Rövid történeti bevezetés

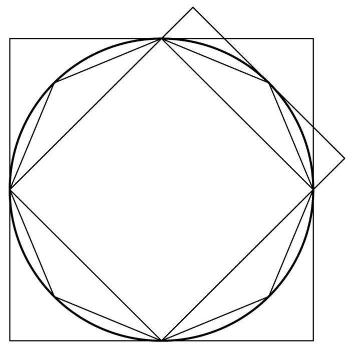
A matematikai analízis problémaköréhez tartozó kérdések az i. e. V. században bukkantak fel, amikor a görög matematikusok különböző görbevonalú idomokat kezdtek vizsgálni. A kör négyszögesítésének problémája (vagyis az egységsugarú körrel azonos területű négyzet szerkesztése csupán körző és vonalzó használatával) a század második felében már népszerű volt, és Hippiasz már ekkor felfedezte a *quadratrix* nevű görbét a probléma egy megoldási kísérleteként. Ugyancsak az i. e. V. század második felében működött Hippokratész, aki számos görbevonalú idom területét meghatározta („Hippokratész holdacskái").

Ami azonban a matematikai analízis alapgondolatát és módszerét illeti, vagyis hogy a keresett mennyiségeket tetszőleges pontossággal való megközelítések segítségével határozzuk meg, ennek a felfedezése Eudoxosz (i. e. 408–355) nevéhez fűződik. Eudoxosz az egész matematikatörténet egyik legeredetibb alakja volt. Felfedezéseinek jelentőségét a görög matematikusok azonnal felismerték és azokat nagy becsben tartották; Euklidész (i. e. 300 körül) az *Elemek* [1] egy teljes könyvét (az ötödiket) Eudoxosz arányelméletének szenteli. Eudoxosz alkotta meg a *kimerítés* módszerét is, és ennek segítségével bizonyította be, hogy a gúla térfogata az azonos magasságú hasáb térfogatának egyharmada. E tétel bizonyításában a nehézséget annak megmutatása jelenti, hogy azonos magasságú, háromszög alapú gúlák térfogata úgy aránylik egymáshoz, mint az alapok területe. Erre alkalmazta Eudoxosz a kimerítés módszerét; ezt a gyönyörű bizonyítást elolvashatjuk az Elemek XII. könyvének 5. tételében.

A kimerítés módszerének alapja az a megállapítás, hogy ha egy mennyiségből elvesszük legalább a felét, a maradékból ismét elvesszük legalább a felét és ezt az eljárást folytatjuk, akkor előbb-utóbb bármely, előre megadott mennyiségnél kisebb mennyiséget kapunk. Ennek a megállapításnak egy variánsát ma *arkhimédészi axiómának* nevezzük, bár maga Arkhimédész elismeri *A gömbről és a hengerről* című könyvében, hogy korábbi matematikusok is megfogalmazták már (és a fenti alakban Euklidésznél is szerepel a X. könyv első tételeként). Az *Elemek* XII. könyvében

Euklidész a kimerítés módszerének tucatnyi alkalmazását adja. Érdemes felidézni az első alkalmazást, amely szerint *két kör területe úgy aránylik egymáshoz, mint az átmérők fölé emelt négyzetek területe*. A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy két hasonló sokszög területe úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő oldalak négyzete (ezt Euklidész természetesen precízen bebizonyítja a korábbi könyvekben). Tekintsünk egy K kört. A körbe írt négyzet a kör területének több, mint a felét tartalmazza, hiszen egyenlő a kör köré írt négyzet felével. A körbe írt szabályos nyolcszög a kör maradék területének több, mint a felét tartalmazza (lásd a 0.1. ábrát). Valóban, a nyolcszög négy egyenlő szárú háromszöggel nagyobb a négyzetnél, és mindegyik egyenlő szárú háromszög nagyobb, mint a megfelelő körszelet fele, hiszen olyan téglalapba foglalható, amely tartalmazza a körszeletet, és amelynek a területe a háromszög területének kétszerese. Ugyanígy adódik, hogy a körbe írt szabályos tizenhatszög a kör nyolcszögön kívüli részének több, mint a felét tartalmazza és így tovább. A fenti megállapítás (vagyis az „arkhimédészi axióma") szerint ebből következik, hogy a K körbe beírhatunk olyan sokszöget, amelynek a területe a kör területét egy tetszőleges, előre megadott mennyiségnél jobban megközelíti.

