B

Mátrixszámítás es lineáris algebra

A $v_1, \dots, v_n, \quad v_i \in \mathbb{R}, \forall i$ számokból alkotott alábbi formában összerendezett szám n-eseket:

$$v^T = [v_1, \dots, v_n]$$

sorvektoroknak, a v oszlopba rendezett elemeket oszlopvektoroknak nevezzük, jelölésük $v \in \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$.

A $v, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok között értelmezzük az ún. skalárszorzást:

$$v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

aminek geometriai jelentése a v vektor vetülete a w vektorra, azaz $v^T w = |v||w| \cos \alpha$, ahol $|v|, |w|$ a vektorok abszolút értéke, az α pedig a közöttük lévő szög.

Az $a_{11}, \dots, a_{nm}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i, j$ számokat egy $m \times n$ méretű táblázatba rendezve egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixot kapunk:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Egy A mátrix A^T transzponáltját úgy kapjuk meg, hogy felcseréljük a sorait és az oszlopait.

Mátrixok közötti műveletekre vonatkozó szabályok:

- *Összeadás, kivonás*. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ azonos méretű mátrixok. Ekkor $C = A \pm B = B \pm A$ és a C összeg mátrixelemei a megfelelő mátrix elemek összegével (különbségével) azonosak.

- *Szorzás (nem kommutatív).* Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ mátrixok. A szorzatmátrix $C = AB \in \mathbb{R}^{n\times p}$, elemei $c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il}b_{lj}$, azaz a c_{ij} elem az A mátrix i-edik sorának és a B mátrix j-edik oszlopának skalárszorzata.

- *Mátrixinvertálás, determináns:*

  Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix A^{-1} inverzét az

  $$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

  azonossággal definiáljuk, az ennek eleget tevő inverz pedig

  $$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A},$$

  ahol $\det A$ az A matrix determinánsa, az $\operatorname{adj} A$ pedig az adjungáltja. Az adjungált mátrixot úgy képezzük, hogy minden eleméhez hozzárendeljük a neki megfelelő előjeles aldeterminánst.

Látható, hogy az inverz akkor létezik, ha a mátrix determinánsa nem zérus. Az olyan mátrixokat, amelyeknek nem zérus a determinánsa, nemszinguláris mátrixoknak nevezzük.

B.1. feladat

Ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, azaz 2×2-es méretű mátrix esetén

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}. \end{bmatrix}$$

B.2. feladat

Lineáris egyetletrendszerek megoldása ha A nemszinguláris

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0, \quad Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b.$$

Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Belátható, hogy a $\det[\lambda I - A]$ egy n-edfokú polinom. A $\det[\lambda I - A] = 0$ egyenlet gyökeit az A mátrix sajátértékeinek nevezzük. Az algebra alaptétele szerint ennek a polinomnak n számú (általában valós és komplex) gyöke van, amiket $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n$ jelölünk. A $[\lambda_i I - A]v_i = 0, i = 1, \ldots, n$ egyenletben a v_i vektorokat az A mátrix λ_i sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük.

B.3. feladat

Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. A mátrixnak három sajátértéke van, mivel

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

alapján: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. A három sajátértékhez tartozó sajátvektorokat az

$$(A - \lambda I)v = 0$$

egyenlet alapján határozzuk meg. A λ_1 sajátértékhez tartozó v_1 sajátvektor számítása a következő:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -2v_{11} & v_{11} - 2v_{12} + 2v_{13} & v_{12} - v_{13} \end{bmatrix}^T$$

A $\begin{bmatrix} -2v_{11} & v_{11} - 2v_{12} + 2v_{13} & v_{12} - v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixegyenlet megoldása: $v_{11} = 0$, $v_{12} = \alpha$ és $v_{13} = \alpha$ tetszőleges α-val. A v_1-hez tartozó egyik sajátvektor a következő: $v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. A másik két sajátértékhez is kiszámíthatjuk a sajátvektorokat. A v_2-höz tartozó egyik sajátvektor: $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$. A v_3-hoz tartozó egyik sajátvektor a következő: $v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Azaz sajátvektorokat tartalmazó mátrix:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A lineáris algebra alapjai

Az n-elemű vektorokat úgy értelmezhetjük, mint az n-dimenziós euklideszi tér elemeit.[1] A $v_1, v_2, ..., v_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$ skalárszámra $\alpha_1 v_1 + ...\alpha_n v_n = 0$, azaz ha valamennyi $\alpha_\ell = 0, \ell \in [1, ..., n]$. Azt mondjuk, hogy az n lineárisan független v_i vektor kifeszíti az $\mathbb{R}^n$ teret.

A v_i vektorok lineárisan függetlenek, ha a belőlük alkotott vektorok $V = [v_1, ..., v_n]$ mátrixa teljes rangú, azaz $rangV = n$.

Az $m \times n$ méretű mátrixokat úgy tekinthetjük, mint az m-dimenziós euklideszi térről az n-dimenziós euklideszi térre leképező lineáris operátorokat: $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, azaz ha $v \in \mathbb{R}^m$, akkor $Av \in \mathbb{R}^n$.

Ha A mátrix rangja $rangA = r$, akkor A az $\mathbb{R}^n$ vektorokat az r-dimenziós $\mathbb{R}^m$ térre képezi le, és azt mondjuk, hogy $\Im A = \mathbb{R}^r$, azaz $\mathbb{R}^r$ az A lineáris operátor képtere.

Azokat a $v \in \mathbb{R}^n$ vektorokat, melyeket az A mátrix zérus vektorba képezi le, azaz $Av = 0$, az A lineáris operátor magterének nevezzük, és $KerA$-val jelöljük. Tehát ha $v \in KerA \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow Av = 0$. Belátható, hogy a $KerA$ altér dimenziója $dimKerA = n - r$ és $r = rangA$. Az eredményeket lineáris egyenletrendszer megoldásánál használjuk.

A lineáris algebra további tanulmányozására javasoljuk a [15] tankönyvet.

[1] Az n-dimenziós euklideszi tér egy lineáris vektortér, ahol értelmezve van skalárral vett szorzás és vektor összeadás. Azaz, ha $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ és $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, akkor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathbb{R}^n$