarrow$ 3. Legyen $K > 0$ olyan, hogy minden n-re $\|A_n\| \leq K$. Persze a konvergens sorozatok összegére és számszorosára vonatkozó tétel miatt azonnal minden $x \in \operatorname{lin}(M)$ esetén is konvergens $(A_n x)$. Ekkor $A_0 : \operatorname{lin}(M) \to Y$,

$$A_0 x := \lim_{n \to +\infty} A_n x$$

is triviálisan lineáris operátor, sőt a pontonkénti tartás és a norma folytonossága miatt minden $x \in \operatorname{lin}(M)$-re

$$\|A_0 x\| = \lim \|A_n x\| \leq K \cdot \|x\|,$$

tehát A_0 folytonos. Mivel $\operatorname{lin}(M)$ sűrű altere X-nek és Y Banach-tér, ezért a 3.2.13. Tétel alapján A_0 egyértelműen kiterjeszthető egy $A \in L(X,Y)$ operátorrá. Ezzel 3. nyilvánvalóan teljesül.

3. $\Rightarrow$ 4. A konvergens sorozatok összegére és számszorosára vonatkozó tétel miatt azonnal minden $x \in \operatorname{lin}(M)$ esetén is $A_n x \xrightarrow{\|\cdot\|} Ax$. Legyen az (A_n) sorozat egy normakorlátja $K > 0$. Legyen $x \in X$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $\overline{\operatorname{lin}}(M) = X$ miatt van olyan $y \in \operatorname{lin}(M)$, hogy $\|y - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2(K+\|A\|)}$. A mondottak miatt ugyanakkor van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $\|Ay - A_n y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ezekkel minden $n \geq N$ esetén

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\| &\leq \|Ax - Ay\| + \|Ay - A_n y\| + \|A_n y - A_n x\| \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{2} + \|A_n\| \cdot \|y - x\| \leq \\ &\leq (\|A\| + \|A_n\|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(K + \|A\|)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

amivel igazoltuk, hogy $A_n x \xrightarrow{\|\cdot\|} Ax$ tetszőleges $x \in X$-re.

4. $\Rightarrow$ 1. magától értetődő. □

6.2.4. Megjegyzés. A fenti bizonyításból triviálisan látható, hogy a fenti tételbeli 1., 3. és 4. pontok ekvivalenciája akkor is fennáll, ha Y nem teljes.

6.2.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha X, Y normált terek $\mathbb{K}$ fölött és $\mathcal{A} \subseteq L(X,Y)$ nem korlátos operátorhalmaz, akkor azon X-beli pontok H halmaza, amelyekre $\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ korlátos, első kategóriás $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz (előáll megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként)! Igazoljuk, hogy ha X második kategóriás is (pl. ha Banach-tér), akkor H komplementuma sűrű X-ben!

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

6.2.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy általában egy normált téren értelmezett operátorcsalád pontonkénti korlátossága nem ekvivalens e család operátornormában vett korlátosságával! Nevezetesen hogy ha a $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ vektorteret az $\|f\|_1 := \int_0^1 |f|$ integrálnormával látjuk el, akkor a $\varphi_n : C_{\mathbb{R}}[0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi_n f := n \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} f$ folytonos lineáris funkcionálok e téren pontonként korlátosak, ám a duális térben nem alkotnak korlátos sorozatot, sőt $\|\varphi_n\| = n$. Miben módosul a felállás, ha $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ helyébe az $L^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ Banach-tér kerül?

6.2.7. Feladat. Mutassunk példát Hilbert-téren értelmezett olyan folytonos lineáris funkcionálokból álló sorozatra, amely pontonként konvergens (tehát a látottak értelmében a sorozat normában korlátos és a limesfunkcionál is folytonos), ám a sorozat normában nem konvergens! (*Ötlet:* Tekintsük például az $L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$ Hilbert-téren $\varphi_n f := \sqrt{n} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} f$ módon értelmezett folytonos lineáris funkcionálokból álló sorozatot. Ez nyilván pontonként nullához tart, ugyanakkor minden n-re $\|\varphi_n\| = 1$.)

6.2.8. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy Hilbert-térben gyengén konvergens sorozat korlátos!

6.2.9. Feladat. Legyen X Banach-tér és Y, Z normált terek $\mathbb{K}$ fölött, továbbá $f : X \times Y \to Z$ parciálisan folytonos bilineáris operátor (azaz minden $x \in X$ esetén $f(x,\cdot) \in L(Y,Z)$ és minden $y \in Y$ esetén $f(\cdot,y) \in L(X,Z)$). Igazoljuk, hogy van olyan $L \geq 0$ szám, hogy minden $x \in X$ és $y \in Y$ esetén

$$\|f(x,y)\| \leq L \cdot \|x\| \cdot \|y\| \,!$$

(*Ötlet:* Alkalmazzuk az $\{f(\cdot,y) : y \in \overline{\mathcal{B}}_Y\}$ operátorcsaládra a Banach–Steinhaus-tételt.)

6.2.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha a $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ vektorteret az $\|f\|_1 := \int_0^1 |f|$ integrálnormával látjuk el, akkor a $\Phi : C_{\mathbb{R}}[0,1] \times C_{\mathbb{R}}[0,1] \to \mathbb{R}$, $\Phi(f,g) := \int_0^1 (f \cdot g)$ bilineáris operátor parciálisan folytonos, de nincs olyan $L \geq 0$ szám, hogy minden $f, g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ esetén teljesülne, hogy $\|\Phi(f,g)\| \leq L \cdot \|f\| \cdot \|g\|$.

6.2.11. Feladat (*)**.** Mutassunk példát első kategóriás normált térre, amelyen igaz a Banach–Steinhaus-tétel, azaz tetszőleges további normált térbe

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ható folytonos lineáris operátorainak egy pontonként korlátos családja egyenletesen is korlátos! (*Ötlet:* Egy $E \subseteq \mathbb{N}$ halmazt nevezzünk *ritká*nak, ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|E \cap \{1,2,\dots,n\}|}{n} = 0,$$

ahol $|E \cap \{1,2,\dots,n\}|$ az $E \cap \{1,2,\dots,n\}$ halmaz elemszámát jelöli. Legyen X az $\ell^1_{\mathbb{R}}$ Banach-tér azon elemeinek altere, amelyek egy ritka halmazon kívül eltűnnek, ellátva az ℓ^1-normával. Mutassuk meg, hogy X első kategóriás, pl. az $F_n := \{u \in X : u(n) = 0\}$ halmazok segítségével. Legyen most Y egy további normált tér és $\mathcal{A} \subseteq L(X,Y)$ pontonként korlátos halmaz. Jelölje minden $n \in \mathbb{N}$-re $c_n := \sup_{A\in\mathcal{A}} \|Ae_n\|$, ahol $e_n(k) = \delta_{n,k}$. Most tetszőleges rögzített ritka $E \subseteq \mathbb{N}$ halmazra X-nek az

$$\ell^1_E := \left\{u \in \ell^1_{\mathbb{R}} : \forall k \in \mathbb{N} \setminus E \text{ esetén } u(k) = 0\right\}$$

altere teljes, így az $\mathcal{A}$ család ℓ^1_E-re való leszűkítése a Banach–Steinhaus-tétel miatt normában korlátos, így azonnal adódik, hogy $\{c_n : n \in E\}$ korlátos halmaz (hiszen $n \in E$ esetén $e_n \in \ell^1_E$). Mivel ez minden ritka halmazra igaz, ezért triviális kalkulációval adódik, hogy (c_n) maga is korlátos sorozat. Ennek egy korlátját K-val jelölve konvex kombinációkkal könnyedén kapjuk, hogy 1. minden véges tartójú, egységnormájú $\ell^1_{\mathbb{R}}$-beli elemen is K-val korlátozott $\mathcal{A}$; 2. X minden egységnormájú elemén is K-val korlátozott $\mathcal{A}$. Tehát $\mathcal{A} \subseteq$ $\subseteq K \cdot \overline{\mathcal{B}}_{L(X,Y)}$.)

6.3. A Banach-féle nyíltleképezés-tétel

6.3.1. Megjegyzés. Legyen X normált tér $\mathbb{K}$ fölött. Ekkor tetszőleges $E, F \subseteq$ $\subseteq X$ halmazokra

$$\overline{E} - \overline{F} \subseteq \overline{E - F}.$$

Bizonyítás. $\overline{E}-\overline{F}$ tetszőleges eleme $x-y$ alakú, ahol $x \in \overline{E}$ és $y \in \overline{F}$. Ezekhez vannak olyan $(x_n) \subseteq E$ és $(y_n) \subseteq F$ sorozatok, hogy $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ és $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Persze $(x_n - y_n) \subseteq E - F$ és $x_n - y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x - y$, tehát $x - y \in \overline{E - F}$. Ezzel igazoltuk is az állítást. □

6.3.2. Lemma. *Legyen X Banach-tér, Y pedig normált tér $\mathbb{K}$ fölött és $A \in$ $\in L(X,Y)$. Ha*

$$\overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)},$$

akkor

$$\frac{1}{2}\overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right).$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A számmal való szorzások oda-vissza folytonossága miatt a feltételből minden $\varepsilon > 0$ esetén is

$$\varepsilon \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq \overline{A\left(\varepsilon \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right)},$$

ahonnan minden $\varepsilon, \alpha > 0$ esetén triviálisan

$$\varepsilon \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq A\left(\varepsilon \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right) + \alpha \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y.$$

Lássuk az állítás igazolását. Legyen $y \in \frac{1}{2}\overline{\mathcal{B}}_Y$. A legutóbbi tartalmazás segítségével rekurzióval definiálunk egy olyan $(x_n) \subseteq X$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left\| y - A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

$n = 1$-re: a fentiekből ($\varepsilon = \frac{1}{2}$ és $\alpha = \frac{1}{4}$ választással) van olyan $x_1 \in \frac{1}{2}\overline{\mathcal{B}}_X$, hogy $\|y - Ax_1\| \leq \frac{1}{4}$.

Most tegyük föl, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definiáltak és $\left\| y - A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\| \leq$ $\leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Ekkor éppen $y - A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \in \frac{1}{2^{n+1}}\overline{\mathcal{B}}_Y$, így ismét a fentiekből ($\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$ és $\alpha = \frac{1}{2^{n+2}}$ választással) van olyan $x_{n+1} \in \frac{1}{2^{n+1}}\overline{\mathcal{B}}_X$, hogy $\left\|\left(y - A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) - Ax_{n+1}\right\|$

$\leq \frac{1}{2^{n+2}}$. Ezzel a rekurzió kész és az $(x_n) \subseteq X$ sorozat jóldefiniált. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left\| y - A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, továbbá $\|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$.

Innen azonnal adódik, hogy az X-beli $\sum x_k$ sor abszolút konvergens, s mivel X teljes, ezért konvergens is, sőt $\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| \leq 1$. No de a kapottak miatt az $n \mapsto A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ sorozat egyrészt y-hoz tart, másrészt (A folytonossága miatt) $A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right)$-hoz is, ezért $y = A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right)$. Így $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \in$ $\in \overline{\mathcal{B}}_X$ alapján azonnal $y \in A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$. Ez y tetszőleges volta miatt éppen a bizonyítandó állítást jelenti. □

6.3.3. Tétel (Banach-féle nyíltleképezés-tétel)**.** *Legyenek X, Y Banach-terek $\mathbb{K}$ fölött és $A \in L(X, Y)$ szürjektív operátor. Ekkor minden $G \subseteq X$ nyílt halmazra $A(G) \subseteq Y$ is nyílt halmaz.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$ tartalmaz $\mathbf{0}_Y$ körüli gömböt. Nyilván $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(n \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right)$, ahonnan A szürjektivitása miatt

$$Y = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(n \cdot A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)\right),$$

következésképp $Y = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(n \cdot \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)}\right)$. Mivel az $n \cdot \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)}$ halmazok zártak és Y második kategóriás, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, hogy $n \cdot \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)}$ belseje nemüres, ekkor persze $\overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)}$ belseje sem üres, azaz van olyan $v \in Y$ és $\delta > 0$, hogy $v + \delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)}$. Ekkor a fenti megjegyzés szerint

$$\begin{aligned} 2\delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y = \left(v + \delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y\right) - \left(v + \delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y\right) \subseteq \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)} - \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)} \subseteq \\ \subseteq \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right) - A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)} = 2\overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)}, \end{aligned}$$

tehát $\delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq \overline{A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)}$, innen pedig $\overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq \overline{\left(\frac{1}{\delta} \cdot A\right)\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)}$. Az előző lemma miatt így $\frac{1}{2}\overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq \left(\frac{1}{\delta} \cdot A\right)\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$, tehát $\frac{\delta}{2}\overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$.

Most legyen $G \subseteq X$ tetszőleges nyílt halmaz. Legyen $y \in A(G)$. Persze van olyan $x \in G$, hogy $y = Ax$. G nyílt volta miatt van olyan $r > 0$ szám, hogy $x + r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X \subseteq G$. Ekkor a fentebb kapottakkal

$$A(G) \supseteq Ax + r \cdot A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right) \supseteq y + r \cdot \frac{\delta}{2}\overline{\mathcal{B}}_Y,$$

tehát $y \in \operatorname{int} A(G)$. Ezzel megmutattuk, hogy $A(G)$ nyílt. □

6.3.4. Következmény (Banach-féle homeomorfizmustétel)**.** *Legyenek X, Y Banach-terek $\mathbb{K}$ fölött és $A \in L(X, Y)$, amely egyúttal bijekció X és Y között. Ekkor A^{-1} is folytonos, azaz $A^{-1} \in L(Y, X)$.*

Bizonyítás. A fenti tétel szerint minden $G \subseteq X$ nyílt halmazra $\left(A^{-1}\right)^{-1}(G) = A(G)$ nyílt, ami most éppen azzal egyenértékű, hogy A^{-1} folytonos. □

6.3.5. Feladat. Legyen X vektortér $\mathbb{K}$ fölött, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan X-en értelmezett normák, hogy mind $(X, \|\cdot\|_1)$, mind $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér, továbbá van olyan $c > 0$ szám, hogy $\|\cdot\|_2 \leq c \cdot \|\cdot\|_1$. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $d > 0$ szám, hogy $\|\cdot\|_1 \leq d \cdot \|\cdot\|_2$ (azaz $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens normák). Mindez azt jelenti, hogy egy $\mathbb{K}$ fölötti X vektortéren legfeljebb egy olyan topológia létezhet, amelyet valamely X-et Banach-térré tevő norma indukál. (*Ötlet:* Alkalmazzuk a Banach-homeomorfizmustételt az $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach-terek között ható $I : x \mapsto x$ folytonos lineáris operátorra.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Az átvezetési lemma ♦

6.3.6. Lemma. *Legyenek X, Y Banach-terek $\mathbb{K}$ fölött és $A \in L(X,Y)$ szürjektív, továbbá $\varphi \in X^*$ olyan funkcionál, amelyre* $\ker A \subseteq \ker \varphi$. *Ekkor létezik egy és csak egy olyan $\psi \in Y^*$ funkcionál, amelyre*

$$\varphi = \psi \cdot A.$$

Bizonyítás. ψ egyértelműsége A szürjektivitása alapján triviális. Adjuk meg ψ-t mint párok halmazát:

$$\psi := \{(Ax, \varphi x) : x \in X\} \leq Y \times \mathbb{K}.$$

Ekkor $(\mathbf{0}, \alpha) \in \psi$ esetén alkalmas x-szel $Ax = \mathbf{0}$ és $\varphi x = \alpha$, ahonnan $x \in \in \ker A \subseteq \ker \varphi$ miatt $\alpha = \varphi x = 0$; ezért ψ függvény. Mivel altér is, továbbá A szürjektív, ezért azonnal $\psi : Y \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amelyre nyilván $\varphi = \psi \cdot A$. Már csak a folytonosságot kell igazolnunk. A Banach-féle nyíltleképezés-tétel értelmében van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $\delta \cdot \overline{\mathcal{B}}_Y \subseteq A\left(\overline{\mathcal{B}}_X\right)$. Ekkor tetszőleges $y \in Y$, $y \neq \mathbf{0}$ vektorhoz létezik olyan $x \in \overline{\mathcal{B}}_X$, amelyre

$$Ax = \frac{\delta}{\|y\|} y.$$

Így

$$|\psi y| = \left|\psi A\left(\frac{\|y\|}{\delta} x\right)\right| = \left|\varphi\left(\frac{\|y\|}{\delta} x\right)\right| = \frac{\|y\|}{\delta} \cdot |\varphi x| \leq \|\varphi\| \frac{\|y\|}{\delta},$$

ahonnan azonnal $\psi \in Y^*$ és $\|\psi\| \leq \frac{\|\varphi\|}{\delta}$. □

6.3.1. A zártgráftétel

6.3.7. Definíció. Legyenek X, Y normált terek $\mathbb{K}$ fölött, $M \leq X$ altér és $A \in \operatorname{Hom}(M, Y)$. Azt mondjuk, hogy *$A$ zárt operátor az X és Y között*, ha tetszőleges $x \in X$, $y \in Y$, $(x_n) \subseteq M$, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ és $Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ esetén $x \in M$ és $y = Ax$.

6.3.8. Megjegyzés. Ha X, Y normált terek $\mathbb{K}$ fölött és $A \in L(X,Y)$, akkor A triviálisan zárt X és Y között.

6.3.9. Példa. Tekintsük a $(C_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_C)$ valós Banach-teret és ennek a [0,1]-en folytonosan deriválható függvényekből álló $C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ alterét. Ekkor az egyváltozós analízis egy közismert tétele szerint $D \in \operatorname{Hom}\left(C^1_{\mathbb{R}}[0,1], C_{\mathbb{R}}[0,1]\right)$, $f \mapsto f'$ zárt lineáris operátor $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ és $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ között, de nyilvánvalóan nem folytonos a $\|\cdot\|_C$ norma vonatkozásában (gondoljunk a $t \mapsto e^{nt}$ függvényekre).

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A következőkben éppen azt fogjuk megmutatni, hogy **egész Banach-téren értelmezett**, és **Banach-térbe is képező** zárt operátor már folytonos is.

6.3.10. Megjegyzés. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek $\mathbb{K}$ fölött. Az $X \times Y$ direkt szorzaton nyilvánvalóan $\mathbb{K}$-norma lesz a $\|\cdot\|_{X\times Y} : X \times \times Y \to \mathbb{R}_+$,

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$$

függvény. A $\mathbb{K}$ fölötti $\left(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y}\right)$ normált teret az $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek **szorzatá**nak mondjuk. Nyilvánvaló, hogy ha X és Y Banach-terek, akkor az $X \times Y$ szorzattér is Banach-tér.

6.3.11. Definíció. Legyenek X és Y vektorterek $\mathbb{K}$ fölött.

Egy $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ operátor grafikonja alatt a

$$\operatorname{graph} A := \{(x, Ax) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

halmazt értjük.

graph A nyilvánvalóan altér.

6.3.12. Megjegyzés. Legyenek X, Y normált terek $\mathbb{K}$ fölött, $M \leq X$ altér és $A \in \operatorname{Hom}(M, Y)$. A nyilván pontosan akkor zárt X és Y között, ha graph A zárt altér az $\left(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y}\right)$ szorzattérben (ez a zárt operátor definíciójából közvetlenül következik a zárt halmazok sorozatokkali jellemzése alapján).

6.3.13. Tétel (zártgráftétel)**.** *Legyenek X, Y Banach-terek $\mathbb{K}$ fölött és $A \in \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ zárt operátor az X és Y között. Ekkor A folytonos is, azaz $A \in L(X, Y)$.*

Bizonyítás. A fenti megjegyzés értelmében graph A zárt altér az

$$\left(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y}\right)$$

szorzattérben, ugyanakkor e szorzattér Banach-tér, következésképp graph A a $\|\cdot\|_{X\times Y}$ normával ellátva Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött. graph A minden eleme nyilván egyértelműen áll elő (x, Ax) alakban (azaz (x, Ax) meghatározza x-et). Jelölje ekkor $P : \operatorname{graph} A \to X$,

$$P(x, Ax) := x.$$

Az $\|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|(x, Ax)\|_{X\times Y}$ egyenlőtlenség miatt P folytonos operátor, az $\|Ax\|_Y \leq \|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|(x, Ax)\|_{X\times Y}$ egyenlőtlenség miatt pedig AP is folytonos operátor. P ugyanakkor triviálisan bijekció graph A és X között. Így a Banach-féle homeomorfizmustétel miatt $P^{-1} : X \to \operatorname{graph} A$ folytonos lineáris operátor. Innen AP folytonos volta miatt $A = (AP) \cdot P^{-1}$ is folytonos. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

6.3.14. Feladat. Legyenek X, Y Banach-terek $\mathbb{K}$ fölött és $A \in \operatorname{Hom}(X, Y)$. A következő szakaszban tárgyalandó Hahn–Banach-féle szeparációs elv segítségével mutassuk meg, hogy A pontosan akkor folytonos, ha minden $\varphi \in Y^*$ esetén $\varphi \cdot A \in X^*$! (*Ötlet:* Az egyik irány triviális. A másikhoz: lássuk be, hogy A zárt gráfú és alkalmazzuk a zártgráftételt.)

6.4. A Hahn–Banach-tétel

6.4.1. Definíció. Legyen X valós vektortér és $p : X \to \mathbb{R}$. A p függvényt *pozitív homogén*nak mondjuk, ha minden $\alpha \geq 0$ számra és $x \in X$ vektorra $p(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot p(x)$. A p függvényt *szubadditív*nak mondjuk, ha tetszőleges $x, y \in X$ vektorokra $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Nyilván minden félnorma (és így minden norma is) pozitív homogén szubadditív függvény.

6.4.2. Lemma (Hahn–Banach)**.** *Legyen X valós vektortér, $p : X \to \mathbb{R}$ pozitív homogén szubadditív függvény, $M \leq X$ altér és $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, hogy minden $x \in M$ mellett $\varphi_0 x \leq p(x)$. Ekkor minden $a \in X \setminus M$ esetén φ_0 kiterjeszthető az $M + \mathbb{R} \cdot a$ altéren értelmezett olyan lineáris φ funkcionállá, hogy minden $x \in M + \mathbb{R} \cdot a$ mellett is $\varphi x \leq p(x)$.*

Bizonyítás. Minden $u, v \in M$ esetén a feltételek alapján

$$\begin{aligned} \varphi_0 u + \varphi_0 v = \varphi_0(u + v) \leq p(u + v) = \\ = p((u + a) + (v - a)) \leq p(u + a) + p(v - a), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\varphi_0 v - p(v - a) \leq p(u + a) - \varphi_0 u.$$

Ez azt jelenti, hogy van olyan ξ valós szám, hogy minden $u, v \in M$ mellett

$$\varphi_0(v) - p(v - a) \leq \xi \leq p(u + a) - \varphi_0(u).$$

Mivel minden $x \in M + \mathbb{R} \cdot a$ vektorhoz egyértelműen léteznek $u \in M$ és $t \in \mathbb{R}$, hogy $x = u + t \cdot a$, ezért jóldefiniált a $\varphi : M + \mathbb{R} \cdot a \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(u + t \cdot a) := \varphi_0 u + t \cdot \xi$$

függvény. φ triviálisan lineáris funkcionál. Megmutatjuk, hogy minden $x \in M + \mathbb{R} \cdot a$ esetén $\varphi x \leq p(x)$. Legyen $x = u + t \cdot a \in M + \mathbb{R} \cdot a$ tetszőleges ($u \in M$, $t \in \mathbb{R}$). Ha $t = 0$, akkor az állítás triviális. Legyen most $t > 0$. Ekkor a ξ-re vonatkozó fenti egyenlőtlenség és p pozitív homogén volta miatt

$$\varphi x = \varphi_0 u + t \cdot \xi = t \cdot \left(\varphi_0\left(\frac{u}{t}\right) + \xi\right) \leq t \cdot p\left(\frac{u}{t} + a\right) = p(u + t \cdot a) = p(x).$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Legyen végül $t < 0$. Ekkor megint csak a ξ-re vonatkozó fenti egyenlőtlenség és p pozitív homogén volta miatt

$$\varphi x = \varphi_0 u + t \cdot \xi = -t \cdot \left(\varphi_0 \left(\frac{u}{-t} \right) - \xi \right) \leq$$

$$\leq -t \cdot p \left(\frac{u}{-t} - a \right) = p\left(u + t \cdot a\right) = p\left(x\right). \qquad \square$$

Egy $\mathcal{A}$ halmazrendszer *lánc*, ha $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \subseteq B$ vagy $B \subseteq A$. Egy $\mathcal{A}$ halmazrendszerben egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ lánc *maximális*, ha $\mathcal{A}$-ban nincs $\mathcal{L}$-nél ténylegesen bővebb lánc.