A bizonyítás befejezését egyszerűbb a mai jelöléseinkkel elmondani. Tekintsünk két kört, K_1-et és K_2-t, és jelöljük t_i-vel, illetve d_i-vel a K_i kör területét, illetve átmérőjét ($i = 1, 2$). Azt kell belátnunk, hogy $t_1/t_2 = d_1^2/d_2^2$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor t_1/t_2 vagy nagyobb, vagy kisebb d_1^2/d_2^2-nél. Elég a $t_1/t_2 > d_1^2/d_2^2$ esetet tekinteni, hiszen a másik esetben $t_2/t_1 > d_2^2/d_1^2$, tehát a két kör felcserélésével az előző esethez jutunk. Mármost, ha $t_1/t_2 > d_1^2/d_2^2$, akkor a



0.1. ábra

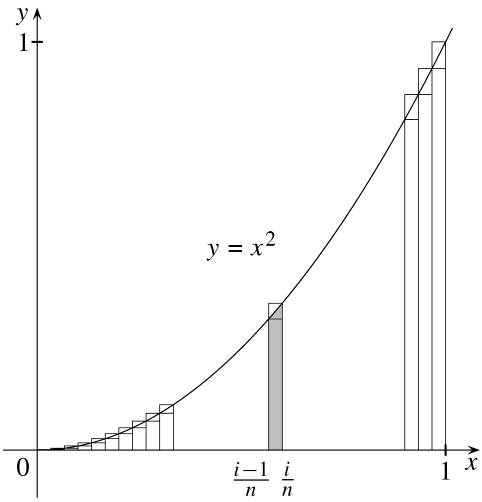
$$\delta = \frac{t_1}{t_2} - \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

mennyiség pozitív. Írjunk K_1-be olyan S_1 sokszöget, amely K_1 területét jobban megközelíti, mint $\delta \cdot t_2$. Ha a K_2-be írt és S_1-hez hasonló sokszög S_2, akkor S_1 és S_2 területének aránya egyenlő a megfelelő oldalak négyzeteinek arányával, ami egyenlő d_1^2/d_2^2-tel (Euklidész ezt is precízen belátja). Ha S_i területe s_i ($i = 1, 2$), akkor tehát

$$\frac{t_1}{t_2} - \delta = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{s_1}{s_2} > \frac{t_1 - \delta \cdot t_2}{t_2} = \frac{t_1}{t_2} - \delta,$$

ami ellentmondás.

A fenti tételt ma úgy fogalmaznánk, hogy a kör területe az átmérő négyzetének konstansszorosa. Ezt a konstanst Arkhimédész határozta meg. *Körmérés* című művében bebizonyítja, hogy a kör területe egyenlő annak a derékszögű háromszögnek a területével, amelynek egyik befogója a kör sugara, másik befogója pedig a kör kerülete. Mai jelöléseinkkel (és a fenti tétel birtokában) ez természetesen nem más, mint az $r^2\pi$ formula, ahol π az egység sugarú kör kerületének a fele.



0.2. ábra

Arkhimédész (i. e. 287–212) minden idők egyik legnagyobb, de az ókornak minden bizonnyal *a* legnagyobb matematikusa volt. Bár munkásságának nagyobb része elveszett, így is hatalmas művet hagyott hátra. A műveiben többek között kiszámította különböző görbevonalú idomok (pl. a parabolaszelet) területét, meghatározta a gömb felszínét és térfogatát, bizonyos spirálok ívhosszúságát, vizsgálta a forgási paraboloidokat és hiperboloidokat. Arkhimédész is a kimerítés módszerét alkalmazta, de bizonyos megfontolásokban ezt kiegészítette azzal, hogy a vizsgált alakzatot nemcsak belülről, hanem kívülről is megközelítette. Lássuk, hogyan határozta meg Arkhimédész ezt a módszert követve a parabola alatti területet! Ismét a modern jelöléseket fogjuk használni.