Az alábbiakban felhasználjuk a halmazelmélet *Kuratowski–Zorn-lemma* néven ismert fontos sarokkövét (ekvivalens a kiválasztási axiómával): *Tetszőleges $\mathcal{A}$ halmazrendszerben létezik $\mathcal{L}$ maximális lánc.*

6.4.3. Tétel (Hahn–Banach)**.** *Legyen X valós vektortér, $p : X \to \mathbb{R}$ pozitív homogén szubadditív függvény, $M \leq X$ altér és $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, hogy minden $x \in M$ mellett $\varphi_0 x \leq p\left(x\right)$. Ekkor φ_0 kiterjeszthető az egész X téren értelmezett olyan lineáris φ funkcionállá, amelyre $\varphi \leq p$.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{H}$ az összes olyan $\psi \in \mathcal{P}\left(X \times \mathbb{R}\right)$ halmazok összességét, amelyekre van olyan $M \leq N \leq X$ altér, hogy $\psi : N \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, továbbá $\psi_{|M} = \varphi_0$ és $\psi \leq p_{|N}$. A Kuratowski–Zorn-lemma értelmében létezik maximális $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ lánc. (Tehát minden $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}$ esetén $\psi_1 \subseteq \psi_2$ vagy $\psi_2 \subseteq$ $\subseteq \psi_1$.) Jelölje

$$\varphi := \cup \mathcal{L}.$$

Megmutatjuk, hogy φ eleget tesz a tétel állításában foglaltaknak. Először is gondoljuk meg, hogy φ függvény (az X egy részhalmazáról $\mathbb{R}$-be). Valóban, $\left(x, \alpha\right), \left(x, \beta\right) \in \varphi = \cup \mathcal{L}$ esetén van olyan $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}$, hogy $\left(x, \alpha\right) \in \psi_1$ és $\left(x, \beta\right) \in \psi_2$; namost $\psi_1 \subseteq \psi_2$ vagy $\psi_2 \subseteq \psi_1$, mondjuk $\psi_1 \subseteq \psi_2$, ekkor persze $\left(x, \alpha\right), \left(x, \beta\right) \in \psi_2$, ahonnan ψ_2 függvény volta miatt $\alpha = \beta$. Tehát φ tényleg függvény. Nyilván $\mathcal{D}_\varphi = \bigcup_{\psi \in \mathcal{L}} \mathcal{D}_\psi$, tehát $\mathcal{D}_\varphi$ altér. Gondoljuk meg, hogy φ lineáris.Tetszőleges $x, y \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén $\left(x, \varphi\left(x\right)\right), \left(y, \varphi\left(y\right)\right),$ $\left(x + y, \varphi\left(x + y\right)\right) \in \varphi = \cup \mathcal{L}$, tehát vannak olyan $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathcal{L}$ funkcionálok, hogy $\left(x, \varphi\left(x\right)\right) \in \psi_1$, $\left(y, \varphi\left(y\right)\right) \in \psi_2$ és $\left(x + y, \varphi\left(x + y\right)\right) \in \psi_3$. Most a ψ_1, ψ_2, ψ_3 funkcionálok között van legbővebb, mondjuk ψ_3. Ennek függvény volta miatt $\varphi\left(x\right) = \psi_3\left(x\right), \varphi\left(y\right) = \psi_3\left(y\right)$ és $\varphi\left(x + y\right) = \psi_3\left(x + y\right)$, innen ψ_3 linearitása miatt

$$\varphi\left(x + y\right) = \psi_3\left(x + y\right) = \psi_3\left(x\right) + \psi_3\left(y\right) = \varphi\left(x\right) + \varphi\left(y\right),$$

tehát φ additív. A valós szorzó φ-ből kiemelése hasonlóan adódik. Tehát φ lineáris. φ definíciójából az is triviális, hogy $\varphi \leq p_{|\mathcal{D}_\varphi}$. Ezért $\varphi \in \mathcal{H}$. Indirekt

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

tegyük föl, hogy $\mathcal{D}_\varphi \neq X$. Ekkor létezik $a \in X \setminus \mathcal{D}_\varphi$. Így a fenti Hahn–Banach-lemma miatt létezik $\Phi : \mathcal{D}_\varphi + \mathbb{R} \cdot a \to \mathbb{R}$ olyan lineáris kiterjesztése φ-nek, amelyet p majorál. No de ekkor $\Phi \in \mathcal{H}$, és nyilván $\mathcal{L} \cup \{\Phi\}$ is $\mathcal{H}$-beli lánc. $\mathcal{L}$ maximalitása miatt így $\mathcal{L} \cup \{\Phi\} = \mathcal{L}$, azaz $\Phi \in \mathcal{L}$. Ezért $\mathcal{D}_\varphi$ definíciója miatt $\mathcal{D}_\Phi \subseteq \mathcal{D}_\varphi$, ahonnan $a \in \mathcal{D}_\varphi$, s ez ellentmondás. Tehát $\mathcal{D}_\varphi = X$, s ez éppen azt jelenti, hogy φ megfelel a tétel állításában foglaltaknak. □

6.4.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy a korlátos valós sorozatok $\ell^\infty_\mathbb{R}$ vektorterén van olyan Λ lineáris funkcionál, amelyre bármely $(a_n), (b_n) \in \ell^\infty_\mathbb{R}$ esetén

1. $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \Lambda((a_n)) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$;
2. $\Lambda((a_{n+1})) = \Lambda((a_n))$;
3. ha (b_n) konvergens, akkor

$$\Lambda((a_n \cdot b_n)) = \Lambda((a_n)) \cdot \Lambda((b_n)) = \Lambda((a_n)) \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Egy ilyen tulajdonságú funkcionált *Banach-limes*nek szokás nevezni, amely nyilvánvalóan lineáris és „kvázi-szorzattartó" kiterjesztése a konvergens sorozatok *limes* operációjának. (*Ötlet:* $\mathbf{a} = (a_n)$ jelöléssel legyen $\Lambda_n\mathbf{a} := \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, $M := \{\mathbf{a} \in \ell^\infty_\mathbb{R} : (\Lambda_n\mathbf{a}) \text{ konvergens}\}$, $\Lambda_0 : M \to \mathbb{R}$, $\Lambda_0\mathbf{a} := \lim \Lambda_n\mathbf{a}$ és $p : \ell^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p\mathbf{a} := \limsup\limits_{n\to+\infty} \Lambda_n\mathbf{a}$. Alkalmazzuk a Hahn–Banach-tételt a Λ_0 funkcionálra és a p pozitív homogén szubadditív függvényre. Az így nyert Λ-ra 1. és 2. triviálisan teljesül, következésképp Λ pozitív funkcionál is. Az is azonnal leellenőrizhető, hogy egy $\mathbf{a} \in \ell^\infty_\mathbb{R}$ sorozat véges sok indexbeni megváltoztatása nem befolyásolja annak Λ-értékét. E két utóbbi tulajdonságból 3. már könnyedén következik először pozitív elemű, majd tetszőleges korlátos (a_n) sorozatra.)

6.4.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy az előző feladat kritériumainak megfelelő $\Lambda : \ell^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Banach-limes nem lehet az egész $\ell^\infty_\mathbb{R}$ téren szorzattartó! (*Ötlet:* Vizsgáljuk meg a fenti feladat pontjainak teljesülését az $a_n = 1 + (-1)^n$ és $b_n = a_{n+1}$ sorozatokra, illetve összegükre és szorzatukra.)

6.4.6. Feladat (*)**.** Mutassuk meg, hogy a limeszoperációnak van olyan lineáris Λ kiterjesztése $\ell^\infty_\mathbb{R}$-re, amely a lim sup és lim inf operációk között van és az egész $\ell^\infty_\mathbb{R}$ téren szorzattartó! (Tehát az előző feladat értelmében az eltolásinvariancia nem teljesülhet rá.) (*Ötlet:* Vegyünk $\mathbb{N}$-en egy véges halmazokat nem tartalmazó $\mathcal{U}$ ultraszűrőt és először *nemnegatív* $\mathbf{a} = (a_n) \in \ell^\infty_\mathbb{R}$ esetén jelölje

$$\Lambda\mathbf{a} := \sup\{\alpha \geq 0 : \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq \alpha\} \in \mathcal{U}\}.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Majd tetszőleges $\mathbf{a} \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ esetén $\Lambda\mathbf{a} := \Lambda(\mathbf{a}^+) - \Lambda(\mathbf{a}^-)$. Elemi kalkulációval látható, hogy Λ megfelel a feladatban kiróttaknak. Egyébként meggondolható, hogy a feladat feltételeinek megfelelő tetszőleges Λ funkcionál a most leírt módon származtatható.)

Ezek után rátérünk a Hahn–Banach-tétel komplex vektorterekbeni megfelelőjére.

6.4.7. Megjegyzés. Minden z komplex számra nyilván

$$z = \mathrm{Re}z - i \cdot \mathrm{Re}(iz).$$

6.4.8. Lemma. *Ha X komplex vektortér és $\Phi : X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál, akkor létezik egy és csak egy $\Psi \in X'$ $\mathbb{C}$-lineáris funkcionál, hogy $\mathrm{Re}\Psi = \Phi$.*

Bizonyítás. Először lássuk az egyértelműséget. Ha Ψ eleget tesz az állításban foglaltaknak, akkor a fenti megjegyzés és Ψ linearitása miatt minden $x \in X$-re

$$\Psi x = \mathrm{Re}\Psi x - i \cdot \mathrm{Re}(i\Psi x) = \mathrm{Re}\Psi x - i \cdot \mathrm{Re}(\Psi(ix)) = \Phi x - i \cdot \Phi(ix),$$

ami jóldefiniált a $\Psi x = \Phi x - i \cdot \Phi(ix)$ egyenlőség által. Most már csak az egzisztenciát kell igazolnunk, s ehhez éppen elég ellenőriznünk, hogy a $\Psi : X \to \mathbb{C}$, $\Psi(x) := \Phi x - i \cdot \Phi(ix)$ függvény megfelel az állításnak. Ψ additivitása nyilvánvaló, sőt a valós skalár kiemelhetősége is. A $\mathbb{C}$-linearitáshoz tehát elegendő i kiemelhetőségét megmutatnunk. Legyen $x \in X$, ekkor definíció szerint

$$\begin{aligned}\Psi(ix) &= \Phi(ix) - i \cdot \Phi\left(i^2 x\right) = \Phi(ix) - i \cdot \Phi(-x) = \Phi(ix) + i \cdot \Phi(x) = \\ &= i \cdot (-i \cdot \Phi(ix) + \Phi(x)) = i \cdot \Psi(x).\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk, hogy Ψ $\mathbb{C}$-lineáris. A $\mathrm{Re}\Psi = \Phi$ egyenlőség a definícióból nyilvánvaló. □

Az alábbi tétel már egyaránt vonatkozik $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölötti vektorterekre. Ennek komplex esetét – bár $\mathbb{R}$ fölötti esetben formálisan nem az eredeti megfogalmazást adja vissza – szokás egyszerűen „komplex Hahn–Banach-tétel" néven emlegetni.

6.4.9. Tétel (Bohnenblust–Sobczyk)**.** *Legyen X vektortér $\mathbb{K}$ fölött, $p : X \to \mathbb{R}$ félnorma, $M \leq X$ altér és $\varphi_0 : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris funkcionál, hogy minden $x \in M$ mellett $|\varphi_0 x| \leq p(x)$. Ekkor φ_0 kiterjeszthető az egész X téren értelmezett olyan lineáris φ funkcionállá, amelyre $|\varphi| \leq p$.*

Bizonyítás. Nyilván $\mathrm{Re}\varphi_0 \leq |\varphi_0| \leq p_{|M}$. Így ha X-et valós vektortérnek tekintjük, a Hahn–Banach-tételből azonnal adódik, hogy van olyan $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál, amely egyrészt kiterjesztése $\mathrm{Re}\varphi_0$-nak, másrészt $\Phi \leq p$.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Most $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén legyen $\varphi:=\Phi$. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetén pedig a fenti lemma miatt létezik egy és csak egy $\varphi\in X'$ $\mathbb{C}$-lineáris funkcionál, hogy $\mathrm{Re}\varphi=\Phi$. Mivel e lemma $\mathrm{Re}\varphi_0$-ra is alkalmazható, ezért annak egyértelműségi része miatt azonnal $\varphi_{|M}=\varphi_0$, tehát φ kiterjesztése φ_0-nak. Azt is tudjuk, hogy minden $x\in X$-re $\mathrm{Re}\varphi(x)\le p(x)$. Tehát mind $\mathbb{R}$, mind pedig $\mathbb{C}$ fölötti esetben φ kiterjesztése φ_0-nak, továbbá minden $x\in X$-re $\mathrm{Re}\varphi(x)\le p(x)$. Most tetszőleges rögzített x-re van olyan $\alpha\in\mathbb{K}$ szám, hogy $|\alpha|=1$ és $\alpha\cdot\varphi x=|\varphi x|$, ezzel p félnorma volta miatt $|\varphi x|=\varphi(\alpha x)=\mathrm{Re}\varphi(\alpha x)\le p(\alpha x)=|\alpha|\cdot p(x)=$ $=p(x)$. Épp ezt akartuk megmutatni.

Az alábbi tétel a Hahn–Banach-tétel eredeti alakja. □

6.4.10. Tétel. *Legyen $(X,\|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött, $M\le X$ altér és $\varphi_0\in$ $\in M^*$ funkcionál (a $\|\cdot\|$ norma M-beli leszűkítésére nézve folytonos). Ekkor φ_0-nak létezik olyan $\varphi\in X^*$ kiterjesztése, amelynek funkcionálnormája megegyezik φ_0 funkcionálnormájával.*

Bizonyítás. A φ_0 funkcionált nyilván majorálja a $\|\varphi_0\|\cdot\|\cdot\|$ félnorma. Így a Bohnenblust–Sobczyk-tétel miatt φ_0 kiterjeszthető az egész X téren értelmezett olyan $\mathbb{K}$-lineáris φ funkcionállá, amelyre $|\varphi|\le\|\varphi_0\|\cdot\|\cdot\|$. Ekkor persze $\varphi\in X^*$ és $\|\varphi\|\le\|\varphi_0\|$. No de φ kiterjesztése φ_0-nak, ezért. $\|\varphi\|=\|\varphi_0\|$. □

6.4.11. Tétel. *Legyen $(X,\|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött és $M\le X$ zárt altér. Ekkor minden $a\in X\setminus M$ esetén van olyan $\varphi\in X^*$ funkcionál, amely M-en eltűnik, továbbá $\|\varphi\|=1$ és $\varphi a=d(a,M)$.*

Bizonyítás. Mivel minden $x\in M+\mathbb{K}\cdot a$ vektorhoz egyértelműen léteznek $u\in M$ és $t\in\mathbb{K}$, hogy $x=u+t\cdot a$, ezért jóldefiniált a $\varphi_0:M+\mathbb{K}\cdot a\to\mathbb{K}$,

$$\varphi_0(u+t\cdot a):=t\cdot d(a,M)$$

lineáris funkcionál. Persze $M=\ker\varphi_0$ és $\varphi_0 a=d(a,M)$. Ugyanakkor minden $u+t\cdot a\in M+\mathbb{K}\cdot a$ esetén

$$|\varphi_0(u+t\cdot a)|=|t|\cdot d(a,M)=d(t\cdot a,M)=d(u+t\cdot a,M)\le\|u+t\cdot a\|$$

miatt $\|\varphi_0\|\le 1$. Legyen most $(u_n)\subseteq M$ olyan sorozat, hogy $\|u_n-a\|\to d(a,M)$. Ezzel egyidejűleg persze minden n-re $\varphi_0(-u_n+a)=d(a,M)$, tehát $\lim\varphi_0(-u_n+a)=\lim\|-u_n+a\|\ne 0$, innen azonnal $\|\varphi_0\|=1$. Most erre a φ_0-ra az előző tételt alkalmazva azonnal adódik az állítás. □

6.4.12. Következmény (normált terek szeparációja)**.** *Legyen $(X,\|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött. Ekkor minden nemnulla $a\in X$ vektorhoz van olyan $\varphi\in X^*$ funkcionál, amelyre $\|\varphi\|=1$ és $\varphi a=\|a\|$. Következésképp $x,y\in X$ esetén*

$$x=y\iff\forall\varphi\in X^*:\varphi x=\varphi y.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti tételt az $M = \{\mathbf{0}_X\}$ altérre. □

6.4.13. Következmény. *Legyen* $(X, \|\cdot\|)$ *normált tér* $\mathbb{K}$ *fölött. Ekkor minden* $a \in X$ *vektorra*

$$\|a\| = \max\{|\varphi a| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1\} = \max\left\{|\varphi a| : \varphi \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}\right\}.$$

6.4.14. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ fölött. Jelölje tetszőleges $x \in X$ esetén $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{K}$,

$$\widehat{x}(\varphi) := \varphi x.$$

6.4.15. Megjegyzés. $\widehat{x}$ nyilvánvalóan lineáris funkcionál az X^* téren, sőt a legutóbbi következmény alapján $\widehat{x}$ folytonos, sőt éppen $\|\widehat{x}\| = \|x\|$. Eszerint $\widehat{x}$ az $X^{**}(= (X^*)^*)$ Banach-térnek éppen egy $\|x\|$ normájú eleme. Innen triviálisan adódik, hogy $\mathcal{I} : X \to X^{**}$,

$$\mathcal{I}(x) := \widehat{x}$$

egy normatartó (izometrikus) leképezés, szokásos kifejezéssel: izometrikus beágyazása X-nek X^{**}-ba.

6.4.16. Definíció. Egy $\mathbb{K}$ fölötti $(X, \|\cdot\|)$ normált teret *reflexív*nek mondunk, ha a fenti $\mathcal{I}$ izometrikus beágyazás egyúttal szürjektív is. (Tehát minden folytonos lineáris funkcionál $\widehat{x}$ alakú.)

Mivel egy normált tér topológiai duálisa mindig teljes, ezért egy reflexív normált tér persze mindig Banach-tér is.

6.4.17. Megjegyzés. Ha X reflexív Banach-tér $\mathbb{R}$ fölött, akkor a legutóbbi következmény alapján minden $\varphi \in X^*$ funkcionál fölveszi a $\overline{\mathcal{B}}_X$ egységgömbön a maximumát:

$$\|\varphi\| = \max\{|\Phi\varphi| : \Phi \in X^{**}, \|\Phi\| \leq 1\} = \max\{|\widehat{x}\varphi| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\} =$$
$$= \max\{|\varphi x| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Ehelyütt csupán utalhatunk Robert C. James 1972-es híres tételére, mely szerint egy X Banach-tér pontosan akkor reflexív, ha a folytonos lineáris funkcionáljai fölveszik maximumukat az X tér egységgömbjén. Ennek egyik irányát (a triviálisat) mutattuk meg a fentiekben.

6.4.18. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $(C_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_C)$ Banach-tér nem reflexív! (*Ötlet:* A $\varphi \in (C_{\mathbb{R}}[0,1])^*$,

$$\varphi f := f(0) - \int_0^1 f$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

funkcionál az egységgömb minden pontjában 2-nél kisebb, viszont 2-re rá is közelít $f_n(0) = 1$, $f_n\left(\left[\frac{1}{n},1\right]\right) = \{-1\}$ tulajdonságú „könyökfüggvényekkel". Tehát φ nem veszi föl az egységgömbön a maximumát.)

6.4.19. Példa. Egy $\mathbb{K}$ fölötti H Hilbert-tér reflexív Banach-tér. Legyen ugyanis $\Phi \in H^{**}$. Jelölje $\psi : H \to \mathbb{K}$, $\psi(x) := \overline{\Phi(\langle \cdot \mid x\rangle)}$. Ezzel triviálisan $\psi \in H^*$, ahonnan a Riesz-tétel miatt van olyan $y \in H$, hogy $\psi = \langle \cdot \mid y\rangle$. Ekkor persze minden $x \in H$-ra $\Phi(\langle \cdot \mid x\rangle) = \langle y \mid x\rangle$, azaz ismét Riesz tétele alapján minden $\varphi \in H^*$-ra $\Phi(\varphi) = \varphi(y)$, tehát $\Phi = \widehat{y}$.

6.4.20. Feladat. Mértékelméleti tanulmányaink alapján mutassuk meg, hogy tetszőleges $(T, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér és $1 < p < +\infty$ esetén a $L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ Banach-tér reflexív!

6.4.21. Feladat. Gondoljuk meg, hogy minden véges dimenziós normált tér reflexív!

6.4.22. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\left(\ell^1_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_1\right)$ Banach-tér nem reflexív! (*Ötlet:* Gondoljuk meg, hogy a 6.4.4. Feladatban szereplő Banach-limes eleme $(\ell^\infty_{\mathbb{R}})^*$-nak, azaz természetes azonosítással $\left(\ell^1_{\mathbb{R}}\right)^{**}$-nak, de nem áll elő $\widehat{\mathbf{a}}$ $\left(\mathbf{a} \in \ell^1_{\mathbb{R}}\right)$ alakban.)

6.4.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{K}$ fölötti $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér nem reflexív! (*Ötlet:* minden $\varphi \in c_0^*$ és $n \in \mathbb{N}$ mellett $\sum_{k=1}^{n} |\varphi e_k| \le \|\varphi\| \cdot 1$, ahonnan $\Phi : c_0^* \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi e_k$ folytonos lineáris funkcionál, amely nem áll elő $\widehat{\mathbf{a}}$ $(\mathbf{a} \in c_0)$ alakban.)

6.4.24. Feladat. Gondoljuk meg, hogy ha X reflexív Banach-tér, akkor X^* is az!

6.4.25. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az X Banach-tér X^* duálisa szeparábilis, akkor X is szeparábilis! (*Ötlet:* Legyen $(\varphi_k) \subseteq X^*$ $\|\cdot\|$-sűrű sorozat, és minden k-ra legyen $x_k \in X$ olyan egységvektor, amelyre $|\varphi_k x_k| \ge \frac{1}{2}\|\varphi_k\|$. Jelölje M ezen x_k vektorok zárt lineáris burkát. Indirekt tegyük föl, hogy $M \neq X$. Ekkor a Hahn–Banach-tétel miatt létezik olyan $\psi \in X^*$ egységvektor, amelyre $M \subseteq \ker\psi$. Vegyünk egy olyan φ_k funkcionált, amelyre $\|\psi - \varphi_k\| < \frac{1}{4}$. Ezzel $\|\varphi_k\| > \frac{3}{4}$, így $|\varphi_k x_k| > \frac{3}{8}$, ugyanakkor

$$|\varphi_k x_k| = |\varphi_k x_k - \psi x_k| \le \|\varphi_k - \psi\| \cdot \|x_k\| < \frac{1}{4},$$

ami ellentmondás.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

6.4.26. Definíció. Legyen X vektortér $\mathbb{K}$ fölött és $M \subseteq X$ halmaz. Jelölje

$$p_M : X \to \overline{\mathbb{R}}_+,$$
$$p_M(x) := \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in M\right\}$$

(azon konvencióval, hogy $\inf \emptyset = +\infty$.) A p_M függvényt az M halmaz *támaszfüggvény*ének (vagy *Minkowski-funkcionál*jának) nevezzük.

6.4.27. Feladat. Legyen X normált tér $\mathbb{K}$ fölött és $M \subseteq X$ olyan konvex halmaz, amelyre $\mathbf{0}_X \in \mathrm{int} M$. Mutassuk meg, hogy ekkor p_M pozitív homogén szubadditív függvény, továbbá létezik olyan $c > 0$, hogy $p_M \leq c \cdot \|\cdot\|$.

6.4.28. Megjegyzés. A fenti feladat felhasználásával a konvex halmazok szeparációjának Hilbert-terekben tárgyalt elmélete végigvihető Hilbert-terek helyett általában normált terekre, csakhogy először az erős szeparációt érdemes közvetlenül igazolni, majd ebből a szigorút. (A véges dimenziós eset a Hilbert-térben tárgyalthoz képest nem ad új információt, hiszen ekkor bármely norma amúgy is ekvivalens egy euklideszi normával). Ezért szokás a konvex halmazok szeparációs tételeit a Hahn–Banach-tétel geometriai alakjainak hívni.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7. fejezet

Függelék

7.1. Néhány Banach-tér duálisa

7.1.1. Folytonos funkcionálok az L^p Banach-téren $(1 \leq p < +\infty)$

A következőkben központi szerepet játszik a mértékelméletből ismert Radon–Nikodým-tétel.

A továbbiakban legyen $1 \leq p \leq +\infty$ és q a p duális száma: $1 < p < +\infty$ esetén $q = \frac{p}{p-1}$, $p = 1$ esetén $q = +\infty$, míg $p = +\infty$ esetén $q = 1$. (Ekkor persze q-nak éppen p a duális száma.) Legyen továbbá $(T, \mathcal{S}, \mu)$ rögzített mértéktér.

7.1.1. Megjegyzés. Tetszőleges $g \in L^q_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ mellett a Hölder-egyenlőtlenség miatt (illetve $p = 1$ vagy $p = +\infty$ esetén triviális módon) minden $f \in L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ esetén $f \cdot g \in L^1_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$, tehát $\int\limits_T f \cdot g \, d\mu$ jóldefiniált (véges) érték, továbbá ugyanezért

$$\left| \int\limits_T f \cdot g \, d\mu \right| \leq \|g\|_q \cdot \|f\|_p .$$

7.1.2. Definíció. Jelölje tetszőleges $g \in L^q_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ esetén

$$\Phi_g : L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu) \to \mathbb{K}, \qquad \Phi_g(f) := \int\limits_T f \cdot g \, d\mu.$$

7.1.3. Definíció. A $(T, \mathcal{S}, \mu)$ mértékteret *lényeges*nek mondjuk, ha nincs benne végtelen mértékű atom. (Például minden σ-véges mértéktér lényeges.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.1.4. Állítás. *Tetszőleges $1 \le p \le +\infty$ és $g \in L^q_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ esetén (q a p duális száma) $\Phi_g \in \left(L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)\right)^*$, továbbá*

- *$p > 1$ esetén $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$;*
- *ha $(T,\mathcal{S},\mu)$ lényeges mértéktér, akkor $p = 1$-re is $\|\Phi_g\| = \|g\|_\infty$.*

Bizonyítás. A linearitás triviális. A legutóbbi megjegyzés miatt ugyanakkor Φ_g triviálisan folytonos, sőt $\|\Phi_g\| \le \|g\|_q$. Elegendő hát igazolnunk, hogy az említett esetekben $\|\Phi_g\| \ge \|g\|_q$. Ennek bevezetéseként jegyezzük meg, hogy nyilvánvalóan van olyan $h : T \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-mérhető függvény, hogy $|h|$ azonosan 1 és $g = h \cdot |g|$. Az is nyilván föltehető, hogy $g \neq \mathbf{0}_{L^q}$. Legyen először $1 < p < +\infty$. Jelölje ekkor

$$f := \overline{h} \cdot |g|^{\frac{q}{p}} = \overline{h} \cdot |g|^{q-1}.$$

Nyilván $f \in L^p$ és $\|f\|_p = \|g\|_q^{\frac{q}{p}} = \|g\|_q^{q-1} \neq 0$, így

$$\Phi_g f = \int_T f \cdot g \, d\mu = \int_T \overline{h} \cdot |g|^{q-1} \cdot h \cdot |g| \, d\mu = \int_T |g|^q \, d\mu = \|g\|_q^q =$$
$$= \|g\|_q \cdot \|g\|_q^{q-1} = \|g\|_q \cdot \|f\|_p,$$

ahonnan $\|f\|_p \neq 0$ miatt triviálisan $\|\Phi_g\| \ge \|g\|_q$.

Legyen most $p = +\infty$ (azaz $q = 1$). Ekkor

$$\Phi_g \overline{h} = \int_T \overline{h} \cdot g \, d\mu = \int_T |g| \, d\mu = \|g\|_1 = \|g\|_1 \cdot \left\|\overline{h}\right\|_\infty,$$

innen $\left\|\overline{h}\right\|_\infty \neq 0$ miatt megint csak $\|\Phi_g\| \ge \|g\|_1$.

Végül legyen $p = 1$ (azaz $q = +\infty$) és tegyük föl, hogy $(T,\mathcal{S},\mu)$ lényeges. Legyen $0 \le \alpha < \|g\|_\infty$. Elegendő megmutatnunk, hogy minden ilyen α-ra $\|\Phi_g\| \ge \alpha$. A $\|\cdot\|_\infty$ $(= \|\cdot\|_\infty^\mu)$ definíciója alapján $E_\alpha := (|g| > \alpha) \in \mathcal{S}$ pozitív mértékű halmaz. A lényegesség miatt ennek létezik egy végesen pozitív mértékű $F_\alpha \in \mathcal{S}$ részhalmaza. Ezzel az $f_\alpha = \overline{h} \cdot \chi_{F_\alpha}$ függvény nem a nulleleme L^∞-nek, továbbá

$$\Phi_g f_\alpha = \int_T f_\alpha \cdot g \, d\mu = \int_T \overline{h} \cdot \chi_{F_\alpha} \cdot h \cdot |g| \, d\mu = \int_{F_\alpha} |g| \, d\mu \ge \int_{F_\alpha} \alpha \, d\mu =$$
$$= \alpha \cdot \mu(F_\alpha) = \alpha \cdot \|f_\alpha\|_1,$$

amiért is valóban $\|\Phi_g\| \ge \alpha$. Éppen ezt akartuk megmutatni. □

A fenti bizonyításból megfigyelhető, hogy $1 < p \le +\infty$ esetén Φ_g mindig fölveszi maximumát az L^p tér egységgömbjén, míg $p = 1$ esetén ugyanez már nem látszik. Nos azért nem látszik, mert általában már nem is igaz.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.1.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy $(T,\mathcal{S},\mu)=([0{,}1],\mathcal{B}([0{,}1]),\lambda)$ és $g=$ $=\mathrm{id}_{[0,1]}$ választással Φ_g nem veszi föl $L^1_{\mathbb{R}}([0{,}1],\mathcal{B}([0{,}1]),\lambda)$ egységgömbjén a szuprémumát (ami 1)!

A szakasz fő tételét először nyers formában (véges mértéktér esetére) fogalmazzuk meg:

7.1.6. Állítás. *Legyen $(T,\mathcal{S},\mu)$ véges mértéktér és $1\le p<+\infty$. Ekkor tetszőleges $\Phi\in\left(L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)\right)^*$ funkcionálhoz létezik egy és csak egy $g\in$ $\in L^q_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ függvény (q a p duális száma), amelyre $\Phi=\Phi_g$, azaz minden $f\in L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ esetén*

$$\Phi f=\int_T f\cdot g\,d\mu.$$

Továbbá $\|g\|_q=\|\Phi\|$.

Bizonyítás. Először jegyezzük meg, hogy μ véges volta miatt minden $E\in\mathcal{S}$ esetén $\chi_E\in L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$. Innen egyrészt adódik az állítás unicitási része, hiszen ha $\Phi_{g_1}=\Phi=\Phi_{g_2}$, akkor minden $E\in\mathcal{S}$ mellett $\Phi_{g_1}(\chi_E)=\Phi_{g_2}(\chi_E)$, ahonnan

$$\int_E (g_1-g_2)\,d\mu=0,$$

amiért $g_1=g_2$ μ-m.m. Másrészt értelmes a $\nu:\mathcal{S}\to\mathbb{K}$,

$$\nu(E):=\Phi(\chi_E)$$

definíció. Megmutatjuk, hogy ν mérték. Persze $\nu(\emptyset)=0$. Legyen most $(A_k)\subseteq$ $\subseteq\mathcal{S}$ páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat és jelölje A az uniót. Persze a $\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}$ függvényekből álló sorozat pontonként tart χ_A-hoz, ugyanakkor a konstans 1 függvény L^p-beli majoránsa e sorozatnak, így e sorozat $\|\cdot\|_p$-ben is tart χ_A-hoz. Innen – Φ additivitását és folytonosságát is használva –

$$\sum_{k=1}^{n}\nu(A_k)=\sum_{k=1}^{n}\Phi(\chi_{A_k})=\Phi\left(\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}\right)\to\Phi(\chi_A)=\nu(A),$$

azaz $\nu(A)=\sum_{k=1}^{+\infty}\nu(A_k)$. Tehát ν valóban mérték. Persze ν véges. Sőt $\mu(E)=$ $=0$ esetén $\chi_E=\mathbf{0}_{L^p}$, amiért $\nu(E)=0$, tehát ν abszolút folytonos μ-re nézve. Így a Radon-Nikodým-tétel miatt létezik egy és csak egy $g\in L^1_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ függvény, amelyre minden $E\in\mathcal{S}$ esetén

$$\Phi(\chi_E)=\nu(E)=\int_E g\,d\mu=\int_T \chi_E\cdot g\,d\mu.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Φ linearitása miatt innen a $\Phi f = \int\limits_T f \cdot g \, d\mu$ egyenlőség minden $\mathcal{S}$-mérhető lépcsős f függvényre is áll. Legyen most $f : T \to \mathbb{K}$ korlátos $\mathcal{S}$-mérhető függvény. Ez közismerten pontonként közelíthető $\mathcal{S}$-mérhető lépcsős függvények egy T-n korlátos (f_n) sorozatával. Persze ekkor $\Phi f_n = \int\limits_T f_n \cdot g \, d\mu$. Most egyrészt e sorozat a Lebesgue-féle majorált konvergenciatétel miatt p-normában is tart f-hez, így $\Phi f_n \to \Phi f$, másrészt $f_n \cdot g$ pontonként μ-m.m. tart $f \cdot g$-hez, sőt e sorozatot $|g|$ egy alkalmas számszorosa majorálja. Így újra a Lebesgue-tétel miatt minden korlátos $\mathcal{S}$-mérhető $u : T \to \mathbb{K}$ függvényre is

$$(*) \qquad \Phi f = \int\limits_T f \cdot g \, d\mu$$

tetszőleges korlátos $\mathcal{S}$-mérhető $f : T \to \mathbb{K}$ függvényre is. Most megmutatjuk, hogy $g \in L^q_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$. Ehhez szétválasztjuk a $p = 1$ és $p > 1$ eseteket.

$p = 1$: Jelölje $E := (\mathrm{Re} g > 2 \|\Phi\|) \in \mathcal{S}$. Ekkor $(*)$ alapján

$$2\|\Phi\| \cdot \mu(E) \leq \mathrm{Re} \int\limits_E g \, d\mu \leq \left| \int\limits_T \chi_E \cdot g \, d\mu \right| = |\Phi(\chi_E)| \leq \|\Phi\| \cdot \|\chi_E\|_1 = \|\Phi\| \cdot \mu(E),$$

ahonnan $\mu(E) = 0$, azaz $\mathrm{Re} g \leq 2\|\Phi\|$ μ-m.m. Hasonlóan adódik, hogy $\mathrm{Re} g \geq -2\|\Phi\|$ μ-m.m., tehát $\mathrm{Re} g$ μ-korlátos, és ugyanígy adódik $\mathrm{Im} g$ μ-korlátossága. Ezért $g \in L^\infty_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$.

$1 < p < +\infty$: Legyen $h : T \to \mathbb{K}$ olyan mérhető függvény, amelyre $|h|$ azonosan 1 és $g = h \cdot |g|$. Jelölje tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re $E_n := (|g| \leq n) \in \mathcal{S}$. Ekkor $f := \overline{h} \cdot \chi_{E_n} \cdot |g|^{q-1}$ választással persze $f \in L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$, sőt f korlátos, így $(*)$ alapján

$$\|\Phi\| \cdot \|f\|_p \geq |\Phi f| = \left| \int\limits_T f \cdot g \, d\mu \right| = \int\limits_{E_n} |g|^q \, d\mu,$$

ahonnan $\|f\|_p = \left(\int\limits_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ miatt

$$\|\Phi\| \cdot \left(\int\limits_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq \int\limits_{E_n} |g|^q \, d\mu.$$

Emiatt persze $\|\Phi\| \geq \left(\int\limits_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}$, azaz $\int\limits_{E_n} |g|^q \, d\mu \leq \|\Phi\|^q$. Most g abszolút integrálható volta miatt g μ-m.m. véges, emiatt a monoton bővülő (E_n) sorozat uniója nullmértékű halmaz kivételével kiadja T-t, azaz

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$\chi_{E_n}\cdot|g|^q \nearrow |g|^q$. Így a Beppo Levi-tétel miatt azonnal $\int\limits_{E_n} |g|^q\,d\mu \to \int\limits_T |g|^q\,d\mu$, innen $\int\limits_{E_n} |g|^q\,d\mu \le \|\Phi\|^q$ miatt $\int\limits_T |g|^q\,d\mu \le \|\Phi\|^q$, azaz $g \in L^q_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$.

Így persze jóldefiniált $\Phi_g \in (L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu))^*$. Most $(*)$ éppen azt jelenti, hogy a Φ és Φ_g folytonos lineáris funkcionálok a korlátos $\mathcal{S}$-mérhető függvényeken megegyeznek. Mivel ez utóbbiak sűrű alterét alkotják $L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$-nek (a Riesz–Fischer-tétel utáni 3.5.28. Megjegyzés miatt már a lépcsősök is), ezért a Φ és Φ_g folytonos lineáris funkcionálok teljesen megegyeznek. A legutóbbi állítás értelmében ekkor persze $\|\Phi\| = \|\Phi_g\| = \|g\|_q$. □

7.1.7. Tétel (Riesz)**.** *Legyen $(T,\mathcal{S},\mu)$ mértéktér és $1 \le p < +\infty$, továbbá $\Phi \in (L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu))^*$.*

- *Ha $1 < p < +\infty$, akkor létezik egy és csak egy $g \in L^q_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ függvény (q a p duális száma), amelyre $\Phi = \Phi_g$, azaz minden $f \in L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ esetén*
$$\Phi f = \int_T f\cdot g\,d\mu,$$
továbbá $\|g\|_q = \|\Phi\|$.
- *Ha $p = 1$ és μ σ-véges, akkor létezik egy és csak egy $g \in L^\infty_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ függvény, amelyre $\Phi = \Phi_g$, azaz minden $f \in L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ esetén*
$$\Phi f = \int_T f\cdot g\,d\mu,$$
továbbá $\|g\|_q = \|\Phi\|$.

Bizonyítás. Jelölje tetszőleges véges μ-mértékű $E \in \mathcal{S}$ halmazra $\mu_E : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$, $\mu_E(A) := \mu(A\cap E)$. Persze μ_E véges mérték. Jelölje párhuzamosan $\Phi^{(E)} : L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu_E) \to \mathbb{K}$,
$$\Phi^{(E)}(f) := \Phi(f\cdot\chi_E).$$
Persze $\Phi^{(E)} \in (L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu_E))^*$. A már látott fenti állítás szerint minden véges μ-mértékű $E \in \mathcal{S}$ halmazra ekkor létezik egy és csak egy olyan $g_E \in$ $\in L^q_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu_E)$ függvény, amelyre minden $f \in L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu_A)$ esetén
$$\Phi^{(E)} f = \int_T f\cdot g_E\,d\mu_E,$$
továbbá $\|g_E\|_q = \left\|\Phi^{(E)}\right\|$. Mvel a szóban forgó egyértelműség most μ_E-m.m. egyértelműséget jelent, ezért feltehető (és fel is tesszük), hogy g_E azonosan eltűnik az E halmazon kívül. Ezzel a megkötéssel ugyanakkor $g_E \in L^q_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

és ebben az értelemben μ-m.m. egyértelmű (azaz mint a $L^q_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ tér eleme egyértelmű). Eszerint tehát minden véges μ-mértékű $E\in\mathcal{S}$ halmazra létezik egy és csak egy olyan $g_E\in L^q_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ függvény, amely az E halmazon kívül eltűnik, továbbá minden $f\in L^p_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{S},\mu)$ esetén

$$\Phi(f\cdot\chi_E)=\int_T f\cdot g_E\,d\mu,$$

sőt $\|g_E\|_q=\left\|\Phi^{(E)}\right\|\le\|\Phi\|$. Megjegyezzük, hogy tetszőleges véges μ-mértékű $E,F\in\mathcal{S}$ halmazokra az egyértelműségi feltétel miatt az $E\cap F$ halmazon g_E μ-m.m. megegyezik g_F-fel; speciálisan $E\subseteq F$ esetén g_E μ-m.m. megegyezik $\chi_E\cdot g_F$-fel, következésképp $\|g_E\|_q\le\|g_F\|_q$. Jelölje

$$\alpha:=\sup\left\{\|g_E\|_q : E\in\mathcal{S},\mu(E)<+\infty\right\}\le\|\Phi\|.$$

Persze létezik véges μ-mértékű halmazok egy olyan (E_n) sorozata, hogy $\|g_{E_n}\|_q\to\alpha$, sőt a fentek értelmében feltehető (és fel is tesszük), hogy az (E_n) sorozat monoton bővülő. Jelölje E_* e sorozat unióját. Ha $p=1$, akkor a σ-végesség miatt (szintén a fentiek alapján) azt is feltehetjük (és fel is tesszük), hogy $E_*=T$.

Most a (g_{E_n}) függvénysorozat triviálisan kvázistacionárius (μ-m.m.), így pontonként μ-m.m. konvergál egy $g:T\to\mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-mérhető függvényhez. Az E_n halmazok monoton bővülése miatt persze $|g_{E_n}|\nearrow|g|$, sőt minden n-re $g_{E_n}=g\cdot\chi_{E_n}$ μ-m.m. Megmutatjuk, hogy tetszőleges véges μ-mértékű $E\in\mathcal{S}$ halmazra $g\cdot\chi_E=g_E$ μ-m.m. A kapottak és a fentebb említett egyértelműségi feltétel szerint minden n-re az $E\cap E_n$ halmazon μ-m.m. megegyeznek g_E és $g_{E_n}=g\cdot\chi_{E_n}$, persze ez utóbbi e halmazon $g\cdot\chi_E$-vel is megegyezik. Innen azonnal $g\cdot\chi_E=g_E$ μ-m.m. az E_* halmazon. Ha most $p=1$, akkor $T=E_*$ miatt készen is vagyunk. Ha viszont $p>1$, akkor $\mu(E_n\cup(E\setminus E_*))<+\infty$ alapján

$$\begin{aligned}\alpha^q&\le\alpha^q+\int_T\left|g_{E\setminus E_*}\right|^q\,d\mu=\lim_{n\to+\infty}\int_T|g_{E_n}|^q\,d\mu+\int_F\left|g_{E\setminus E_*}\right|^q\,d\mu=\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_T|g_{E_n}|^q\,d\mu+\int_{E\setminus E_*}\left|g_{E\setminus E_*}\right|^q\,d\mu\right)=\\&=\lim_{n\to+\infty}\int_T\left|g_{E_n\cup(E\setminus E_*)}\right|^q\,d\mu\le\alpha^q,\end{aligned}$$

amiért $\int_T\left|g_{E\setminus E_*}\right|^q\,d\mu=0$, azaz $g_{E\setminus E_*}=0$ μ-m.m. Ez éppen azt jelenti, hogy az E_* halmazon kívül is (tehát az egész T-n) $g\cdot\chi_E=g_E$ μ-m.m.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A reprezentáció igazolását innentől szétválasztjuk a $p = 1$ és $p > 1$ esetekre. Legyen először $p = 1$. Ekkor μ-m.m. $t \in T$-re $\alpha \geq |g_{E_n}(t)| \to |g(t)|$ miatt $\|g\|_\infty^{(\mu)} \leq \alpha$, tehát $g \in L_{\mathbb{K}}^\infty(T, \mathcal{S}, \mu)$. Vegyünk egy $f \in L_{\mathbb{K}}^1(T, \mathcal{S}, \mu)$ függvényt. Mivel most az E_n halmazok monoton bővülőleg T-hez tartanak, ezért a Lebesgue-tétel miatt $f \cdot \chi_{E_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, így $\Phi(f \cdot \chi_{E_n}) \to \Phi f$. Másrészt most a (g_{E_n}) függvények α-val korlátozottak, így szintén a Lebesgue-tétel miatt ($\alpha \cdot |f|$ majoránssal) $\int\limits_T f \cdot g_{E_n}\, d\mu \to \int\limits_T f \cdot g\, d\mu$. Ezért

$$\Phi f = \lim_{n\to+\infty} \Phi(f \cdot \chi_{E_n}) = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_T f \cdot g_{E_n}\, d\mu = \int\limits_T f \cdot g\, d\mu = \Phi_g f.$$

Tehát valóban $\Phi = \Phi_g$. Legyen most $1 < p < +\infty$. Ekkor az E_n halmazok választása miatt a Beppo Levi-tétel alapján $\alpha^q \geq \int\limits_T |g_{E_n}|^q\, d\mu \to \int\limits_T |g|^q\, d\mu$, ahonnan $g \in L_{\mathbb{K}}^q(T, \mathcal{S}, \mu)$. Legyen $f \in L_{\mathbb{K}}^p(T, \mathcal{S}, \mu)$ tetszőleges. Ekkor van olyan véges μ-mértékű halmazokból álló monoton bővülő $(F_n) \subseteq \mathcal{S}$ sorozat, amelynek unióján kívül f eltűnik. Persze a Lebesgue-tétel miatt $f \cdot \chi_{F_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$, így $\Phi(f \cdot \chi_{F_n}) \to \Phi f$. Ugyanakkor a már látottak szerint

$$\Phi(f \cdot \chi_{F_n}) = \int\limits_T f \cdot g_{F_n}\, d\mu = \int\limits_T f \cdot g \cdot \chi_{F_n}\, d\mu \to \int\limits_T f \cdot g\, d\mu$$

(a legutóbbi határátmenet a Lebesgue-tételből következik $|f \cdot g| \in L^1$ alapján). Összevetve $\Phi f = \int\limits_T f \cdot g\, d\mu$ minden $f \in L_{\mathbb{K}}^p(T, \mathcal{S}, \mu)$ esetén tehát $\Phi = \Phi_g$.

Lássuk az egyértelműséget!

Legyenek (mindegyik p esetére) $g_1, g_2 \in L_{\mathbb{K}}^q(T, \mathcal{S}, \mu)$ olyan függvények, amelyek reprezentálják Φ-t, tehát $\Phi_{g_1} = \Phi_{g_2}$. Ekkor egy alkalmas σ-véges halmazon kívül mind g_1, mind g_2 eltűnik ($p = 1$ esetén T σ-végessége miatt, $p > 1$ esetén pedig $q < +\infty$ miatt természetszerűleg). Tehát van olyan véges μ-mértékű, páronként diszjunkt halmazokból álló $(F_n) \subseteq \mathcal{S}$ sorozat, amelynek unióján kívül g_1 és g_2 eltűnik. Most minden n-re mind $g_1 \cdot \chi_{F_n}$, mind $g_2 \cdot \chi_{F_n}$ reprezentálja a $\Phi^{(F_n)}$ funkcionált, ezért annak már látott egyértelműsége miatt $g_1 \cdot \chi_{F_n} = g_{F_n} = g_2 \cdot \chi_{F_n}$ μ-m.m., tehát g_1 és g_2 az F_n halmazon μ-m.m. megegyeznek. Az F_n halmazok választása miatt ezért $g_1 = g_2$ μ-m.m. A $\|g\|_q = \|\Phi_g\| = \|\Phi\|$ egyenlőség a szakasz első állításából következik. □

7.1.8. Következmény. *Legyen $1 \leq p < +\infty$. Ekkor tetszőleges $\Phi \in (\ell_{\mathbb{K}}^p)^*$ funkcionálhoz létezik egy és csak egy $\mathbf{b} = (b_n)_{n=1}^{+\infty} \in \ell_{\mathbb{K}}^q$ sorozat (q a p duális száma), amelyre $\Phi = \Phi_{\mathbf{b}}$, azaz minden $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^{+\infty} \in \ell_{\mathbb{K}}^p$ esetén*

$$\Phi\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot b_k,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

továbbá $\|\Phi\| = \|\mathbf{b}\|_q = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

7.1.9. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ Banach-téren van olyan folytonos lineáris funkcionál, amely nem áll elő Φ_g ($g \in L^1$) alakban! (Ez éppen azt jelenti, hogy az $L^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ Banach-tér nem reflexív.) (*Ötlet:* Tekintsük a szóban forgó L^∞ tér $C[0,1]$ alterén értelmezett $\varphi_0 : f \mapsto f(0)$ lineáris funkcionált. Ezt majorálja a $\|\cdot\|^\lambda_\infty$ norma, így kiterjeszthető L^∞-re folytonos lineáris φ funkcionállá. Ekkor $f_n(t) = (1-t)^n$ választással minden n-re $\varphi f_n = 1$. Viszont bármely $g \in L^1$ függvénnyel a Lebesgue-féle majorált konvergenciatétel alapján $\Phi_g f_n = \int_0^1 g(t) \cdot (1-t)^n \, d\mu \to 0$, tehát Φ_g sosem lehet φ-vel azonos.)