Az ábrán látható parabola $[0, 1]$-be eső része alatti T területnek (bármely n és $i \le n$ esetén) az i-edik intervallumba eső (satírozott) darabja alulról, illetve felülről becsülhető egy-egy téglalappal, ahonnan – az 1.5.(b) feladat felhasználásával –

$$T > \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} > \frac{1}{3} - \frac{1}{n},$$

illetve

$$T < \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Következésképpen

$$\left|T-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{n}. \tag{0.1}$$

Ez a becslés *semmilyen konkrét n-re* nem ad pontos értéket T-re. Azonban az összes n-re teljesülő *végtelen sok becslés együtt* már azt mutatja, hogy a T terület nem lehet más, mint $1/3$.

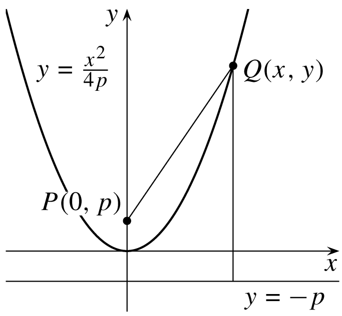
Valóban, ha $T \neq 1/3$ volna, azaz $|T-1/3| = \alpha > 0$, akkor $n \geq 1/\alpha$ esetén (0.1) nem teljesülhetne. Nem marad más lehetőség, mint $|T-1/3| = 0$, tehát $T = 1/3$.

Arkhimédész műve nagyon sokáig nem talált méltó folytatásra. Ennek számos oka lehetett: a megfelelő jelölésrendszer hiánya, a geometriában rögzült szemléletmód, vagy az ókori matematikusok érdeklődésének az az irányultsága, amely idegenkedett a végtelennel és a mozgással kapcsolatos problémáktól. Ezért vagy sem, de az analízis mint széles körben alkalmazható általános módszer, mint tudományág csak akkor született meg, amikor a XVII. századi európai matematikusok célul tűzték ki a mozgás és általában a változás jelenségeinek matematikai leírását. Ezt a leírást olyan problémák megoldása tette szükségessé, melyeket a gyakorlati élet és a fizika szolgáltatott. Néhány példa:

- Határozzuk meg a szabadon eső test sebességét és gyorsulását.
- Írjuk le az elhajított test pályáját. Állapítsuk meg, hogy a test milyen magasra repül és hol esik le.
- Egyéb fizikai folyamatok leírása, pl. egy kihűlő test hőmérsékletének meghatározása. Ha ismerjük a hőmérsékletet két adott időpontban, ki tudjuk-e ebből számítani minden más időpontban?
- Érintőszerkesztési feladatok. Hogyan kell a parabola érintőjét megszerkeszteni egy adott pontban?
- Mi a felfüggesztett lánc alakja?
- Szélsőérték-problémák. Melyik a gömbbe írható maximális térfogatú henger? Két adott pont között melyik az időben legrövidebb út, ha a sebesség a hely függvényében változik? (Az utóbbi kérdést a fénytörés vizsgálata motiválta.)
- Egyenletek közelítő megoldása.
- Hatványok (pl. $2^{\sqrt{3}}$) és a trigonometrikus függvények értékeinek (pl. $\sin 1^\circ$) közelítő kiszámítása.

Kiderült, hogy ezek a kérdések szorosan összefüggnek a térfogat-, terület- és ívhossz-számítási problémákkal, melyeket szintén a gyakorlati élet vetett fel. Végül is e problémák megoldására a XVII. századi matematikusok kidolgoztak egy elméletet, az ún. *kalkulust* vagy mai szóval differenciálszámítást, amelynek három összetevője volt.

Az első összetevő a koordináta-rendszer, amelyet a hagyomány szerint René Descartes (1596–1650) fedezett fel, holott már Apollóniosz (i. e. 262–190) is használta, amikor leírta a kúpszeleteket. De valóban Descartes mutatott rá először, hogy a koordináta-rendszer segítségével geometriai problémák algebraiakká fogalmazhatók át.



0.3. ábra

Tekintsük például a parabolát. Ez definíció szerint azon pontok halmaza, amelyek egy adott ponttól és egy adott egyenestől azonos távolságra helyezkednek el. Ez a merőben geometriai meghatározás a koordináta-rendszer segítségével igen egyszerű algebrai feltétellé alakítható. Legyen ui. az adott pont $P = (0, p)$, az adott egyenes pedig az $y = -p$ egyenletű vízszintes egyenes, ahol p egy rögzített pozitív szám. Az (x, y) pontnak P-től való távolsága $\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$, az adott egyenestől vett távolsága pedig $|y + p|$. Az (x, y) pont tehát akkor és csak akkor van a parabolán, ha $\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$. Ebből négyzetre emeléssel azt kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2,$$

amiből egyszerű átrendezéssel $x^2 = 4py$, illetve $y = x^2/(4p)$ adódik. Ezzel megkaptuk a parabola egyenletét, egy algebrai feltételt, ami pontosan leírja a parabola pontjait: az (x, y) pont akkor és csak akkor van a parabolán, ha $y = x^2/(4p)$.

A kalkulus második összetevője a változó mennyiség fogalma volt. A XVII. századi matematikusok elképzelése szerint a fizikai jelenségekben szereplő mennyiségek az időtől folytonosan függő változók, amelyeknek az értékei pillanatról pillanatra változnak. Ezt az elképzelést a geometriai problémákra is kivetítették. Így minden görbét úgy képzeltek el, mint egy folytonosan mozgó pont pályáját, és így a pont koordinátái szintén az időtől függő változó mennyiségek. Ezen elképzelés az $y = x^2/(4p)$ egyenletet nem úgy értelmezi, hogy ebben y függ x-től, hanem úgy, hogy mind a ketten függenek az időtől, amint az (x, y) pont végigfut a parabolán.

A kalkulus harmadik és egyben legfontosabb összetevője a változó mennyiségek differenciálja volt. Ennek az az intuitív kép a lényege, amely szerint minden változás

„végtelenül kicsiny” változások összegeződéséből keletkezik. Így maga az idő is végtelenül kicsiny időintervallumokból tevődik össze. Az x változó mennyiség differenciálja az a végtelenül kicsiny mennyiség, amennyivel x megváltozik egy végtelenül kicsiny időintervallum elteltével. Az x differenciálját dx-szel jelöljük. Ekkor tehát x értéke egy végtelenül kicsiny időintervallum eltelte után $x + dx$-re változik.

Hogyan működött a kalkulus? Ezt néhány egyszerű példával illusztráljuk.

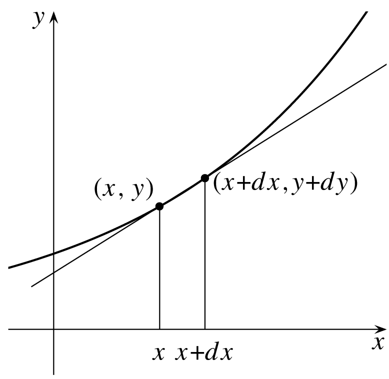
A szélsőérték-feladatok megoldásának az volt a kulcsa, hogy ha az y változó mennyiség egy pillanatban eléri a legnagyobb értékét, akkor ott $dy = 0$. (Hiszen amikor egy elhajított test eléri pályájának a legmagasabb pontját, akkor ott „egy pillanatig” vízszintesen repül. Ha tehát a test y koordinátájának szélsőértéke van, akkor ott $dy = 0$.)