A fenti feladat önmagában még nem zárná ki, hogy létezzék izometrikus izomorfizmus $(L^\infty_{\mathbb{R}}[0,1])^*$ és $L^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ között. Ámde még ez sem igaz:

7.1.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy $(L^\infty_{\mathbb{K}}[0,1])^*$ nem lehet izometrikusan izomorf $L^1_{\mathbb{K}}[0,1]$-gyel! (Ötlet: Egy korábbi szakaszban /Szeparabilitás/ szerepelt, hogy $L^\infty_{\mathbb{K}}[0,1]$ nem szeparábilis, $L^1_{\mathbb{K}}[0,1]$ viszont szeparábilis. Márpedig az előző szakasz egy feladata {6.4.25. Feladat} szerint egy szeparábilis duálisú tér maga is szeparábilis.)

Az $L^\infty(T, \mathcal{S}, \mu)$ tér pontos jellemzését L. V. Kantorovics és G. M. Fichtenholtz adták meg 1934-ben.

7.1.11. Megjegyzés. A fenti Riesz-tétel alapján $1 < p < +\infty$ esetén $L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ reflexív (egy Banach-tér reflexív, ha a második duálisába való természetes beágyazása szürjektív), míg pl. sem $L^1_{\mathbb{K}}[0,1]$, sem $L^\infty_{\mathbb{K}}[0,1]$ nem reflexívek. Most a Riesz-tétel, valamint e szakaszban korábban említettek alapján $1 < p < +\infty$ esetén minden $\Phi \in (L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu))^*$ funkcionál fölveszi maximumát az $L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ tér egységgömbjén, míg $p = 1$ esetén ez már az $L^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ téren sem igaz. Korábban már utaltunk Robert C. James 1972-es híres tételére, mely szerint egy X Banach-tér pontosan akkor reflexív, ha a folytonos lineáris funkcionáljai fölveszik maximumukat az X tér egységgömbjén. ($p = +\infty$ esetén persze a Φ_g funkcionálok fölveszik $L^\infty_{\mathbb{K}}$ egységgömbjén a maximumukat, viszont a James-feltétel itt sem teljesül, csak egészen más ok miatt: itt nem minden funkcionál Φ_g alakú!)

7.1.12. Feladat (Landau–Toeplitz-tétel)**.** A Hölder-egyenlőtlenség alapján triviális, hogy tetszőleges $(T, \mathcal{S}, \mu)$ mértéktér és $1 \le p \le +\infty$ mellett minden $f \in L^p_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ és $g \in L^q_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ esetén $f \cdot g \in L^1_{\mathbb{K}}(T, \mathcal{S}, \mu)$ (ahol q a p duális száma). Igazoljuk ennek bizonyos értelembeni megfordítását (Landau–Toeplitz-tétel): Ha $(T, \mathcal{S}, \mu)$ lényeges mértéktér és $g : T \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan $\mathcal{S}$-mérhető

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

függvény, amelyre minden $f \in L^p_{\mathbb{R}}(T,\mathcal{S},\mu)$ esetén $f\cdot g \in L^1_{\mathbb{R}}(T,\mathcal{S},\mu)$, akkor $g \in L^q_{\mathbb{R}}(T,\mathcal{S},\mu)$. (*Ötlet:* A $p=+\infty$ eset triviális. Legyen $1\le p<+\infty$. Jelölje $n\in\mathbb{N}$ és $A\in\mathcal{S}$, $\mu(A)<+\infty$ esetén $g_{n,A} := \chi_A\cdot|g|\wedge n \in L^q$. E szakasz jelöléseit használva a $\Phi_{g_{n,A}}$ funkcionálok a feltétel alapján az $L^p_{\mathbb{R}}(T,\mathcal{S},\mu)$ Banach-téren pontonként korlátosak. A Banach-Steinhaus-tétel alapján ekkor létezik $K>0$ korlátja az összes $\Phi_{g_{n,A}}$ funkcionálnak. E szakasz egyik állítása szerint ekkor

$$\|g_{n,A}\|_q = \left\|\Phi_{g_{n,A}}\right\| \le K,$$

innen a Beppo Levi-tétel triviális alkalmazásával $\|\chi_A\cdot g\|_q \le K$. Most véges mértékűről σ-véges A halmazokra térve is triviálisan fönnáll a legutóbbi egyenlőtlenség, sőt ekkor olyan σ-véges A halmaz is van, amelyre $\|\chi_A\cdot g\|_q$ maximális {és persze K-val korlátozott}. Ezzel $\chi_A\cdot g\in L^q$. Ha most g pozitív mértékű $B\subseteq A^c$ halmazon volna pozitív, akkor $(T,\mathcal{S},\mu)$ lényeges volta miatt olyan pozitív és véges mértékű $C\subseteq B$ halmaz és $\varepsilon>0$ szám is létezne, amelyekre $\varepsilon\cdot\chi_C\le g$ is fönnállna, ekkor viszont a $\chi_{A\cup C}\cdot g$ függvény ellentmondana A választásának. Ezért $g=\chi_A\cdot g\in L^q$.)

7.1.2. A Riesz-Kakutani-féle reprezentációs tétel

7.1.13. Megjegyzés. Ismerve, hogy a Lebesgue-mérték σ-additív a balról zárt, jobbról nyílt intervallumok félgyűrűjén, igaz a következő: ha az $[\alpha,\beta)$ intervallum előáll az $[\alpha_k,\beta_k)$ intervallumok ($k\in\mathbb{N}$) diszjunkt uniójaként, akkor

$$\beta-\alpha=\sum_{k=1}^{+\infty}(\beta_k-\alpha_k).$$

Az alábbiakban legyen (K,τ) kompakt topologikus tér. Egy $\Phi: C_{\mathbb{R}}(K)\to\mathbb{R}$ lineáris funkcionált *pozitív*nak mondunk, ha minden $f\in C_{\mathbb{R}}(K)$, $f\ge 0$ esetén $\Phi f\ge 0$.

7.1.14. Megjegyzés. Minden $\Phi: C_{\mathbb{R}}(K)\to\mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál folytonos.

Bizonyítás. Tetszőleges $f\in C_{\mathbb{R}}(K)$ esetén $-\|f\|_C\cdot\mathbb{1}_K\le f\le\|f\|_C\cdot\mathbb{1}_K$ alapján Φ pozitív lineáris volta miatt

$$-\|f\|_C\cdot\Phi\mathbb{1}_K\le\Phi f\le\|f\|_C\cdot\Phi\mathbb{1}_K$$

(ahol $\mathbb{1}_K$ a K-n értelmezett, 1 értékű konstans függvény). Innen $|\Phi f|\le$ $\le\Phi\mathbb{1}_K\cdot\|f\|_C$, tehát Φ folytonos (sőt $\|\Phi\|=\Phi\mathbb{1}_K$). □

7.1.15. Definíció. Jelölje $\widehat{\mathcal{B}}$ azon legszűkebb K-beli σ-algebrát, amelyre nézve minden $f\in C_{\mathbb{R}}(K)$ függvény mérhető. (Másképpen $\widehat{\mathcal{B}}:=\sigma_{C_{\mathbb{R}}(K)}$.) Ezt a σ-algebrát a K kompakt topologikus tér *Baire-féle σ-algebrá*jának nevezzük.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.1.16. Megjegyzés. $\widehat{\mathcal{B}}$ nyilván részrendszere a $\mathcal{B}(K)$ Borel-féle σ-algebrának.

7.1.17. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha K metrizálható is, akkor $\widehat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(K)$! (*Ötlet:* Tetszőleges $C \subseteq K$ zárt halmazra $d(\cdot, C)$ folytonos függvény.)

Az alábbiakban jelölje $\widehat{\mathcal{G}}$ az $(f > 1)$ nívóhalmazok összességét, midőn f befutja a $C_{\mathbb{R}}(K)$ halmazt.

7.1.18. Megjegyzés. $\sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right) = \widehat{\mathcal{B}}$.

Bizonyítás. Legyen $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$. Ekkor $(f > 1) \in \widehat{\mathcal{G}}$. Mivel $C_{\mathbb{R}}(K)$ vektortér, ezért minden $\alpha > 0$ számra is $(f > \alpha) \in \widehat{\mathcal{G}}$. Innen persze $(f > 0) \in \sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right)$, ahonnan viszont minden valós α-ra $(f_+ > \alpha) \in \sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right)$. Tehát f_+ $\sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right)$-mérhető. Ezt $-f$-re alkalmazva f_- $\sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right)$-mérhető. Ezért $f = f_+ - f_-$ is $\sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right)$-mérhető. Tehát $C_{\mathbb{R}}(K)$ elemei $\sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right)$-mérhetők, amiért is $\widehat{\mathcal{B}} \subseteq \sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right)$. Ugyanakkor triviálisan $\widehat{\mathcal{G}} \subseteq \widehat{\mathcal{B}}$, ahonnan $\sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right) \subseteq \widehat{\mathcal{B}}$. □

7.1.19. Megjegyzés. Tetszőleges $\mu : \widehat{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}_+$ véges mértékre $\Phi_\mu : C_{\mathbb{R}}(K) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi_\mu f := \int_K f \, d\mu$$

pozitív lineáris funkcionál.

7.1.20. Állítás. *Legyenek $\mu, \nu : \widehat{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}_+$ véges mértékek. Ekkor*

$$\Phi_\mu = \Phi_\nu \Longleftrightarrow \mu = \nu.$$

Bizonyítás. A „visszafelé” irány tautológia. Tegyük most föl, hogy $\Phi_\mu = \Phi_\nu$. Ekkor tehát minden $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ függvényre

$$\int_K f \, d\mu = \int_K f \, d\nu.$$

Legyen $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ rögzített, ekkor a

$$\mathbb{1}_K \wedge [n \cdot (f - (\mathbb{1}_K \wedge f))] \nearrow \chi_{(f>1)}$$

határátmenet és a Beppo Levi-tétel alapján

$$\int_K (\mathbb{1}_K \wedge [n \cdot (f - (\mathbb{1}_K \wedge f))]) \, d\mu \nearrow \int_K \chi_{(f>1)} \, d\mu$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

és

$$\int_K (\mathbb{1}_K \wedge [n \cdot (f - (\mathbb{1}_K \wedge f))])\, d\nu \nearrow \int_K \chi_{(f>1)}\, d\nu,$$

s mivel e két határátmenet bal oldala a feltétel szerint megegyezik, ezért a jobb oldalak is, azaz

$$\int_K \chi_{(f>1)}\, d\mu = \int_K \chi_{(f>1)}\, d\nu,$$

tehát $\mu(f>1) = \nu(f>1)$. Eszerint μ és ν megegyezik a $\widehat{\mathcal{G}}$ rendszeren. Legyen most $\mathcal{F}$ azon $\widehat{\mathcal{B}}$-beli halmazok összessége, amelyeken μ és ν megegyezik.Tehát $\widehat{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{F}$. A mértékek σ-additivitása és szubtraktivitása miatt ugyanakkor $\mathcal{F}$ Fubini-rendszer. Mivel pedig $\widehat{\mathcal{G}}$ metszetzárt, ezért a Dynkin-tétel miatt $\sigma_0\left(\widehat{\mathcal{G}}\right) \subseteq \mathcal{F}$, no de a szubtraktivitás miatt $\mathcal{F}$ triviálisan komplementumzárt is, így $\sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right) \subseteq \mathcal{F}$, amiért is $\widehat{\mathcal{B}} = \sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right) = \mathcal{F}$. Eszerint viszont μ és ν teljesen megegyezik. □

7.1.21. Tétel (Riesz-Kakutani)**.** *Tetszőleges $\Phi : C_{\mathbb{R}}(K) \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionálhoz létezik egy és csak egy olyan $\mu : \widehat{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}_+$ véges mérték, hogy $\Phi = \Phi_\mu$.*

Bizonyítás. Jelölje $f, g : K \to \mathbb{R}$, $f \leq g$ esetén

$$[f,g) := \{(x,\alpha) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha \leq g(x)\}$$

és

$$\mathcal{F} := \{[f,g) : f, g \in C_{\mathbb{R}}(K),\ f \leq g\}.$$

Azonnal látható, hogy $\mathcal{F}$ egy $K \times \mathbb{R}$-beli félgyűrű. Az is triviális, hogy $[f,g) = [u,v)$ esetén $g - f = v - u$, ahonnan $\Phi g - \Phi f = \Phi v - \Phi u$. Így jóldefiniált a $\nu_0 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$,

$$\nu_0([f,g)) := \Phi g - \Phi f \qquad (f, g \in C_{\mathbb{R}}(K),\ f \leq g)$$

halmazfüggvény. Legyen most $[f,g) \in \mathcal{F}$, továbbá minden $k \in \mathbb{N}$-re is $[f_k, g_k) \in \mathcal{F}$, úgy hogy $[f,g)$ előáll az $[f_k, g_k)$ halmazok diszjunkt uniójaként. Ekkor minden $x \in K$-ra e szakasz első megjegyzése alapján

$$g(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (g_k(x) - f_k(x)).$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Az $f_k \leq g_k$ feltételek miatt e sor szeletei monoton növőleg tartanak a sorösszeghez, így az

$$n \mapsto \left(x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \left(g_k(x) - f_k(x) \right) \right)$$

függvénysorozat pontonként monoton növőleg tart a $g-f$ folytonos függvényhez. A Dini-tétel (lásd a következő szakaszt) miatt ekkor e függvénysorozat egyenletesen is konvergál $g-f$-hez. Mivel pedig Φ lineáris és folytonos $\|\cdot\|_C$-re nézve, ezért azonnal

$$\Phi g - \Phi f = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\Phi g_k - \Phi f_k \right), \qquad \text{azaz} \qquad \nu_0\left([f,g) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \nu_0\left([f_k, g_k) \right).$$

Ezzel megmutattuk, hogy ν_0 (σ-additív) véges mérték az $\mathcal{F}$ félgyűrűn. Ezért a Carathéodory-féle kiterjesztési tétel miatt ν_0 kiterjeszthető egy $\nu : \sigma(\mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mértékké. Ezek után megmutatjuk, hogy minden $E \in \widehat{\mathcal{B}}$ és $\alpha \geq 0$ esetén $E \times [0,\alpha) \in \sigma(\mathcal{F})$. Jelölje e célból

$$\mathcal{U} := \Big\{ E \in \widehat{\mathcal{B}} : \forall \alpha \geq 0\text{-ra } E \times [0,\alpha) \in \sigma(\mathcal{F}) \\ \text{és } \nu(E \times [0,\alpha)) = \alpha \cdot \nu(E \times [0,1)) \Big\}.$$

Persze $\mathcal{U} \subseteq \widehat{\mathcal{B}}$ Fubini–rendszer. Ugyanakkor – rögzített α-val – tetszőleges $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ esetén a

$$\alpha \cdot (\mathbb{1}_K \wedge [n \cdot (f - (\mathbb{1}_K \wedge f))]) \nearrow \alpha \cdot \chi_{(f>1)}$$

határátmenet miatt éppen monoton bővülőleg

$$[0, \alpha \cdot (\mathbb{1}_K \wedge [n \cdot (f - (\mathbb{1}_K \wedge f))])) \nearrow (f>1) \times [0,\alpha),$$

innen egyrészt a bal oldal $\mathcal{F}$-be esése miatt $(f>1) \times [0,\alpha) \in \sigma(\mathcal{F})$, másrészt

$$\nu\Big(\ [0, \alpha \cdot (\mathbb{1}_K \wedge [n \cdot (f - (\mathbb{1}_K \wedge f))])) \ \Big) \to \nu\Big(\ (f>1) \times [0,\alpha) \ \Big),$$

azaz

$$\Phi\Big(\ \alpha \cdot (\mathbb{1}_K \wedge [n \cdot (f - (\mathbb{1}_K \wedge f))]) \ \Big) \to \nu\Big(\ (f>1) \times [0,\alpha) \ \Big).$$

Mivel ez utóbbi határátmenet bal oldala éppen α-szorosa az $\alpha = 1$ esetnek, ezért ugyanez a megfelelő jobb oldalakra is igaz, azaz

$$\nu\Big(\ (f>1) \times [0,\alpha) \ \Big) = \alpha \cdot \nu\Big(\ (f>1) \times [0,1) \ \Big).$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Ez α tetszőleges volta miatt éppen azt jelenti, hogy $(f > 1) \in \mathcal{U}$. Ezzel megmutattuk, hogy $\widehat{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{U}$, ahonnan $\mathcal{U}$ Fubini-rendszer és $\widehat{\mathcal{G}}$ metszetzárt volta alapján a Dynkin-tételből $\widehat{\mathcal{B}} = \sigma\left(\widehat{\mathcal{G}}\right) \subseteq \mathcal{U}$. Most jelölje $\mu : \widehat{\mathcal{B}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\mu(E) := \nu(E \times [0,1)).$$

μ triviálisan mérték. Ugyanakkor $\mu(K) = \nu(K \times [0,1)) = \Phi \mathbb{1}_K$ miatt μ véges. Ellenőrizzük le, hogy tetszőleges $\widehat{\mathcal{B}}$-mérhető $f : K \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre $[0, f) \in \sigma(\mathcal{F})$ és

$$\nu([0, f)) = \int_K f \, d\mu.$$

(Először – éppen $\widehat{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{U}$ alapján – pozitív számszor karakterisztikus függvényre triviálisan igaz a legutóbbi egyenlőség, majd ν és az integrál additivitása miatt lépcsős függvényekre, végül a pontonkénti monoton közelíthetőség alapján tetszőleges $\widehat{\mathcal{B}}$-mérhető $f : K \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre.) Ekkor persze tetszőleges nemnegatív $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ függvényre is

$$\int_K f \, d\mu = \nu([0, f)) = \Phi f.$$

A linearitás miatt persze a $\int_K f \, d\mu = \Phi f$ egyenlőség tetszőleges előjelű $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ függvényre is áll, tehát $\Phi = \Phi_\mu$. Az egyértelműséget az előző állítás biztosítja. □

7.1.22. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden $\Phi \in (C_{\mathbb{R}}(K))^*$ folytonos lineáris funkcionál előáll két pozitív lineáris funkcionál különbségeként! (*Ötlet:* Egy nemnegatív $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ függvényre legyen

$$H_f := \{g \in C_{\mathbb{R}}(K) : 0 \leq g \leq f\}$$

és $\psi_0(f) := \sup_{H_f} \Phi$. A $H_{f+g} = H_f + H_g$ egyenlőség a $h = \frac{hf}{f+g} + \frac{hg}{f+g}$ egyenlőség korrektté tételével és alkalmazásával triviális. Innen ψ_0 additív és persze pozitív homogén is, továbbá a pozitív folytonos függvényeken $\psi_0 \geq 0$ és $\psi_0 \geq \Phi$. Jelölje $\psi_1 : C_{\mathbb{R}}(K) \to \mathbb{R}$,

$$\psi_1(f) := \psi_0(f_+) - \psi_0(f_-)$$

és $\psi_2 := \psi_1 - \Phi$. Gondoljuk meg, hogy ψ_1 és ψ_2 pozitív lineáris funkcionálok és $\Phi = \psi_1 - \psi_2$.)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.1.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden $\Phi \in (C_{\mathbb{K}}(K))^*$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik egy és csak egy olyan $\mu : \widehat{\mathcal{B}} \to \mathbb{K}$ (valós vagy komplex) mérték, hogy minden $f \in C_{\mathbb{K}}(K)$ föggvényre

$$\Phi f = \int_K f \, d\mu \, !$$

(Ehhez persze előbb definiálni kell az előjeles, illetve komplex mérték szerinti integrált.) Mutassuk meg továbbá, hogy ekkor μ teljes változása megegyezik $\|\Phi\|$-val!

7.1.24. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{K}$ fölötti $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-téren értelmezett tetszőleges folytonos lineáris φ funkcionálhoz létezik egy és csak egy olyan $\mathbf{a} = (a_n) \in \ell^1_{\mathbb{K}}$, hogy minden $\mathbf{b} = (b_n) \in c_0$-ra

$$\varphi \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_n \cdot b_n \, !$$

7.1.3. A $C[a,b]$ tér funkcionáljai

Egy $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénynek egy $\mathcal{F} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ felosztás menti *megváltozás*a

$$h_{\mathcal{F}}(g) := \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

és *teljes változás*a

$$\sup_{\mathcal{F}} h_{\mathcal{F}}(g) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

A g függvényt *korlátos változású*nak mondjuk, ha teljes változása véges. (Például a monoton függvények ilyenek.) Az $[a,b]$ intervallumon korlátos változású függvények nyilván valós vektorteret alkotnak.

Stieltjes-integrál

Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvény és $f \in C[a,b]$ $(= C_{\mathbb{R}}[a,b])$. Az $[a,b]$ intervallum egy $\mathcal{F} = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ felosztására

$$s_{\mathcal{F},g}(f) := \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) \cdot \Big(\; g(t_k) - g(t_{k-1}) \; \Big)$$

az f függvény $\mathcal{F}$ mentén vett g szerinti *Stieltjes-összeg*e. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz f egyenletes folytonossága miatt van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$t, s \in [a,b]$, $|t-s| \leq \delta$ esetén $|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$. Ha most $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ két, δ-nál finomabb felosztása $[a,b]$-nek, akkor a megfelelő Stieltjes-összegek eltérése (a közös finomítás osztóintervallumaira térve) az alábbi alakot ölti:

$$s_{\mathcal{F}_1,g}(f) - s_{\mathcal{F}_2,g}(f) = \sum_{k=1}^{n} \Big(f(\alpha_k) - f(\beta_k) \Big) \cdot \Big(g(t_k) - g(t_{k-1}) \Big),$$

ahol minden esetben $|\alpha_k - \beta_k| \leq \delta$, tehát $|f(\alpha_k) - f(\beta_k)| \leq \varepsilon$. Ezért

$$|s_{\mathcal{F}_1,g}(f) - s_{\mathcal{F}_2,g}(f)| \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq V \cdot \varepsilon,$$

ahol V a g függvény teljes változása. Innen tetszőleges olyan $(\mathcal{F}_n)$ felosztássorozatra, amelynek finomsága 0-hoz tart, triviálisan következik, hogy $(s_{\mathcal{F}_n,g}(f))$ Cauchy-sorozat, következésképp konvergál is egy valós számhoz. E legutóbbi megállapítás azt is triviálisan maga után vonja, hogy a határérték független a felosztássorozat választásától, csak f-től és g-től függ. Ezt a határértéket az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett, g szerinti *Stieltjes-integrál*jának nevezzük és az $\int_a^b f\,dg$ szimbólummal jelöljük. Tehát tetszőleges olyan $(\mathcal{F}_n)$ felosztássorozatra, amelynek finomsága 0-hoz tart, fennáll, hogy

$$s_{\mathcal{F}_n,g}(f) \to \int_a^b f\,dg$$

midőn $n \to \infty$.

7.1.25. Állítás. *Bármely $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvényre*

$$\Phi_g : C[a,b] \to \mathbb{R},$$
$$\Phi_g(f) := \int_a^b f\,dg$$

folytonos lineáris funkcionál ($\|\cdot\|_C$-re nézve).

Bizonyítás. A linearitás a legutóbbi határátmenetből kézenfekvő. Ugyanakkor $[a,b]$-nek tetszőleges $\mathcal{F} = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ felosztására

$$|s_{\mathcal{F},g}(f)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(t_{k-1})| \cdot \Big| g(t_k) - g(t_{k-1}) \Big| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|f\|_C \cdot \Big| g(t_k) - g(t_{k-1}) \Big| \leq \|f\|_C \cdot V,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ahol V a g teljes változása. Emiatt újra az említett határátmenet alapján

$$\left| \int_a^b f\, dg \right| \leq V \cdot \|f\|_C ,$$

tehát Φ_g folytonos is, azaz $\Phi_g \in (C[a,b])^*$. □

A $C[a,b]$ és a $C_{\mathbb{R}^n}[a,b]$ tér funkcionáljai

7.1.26. Tétel (Riesz)**.** *Minden $\Phi \in (C[a,b])^*$ funkcionálhoz létezik olyan $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvény, hogy $\Phi = \Phi_g$.*

Bizonyítás. A $(C[a,b], \|\cdot\|_C)$ normált tér zárt altere az $(L^\infty[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normált térnek. Így a Hahn–Banach-tétel értelmében Φ kiterjeszthető egy $\widehat{\Phi} \in (L^\infty[a,b])^*$ funkcionállá. Tetszőleges $x \in [a,b]$ esetén éljünk az $u_x := \chi_{[a,x]} \in L^\infty[a,b]$ jelöléssel. Legyen

$$g : [a,b] \to \mathbb{R},$$
$$g(x) := \widehat{\Phi}(u_x).$$

Most $[a,b]$-nek bármely $\mathcal{F} = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ felosztására

$$\alpha_k := \operatorname{sgn}\left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right)$$

jelöléssel $(k = 1, \ldots, n)$

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{F}}(g) &= \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \Big(\; g(t_k) - g(t_{k-1}) \; \Big) = \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \Big(\; \widehat{\Phi}(u_{t_k}) - \widehat{\Phi}\left(u_{t_{k-1}}\right) \; \Big) = \\ &= \widehat{\Phi}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \Big(\; u_{t_k} - u_{t_{k-1}} \; \Big) \right) \leq \\ &\leq \left\|\widehat{\Phi}\right\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \Big(\; u_{t_k} - u_{t_{k-1}} \; \Big) \right\| \leq \left\|\widehat{\Phi}\right\| \cdot 1, \end{aligned}$$

innen azonnal adódik, hogy g korlátos változású (és teljes változása legfeljebb $\left\|\widehat{\Phi}\right\|$).

Ha $f \in C[a,b]$ és $\mathcal{F} = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ felosztása $[a,b]$-nek, akkor

$$f_{\mathcal{F}} := \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}) \cdot \Big(\; u_{t_k} - u_{t_{k-1}} \; \Big)$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

jelöléssel egyrészt

$$\widehat{\Phi} f_{\mathcal{F}} = \sum_{k=1}^{n} f\left(t_{k-1}\right) \cdot \left(\widehat{\Phi}\left(u_{t_k}\right) - \widehat{\Phi}\left(u_{t_{k-1}}\right) \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(t_{k-1}\right) \cdot \left(g\left(t_k\right) - g\left(t_{k-1}\right) \right) = s_{\mathcal{F},g}\left(f\right).$$

Másrészt bármely, 0-tartó finomságú $(\mathcal{F}_n)$ felosztássorozatra f egyenletes folytonossága miatt az $(f_{\mathcal{F}_n})$ függvénysorozat egyenletesen tart f-hez $[a,b]$-n. Így $\widehat{\Phi} \in \left(L^{\infty}[a,b]\right)^*$ alapján

$$\widehat{\Phi} f_{\mathcal{F}_n} \to \widehat{\Phi} f = \Phi f,$$

ugyanakkor a fentiekből

$$\widehat{\Phi} f_{\mathcal{F}_n} = s_{\mathcal{F}_n,g}\left(f\right) \to \int_a^b f\, dg.$$

Tehát minden $f \in C[a,b]$ esetén

$$\Phi f = \int_a^b f\, dg,$$

azaz $\Phi = \Phi_g$. □

7.1.27. Következmény. *Minden $\Phi \in \left(C_{\mathbb{R}^n}[a,b]\right)^*$ funkcionálhoz létezik olyan $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ függvény, amelynek $g_1, \ldots, g_n$ komponensei korlátos változásúak, továbbá minden $f \in C_{\mathbb{R}^n}[a,b]$ függvényre*

$$\Phi f = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k\, dg_k$$

(a $C_{\mathbb{R}^n}[a,b]$ teret a $\|f\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ normával tekintjük, ahol az egyszerűség kedvéért $|\cdot|$ az $\mathbb{R}^n$-beli standard euklideszi normát is jelöli).

Bizonyítás. Legyen $(e_1, \ldots, e_n)$ az $\mathbb{R}^n$-beli standard bázis. Ekkor minden $1 \leq \leq k \leq n$ mellett a

$$\Phi_k f := \Phi\left(f \cdot e_k\right)$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

módon értelmezett $\Phi_k \in (C[a,b])^*$ funkcionál a fenti tétel értelmében reprezentálható egy $g_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvénnyel. Ezekkel minden $f \in C_{\mathbb{R}^n}[a,b]$ esetén

$$\Phi f = \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k \, dg_k. \qquad \square$$

7.2. A Weierstraß-féle sűrűségi tételek

7.2.1. Polinomok sűrűsége

7.2.1. Megjegyzés. Korábban már szerepelt, hogy tetszőleges $\alpha > 0$ esetén a $[-\alpha, \alpha]$ intervallumon értelmezett függvényekből álló,

$$f_0(t) := \alpha,$$
$$f_{n+1}(t) := \frac{1}{2\alpha} \cdot \left(f_n^2(t) + \alpha^2 - t^2\right)$$

rekurzióval értelmezett függvénysorozatra

1. minden n-re f_n polinom és $f_n \geq 0$ $[-\alpha, \alpha]$-n *(a definícióból közvetlenül)*;
2. minden $t \in [-\alpha, \alpha]$-ra $(f_n(t))$ monoton fogyó sorozat *(teljes indukcióval* $f_{n+1}(t) - f_{n+2}(t) = \frac{1}{2\alpha} \cdot (f_n(t) + f_{n+1}(t)) \cdot (f_n(t) - f_{n+1}(t)) \geq 0$ *alapján)*;
3. minden $t \in [-\alpha, \alpha]$-ra $(f_n(t))$ monoton fogyólag tart $\alpha - |t|$-hez *(az f limeszfüggvény triviálisan kielégíti az $f(t) = \frac{1}{2\alpha} \cdot \left(f^2(t) + \alpha^2 - t^2\right)$ egyenlőséget, amelyből kihozható $f(t) = \alpha - |t|$).*

7.2.2. Tétel (Dini)**.** *Legyen (K, τ) kompakt topologikus tér és $(f_n) \subseteq C(K)$ olyan sorozat, amely pontonként monoton fogyólag tart egy $f \in C(K)$ függvényhez. Ekkor f_n egyenletesen is tart f-hez.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden $x \in K$ esetén jelölje N_x azt a legkisebb indexet, amelyre minden $n \geq N_x$ esetén $f_n(x) < f(x) + \varepsilon$. Ekkor minden $x \in X$-re $\varepsilon + f - f_{N_x}$ folytonossága alapján

$$U_x := \{y \in K : f_{N_x}(y) < f(y) + \varepsilon\}$$

egy x-et tartalmazó nyílt halmaz, ezért $\{U_x : x \in K\}$ nyílt fedése K-nak. Mivel K kompakt, ezért van véges sok olyan $x_1, x_2, \ldots, x_p \in K$, hogy $K = \bigcup_{k=1}^{p} U_{x_k}$. Legyen $N_* := \bigvee_{k=1}^{p} N_{x_k}$. Megmutatjuk, hogy minden $n \geq N_*$ esetén $|f - f_n| < \varepsilon$. Legyen hát $n \geq N_*$ és $x \in K$ rögzített. Ekkor van olyan

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$1 \leq k \leq p$, hogy $x \in U_{x_k}$, azaz $f_{N_{x_k}}(x) < f(x) + \varepsilon$. Innen a pontonkénti fogyó tartás miatt

$$f(x) \leq f_n(x) \leq f_{N_*}(x) \leq f_{N_{x_k}}(x) < f(x) + \varepsilon,$$

ahonnan $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy f_n egyenletesen tart f-hez. □

7.2.3. Következmény. *Tetszőleges $\alpha > 0$ esetén létezik olyan valós polinomokból álló sorozat, amely a $[-\alpha, \alpha]$ intervallumon egyenletesen tart $\alpha - |\cdot|$-hez. Persze ekkor olyan polinomsorozat is létezik, amely $[-\alpha, \alpha]$-n egyenletesen tart $|\cdot|$-hez.*

A továbbiakban legyen $[a, b]$ kompakt intervallum. Jelölje

$$M := \{f \in C[a,b] : \exists (p_n) \subseteq \mathbb{R}[t],\ \text{hogy } p_n \to f \text{ egyenletesen } [a,b]\text{-n}\} =$$
$$= \left\{f \in C[a,b] : \forall \varepsilon > 0\text{-ra } \exists p \in \mathbb{R}[t],\ \text{hogy } \sup_{[a,b]} |f - p| \leq \varepsilon\right\}.$$

M nyilván altere $C[a, b]$-nek, továbbá minden polinom és $|\cdot|$ is eleme M-nek.

7.2.4. Állítás. *$f \in M$ esetén $|f| \in M$.*

Bizonyítás. Legyen $(p_n) \subseteq \mathbb{R}[t]$ olyan sorozat, hogy p_n egyenletesen tart f-hez $[a, b]$-n. Válasszunk olyan α pozitív számot, amelyre $\mathcal{R}_f \subseteq [-\alpha, \alpha]$, sőt minden n-re $\mathcal{R}_{p_n} \subseteq [-\alpha, \alpha]$. Továbbá legyen $(q_n) \subseteq \mathbb{R}[t]$ olyan sorozat, amely egyenletesen tart $|\cdot|$-hez $[-\alpha, \alpha]$-n. Most minden n-re triviálisan

$$\sup_{[a,b]} ||p_n| - (q_n \circ p_n)| \leq \sup_{[-\alpha,\alpha]} ||\cdot| - q_n| \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

így

$$\sup_{[a,b]} ||f| - (q_n \circ p_n)| \leq \sup_{[a,b]} ||f| - |p_n|| + \sup_{[a,b]} ||p_n| - (q_n \circ p_n)| \leq$$
$$\leq \sup_{[a,b]} |f - p_n| + \sup_{[a,b]} ||p_n| - (q_n \circ p_n)| \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

tehát $q_n \circ p_n$ egyenletesen tart $|f|$-hez $[a, b]$-n. Azaz $|f| \in M$. □

7.2.5. Következmény. *$f, g \in M$ esetén $f \vee g$, $f \wedge g \in M$.*

Bizonyítás. M zárt a lineáris kombinációra és az abszolútértékre nézve, így $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in M$ és $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in M$. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.2.6. Definíció. Egy $f \in C[a,b]$ függvényt *szakaszonként lineáris*nak (*töröttvonal*nak, *poligon*nak) mondunk, ha $[a,b]$-nek van olyan $a = x_0 < x_1 < \\ < \cdots < x_n = b$ felosztása, hogy minden $1 \leq k \leq n$ esetén az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumon f egy elsőfokú függvénnyel egyezik meg. f-nek a szóban forgó felosztás egyes osztóintervallumaira való leszűkítéseit az f függvény *tagjai*nak nevezzük. Ha a fenti felosztás osztópontjainak számára is hivatkozni akarunk, azt mondjuk, hogy az f szakaszonként lineáris függvény n *tagú*. Az f függvényt *könyök*nek mondjuk, ha előáll két legfeljebb elsőfokú függvény alsó vagy felső burkolójaként.

7.2.7. Megjegyzés. Minden könyök eleme M-nek.

7.2.8. Megjegyzés. Ha f egy $n+1$ tagú szakaszonként lineáris függvény, akkor f n-edik tagját jobbra b-ig lineárisan meghosszabbítva nyerünk egy n tagú szakaszonként lineáris g függvényt. Ekkor nyilván $f - g$ könyök, tehát f `előáll egy` n `tagú szakaszonként lineáris függvény és egy könyök összegeként`.

7.2.9. Következmény. *Minden $n \geq 2$ esetén egy n tagú szakaszonként lineáris függvény előáll $n-1$ darab könyök összegeként.*

7.2.10. Következmény. *Minden $f \in C[a,b]$ szakaszonként lineáris függvény eleme M-nek.*

7.2.11. Állítás. $M = C[a,b]$.

Bizonyítás. Legyen $f \in C[a,b]$ tetszőleges. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $t, s \in [a,b]$, $|t-s| \leq \delta$ esetén $|f(t) - f(s)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Legyen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \\ = b$ az $[a,b]$ intervallum egy δ-nál finomabb felosztása. Jelölje $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ azon egyértelműen meghatározott n tagú szakaszonként lineáris függvényt, amely az x_j pontokban f-fel egyezik meg, azaz amelyre minden $1 \leq k \leq n$ és $t \in [x_{k-1}, x_k]$ esetén

$$g(t) = f(x_{k-1}) + (t - x_{k-1}) \cdot \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Ekkor minden $t \in [a,b]$-re (van olyan k, hogy)

$$\begin{aligned} |g(t) - f(t)| &\leq |g(t) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1}) - f(t)| = \\ &= (t - x_{k-1}) \cdot \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{x_k - x_{k-1}} + |f(x_{k-1}) - f(t)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

tehát $\sup_{[a,b]} |g-f| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Másrészt a már igazoltak alapján $g \in M$, ezért triviálisan van olyan $p \in \mathbb{R}[t]$, hogy $\sup_{[a,b]} |p-g| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Ezzel $\sup_{[a,b]} |p-f| \le \varepsilon$. Mivel mindez minden pozitív ε-ra elvégezhető, ezért $f \in M$. □

7.2.12. Következmény (Weierstraß első sűrűségi tétele)**.** *Minden $C[a,b]$-beli f függvény $[a,b]$-n egyenletesen közelíthető polinomsorozattal.*

7.2.2. Trigonometrikus polinomok sűrűsége. Fourier-sorok

Az alábbiakban jelölje $C_{2\pi}$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett, 2π szerint periodikus folytonos függvények vektorterét. Jelölje továbbá $C^1_{2\pi}$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett, 2π szerint periodikus folytonosan deriválható függvények vektorterét.

7.2.13. Definíció. Egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt trigonometrikus polinomnak mondunk, ha előáll $(t \mapsto \cos kt)$, illetve $(t \mapsto \sin kt)$ alakú (k nemnegatív egész) függvények (véges) lineáris kombinációjaként.

Nyilván minden trigonometrikus polinom eleme $C_{2\pi}$-nek, sőt $C^1_{2\pi}$-nek.

7.2.14. Állítás. *Minden $x \in \mathbb{R}$, $x \notin 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Bizonyítás. Minden k indexre és a fenti x-re $\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(kx-\frac{x}{2}\right) = 2\cos kx \cdot \sin\frac{x}{2}$. Ezt 1-től n-ig összegezve adódik, hogy

$$\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2} = 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx \cdot \sin\frac{x}{2},$$

ahonnan $2\sin\frac{x}{2}$-vel való osztással azonnal adódik az állítás. □

7.2.15. Következmény. *Minden $x, y \in \mathbb{R}$, $x - y \notin 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cdot \cos ky + \sum_{k=1}^{n} \sin kx \cdot \sin ky = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x-y}{2}\right)}{2\sin\frac{x-y}{2}}.$$

Bizonyítás. A fenti állítást írjuk föl $x-y$-ra. □

7.2.16. Lemma. *Legyenek $[a,\ b]$ és $[c,\ d]$ intervallumok. Tetszőleges $C([a,b]\times[c,d])$-beli f és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $g \in C([a,b]\times[c,d])$ függvény, amelyre létezik $\partial_2 g \in C([a,b]\times[c,d])$, továbbá minden $(x,y) \in [a,b] \times \times [c,d]$ mellett*

$$|g(x,y) - f(x,y)| \le \varepsilon.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A Heine-tétel alapján van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d]$ esetén

$$|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1| \leq \delta \Longrightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon.$$

Minden $x \in [a, b]$ és $t > d$ esetén legyen $f(x, t) := f(x, d)$. Ezzel persze a legutóbbiak az $[a, b] \times [c, +\infty)$ halmazon is állnak. Jelölje $g : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y) := \frac{1}{\delta} \cdot \int_y^{y+\delta} f(x, t)\ \mathrm{d}t = \frac{\int_c^{y+\delta} f(x, t)\ \mathrm{d}t - \int_c^{y} f(x, t)\ \mathrm{d}t}{\delta}.$$

Mivel minden x-re $f(x, \cdot)$ folytonos, ezért $\int_c f(x, \cdot)$ folytonosan deriválható, így $g(x, \cdot)$ is folytonosan deriválható, tehát éppen létezik $\partial_2 g(x, y) = \frac{f(x,y+\delta)-f(x,y)}{\delta}$, azaz $\partial_2 g$ folytonos. Továbbá mivel f egyenletesen folytonos, ezért minden $x_n \to x$ esetén $f(x_n, \cdot)$ egyenletesen tart $f(x, \cdot)$-hez, amiért is g folytonos az első változójában. A második változójában viszont Lipschitz-folytonos (f korlátos volta miatt) x-től független Lipschitz-konstanssal. Innen azonnal adódik, hogy g is folytonos. Ugyanakkor minden $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ esetén

$$|g(x, y) - f(x, y)| = \left| \frac{1}{\delta} \cdot \int_y^{y+\delta} f(x, t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{\delta} \cdot \int_y^{y+\delta} f(x, y)\ \mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \cdot \int_y^{y+\delta} |f(x, t) - f(x, y)|\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{\delta} \cdot \int_y^{y+\delta} \varepsilon\, \mathrm{d}t = \varepsilon. \quad \square$$

7.2.17. Tétel (Riemann-lemma)**.** *Tetszőleges $f \in C([a, b] \times [c, d])$ esetén*

$$\int_c^d f(x, t) \cdot \sin n \frac{t - x}{2}\, \mathrm{d}t$$

x-ben egyenletesen tart 0-hoz ($x \in [a, b]$).

Bizonyítás. Először tegyük föl, hogy létezik $\partial_2 f \in C([a, b] \times [c, d])$. Minden $n \in \mathbb{N}$-re parciális integrálással

$$\int_c^d f(x, t) \cdot \sin n \frac{t-x}{2} dt = \left[-\frac{2f(x, t)}{n} \cos n \frac{t - x}{2} \right]_c^d + \int_c^d \frac{2\partial_2 f(x, t)}{n} \cos n \frac{t-x}{2} dt,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

innen

$$\left|\int_c^d f(x,t)\cdot\sin n\frac{t-x}{2}\,dt\right|\le$$

$$\le\frac{2}{n}\cdot(|f(x,d)|+|f(x,c)|)+\int_c^d\left|\partial_2 f(x,t)\cdot\frac{2}{n}\cos n\frac{t-x}{2}\right|\,dt\le$$

$$\le\frac{4}{n}\cdot\max_{[a,b]\times[c,d]}|f|+\frac{2}{n}\cdot(d-c)\cdot\max_{[a,b]\times[c,d]}|\partial_2 f|,$$

ami nyilvánvalóan x-től független, 0-hoz tartó kifejezés. Legyen most $f\in$ $\in C([a,b]\times[c,d])$ tetszőleges. Legyen $\varepsilon>0$. Az előző lemma szerint van olyan $g\in C([a,b]\times[c,d])$ függvény, amelyre létezik $\partial_2 g\in C([a,b]\times[c,d])$, továbbá minden $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ mellett

$$|g(x,y)-f(x,y)|\le\frac{\varepsilon}{2(d-c)}.$$

A már látottak szerint van olyan $n_0\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\ge n_0$ és $x\in[a,b]$ esetén

$$\left|\int_c^d g(x,t)\cdot\sin n\frac{t-x}{2}\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Innen minden $n\ge n_0$ esetén

$$\left|\int_c^d f(x,t)\cdot\sin n\frac{t-x}{2}\,\mathrm{d}t\right|=$$

$$=\left|\int_c^d(f(x,t)-g(x,t)+g(x,t))\cdot\sin n\frac{t-x}{2}\,\mathrm{d}t\right|=$$

$$=\left|\int_c^d(f(x,t)-g(x,t))\cdot\sin n\frac{t-x}{2}\,\mathrm{d}t+\int_c^d g(x,t)\cdot\sin n\frac{t-x}{2}\,\mathrm{d}t\right|\le$$

$$\le\int_c^d|f(x,t)-g(x,t)|\cdot\left|\sin n\frac{t-x}{2}\right|\,\mathrm{d}t+\left|\int_c^d g(x,t)\cdot\sin n\frac{t-x}{2}\,\mathrm{d}t\right|\le\varepsilon$$

x-től függetlenül, ami bizonyítja a tétel állítását. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.2.18. Tétel. *Tetszőleges $f \in C^1_{2\pi}$ esetén az*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\cos kt\,\mathrm{d}t\cdot\cos kx + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin kt\,\mathrm{d}t\cdot\sin kx$$

kifejezés mint x függvénye $n\to+\infty$ határátmenettel egyenletesen tart f-hez az egész számegyenesen.

Bizonyítás. Jelölje $g_n(x)$ a tételben szereplő kifejezést. Persze g_n trigonometrikus polinom. Továbbá minden x-re triviális kiintegrálással

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_1^{2\pi}\cos kt\,\mathrm{d}t\cdot\cos kx + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin kt\,\mathrm{d}t\cdot\sin kx = 1,$$

így ezt $f(x)$-szel beszorozva és belőle $g_n(x)$-et levonva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x)-g_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-f(t))\,\mathrm{d}t + \\ + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-f(t))\cdot\cos kt\,\mathrm{d}t\cdot\cos kx + \\ + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-f(t))\cdot\sin kt\,\mathrm{d}t\cdot\sin kx. \qquad (*) \end{aligned}$$

A legutóbbi következmény alapján viszont minden $t\in\mathbb{R}$, $x-t\notin 2\pi\cdot\mathbb{Z}$ és $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\cdot\cos kx+\sum_{k=1}^{n}\sin kt\cdot\sin kx = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t-x}{2}\right)}{2\sin\frac{t-x}{2}},$$

innen

$$\begin{aligned} &(f(x)-f(t))\cdot\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\cdot\cos kx+\sum_{k=1}^{n}\sin kt\cdot\sin kx\right) = \\ &= (f(x)-f(t))\cdot\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t-x}{2}\right)}{2\sin\frac{t-x}{2}} = \frac{f(x)-f(t)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\cdot\sin\left((2n+1)\frac{t-x}{2}\right) = \\ &= h(x,t)\cdot\sin\left((2n+1)\frac{t-x}{2}\right), \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

ahol

$$h(x,t) := \begin{cases} -f'(x), \text{ ha } t = x, \\ f'(0), \text{ ha } (x,t) = (0,2\pi) \text{ vagy } (2\pi,0), \\ \frac{f(x)-f(t)}{2\sin\frac{t-x}{2}} \text{ egyébként.} \end{cases}$$

f és f' folytonossága, valamint 2π-periodicitása alapján h folytonos $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$-n (az $(x_n,t_n) \to (x,t) \Rightarrow h(x_n,t_n) \to h(t,x)$ relációhoz az egyetlen nemtriviális eset az, ha $x_n \neq t_n$ és vagy $t = x$ vagy $x_n \to 0+$, $t_n \to 2\pi-$ vagy fordítva; ilyenkor alkalmazzuk a Cauchy-középértéktételt f-re és az $x \mapsto 2\sin\frac{t_n-x}{2}$ függvényre t_n és x_n között, illetve t_n és $x_n \pm 2\pi$ között). A legutóbb kapott egyenlőség mindkét oldalát 0-tól 2π-ig t szerint integrálva és π-vel osztva $(*)$ alapján éppen azt kapjuk, hogy

$$f(x) - g_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x,t)\cdot\sin\left((2n+1)\frac{t-x}{2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Így h folytonos volta miatt a Riemann-lemma alapján a legutóbb kapott integrál $n \to +\infty$ határátmenettel x-ben egyenletesen tart 0-hoz. Ez éppen azt jelenti, hogy g_n egyenletesen tart f-hez. □

7.2.19. Következmény. *Minden $f \in C^1_{2\pi}$ függvényre minden $x \in \mathbb{R}$ mellett*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\cos kt\,\mathrm{d}t\cdot\cos kx + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin kt\,\mathrm{d}t\cdot\sin kx,$$

sőt az itt szereplő sorösszeget előállító sor x-ben egyenletesen konvergens.

7.2.20. Definíció. A fenti következményben szereplő, f-et egyenletesen előállító függvénysort az f függvény **Fourier-sor**ának nevezzük.