Határozzuk meg a kalkulus segítségével $t - t^2$ legnagyobb értékét! Legyen $x = t - t^2$. Ekkor a maximumnál $dx = 0$. Mármost dx nem más, mint x megváltozása, midőn t értéke $t + dt$-re változik. Ebből

$$dx = \left[(t + dt) - (t + dt)^2\right] - \left[t - t^2\right] = dt - 2t \cdot dt - (dt)^2 = dt - 2t \cdot dt.$$

Itt az utolsó lépésben a $(dt)^2$ tagot „elhanyagolták”, azaz egyszerűen elhagyták azon megfontolás alapján, hogy a $(dt)^2$ mennyiség „végtelenül kisebb”, mint a számolásban szereplő összes többi mennyiség. Így a $dx = 0$ feltétel azt adja, hogy $dt - 2t \cdot dt = 0$, vagyis dt-vel való osztás után $1 - 2t = 0$, azaz $t = 1/2$. A kalkulus művelői ezzel megmutatni vélték, hogy a $t - t^2$ kifejezés $t = 1/2$-nél veszi fel a legnagyobb értékét.

Most lássunk egy érintőszerkesztési feladatot. Az érintési pontban az érintő és a görbe iránya megegyezik. A görbe irányát egy adott (x, y) pontban úgy számíthatjuk ki, hogy a pontot összekötjük a görbe egy „végtelenül közeli” pontjával, és vesszük az így kapott egyenesnek (ami nem más, mint az érintő) a meredekségét. Egy végtelenül kicsiny időintervallum eltelte után az x koordináta $x + dx$-re, az y koordináta pedig $y+dy$-ra változik. Az $(x+dx,\ y+dy)$ pont tehát a görbe egy olyan pontja, amely „végtelenül közel” van (x, y)-hoz. Az (x, y) és $(x+dx,\ y+dy)$ pontokat összekötő egyenes meredeksége



0.4. ábra

$$\frac{(y + dy) - y}{(x + dx) - x} = \frac{dy}{dx}.$$

Ez két differenciál hányadosa, azaz *differenciálhányados.* Azt kaptuk, hogy egy görbe (x, y) pontjában húzott érintő meredeksége nem más, mint a dy/dx differenciálhányados. Ennek kiszámítása nagyon egyszerű.

Vegyük például az $y = x^2$ egyenletű parabolát. Mivel az $(x + dx, y + dy)$ pont is a parabolán fekszik, az egyenletből azt kapjuk, hogy

$$dy = (y + dy) - y = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2 = 2xdx,$$

ahol a $(dx)^2$ tagot ismét „elhanyagoltuk”. Ebből azt kapjuk, hogy $dy/dx = 2x$, tehát az $y = x^2$ egyenletű parabolához az (x, y) pontban húzott érintő meredeksége $2x$. Mármost tekintsük a parabola (a, a^2) pontját. Az érintő meredeksége itt $2a$, tehát az érintő egyenlete

$$y = 2a \cdot (x - a) + a^2.$$

Ez az egyenes az x tengelyt az $a/2$ pontban metszi. A parabola (a, a^2) pontbeli érintőjét tehát úgy szerkeszthetjük meg – vonták le a következtetést a XVII. századi matematikusok –, hogy az $(a/2, 0)$ pontot összekötjük az adott (a, a^2) ponttal.

Végül tekintsük a már tárgyalt területszámítási feladatot. Vegyük ismét az $y = x^2$ egyenletű parabolát, és számítsuk ki annak az A idomnak a területét, amelyet az x tengely $[0, x]$ szakasza, a parabolának az origót és az (x, x^2) pontokat összekötő íve, valamint az $(x, 0)$ és (x, x^2) pontokat összekötő szakasz határol. Jelöljük T-vel a kérdéses területet; ekkor T maga is egy változó mennyiség. Egy végtelenül kicsiny időintervallum eltelte után x értéke $x + dx$-re változik, az A idom tehát egy végtelenül keskeny, dx szélességű és y magasságú „téglalappal” lesz nagyobb. A T terület megváltozása tehát $dT = y \cdot dx = x^2 \cdot dx$.