Tehát $f \in C^1_{2\pi}$ esetén az f Fourier-sora egyenletesen előállítja f-et.

7.2.21. Megjegyzés. Minden $f \in C_{2\pi}$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $g \in C^1_{2\pi}$, hogy $\sup_{\mathbb{R}} |g - f| \leq \varepsilon$.

Bizonyítás. A Heine-tétel alapján van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x, y \in [0,2\pi]$ esetén

$$|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Jelölje $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \frac{1}{\delta}\cdot\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\int_0^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\delta}.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

g triviálisan folytonosan deriválható. Másrészt minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|g(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\delta} \cdot \int_x^{x+\delta} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{\delta} \cdot \int_x^{x+\delta} f(x)\ \mathrm{d}t \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\delta} \cdot \int_x^{x+\delta} |f(t) - f(x)|\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{\delta} \cdot \int_x^{x+\delta} \varepsilon\, \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ugyanakkor f-nek egy 2π hosszú intervallumon vett integráljának értéke nem függ a kezdőponttól, emiatt triviális kalkulációval $g(x+2\pi) - g(x) = 0$, azaz $g \in C^1_{2\pi}$. □

7.2.22. Tétel (Weiertstrass második sűrűségi tétele)**.** *Minden $f \in C_{2\pi}$ függvény előáll trigonometrikus polinomok $\mathbb{R}$-en egyenletes limeszeként.*

Bizonyítás. A legutóbbiak miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra létezik $g \in C^1_{2\pi}$, hogy $\sup_{\mathbb{R}} |g - f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Másrészt g-hez az előbbi következmény miatt van a g Fourier-sorának olyan h szelete, hogy $\sup_{\mathbb{R}} |h - g| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. h természetesen trigonometrikus polinom és $\sup_{\mathbb{R}} |h - f| \leq \varepsilon$. □

7.2.23. Megjegyzés. A fenti tétel nem jelenti azt, hogy a $C_{2\pi}$-beli függvények is előállnának a Fourier-soruk egyenletes limeszeként. Ez annyira nem igaz, hogy még olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény is létezik, amelynek pl. $x = 0$-ban divergál a Fourier-sora. (Lásd a szakasz utolsó feladatát.) Ugyanakkor egy $C_{2\pi}$-beli függvény Fourier-sora „túl sok" helyen nem is teheti meg, hogy ne állítsa elő magát a függvényt. (Lennart Carleson igazolta, hogy minden $f \in L^2[0,2\pi]$ függvényt λ-m.m. $t \in [0,2\pi]$ helyen előállít a Fourier-sora. Viszont $L^1[0,2\pi]$-ben már olyan függvény is van, amelyiknek Fourier-sora már minden argumentumra divergens. Az erre vonatkozó első közismert példa Andrej Ny. Kolmogorovtól származik.)

7.2.24. Megjegyzés. Weierstraß második sűrűségi tétele alapján azonnal adódik, hogy az $L^2[0,2\pi]$ Hilbert-térben az $u_1(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

$$u_{2k}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt,$$
$$u_{2k+1}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt$$

ortonormált sorozat teljes. Innen a Parseval-formulát tárgyaló ekvivalenciatétel miatt következik, hogy tetszőleges $f \in L^2[0,2\pi]$ függvényt L^2-normában előállít a Fourier-sora. (Ez viszont önmagában még pontonkénti konvergenciát sem jelent!)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.2.25. Megjegyzés. Ha egy $f \in L^2\,[0{,}2\pi]$ függvény Fourier-együtthatóiból képezett számsor abszolút konvergens, akkor $|\sin|\,, |\cos| \leq 1$ miatt az elemi analízisből ismert Weierstraß-kritérium alapján f Fourier-sora egyenletesen konvergens. Mivel a $[0{,}2\pi]$ intervallumon folytonos függvények egyenletes konvergenciája egyúttal L^2-normabeli konvergencia is, ezért az előbbi megjegyzés miatt az egyenletes összegfüggvény szükségképpen egyezik meg f-fel.

7.2.26. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $[0{,}2\pi]$ intervallumon az $x \mapsto \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$ függvényt egyenletesen állítja elő a Fourier-sora, tehát minden $0 \leq x \leq 2\pi$ esetén

$$\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2},$$

következésképp $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$!

7.2.27. Következmény. *Minden olyan $f \in C_{2\pi}$ függvényt, amely a $[0{,}2\pi]$ intervallumon folytonosan deriválható, egyenletesen előállít a Fourier-sora.*

Bizonyítás. h-val jelölve a fenti feladatbeli függvény 2π-periodikus kiterjesztését, f nyilvánvalóan előáll h-nak és egy $C^1_{2\pi}$-eli függvénynek lineáris kombinációjaként. □

7.2.28. Feladat. $C_{2\pi}$ a maximumnormával nyilvánvalóan Banach-tér. Jelölje minden $n \in \mathbb{N}$-re $\Phi_n : C_{2\pi} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi_n f := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\,(t) \cdot \cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f\,(t) \cdot \frac{\sin\left((2n+1)\,\frac{t}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

(tehát $\Phi_n f$ nem más, mint az f függvény Fourier-sora n-edik kezdőszeletének 0-beli értéke). Mutassuk meg, hogy a $C_{2\pi}$ Banach-térre vonatkozóan $\|\Phi_n\| \geq \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}$! (*Ötlet:* értelmezzük Φ_n-et a fenti formulával a $[0{,}2\pi]$-n értelmezett, szakaszonként folytonos függvényekre is. Ekkor az $f_n\,(t) := \operatorname{sgn}\left(\frac{\sin\left((2n+1)\,\frac{t}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}\right)$ függvényre {amely 0 egy környezetében azonosan 1} $|\sin t| \leq |t|$ alapján

$$\Phi_n f_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left((2n+1)\,\frac{t}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t \geq \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left((2n+1)\,\frac{t}{2}\right)\right|}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}u \geq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k\pi^2} \cdot \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u|\;\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Most f_n triviálisan közelíthető m.m. pontonként $[0,2\pi]$-n értelmezett, -1 és 1 közé eső folytonos, szakaszonként lineáris függvények egy $g_{n,k}$ sorozatával, amelyre $g_{n,k}(0) = 1 = g_{n,k}(2\pi)$. Így persze természetes módon $g_{n,k} \in C_{2\pi}$. A Lebesgue-tétel szerint ugyanakkor $\Phi_n g_{n,k} \to \Phi_n f_n$. Eszerint Φ_n-nek a $C_{2\pi}$ egységgömbjén vett szuprémuma legalább $\Phi_n f_n$, ami legalább $\frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}$.)

7.2.29. Feladat. Mutassuk meg, hogy van olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény, amelynek Fourier-sora az $x = 0$ pontban divergens, sőt a 0-beli Fourier-sor szeletei nem is korlátosak. Sőt mutassuk meg, hogy azon $C_{2\pi}$-beli függvények halmaza, amelyek 0-beli Fourier-sorának szeletei korlátosak, első kategóriás halmazt alkot a $C_{2\pi}$ Banach-térben! (*Ötlet:* Alkalmazzuk indirekt módon a Banach-Steinhaus-tételt az előző feladatban szereplő (Φ_n) funkcionálsorozatra.)

7.3. A Rådström-féle törlési szabály

Az alábbiakban legyen X normált tér $\mathbb{K}$ fölött.

7.3.1. Tétel (Rådström)**.** *Legyenek $A, B, C \subseteq X$ halmazok, B konvex és zárt, C pedig nemüres és korlátos. Ekkor*

$$A + C \subseteq B + C \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq B.$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $A + C \subseteq B + C$. Legyen $a \in A$ rögzített. Ekkor tetszőleges $c \in C$ esetén

$$a + c \in A + C \subseteq B + C,$$

így van olyan $b \in B$ és $d \in C$, hogy $a + c = b + d$, tehát $a + c - d \in B$. Vagyis minden $c \in C$ vektorhoz létezik $d \in C$ vektor, hogy

$$a + c - d \in B.$$

Definiáljunk most rekurzióval egy $(c_n) \subseteq C$ sorozatot a következőképpen: legyen $c_1 \in C$ tetszőleges (ilyen $C \neq \emptyset$ miatt létezik). Tegyük föl, hogy c_n már definiált. Ekkor a fentiek szerint létezik olyan $c_{n+1} \in C$ vektor, melyre $a + c_n - c_{n+1} \in B$. Ezzel definiáltuk a (c_n) sorozatot. Nyilván minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$b_n := a + c_n - c_{n+1} \in B.$$

Mivel B konvex, ezért minden n-re B-nek eleme lesz a

$$p_n := \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left(n \cdot a + \sum_{k=1}^{n} c_k - \sum_{k=2}^{n+1} c_k \right) = a + \frac{c_1 - c_{n+1}}{n}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

vektor is, másrészt C korlátos egy $K > 0$ korláttal, így

$$\|p_n - a\| = \left\| \frac{c_1 - c_{n+1}}{n} \right\| \leq \frac{1}{n} \cdot (\|c_1\| + \|c_{n+1}\|) \leq \frac{2K}{n} \to 0,$$

tehát $p_n \to a$. Mivel $(p_n) \subseteq B$ és B zárt, ezért $a \in B$. Azaz minden $a \in A$ esetén $a \in B$ is, tehát $A \subseteq B$. □

7.3.2. Következmény. *Tetszőleges $A, B \subseteq X$ konvex zárt halmazokra és $C \subseteq X$ nemüres korlátos halmazra*

$$A + C = B + C \quad \Longrightarrow \quad A = B.$$

7.3.3. Megjegyzés. A fenti következmény feltételei nem gyengíthetők. Ha $A, B \subseteq X$ tetszőleges különböző konvex zárt halmazok és $C = \emptyset$, akkor $A + C = B + C$, de $A \neq B$. Ha $A, B \subseteq X$ tetszőleges különböző nemüres konvex zárt halmazok és $C = X$, akkor $A + C = B + C = X$, de $A \neq B$. Ha meg éppen C nemüres korlátos, akkor A vagy B konvex vagy zárt voltának elrontásával adhatunk ellenpéldákat, amint ez az alábbiakból kitűnik:

7.3.4. Példa. Legyen

$$K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\};$$
$$L := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\};$$
$$M := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

A K és L halmazok mindegyike zárt, K nemüres korlátos is, valamint $K + K = L + K$, de $K \neq L$. (Ennek igazolása triviális lesz, miután tudjuk, hogy $2L \subseteq K + K$. Ez viszont a következőképpen látható: $2L$ tetszőleges (x, y) elemét kössük össze az origóval; majd szerkesszünk olyan egységoldalú rombuszt, amelynek ez a szakasz az egyik átlója. A két új csúcs jelöli ki K azon két elemét, melyek összege (x, y). A szerkesztést algebrailag is kövessük végig.)

Továbbá az L és M halmazok mindegyike konvex, M nemüres korlátos, és $L + M = M + M (= 2M)$, de $L \neq M$. Ez egyszerűen azért igaz, mert $\|\mathbf{x}\| \leq 1, \|\mathbf{y}\| < 1$ esetén

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| < 1 + 1 = 2.$$

7.3.5. Tétel. *Ha az X normált térben van teljesen korlátos gömb, akkor X véges dimenziós.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Tekintsük az X tér $\overline{\mathcal{B}}_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ zárt egységgömbjét. Nyilván minden $x \in X$ és $r > 0$ esetén

$$\overline{\mathcal{B}}(x, r) = x + \left(r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right).$$

Tegyük föl, hogy valamely X-beli $x+\left(r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right)$ gömb teljesen korlátos. Mivel az eltolások teljesen korlátos halmazt teljesen korlátos halmazba visznek, ezért $r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X$ is teljesen korlátos. Így léteznek olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n \in r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X$ vektorok, hogy

$$r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + \frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X \subseteq$$
$$\subseteq \operatorname{lin}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alapján triviálisan $\frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X + \frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X = r \cdot \overline{\mathcal{B}}_X$, ezért

$$\frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X + \frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X \subseteq \operatorname{lin}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X,$$

s mivel $\operatorname{lin}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konvex és zárt, ezért a Rådström-féle törlési szabály alapján

$$\frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X \subseteq \operatorname{lin}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

azaz $X = \operatorname{lin}\left(\frac{r}{2} \cdot \overline{\mathcal{B}}_X\right) \subseteq \operatorname{lin}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. □

7.3.6. Következmény. *Ha az X normált térben van kompakt gömb, akkor X véges dimenziós.*

7.4. Gyenge és gyenge*-konvergencia

A korábbiakban speciálisan Hilbert-terekben már foglalkoztunk gyenge konvergenciával. Most általában normált terekben vezetjük be e fogalmat, s megvizsgáljuk, milyen feltétellel jellemezhető a korlátos sorozatok gyengén konvergens részsorozatának garantálására. A következőkben nagymértékben támaszkodunk *A Hahn–Banach-tétel* c. szakaszban írottakra. A továbbiakban legyen X normált tér $\mathbb{K}$ fölött.

7.4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $(x_n) \subseteq X$ sorozat *gyengén konvergál* az $x \in X$ vektorhoz (jelben: $x_n \overset{w}{\to} x$), ha minden $\varphi \in X^*$ esetén $\varphi x_n \to \varphi x \quad (n \to +\infty)$. Az (x_n) sorozat *gyengén konvergens*, ha van ahova gyengén konvergáljon.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $(\varphi_n) \subseteq X^*$ sorozat *gyenge*-konvergál* az $\varphi \in X^*$ funkcionálhoz (jelben: $\varphi_n \overset{w^*}{\to} \varphi$), ha minden $x \in X$ esetén $\varphi_n x \to \varphi x \quad (n \to +\infty)$. A (φ_n) sorozat *gyenge*-konvergens*, ha van ahova gyenge*-konvergáljon.

7.4.3. Megjegyzés. $x \in X$ esetén használjuk az $\widehat{x} \in X^{**}$, $\widehat{x}\,(\varphi) := \varphi x$ jelölést. Ezzel $(x_n) \subseteq X$ és $x \in X$ esetén triviálisan

$$x_n \overset{w}{\to} x \iff \widehat{x_n} \overset{w^*}{\to} \widehat{x}.$$

7.4.4. Következmény. *Ha X reflexív, akkor egy $(x_n) \subseteq X$ sorozat gyengén konvergens volta ekvivalens az $(\widehat{x_n}) \subseteq X^{**}$ sorozat gyenge*-konvergens voltával.*

Bizonyítás. $(\widehat{x_n})$ gyenge*-konvergenciája azt jelenti, hogy alkalmas $\Phi \in X^{**}$ funkcionállal $\widehat{x_n} \overset{w^*}{\to} \Phi$. No de minden ilyen Φ most $\widehat{x}$ alakú, így $(\widehat{x_n})$ gyenge*-konvergenciája azzal ekvivalens, hogy alkalmas $x \in X$ mellett $\widehat{x_n} \overset{w^*}{\to} \widehat{x}$. Ez a fenti megjegyzés értelmében pedig azzal ekvivalens, hogy alkalmas x-szel $x_n \overset{w}{\to} x$. □

7.4.5. Megjegyzés. A „gyenge*-limesz" egyértelmű, azaz ha $\varphi_n \overset{w^*}{\to} \varphi$ és $\varphi_n \overset{w^*}{\to} \psi$, akkor a $\mathbb{K}$-beli limesz egyértelműsége miatt minden $x \in X$-re $\varphi x = \psi x$, azaz éppen $\varphi = \psi$.

7.4.6. Megjegyzés. A „gyenge limesz" is egyértelmű, azaz ha $x_n \overset{w}{\to} x$ és $x_n \overset{w}{\to} z$, akkor a $\mathbb{K}$-beli limesz egyértelműsége miatt minden $\varphi \in X^*$-ra $\varphi x = \varphi z$, ahonnan a normált terek szeparációja (6.4.12. Következmény) miatt $x = z$.

7.4.7. Megjegyzés. Ha X teljes és a $(\varphi_n) \subseteq X^*$ sorozat gyenge*-konvergens, akkor a Banach-Steinhaus-tétel miatt normakorlátos is.

7.4.8. Következmény. *Ha az (x_n) sorozat gyengén konvergens, akkor korlátos is (az X teljessége nélkül is!).*

Bizonyítás. Az egyik fenti megjegyzés értelmében $\widehat{x_n} \overset{w^*}{\to} \widehat{x}$ és a vonatkozó primál tér most X^*, ami teljes. Ugyanakkor az $x \mapsto \widehat{x}$ hozzárendelés a korábban már tárgyaltak miatt normatartó. □

7.4.9. Tétel. *Legyen az X normált tér szeparábilis. Ekkor minden $(\varphi_k) \subseteq \subseteq X^*$ normakorlátos sorozatnak van gyenge*-konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $(\varphi_k) \subseteq X^*$ korlátos sorozat. Legyen e sorozat egy korlátja $L > 0$. Legyen $(x_n) \subseteq X$ sűrű sorozat. Jelölje minden $n, k \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_k^{(n)} := \varphi_k x_n$. Ezzel minden $n \in \mathbb{N}$-re definiáltunk egy $\left(\alpha_k^{(n)}\right)$ korlátos $\mathbb{K}$-beli

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

sorozatot. A Cantor-féle átlós elv (4.4.11. Következmény) miatt van olyan $(k_\ell) \subseteq \mathbb{N}$ szigorúan növő indexsorozat, hogy az $\left(\alpha_{k_\ell}^{(n)}\right)$ sorozatok mindegyike konvergens, azaz minden n-re $(\ell \mapsto \varphi_{k_\ell} x_n)$ konvergens. Megmutatjuk, hogy minden $x \in X$ mellett is $(\ell \mapsto \varphi_{k_\ell} x)$ konvergens $\mathbb{K}$-beli sorozat. Legyen $x \in$ $\in X$. Vegyünk egy x-hez normában tartó $\left(x_{n_j}\right)$ részsorozatot. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik olyan $j_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $j \geq j_0$ esetén $\left\|x - x_{n_j}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{6L}$. A már látottak miatt van olyan $p_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $p, q \geq p_0$ esetén

$$\left|\varphi_{k_p} x_{n_{j_0}} - \varphi_{k_q} x_{n_{j_0}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ekkor minden $p, q \geq p_0$ esetén

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{k_p} x - \varphi_{k_q} x\right| &\leq \left|\varphi_{k_p} x - \varphi_{k_p} x_{n_{j_0}}\right| + \left|\varphi_{k_p} x_{n_{j_0}} - \varphi_{k_q} x_{n_{j_0}}\right| + \left|\varphi_{k_q} x_{n_{j_0}} - \varphi_{k_q} x\right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6L} \cdot 2L + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6L} \cdot 2L = \varepsilon,\end{aligned}$$

amivel igazoltuk, hogy $(\ell \mapsto \varphi_{k_\ell} x)$ $\mathbb{K}$-beli Cauchy-sorozat. Ez persze konvergens is.

Jelölje most $\varphi : X \to \mathbb{K}$,

$$\varphi(x) := \lim_{\ell \to +\infty} \varphi_{k_\ell} x.$$

A konvergens sorozatok összegére és számszorosára vonatkozó tétel alapján φ triviálisan lineáris funkcionál. Ugyanakkor minden $x \in X$-re

$$|\varphi x| = \lim_{\ell \to +\infty} |\varphi_{k_\ell} x| \leq \limsup_{\ell \to +\infty} \|\varphi_{k_\ell}\| \cdot \|x\| \leq L \cdot \|x\|,$$

tehát φ folytonos is, azaz $\varphi \in X^*$. Ezzel tehát $\varphi_{k_\ell} \overset{w^*}{\to} \varphi$. □

7.5. Gyenge konvergencia és reflexivitás

7.5.1. Megjegyzés. Legyen X normált tér $\mathbb{K}$ fölött és $M \leq X$ altér. Ekkor

$$\varphi \in M^* \Longleftrightarrow \exists \widehat{\varphi} \in X^* : \widehat{\varphi}_{|M} = \varphi.$$

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a Hahn–Banach-tétel eredeti alakjából (6.4.10. Tétel). □

7.5.2. Állítás. *Legyen X reflexív Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött és $M \leq X$ zárt altér. Ekkor M mint Banach-tér is reflexív.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Legyen $\Phi \in (M^*)^*$. Jelölje $\Psi : X^* \to \mathbb{K}$, $\Psi(\varphi) := \Phi\left(\varphi_{|M}\right)$. Ezzel $\Psi \in (X^*)^*$. Mivel X reflexív, ezért van olyan $a \in X$, hogy minden $\varphi \in X^*$-ra $\varphi a = \Psi\varphi = \Phi\left(\varphi_{|M}\right)$. Indirekt tegyük föl, hogy $a \notin M$; ekkor a Hahn–Banach-tétel eredeti alakját követő tétel (6.4.11. Tétel) miatt van olyan $\varphi \in \in X^*$ funkcionál, amely az M altéren eltűnik, az a vektoron viszont nem. Ezt a legutóbb kapott egyenlőségbe helyettesítve ellentmondásra jutunk. Tehát $a \in M$. Legyen most $\varphi \in M^*$ tetszőleges. A fenti megjegyzés értelmében van olyan $\widehat{\varphi} \in X^*$ funkcionál, hogy $\widehat{\varphi}_{|M} = \varphi$. Ezzel így

$$\varphi a = \widehat{\varphi} a = \Phi\left(\widehat{\varphi}_{|M}\right) = \Phi\varphi,$$

tehát minden $\varphi \in X^*$-ra $\varphi a = \Phi\varphi$. Ez éppen azt jelenti, hogy M reflexív. □

7.5.3. Megjegyzés. Ha X reflexív szeparábilis Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött, akkor X^* is szeparábilis.

Bizonyítás. Azonnal következik a 6.4.25. Feladatból. □

A továbbiakban legyen X normált tér $\mathbb{K}$ fölött.

7.5.4. Lemma. *Legyen X reflexív szeparábilis Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött. Ekkor minden $(x_k) \subseteq X$ korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subseteq X$ korlátos sorozat. Ekkor $(\widehat{x_n}) \subseteq X^{**}$ is korlátos, továbbá X^* szeparábilis, így az előző szakasz tétele miatt van gyenge*-konvergens $(\widehat{x_{n_k}})$ részsorozata. Mivel X reflexív, ezért az előző szakasz egyik következménye miatt (x_{n_k}) gyengén konvergens. □

7.5.5. Tétel. *Legyen X tetszőleges reflexív Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött. Ekkor minden $(x_k) \subseteq X$ korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $M := \overline{\operatorname{lin}}\left(\{x_k : k \in \mathbb{N}\}\right)$ Az egyik fenti megjegyzés értelmében M reflexív szeparábilis Banach-tér. A fenti lemma miatt így van olyan (x_{k_ℓ}) részsorozat, hogy minden $\varphi \in M^*$-ra

$$\varphi x_{k_\ell} \to \varphi x \qquad (\ell \to +\infty).$$

Most a kapottakat tminden $\varphi \in X^*$ esetén a $\varphi_{|M} \in M^*$ funkcionálra alkalmazva éppen azt kapjuk, hogy $x_{k_\ell} \overset{w}{\to} x$. □

A továbbiakban felhasználjuk a Hahn–Banach-tételből adódó következő szigorú szeparációs elvet: *ha X normált tér $\mathbb{K}$ fölött, $M \subseteq X$ nemüres konvex zárt halmaz és $x \in X \setminus M$, akkor van olyan $\varphi \in X^*$ funkcionál, hogy*

$$\sup_{u \in M} \operatorname{Re}\varphi u < \operatorname{Re}\varphi x.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.5.6. Állítás. *Legyen X normált tér $\mathbb{K}$ fölött, $M \subseteq X$ konvex zárt halmaz, $x \in X$ és $(x_n) \subseteq M$. Ha $x_n \overset{w}{\to} x$, akkor $x \in M$. (E tényt úgy is ki szokás fejezni, hogy egy normált térben egy konvex zárt halmaz ún.* gyengén is zárt*.)*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy $x \notin M$. Ekkor a fenti szigorú szeparációs tétel miatt van olyan $\varphi \in X^*$ funkcionál, melyre

$$\alpha := \sup_{u \in M} \mathrm{Re}\varphi u < \mathrm{Re}\varphi x.$$

Ekkor persze $\alpha \geq \mathrm{Re}\varphi x_n \to \mathrm{Re}\varphi x > \alpha$, ami ellentmondás. □

7.5.7. Megjegyzés. Legyen X normált tér $\mathbb{K}$ fölött. Ha $(x_n) \subseteq X$ olyan Cauchy-sorozat, amelyre $x_n \overset{w}{\to} x$, akkor $x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x$.

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett az (x_n) sorozat elemei egy index után benne maradnak egy $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú zárt gömbben. A fenti állítás miatt ekkor x is eleme ennek a gömbnek. Azaz a mondott index után a sorozat elemei legfeljebb ε-nyira esnek x-től. □

7.5.8. Következmény. *Ha X olyan normált tér $\mathbb{K}$ fölött, amelyben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata, akkor X Banach-tér.*

7.5.9. Állítás. *Legyen X reflexív Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött, $M \subseteq X$ nemüres korlátos zárt konvex halmaz és $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos (elég: alulról félig folytonos) és konvex (elég: kvázikonvex) függvény. Ekkor f az M halmazon fölveszi a minimumát.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \inf_M f$. Legyen $(\beta_n) \subseteq \mathbb{R}$ olyan sorozat, amely szigorúan fogyólag tart α-hoz. f (kvázi)konvexitása és (alulról félig) folytonos volta miatt minden n-re $\beta_n > \alpha$ alapján

$$M_n := \{x \in M : f(x) \leq \beta_n\}$$

nemüres korlátos zárt konvex halmaz. Vegyünk egy olyan (x_n) sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in M_n$. Mivel M korlátos, ezért e sorozatból kiválaszthatunk egy valamely x vektorhoz gyengén konvergáló (x_{n_k}) részsorozatot. Az (M_n) sorozat monoton szűkülő; ezért tetszőleges j-re az (x_{n_k}) sorozat egy indextől kezdve M_j-be esik. Mivel pedig M_j konvex és zárt, ezért $x \in M_j$, azaz $f(x) \leq \beta_j$. Mivel ez tetszőleges j-re igaz, ezért $f(x) \leq \alpha$, tehát x-ben f fölveszi a minimumát. □

7.5.10. Következmény. *Ha X reflexív Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött, akkor tetszőleges $M \subseteq X$ nemüres korlátos zárt konvex halmazon tetszőleges $\varphi \in X^*$ funkcionál valós része fölveszi mind a minimumát, mind a maximumát.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.5.11. Állítás. *Legyen X reflexív Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött, $M \subseteq X$ konvex zárt és $K \subseteq X$ konvex zárt korlátos halmaz. Ekkor $K+M$ is zárt.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subseteq K+M$ és $x \in X$, hogy $x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x$. Ekkor x_n előáll $x_n = u_n + v_n$ alakban ($u_n \in K, v_n \in M$). Most X reflexivitása miatt az (u_n) korlátos sorozatnak van egy $u \in X$ vektorhoz gyengén konvergáló (u_{n_k}) részsorozata. Az egyik fenti állítás miatt $u \in K$. Most triviálisan $v_{n_k} \overset{w}{\to} x-u$. M konvex zárt volta miatt innen $x-u \in M$, azaz $x \in K+M$. Tehát $K+M$ zárt. □

7.5.12. Következmény (szigorú szeparáció III.)**.** *Legyen X reflexív Banach-tér $\mathbb{K}$ fölött és $K, M \subseteq H$ diszjunkt nemüres konvex zárt halmazok, továbbá K korlátos is. Ekkor van olyan $\varphi \in X^*$ funkcionál, melyre*

$$\sup_{u \in M} \mathrm{Re}\varphi u < \min_{v \in K} \mathrm{Re}\varphi v.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előbbiekben idézett szeparációs elvet az origóra ésa konvex zárt $K-M$ halmazra. □

A továbbiakban egy X normált tér egységszféráját (az egységnormájú vektorainak összességét) jelölje S_X.

7.5.13. Lemma. *Legyen X valós normált tér és $M \leq X^*$ véges dimenziós altér. Ekkor van olyan $T \subseteq S_X$ véges halmaz, hogy minden $\varphi \in M$ esetén*

$$\max_T |\varphi| \geq \frac{\|\varphi\|}{2}.$$

Bizonyítás. $S_{X^*} \cap M \subseteq X^*$ $\|\cdot\|$-kompakt halmaz, így létezik véges sok $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in S_{X^*} \cap M$, hogy $\forall \varphi \in M$, $\|\varphi\| = 1$ esetén $\exists 1 \leq k \leq n$, hogy $\|\varphi - \varphi_k\| < \frac{1}{4}$. Most minden $1 \leq k \leq n$ számhoz van olyan $x_k \in S_X$, hogy $\varphi_k(x_k) > \frac{3}{4}$. Jelölje

$$T := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Legyen $\varphi \in M$, $\varphi \neq \mathbf{0}_{X^*}$. Ekkor $\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \in S_{X^*} \cap M$, így $\exists 1 \leq k \leq n$, hogy $\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \varphi_k \right\| < \frac{1}{4}$, ahonnan

$$\left\| \frac{\varphi(x_k)}{\|\varphi\|} - \varphi_k(x_k) \right\| < \frac{1}{4} \cdot \|x_k\| = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\varphi(x_k)}{\|\varphi\|} > \varphi_k(x_k) - \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\varphi(x_k)}{\|\varphi\|} > \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_k) \geq \frac{\|\varphi\|}{2} \quad \Longrightarrow \quad \max_T |\varphi| \geq \frac{\|\varphi\|}{2}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség nyilván $\varphi = \mathbf{0}_X$ esetén is igaz, s éppen ezt kellett bizonyítani. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

A továbbiakban ha X valós normált tér, akkor minden $x \in X$ esetén jelölje $\widehat{x}$ az x vektor X^{**}-ba való természetes beágyazását (az $X^* \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi x$ hozzárendelést), továbbá $C \subseteq X$ esetén

$$\widehat{C} := \{\widehat{x} : x \in C\}.$$

7.5.14. Tétel. *Legyen X olyan valós normált tér, amelyben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata. Ekkor X reflexív (Banach-tér).*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy minden $\Phi \in X^{**}$, $\|\Phi\| = 1$ esetén $\Phi \in \widehat{\mathcal{B}_X}$. Rögzítsük a Φ funkcionált. Először is „A Riesz-tétel. Szeparációk" c. szakaszban szereplő Goldstine-tétel miatt tetszőleges $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in X^*$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\bigcap_{j=1}^{n} \varphi_j^{-1}\left([\Phi(\varphi_j) - \varepsilon, \Phi(\varphi_j) + \varepsilon]\right) \cap \mathcal{B}_X \neq \emptyset.$$

Most rekurzív módon definiálunk egy $(x_n) \subseteq \mathcal{B}_X$ és egy $(T_n) \subseteq \mathcal{P}(S_{X^*})$ véges halmazokból álló sorozatot a következőképpen:

I. legyen $\varphi_1 \in S_{X^*}$ tetszőleges. Jelölje $T_1 := \{\varphi_1\}$. Ekkor a fentiek miatt létezik

$$x_1 \in \mathcal{B}_X \cap \varphi_1^{-1}\left([\Phi(\varphi_1) - 1, \Phi(\varphi_1) + 1]\right).$$

II. Most tegyük föl, hogy már definiáltuk a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ halmazokat és az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorokat. Alkalmazzuk az előző lemmát X^*-ra és a $\operatorname{lin}(\{\Phi, \widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n\}) \leq X^{**}$ altérre. Ezek szerint létezik véges $T^{(n+1)} \subseteq S_{X^*}$ halmaz, melyre minden $\Psi \in \operatorname{lin}(\{\Phi, \widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n\})$ esetén

$$\max_{T^{(n+1)}} |\Psi| \geq \frac{\|\Psi\|}{2}.$$

Jelölje $T_{n+1} := T_n \cup T^{(n+1)}$. Nyilván ekkor

$$\max_{T_{n+1}} |\Psi| \geq \frac{\|\Psi\|}{2}$$

is fennáll. Ezek után válasszunk egy

$$x_{n+1} \in \mathcal{B}_X \cap \bigcap_{\varphi \in T_{n+1}} \varphi^{-1}\left(\left[\Phi(\varphi) - \frac{1}{n+1}, \Phi(\varphi) + \frac{1}{n+1}\right]\right)$$

vektort (ilyen a Goldstine-tétel miatt létezik).

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Ezzel definiáltuk az $(x_n) \subseteq \mathcal{B}_X$ és $(T_n) \subseteq \mathcal{P}(S_{X^*})$ sorozatokat. Persze (T_n) monoton bővülő. Jelölje $T_* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$. Ekkor minden

$$\Psi \in \operatorname{lin}\left(\{\Phi\} \cup \{\widehat{x}_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$$

esetén nyilván

$$\sup_{T_*} |\Psi| \geq \frac{\|\Psi\|}{2}$$

(hiszen minden ilyen Ψ benne van egy alkalmas $\operatorname{lin}\left(\{\Phi, \widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n\}\right)$-ben). Innen egyszerű kalkulációval adódik, hogy

$$\text{minden } \Psi \in \overline{\operatorname{lin}\left(\{\Phi\} \cup \{\widehat{x}_n : n \in \mathbb{N}\}\right)} \text{ esetén is} \qquad \sup_{T_*} |\Psi| \geq \frac{\|\Psi\|}{2}.$$

Most a feltevésünk alapján létezik (x_{n_k}) részsorozat és $x \in X$, hogy $x_{n_k} \overset{w}{\to} x$. Persze a korábban már látottak miatt $x \in \mathcal{B}_X \cap \overline{\operatorname{lin}\left(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\right)}$, hiszen e halmaz konvex és zárt. Ezért létezik $(y_p) \subseteq \operatorname{lin}\left(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$ sorozat, mely $\|\cdot\|$-ban konvergál x-hez. Ekkor persze $(\widehat{y}_p)$ is $\|\cdot\|$-ban konvergál $\widehat{x}$-hoz. Ugyanakkor $(\widehat{y}_p) \subseteq \operatorname{lin}\left(\{\widehat{x}_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$. Emiatt

$$\widehat{x} \in \overline{\operatorname{lin}\left(\{\Phi\} \cup \{\widehat{x}_n : n \in \mathbb{N}\}\right)}.$$

Következésképp $\Phi - \widehat{x} \in \overline{\operatorname{lin}\left(\{\Phi\} \cup \{\widehat{x}_n : n \in \mathbb{N}\}\right)}$, ahonnan a fentiek alapján

$$\sup_{T_*} |\Phi - \widehat{x}| \geq \frac{\|\Phi - \widehat{x}\|}{2}.$$

Másrészt tetszőleges $\varphi \in T_*$ esetén $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq n_0$-ra $\varphi \in T_n$; ahonnan a konstrukció miatt

$$\varphi x_n \in \left[\Phi(\varphi) - \frac{1}{n+1}, \Phi(\varphi) + \frac{1}{n+1}\right],$$

ami azt jelenti, hogy minden $\varphi \in T_*$-ra

$$\varphi x_n \to \Phi(\varphi).$$

Ugyanakkor a gyenge tartás miatt minden rögzített $\varphi \in T_*$-ra $\varphi x_{n_k} \to \varphi x$, amiért is

$$\Phi(\varphi) = \varphi x \qquad (\forall \varphi \in T_*).$$

Innen minden $\varphi \in T_*$-ra $(\Phi - \widehat{x})(\varphi) = 0$, ahonnan a fentiek alapján

$$0 = \sup_{T_*} |\Phi - \widehat{x}| \geq \frac{\|\Phi - \widehat{x}\|}{2},$$

azaz $\Phi = \widehat{x}$. Tehát $\Phi \in \widehat{\mathcal{B}_X}$, ahonnan azonnal $X^{**} = \widehat{X}$. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.5.15. Következmény. *Egy valós normált tér pontosan akkor reflexív Banach-tér, ha benne minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

7.6. A $C_c^1(\Omega)$ és $C_c^2(\Omega)$ terek sűrűek $L^p(\Omega)$-ban $(1 \leq p < \infty)$

A továbbiakban egy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-halmazra $L^p(A) = L^p\left(A, \Lambda(A), \lambda^{(n)}\right)$.

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt összefüggő halmaz. Egy $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény *tartója*

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \cap \Omega.$$

f kompakt tartójú, ha $\operatorname{supp} f$ kompakt halmaz. Jelölje $C_c(\Omega)$ a kompakt tartójú $C(\Omega)$-beli függvények vektorterét, $C_c^1(\Omega)$ a kompakt tartójú $C^1(\Omega)$-beli függvények vektorterét, $C_c^2(\Omega)$ pedig a kompakt tartójú $C^2(\Omega)$-beli függvényekét.

Definiáljuk minden $t \in \mathbb{R}$ esetére a $h(t)$ értéket: ha $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor $h(t) := \cos^3 t$, a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ komplementumán pedig legyen $h(t) := 0$. Ezzel $h \in C_c^2(\mathbb{R})$.

Jelölje minden $j \in \mathbb{N}$ indexre $\eta_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\eta_j(x) := h\left(\|j \cdot x\|^2\right)$$

és

$$c_j := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_j.$$

Ezzel $\eta_j \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ és $0 < c_j < +\infty$.

7.6.1. Tétel. *Legyen $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Ekkor tetszőleges j indexre az $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$f_j(x) := \frac{1}{c_j} \int_\Omega \eta_j(x - y) \cdot f(y)\, dy$$

függvényre $f_j \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ és $\operatorname{supp} f_j \subseteq \operatorname{supp} f + \frac{1}{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \mathcal{B}$, továbbá $f_j \longrightarrow f$ egyenletesen.

Bizonyítás. η_j korlátossága miatt f_j jóldefiniált. Mivel η_j és összes legfeljebb másodrendű parciális deriváltja egy $C > 0$ számmal korlátozott, ezért $C \cdot |f|$ L^1-beli majoráns mellett bederiválással azonnal adódik, hogy $f_j \in$ $\in C^2(\mathbb{R}^n)$. Ha most egy x vektorra $d(x, \operatorname{supp} f) > \frac{1}{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, akkor $y \in \operatorname{supp} f$ esetén $\eta_j(x - y) = 0$, $y \notin \operatorname{supp} f$ esetén pedig $f(y) = 0$. Tehát minden y-ra

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$\eta_j(x-y)\cdot f(y)=0$, következésképp $f_j(x)=0$, hacsak $d(x,\operatorname{supp} f)>\frac{1}{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Ezért f_j kompakt tartójú is, azaz $f_j\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, sőt $\operatorname{supp} f_j\subseteq \operatorname{supp} f+$ $+\frac{1}{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\mathcal{B}$.

Legyen most $\varepsilon>0$. Mivel f triviálisan egyenletesen folytonos, ezért van olyan $\delta>0$ szám, hogy $\|x-y\|\le\delta$ esetén $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$. Ekkor minden $j>\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ indexre és $x\in\mathbb{R}^n$-re $\frac{1}{c_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_j=1$ és $\operatorname{supp}\eta_j\subseteq\frac{1}{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\mathcal{B}$ miatt

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f_j(x)| &= \left|f(x)-\frac{1}{c_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_j(x-y)\cdot f(y)\,dy\right| = \\
&= \left|\frac{1}{c_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_j(x-y)\cdot f(x)\,dy-\frac{1}{c_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_j(x-y)\cdot f(y)\,dy\right| \le \\
&\le \frac{1}{c_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_j(x-y)\cdot|f(x)-f(y)|\,dy \le \frac{1}{c_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_j(x-y)\cdot\varepsilon\,dy=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

tehát $\max\limits_{\mathbb{R}^n}|f-f_j|\le\varepsilon$, hacsak $j>\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Ez éppen azt jelenti, hogy f_j egyenletesen tart f-hez. □

7.6.2. Következmény. *Tetszőleges $f\in C_c(\Omega)$ függvényre is van olyan $(f_j)\subseteq C_c^2(\Omega)$ sorozat, amelyre alkalmas $r_j\searrow 0$ sorozattal* $\operatorname{supp} f_j\subseteq\operatorname{supp} f+$ $+r_j\cdot\mathcal{B}$, *továbbá $f_j\longrightarrow f$ egyenletesen.*

Bizonyítás. f természetes módon tekinthető $C_c(\mathbb{R}^n)$-belinek. A fenti tételbeli (f_j) sorozatra a $\operatorname{supp} f_j\subseteq\operatorname{supp} f+\frac{1}{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\mathcal{B}$ feltétel miatt egy indextől kezdve $\operatorname{supp} f_j\subseteq\Omega$. Ezeket a függvényeket Ω-ra leszűkítve a kívánt tulajdonságú sorozatot kapunk. □

7.6.3. Következmény. *A fenti következmény alakjából azonnal adódik, hogy minden $1\le p\le\infty$ mellett a szóban forgó $(f_j)\subseteq C_c^2(\Omega)$ sorozat L^p-normában is tart az $f\in C_c(\Omega)$ függvényhez.*

7.6.4. Tétel. *Minden $1\le p<\infty$ mellett $C_c^2(\Omega)$ sűrű altere az $L^p(\Omega)$ Banach-térnek.*

Bizonyítás. Jelölje M a $C_c^2(\Omega)$ altér lezárását az $L^p(\Omega)$ Banach-térben. A fenti következmény értelmében azonnal $C_c(\Omega)\subseteq M$. Elegendő hát megmutatnunk, hogy $C_c(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban.

Legyen $f\in L^p(\Omega)$ és $\varepsilon>0$. Ω σ-kompaktsága és a Lebesgue-tétel miatt ($|f|$ L^p-beli majoránssal) van olyan $K\subseteq\Omega$ kompakt halmaz, hogy

$$\|f-f\cdot\chi_K\|_{L^p(\Omega)}\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Triviálisan van olyan $\alpha_0 > 0$ szám, hogy $K + \alpha_0 \cdot \mathcal{B} \subseteq \Omega$. Felhasználjuk, hogy $C\left(K + \alpha_0 \cdot \mathcal{B}\right)$ sűrű $L^p\left(K + \alpha_0 \cdot \mathcal{B}\right)$-ben. Ezzel van olyan $\varphi \in C\left(K + \alpha_0 \cdot \mathcal{B}\right)$ függvény, hogy

$$\left\| f_{|K+\alpha_0 \cdot \mathcal{B}} - \varphi \right\|_{L^p(K+\alpha_0 \cdot \mathcal{B})} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $\beta > 0$ a φ egy korlátja. Mivel $\lambda^{(n)}$ véges mérték a $K + \alpha_0 \cdot \mathcal{B}$ alaphalmazon, így egy $\alpha_j \searrow 0$ sorozattal $(\alpha_1 < \alpha_0)$ alkalmas j-re

$$\lambda^{(n)}\left(K + \alpha_j \cdot \mathcal{B}\right) \leq \lambda^{(n)}\left(K\right) + \frac{\varepsilon}{3\beta}.$$

Most a $d\left(\cdot, \left(K + \alpha_j \cdot \mathcal{B}\right)^c\right)$ távolságfüggvény folytonos és a K kompakt halmazon pozitív a minimuma. Így elég nagy pozitív számszorosa a K halmazon 1-nél nagyobb. Az így kapott függvénynek a konstans 1 függvénnyel véve az alsó burkolóját, olyan folytonos ψ függvényhez jutunk, amelyik

- [0,1]-be képez;
- a K halmazon azonosan 1 és
- a $K + \alpha_j \cdot \mathcal{B}$ halmaz komplementumán azonosan 0.

Terjesszük ki a φ függvényt formálisan nullaként az $\Omega \setminus \left(K + \alpha_0 \cdot \mathcal{B}\right)$ halmazra. Világos, hogy $\psi \cdot \varphi$ folytonos és tartója része $K + \alpha_j \cdot \mathcal{B}$-nek. Tehát $\psi \cdot \varphi \in C_c\left(\Omega\right)$. Az is világos, hogy $\psi \cdot \varphi$ a K halmazon megegyezik φ-vel. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \left\| f - \varphi \right\|_{L^p(\Omega)} &\leq \left\| (f - \varphi) \cdot \chi_{K+\alpha_0 \cdot \mathcal{B}} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| f \cdot \chi_{(K+\alpha_0 \cdot \mathcal{B})^c} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq \left\| f_{|K+\alpha_0 \cdot \mathcal{B}} - \varphi \right\|_{L^p(K+\alpha_0 \cdot \mathcal{B})} + \left\| f \cdot \chi_{K^c} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

másrészt

$$\left\| \varphi - \psi \cdot \varphi \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \max_{\Omega} |\varphi| \cdot \lambda^{(n)}\left(\left(K + \alpha_j \cdot \mathcal{B}\right) \setminus K\right) \leq \beta \cdot \frac{\varepsilon}{3\beta} = \frac{\varepsilon}{3},$$

ahonnan $\left\| f - \psi \cdot \varphi \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy $C_c\left(\Omega\right)$ sűrű $L^p\left(\Omega\right)$-ban. □

7.6.5. Következmény. *Minden $1 \leq p < \infty$ mellett $C_c^1\left(\Omega\right)$ is sűrű altere az $L^p\left(\Omega\right)$ Banach-térnek.*

7.7. Fourier-transzformáció

E szakaszban $L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ végig jelölje a komplex fázisterű $L_{\mathbb{C}}^1\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right), \lambda^{(n)}\right)$ Banach-teret.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Fourier-transzformáció $L^1(\mathbb{R}^n)$-en

7.7.1. Megjegyzés. A Fubini-tétel és az egyváltozós integráltranszformáció triviális alkalmazásával adódik, hogy minden $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $z = \alpha \cdot x$ helyettesítéssel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha \cdot x)\, dx = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, dz.$$

7.7.2. Definíció. Jelölje $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén $Ff, Gf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$(Ff)(x) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|y\rangle} \cdot f(y)\, dy,$$
$$(Gf)(x) := (Ff)(-x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\cdot\langle x|y\rangle} \cdot f(y)\, dy.$$

Persze azonnal $\overline{(Ff)} = G\overline{f}$.

Nyilván Ff és Gf korlátosak ($\|f\|_{L^1}$ korláttal), továbbá a Lebesgue-féle majorált konvergenciatétel miatt triviálisan folytonosak. Így

$$F, G : L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Az F és G operátorok persze lineárisak.

7.7.3. Állítás. *Minden $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén*

$$F(f \circ (\alpha \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})) = \frac{1}{\alpha^n} \cdot (Ff) \circ \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\right),$$
$$G(f \circ (\alpha \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})) = \frac{1}{\alpha^n} \cdot (Gf) \circ \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\right).$$

Bizonyítás. A definíció és a fenti integráltranszformációs megjegyzés alapján

$$F(f \circ (\alpha \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}))(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|y\rangle} \cdot f(\alpha \cdot y)\, dy =$$
$$= \frac{1}{\left(\alpha \cdot \sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\left\langle \frac{x}{\alpha}|z\right\rangle} \cdot f(z)\, dz = \frac{1}{\alpha^n} \cdot (Ff)\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

A másik egyenlőség $(Gf)(x) = (Ff)(-x)$ miatt triviális. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{2}}$ **mint** F **sajátfüggvénye**

7.7.4. Megjegyzés. Minden x valós számra

$$\int_{\mathbb{R}} \sin xy \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 0$$

az integrál konvergenciája és az integrandus páratlan volta miatt.