Keressünk egy olyan z változó mennyiséget, amelynek a differenciálja éppen $x^2 \cdot dx$! Az előbb láttuk, hogy $d(x^2) = 2x \cdot dx$. Egy hasonló számolás azt adja, hogy $d(x^3) = 3x^2 \cdot dx$. Így a $z = x^3/3$ választás megfelel, azaz $dz = x^2 \cdot dx$. Az ismeretlen T mennyiségnek és z-nek tehát ugyanaz a differenciálja: $dT = dz$. Ez azt jelenti, hogy $d(T - z) = dT - dz = 0$, vagyis $T - z$ nem változik, azaz konstans. Ha $x = 0$, akkor T és z mindketten nullával egyenlők, a $T - z$ konstans tehát nulla, vagyis $T = z = x^3/3$. Ezzel – vélték a kalkulus hívei – megmutattuk, hogy az A idom területe $x^3/3$. (Ez az $x = 1$ esetben Arkhimédész fenti tételét adja.)

Láthatjuk, hogy a kalkulus igen hatékony módszer, és sok különböző jellegű probléma megoldására alkalmas. A kalkulust mint önálló rendszert nagy matematikusok sora (Barrow, Cavalieri, Fermat, Kepler és sokan mások) fejlesztették ki, majd Isaac Newton (1643–1727) és G. W. Leibniz (1646–1716) foglalták össze. A XVII. századi matematikusok rávetették magukat a módszerre, és ontották az eredményeket. Így a század végére már megérett az idő egy nagyszabású összefoglaló monográfia megírására. Ez L'Hospital (1661–1704) *Infinitézimál-számítás* (azaz a végtelen kicsiny mennyiségekkel való számolás) című műve volt (1696), amely csaknem 100 évig a téma legfontosabb tankönyve maradt.

A kalkulust kezdettől fogva sok kritika és támadás érte – tegyük hozzá, hogy teljes joggal. A módszer logikai tisztasága nagyon is vitatható volt, mert homályos fogalmakkal dolgozott, és a gondolatmenetei néha zavarosak voltak. Az ókor nagy matematikusai minden bizonnyal borzadva utasították volna el ezeket az okoskodásokat. A fent vázolt, első pillantásra meggyőzőnek tűnő „bizonyítások" is nagyon sok tisztázandó kérdést vetnek fel, amelyek megválaszolása nélkül a kapott eredmények valódisága kérdéses marad. Mert mit is jelent az, hogy végtelenül kicsiny mennyiség? Végül is egy ilyen mennyiség nulla vagy sem? Ha nulla, akkor nem oszthatunk vele a dy/dx differenciálhányadosban. Ha viszont nem nulla, akkor a számolásokban nem hanyagolhatjuk el. Egy ilyen ellentmondás megengedhetetlen egy matematikai fogalom esetében. A szélsőértékek kiszámításának módszere sem világos. Ha el is fogadjuk, hogy a szélsőérték helyén a differenciál nulla (bár ennek az indoklása sem tökéletesen meggyőző), nekünk valójában az állítás megfordítására volna szükségünk: ha a differenciál nulla, akkor szélsőérték van. Ez azonban nem mindig igaz. Hiszen $d(x^3) = 3x^2 \cdot dx = 0$ ha $x = 0$, pedig x^3-nek nincs szélsőértéke 0-ban.

A kalkulussal szemben megfogalmazott kritikában fontos szerepet játszottak a végtelen sorokkal kapcsolatos ellentmondások. Az, hogy végtelen sok szám összegzése (vagy általában a végtelen fogalma) problematikus lehet már Zénón[1] számára világos volt. Ezt Zénón az Akhilleuszról és a teknősbékáról szóló híres paradoxon segítségével mutatta be. Eszerint bármennyire gyorsabban is fut Akhilleusz a teknősbékánál, azt sosem érheti utol, ha a teknősbékának előnyt ad. Ugyanis Akhilleusznak időre van szüksége ahhoz, hogy elérje azt a pontot, ahonnan a teknősbéka indul. De amíg odaér, a teknősbéka már előbbre jut egy újabb pontra. Akhilleusznak ismét időre van szüksége ahhoz, hogy elérje ezt a pontot, mialatt a teknősbéka megint csak egy újabb ponthoz ér, és így tovább. Tehát Akhilleusz sosem éri utol a teknősbékát.