7.7.5. Megjegyzés. $h(x) := \int_{\mathbb{R}} \cos xy \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$ definícióval közismerten

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \sqrt{2\pi},$$

továbbá bederiválással, majd parciális integrálással

$$h'(x) = \int_{\mathbb{R}} -y \cdot \sin xy \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \int_{\mathbb{R}} \sin xy \cdot \left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)'\, dy =$$
$$= \left[\sin xy \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} x \cdot \cos xy \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 0 - x \cdot h(x),$$

azaz $h'(x) = -x \cdot h(x)$, $h(0) = \sqrt{2\pi}$, amit h-ra megoldva $h(x) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Tehát minden valós x-re

$$\int_{\mathbb{R}} \cos xy \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

7.7.6. Következmény. *A két fenti megjegyzésből minden* $x \in \mathbb{R}$ *mellett*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

7.7.7. Következmény.

$$F\left(e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{2}}\right) = e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{2}} = G\left(e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{2}}\right).$$

Bizonyítás. Minden x-re

$$F\left(e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{2}}\right)(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|y\rangle} \cdot e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}\, dy =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^{n} \left(e^{-ix_k y_k} \cdot e^{-\frac{y_k^2}{2}} \right) dy =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix_k y_k} \cdot e^{-\frac{y_k^2}{2}} \, dy_k \right) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x_k^2}{2}} = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}.$$

A másik egyenlőség $(Gf)(x) = (Ff)(-x)$ miatt triviális. □

Felcserélési képletek

A továbbiakban $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ és $1 \leq k \leq n$ esetén jelölje $Q_k f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$(Q_k f)(x) := x_k \cdot f(x)$$

és hasonlóan, $1 \leq k, j \leq n$ esetén $Q_k Q_j f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$(Q_k Q_j f)(x) := x_k \cdot x_j \cdot f(x),$$

speciálisan

$$\left(Q_k^2 f\right)(x) := x_k^2 \cdot f(x).$$

7.7.8. Állítás. *Tetszőleges $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ függvényre és $1 \leq k \leq n$ indexre*

$$\partial_k (Ff) = -i \cdot F(Q_k f),$$
$$Q_k (Ff) = -i \cdot F(\partial_k f),$$
$$\partial_k^2 (Ff) = -F\left(Q_k^2 f\right).$$

Bizonyítás. Minden $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ esetén $|f| \vee |Q_k f|$ $L^1(\mathbb{R}^n)$-majorálása miatt az Ff-et definiáló integrálba be lehet deriválni a k-adik változó szerint:

$$\partial_k (Ff)(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(e^{-i \cdot \langle x|y \rangle} \cdot f(y) \right) dy =$$

$$= \frac{-i}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i \cdot \langle x|y \rangle} \cdot y_k \cdot f(y) \, dy = -i \cdot F(Q_k f)(x).$$

Ugyanakkor $\partial_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tehát képezhető Ff és $F(\partial_k f)$ is. A Fubini-tétel miatt e függvények bármelyik változójukban is (a többi változó értékét tetszőlegesen rögzítve) L^1-beliek. A k-adik változóbani parciális integrálással ekkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i \cdot \langle x|y \rangle} \cdot \partial_k f(y) \, dy_k =$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$$= \left[e^{-i\cdot\ \langle x|y\rangle}\cdot f(y)\right]_{y_k=-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}}(-ix_k)\cdot e^{-i\cdot\langle x|y\rangle}\cdot f\,(y)\ dy_k =$$

$$= 0 + ix_k\cdot\int_{\mathbb{R}} e^{-i\cdot\langle x|y\rangle}\cdot f\,(y)\ dy_k.$$

Most mindegyik oldalt a maradék $n-1$ változó szerint is kiintegrálva, a Fubini-tétel miatt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|y\rangle}\cdot\partial_k f\,(y)\ dy = ix_k\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|y\rangle}\cdot f\,(y)\ dy,$$

ahonnan azonnal

$$F\left(\partial_k f\right)(x) = ix_k\cdot(Ff)(x) = i\cdot Q_k\left(Ff\right)(x),$$

amivel a második bizonyítandó egyenlőség is adódik. Végül az első egyenlőséget a $Q_k f\in C_c^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ függvényre is alkalmazva

$$F\left(Q_k^2 f\right) = F\left(Q_k\left(Q_k f\right)\right) = i\cdot\partial_k\left(F\left(Q_k f\right)\right) = i\cdot\partial_k\left(i\cdot\partial_k\left(Ff\right)\right) = -\partial_k^2\left(Ff\right).$$

□

7.7.9. Következmény. *Ha $f\in C_c^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ is fennáll, akkor a fentieken túl*

$$Q_k^2\left(Ff\right) = -F\left(\partial_k^2 f\right).$$

Bizonyítás. Most $\partial_k f$ is eleme $C_c^1\left(\mathbb{R}^n\right)$-nek, így az előzőből

$$Q_k^2\left(Ff\right) = Q_k\left(Q_k\left(Ff\right)\right) = Q_k\left(-i\cdot F\left(\partial_k f\right)\right) = -i\cdot Q_k\left(F\left(\partial_k f\right)\right) =$$
$$= -i\cdot\left(-i\cdot F\left(\partial_k\left(\partial_k f\right)\right)\right) = -F\left(\partial_k^2 f\right).$$

□

7.7.10. Következmény. *$f\in C_c^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ esetén $F\left(\Delta f\right) = -\left\|\cdot\right\|^2\cdot Ff$.*

7.7.11. Állítás. *Ha $f\in C_c^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, akkor $Ff\in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$.*

Bizonyítás. $f-\Delta f\in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ (hiszen kompakt tartójú folytonos). Így $F\left(f-\Delta f\right)$ korlátos egy $K>0$ korláttal. Ugyanakkor a fenti következményből $F\left(f-\Delta f\right) = \left(1+\left\|\cdot\right\|^2\right)\cdot Ff$, így

$$\left|Ff\right| \le \frac{K}{1+\left\|\cdot\right\|^2},$$

amiért is $Ff\in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$. □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Inverziós tétel

7.7.12. Megjegyzés. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x) \cdot g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (Fg)(x)\, dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} (Gf)(x) \cdot g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (Gg)(x)\, dx.$$

Bizonyítás. Az $(x,y) \mapsto \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{\mp i \cdot \langle x|y\rangle} \cdot f(x) \cdot g(y)$ függvények $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$-beliek, így a definícióból és a Fubini-tételből azonnal adódik az állítás. □

7.7.13. Következmény. *$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ és $j \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{j}\right) \cdot (Fg)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x) \cdot g\left(\frac{x}{j}\right) dx.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti megjegyzést és e szakasz legelső állítását $f \circ \left(\frac{1}{j} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\right)$-re és g-re:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{j}\right) \cdot (Fg)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} F\left(f \circ \left(\frac{1}{j} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\right)\right)(x) \cdot g(x)\, dx =$$
$$= j^n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(jx) \cdot g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(z) \cdot g\left(\frac{z}{j}\right) dz$$

(itt a szakasz kezdő megjegyzését is használtuk az integráltranszformációról). □

Inverziós tétel (gyenge változat) ♦

7.7.14. Tétel. *Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ olyan függvény, amelyre $Ff \in$ $\in L^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $G(Ff) = f$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti következményt f-re és a $g := e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{2}}$ függvényre. Felhasználva először, hogy $Fg = g$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{j}\right) \cdot g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x) \cdot g\left(\frac{x}{j}\right) dx,$$

azaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{j}\right) \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x) \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{2j^2}}\, dx.$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Mivel most $f, Ff \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, ezért a Lebesgue-tétel miatt határátmenettel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(0) \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x)\, dx,$$

azaz

$$\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \cdot f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x)\, dx,$$

tehát

$$f(0) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x)\, dx.$$

Vegyük észre, hogy eszerint éppen $G(Ff)(0) = f(0)$. Alkalmazzuk a kapott egyenlőséget tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén az $y \mapsto f(x+y)$ függvényre. A Lebesgue-mérték eltolásinvarianciája miatt triviális integrálhelyettesítéssel

$$F(y \mapsto f(x+y))(z) = e^{i\cdot\langle x|z\rangle} \cdot (Ff)(z),$$

így a fenti formulából

$$f(x) = (y \mapsto f(x+y))(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (F(y \mapsto f(x+y)))(z)\, dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\cdot\langle x|z\rangle} \cdot (Ff)(z)\, dz = G(Ff)(x)$$

(hiszen $Ff \in L^1(\mathbb{R}^n)$). □

7.7.15. Következmény. *Minden $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ függvényre $G(Ff) = f$.*

7.7.16. Következmény. *Minden $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ függvényre $F(Ff) = f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$*

(hiszen $F(Ff)(x) = G(Ff)(-x) = f(-x)$).

7.7.17. Következmény. *Minden $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ függvény előáll $f = Fg$ alakban alkalmas $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ függvénnyel ($g = F(f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}))$).*

A fenti inverziós tételt most kissé élesítjük (nem tesszük külön föl a folytonosságot):

Inverziós tétel (erősebb változat) ♦

7.7.18. Tétel. *Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olyan függvény, amelyre $Ff \in L^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $G(Ff) = f$ λ-m.m.*

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Persze $G(Ff)$ korlátos. Legyen $g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Ehhez a fentiek szerint van olyan $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ függvény, hogy $g = Fh$. Ekkor h olyan L^1-beli folytonos függvény, amelyre Fh is L^1-beli, így az inverziós tétel már bizonyított gyenge változata miatt $G(Fh) = h$. Innen a legutóbbi megjegyzést többször is használva,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} G(Ff)(x) \cdot g(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x) \cdot (Gg)(x)\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x) \cdot (G(Fh))(x)\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(x) \cdot h(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (Fh)(x)\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(x)\, dx.\end{aligned}$$

Tehát minden $g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ mellett

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(Ff)(x) \cdot g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Most tetszőleges $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ függvény az előző szakasz első tétele értelmében egyenletesen közelíthető $C_c^2(\mathbb{R}^n)$-beli függvények egy olyan (g_j) sorozatával, amelyek tartói is egy rögzített gömbön belül maradnak. Ezekre a legutóbbi egyenlőséget alkalmazva határátmenettel azonnal adódik, hogy ez az egyenlőség minden $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mellett is áll. Legyen most $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ olyan mérhető függvény, amelyre $|h|$ azonosan 1 és $h \cdot (G(Ff) - f) = |G(Ff) - f|$. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges véges mértékű halmaz. Ekkor a $h \cdot \chi_A \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény (az előző szakasz fő eredményéből következően) L^1-normában közelíthető egy $(\varphi_j) \subseteq C_c(\mathbb{R}^n)$ sorozattal. Feltehető (az $1 \wedge \varphi_j$ függvényekre térve), hogy e φ_j függvények 1-gyel korlátozottak. Sőt a Riesz-lemma miatt az is feltehető (egy részsorozatra térve), hogy a φ_j függvények pontonként is tartanak $h \cdot \chi_A$-hoz. Persze minden j-re

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(Ff)(x) \cdot \varphi_j(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi_j(x)\, dx.$$

Mivel $G(Ff)$ korlátos, ezért $G(Ff) \cdot \varphi_j$ L^1-normában tart $G(Ff) \cdot h \cdot \chi_A$-hoz. Ugyanakkor $f \cdot \varphi_j$ pontonként tart $f \cdot h \cdot \chi_A$-hoz, így ($|f|$ majoránssal)

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \varphi_j)$ tart $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f \cdot h \cdot \chi_A)$-hoz. Tehát

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(Ff)(x) \cdot h(x) \cdot \chi_A(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot h(x) \cdot \chi_A(x)\, dx,$$

azaz azt kaptuk, hogy

$$0 = \int\limits_A ((G(Ff) - f) \cdot h) = \int\limits_A |G(Ff) - f|$$

minden véges mértékű $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra. Innen azonnal $G(Ff) = f$ λ-m.m. □

7.7.19. Következmény. *A fentiekhez szóról szóra hasonlóan adódik, hogy ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olyan függvény, amelyre $Gf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $F(Gf) = f$ λ-m.m.*

7.7.20. Definíció. Az $F : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ operátort **Fourier-operátor**nak, a $G : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ operátort pedig **inverz Fourier-operátor**nak nevezzük.

A fenti megadás szerinti F és G operátorok persze nem pontosan egymás inverzei, hanem (egyelőre) csak a fenti tétel feltételei mellett megfordításai egymásnak. Az alább következő kiterjesztéssel azonban némileg több is mondható.

F mint $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ unitér operátor (Plancherel-tétel)

Az alábbiakban a Fourier-operátort az $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ térről kiterjesztjük az $L^2(\mathbb{R}^n)$ Hilbert-térre unitér operátorként. Természetesen nem is várható, hogy ezt a kiterjesztett operátort az $L^2(\mathbb{R}^n)$-beli függvényeken ugyanaz a definiáló integrál állítsa elő mint az eredeti operátort az $L^1(\mathbb{R}^n)$-beli függvényeken. De ha integrálként nem is, de integrálok $L^2(\mathbb{R}^n)$-beli limeszeként mégis elő tudjuk állítani a kiterjesztett operátort. Erről szól ez a paragrafus.

7.7.21. Állítás. *Tetszőleges $f, g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ esetén*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (Ff) \cdot \left(\overline{Fg}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \cdot \overline{g}.$$

Bizonyítás. A már bizonyítottak szerint ($Ff \in L^1(\mathbb{R}^n)$ miatt)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (Ff) \cdot \left(\overline{Fg}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (Ff) \cdot G\overline{g} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(Ff) \cdot \overline{g} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \cdot \overline{g}.$$ □

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.7.22. Következmény. *Minden* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ *esetén* $\|Ff\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

7.7.23. Lemma. *Minden* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *függvényhez van olyan* $(f_j) \subseteq C_c^2(\mathbb{R}^n)$ *sorozat, hogy egyidejűleg* $f_j \xrightarrow{L^1} f$ *és* $f_j \xrightarrow{L^2} f$.

Bizonyítás. A $(\chi_{j\cdot\mathcal{B}^o} \cdot f)$ sorozat a Lebesgue-tétel miatt triviálisan L^1-normában is, L^2-normában is tart f-hez. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor van olyan j index, hogy

$$\|f - \chi_{j\cdot\mathcal{B}^o} \cdot f\|_{L^1}, \|f - \chi_{j\cdot\mathcal{B}^o} \cdot f\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Most az előző szakaszban foglaltak értelmében van olyan $g \in C_c^2(j \cdot \mathcal{B}^o)$ függvény, hogy

$$\|\chi_{j\cdot\mathcal{B}^o} \cdot f - g\|_{L^2(j\cdot\mathcal{B}^o)} < \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \sqrt{\lambda^{(n)}(j \cdot \mathcal{B}^o)}\right)}.$$

Persze ekkor a Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből

$$\|\chi_{j\cdot\mathcal{B}^o} \cdot f - g\|_{L^1(j\cdot\mathcal{B}^o)} \leq \sqrt{\lambda^{(n)}(j \cdot \mathcal{B}^o)} \cdot \|\chi_{j\cdot\mathcal{B}^o} \cdot f - g\|_{L^2(j\cdot\mathcal{B}^o)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\|f - g\|_{L^1}, \|f - g\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Innen az állítás triviális. □

7.7.24. Tétel. *Tetszőleges* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *esetén is*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Ff) \cdot \overline{(Fg)} = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \overline{g}.$$

Bizonyítás. A fenti lemma miatt vannak olyan $(f_j), (g_j) \subseteq C_c^2(\mathbb{R}^n)$ sorozatok, hogy mind L^1-, mind pedig L^2-normában f_j tart f-hez, g_j pedig g-hez. Ezért (f_j) és (g_j) $\|\cdot\|_{L^2}$-Cauchy-sorozatok, így a legutóbbi következmény miatt (Ff_j) és (Fg_j) is $\|\cdot\|_{L^2}$-Cauchy-sorozatok, azaz $L^2(\mathbb{R}^n)$ teljessége miatt L^2-normában konvergálnak egy φ, illetve egy $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ függvényhez. A Riesz-lemma miatt feltehető (ellenkező esetben egy részsorozatra térve), hogy (Ff_j) pontonként m.m. tart φ-hez, illetve (Fg_j) ψ-hez.

Ugyanakkor minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$|(Ff)(x) - (Ff_j)(x)| \leq \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-i\cdot\langle x|y\rangle} \cdot (f(y) - f_j(y)) \right| dy =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \|f - f_j\|_{L^1} \to 0,$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

tehát Ff_j pontonként tart Ff-hez. Hasonlóan Fg_j pontonként tart Fg-hez. Emiatt $\varphi = Ff$ λ-m.m., illetve $\psi = Fg$ λ-m.m. Ezért aztán (Ff_j) L^2-normában tart Ff-hez, és (Fg_j) is Fg-hez. Most a legutóbbi állításból minden j-re

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Ff_j) \cdot \overline{(Fg)} = \int_{\mathbb{R}^n} f_j \cdot \overline{g_j},$$

így $f_j \xrightarrow{L^2} f$, $g_j \xrightarrow{L^2} g$, $Ff_j \xrightarrow{L^2} Ff$, $Fg_j \xrightarrow{L^2} Fg$ miatt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Ff) \cdot \overline{(Fg)} = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \overline{g}. \qquad \square$$

7.7.25. Következmény. *Minden $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ esetén $Ff \in L^2(\mathbb{R}^n)$, sőt $\|Ff\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.*

7.7.26. Tétel (Plancherel)**.** *Az $F : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap$ $\cap C(\mathbb{R}^n)$ operátor egyértelműen kiterjeszthető egy $\widehat{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ unitér operátorrá, továbbá minden $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ függvényre*

$$\widehat{F}f = \operatorname*{LIM}_{j\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{j\cdot\mathcal{B}} e^{-i\cdot\langle\cdot|y\rangle} \cdot f(y)\, dy$$

(ahol LIM *az $L^2(\mathbb{R}^n)$-beli sorozatlimeszt jelenti: **L**imes **I**n **M**ean).*

Bizonyítás. A 3.2.13. Tétel szerint az $F : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{L^2})$-folytonos lineáris operátor egyértelműen terjeszthető ki egy $\widehat{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ folytonos lineáris operátorrá. Most tetszőleges $f \in$ $\in L^2(\mathbb{R}^n)$ és $j \in \mathbb{N}$ esetén $\chi_{j\cdot\mathcal{B}} \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, továbbá $\chi_{j\cdot\mathcal{B}} \cdot f \xrightarrow{L^2} f$, így

$$\widehat{F}f = \operatorname*{LIM}_{j\to\infty} \widehat{F}(\chi_{j\cdot\mathcal{B}} \cdot f) = \operatorname*{LIM}_{j\to\infty} F(\chi_{j\cdot\mathcal{B}} \cdot f) = \operatorname*{LIM}_{j\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{j\cdot\mathcal{B}} e^{-i\cdot\langle\cdot|y\rangle} \cdot f(y)\, dy.$$

Innen ugyanakkor

$$\left\|\widehat{F}f\right\|_{L^2} = \lim_{j\to\infty} \|F(\chi_{j\cdot\mathcal{B}} \cdot f)\|_{L^2} = \lim_{j\to\infty} \|\chi_{j\cdot\mathcal{B}} \cdot f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

tehát $\widehat{F}$ izometria. Elegendő most már megmutatnunk, hogy $\widehat{F}$ szürjektív is.

Mivel $\widehat{F}$ izometria, ezért képtere is teljes, azaz zárt. Ugyanakkor már az $F : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ operátor képtere is sűrű $L^2(\mathbb{R}^n)$-ben, hiszen egy korábbi következmény szerint minden $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ függvény előáll $f =$ $= Fg$ alakban alkalmas $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ függvénnyel, és azt is tudjuk, hogy $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ sűrű $L^2(\mathbb{R}^n)$-ben. Ha viszont $\widehat{F}$ képtere sűrű is, zárt is, akkor $\widehat{F}$ szürjektív. $\square$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.7.27. Megjegyzés. A fenti tételhez szóról szóra hasonlóan igazolható, hogy az $\left(\widehat{F}\right)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ unitér operátor $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$-re való leszűkítése ugyanaz, mint a G operátor $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$-re való leszűkítése, továbbá minden $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\left(\widehat{F}\right)^{-1} f = \operatorname*{LIM}_{j\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{j\cdot\mathcal{B}} e^{i\cdot\langle\cdot|y\rangle} \cdot f(y)\, dy.$$

Konvolúció $L^1(\mathbb{R}^n)$-en

7.7.28. Megjegyzés. Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, akkor a Fubini-tétel alapján (n db valós integrálra bontással) minden $x \in \mathbb{R}^n$ mellett

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy.$$

7.7.29. Megjegyzés. Ha $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, akkor az $(x,y) \mapsto f(x-y)\cdot g(y)$ függvény triviálisan $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-mérhető, továbbá

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-y)\cdot g(y)|\, d(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\cdot g(y)|\, dxdy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dxdy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(z)|\, dzdy = \\ &= \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1} < +\infty,\end{aligned}$$

következésképp az $(x,y) \mapsto f(x-y)\cdot g(y)$ függvény eleme $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$-nek. Így

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\cdot g(y)|\, dydx = \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1} < +\infty,$$

ezért aztán m.m. $x \in \mathbb{R}^n$ mellett $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\cdot g(y)|\, dy < +\infty$, tehát az $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\cdot g(y)\, dy$ integrál is értelmes és véges értéket definiál.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.7.30. Definíció. Jelölje $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot g(y)\, dy.$$

E paragrafus kezdő megjegyzése miatt minden $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mellett

$$f * g = g * f \text{ m.m.}$$

7.7.31. Megjegyzés. Minden $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$((x,y) \mapsto f(x-y) \cdot g(y)) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

miatt a Fubini-tétel alapján $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Innen a legutóbbi megjegyzésből

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

Ezzel $* : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$, mindkét változójában triviálisan lineáris.

7.7.32. Állítás. *Minden $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Bizonyítás. A Fubini-tételt és e paragrafus kezdő megjegyzését is használva, $\lambda^{(n)}$-m.m. $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x-z) \cdot h(z)\, dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z-y) \cdot g(y)\, dy \cdot h(z)\, dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot g(y-z)\, dy \cdot h(z)\, dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot g(y-z) \cdot h(z)\, dz dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(y-z) \cdot h(z)\, dz dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot (g * h)(y)\, dy = \\
&= (f * (g * h))(x). \quad \square
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

7.7.33. Következmény. *A fenti megjegyzés és állítás miatt* $\left(L^1(\mathbb{R}^n), *\right)$ *Banach-algebra.*

7.7.34. Tétel. *Minden* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *esetén*

$$F(f * g) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \cdot Ff \cdot Fg.$$

Bizonyítás. Az $e^{-i\cdot\langle x|y\rangle} = e^{-i\cdot\langle x|z\rangle} \cdot e^{-i\cdot\langle x|y-z\rangle}$ azonosság miatt minden $x \in$ $\in \mathbb{R}^n$-re

$$\begin{aligned}
F(f * g)(x) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|y\rangle} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z) \cdot g(z)\, dz\, dy = \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|y\rangle} \cdot f(y-z)\, dy \cdot g(z)\, dz = \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|z\rangle} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|y-z\rangle} \cdot f(y-z)\, dy \cdot g(z)\, dz = \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|z\rangle} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|u\rangle} \cdot f(u)\, du \cdot g(z)\, dz = \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot\langle x|z\rangle} \cdot \left(\sqrt{2\pi}\right)^n (Ff)(x) \cdot g(z)\, dz = \\
&= \left(\sqrt{2\pi}\right)^n (Ff)(x) \cdot (Fg)(x). \quad \square
\end{aligned}$$

7.7.35. Megjegyzés. A fenti tételhez szóról szóra hasonlóan adódik, hogy minden $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$G(f * g) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \cdot Gf \cdot Gg.$$

7.7.36. Következmény. *Legyenek* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Ha* $Ff, Fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *akkor* $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *és*

$$Ff * Fg = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \cdot F(f \cdot g).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti megjegyzést az $Ff, Fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvényekre (és használjuk a korábbiakat):

$$G(Ff * Fg) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \cdot G(Ff) \cdot G(Fg) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \cdot f \cdot g.$$

Most $f = G(Ff)$ miatt f korlátos, tehát $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, így a legutóbb kapottakból

$$\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \cdot F(f \cdot g) = F(G(Ff * Fg)) = Ff * Fg. \qquad \square$$

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

© Kánnai Zoltán

© Typotex Kiadó

Irodalomjegyzék

[1] DANCS ISTVÁN – PUSKÁS CSABA: Vektorterek, Aula 2001.

[2] HALMOS, PAUL R.: Mértékelmélet, Gondolat (1983)

[3] TALLOS PÉTER: Dinamikai rendszerek alapjai, Aula Kiadó, Budapest, 1999.

[4] RUDIN, WALTER: Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1974.

[5] RUDIN, WALTER: Functional analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[6] SCHWARTZ, J. T.: Nonlinear functional analysis, Gordon and Breach, 1969.

[7] ALIPRANTIS, C. D., BROWN, D. J., BURKINSHAW, O.: Existence and optimality of competitive equilibria, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.

[8] HOLMES, R. B.: Geometric functional analysis and its applications, Springer-Verlag, New York, 1975.

[9] TYIHONOV A. N. – SZAMARSZKIJ A. A.: A matematikai fizika differenciálegyenletei, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.

[10] SIMON LÁSZLÓ – ELENA A. BADERKO: Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[11] VLAGYIMIROV, V. Sz.: Parciális differenciálegyenletek. Feladatgyűjtemény, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.

www.interkonyv.hu © Kánnai Zoltán