Persze mindnyájan tudjuk, hogy valójában Akhilleusz utoléri a teknősbékát, és könnyen ki is számíthatjuk, hogy ez mikor következik be. Tegyük fel, hogy Akhilleusz 10 métert fut másodpercenként, míg a teknősbéka 1 métert mászik ugyanennyi idő alatt. (A számolás egyszerűsítése érdekében egy különlegesen gyors teknősbékát állítunk ki Akhilleusz ellen.) Ha a teknősbéka 1 méter előnnyel indul, akkor x másodperc elteltével Akhilleusz $10x$ méternyire, a teknősbéka pedig $1 + x$ méternyire lesz a kezdőponttól. A $10x = 1 + x$ egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy $x = 1/9$ másodperc múlva Akhilleusz utoléri a teknősbékát.

---

[1] Zénón (i.e. 333–262) görög filozófus

Mindezt Zénón is tudta; ő csak azt akarta kimutatni, hogy a végtelen sok összetevőből álló mozgás gondolati megragadása lehetetlen és ellentmondásokra vezet. Zénón gondolatmenetét számokban kifejezve úgy okoskodhatunk, hogy Akhilleusznak először meg kell tennie 1 métert, hogy elérje a teknősbéka indulási pontját: ezt $1/10$ másodperc alatt teszi meg. Ezalatt a teknősbéka $1/10$ métert tesz meg. Ezt Akhilleusznak is meg kell tennie, és ehhez $1/100$ másodpercre van szüksége. Ezalatt a teknősbéka $1/100$ métert tesz meg, amelyet Akhilleusz $1/1000$ másodperc alatt tesz meg és így tovább. Végül is Akhilleusznak végtelen sok távot kell megtennie, és ehhez összesen $(1/10)+(1/100)+(1/1000)+\ldots$ másodpercre van szüksége. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=\frac{1}{9}. \tag{0.2}$$

Ezzel Zénón paradoxonát tulajdonképpen arra a kérdésre vezettük vissza, hogy végtelen sok szakaszt egymás mellé illesztve kaphatunk-e korlátos szakaszt, vagy másképpen fogalmazva, hogy végtelen sok szám összege lehet-e véges?

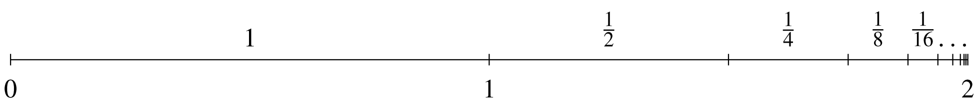
Ha egy végtelen sor tagjai mértani sorozatot képeznek, akkor az összegét egyszerű számtani műveletek segítségével is meghatározhatjuk – legalábbis látszólag. Tekintsük az $1+x+x^2+\ldots$ sort, ahol x egy tetszőleges valós szám. Ha $1+x+x^2+$ $+\ldots=A$, akkor

$$A=1+x\cdot(1+x+x^2+\ldots)=1+x\cdot A,$$

amiből $x\neq 1$ esetén az

$$1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x} \tag{0.3}$$

összefüggés adódik. Ha (0.3)-ba $x=1/10$-et helyettesítünk és mindkét oldalból kivonunk 1-et, akkor megkapjuk (0.2)-t. Az $x=1/2$ speciális esetben pedig az $1+1/2+1/4+\ldots=2$ összefüggést kapjuk, amely az alábbi ábra alapján is azonnal látható.



0.5. ábra

A (0.3) összefüggés azonban furcsa eredményeket is tud produkálni. Ha (0.3)-ba $x=-1$-et helyettesítünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}. \tag{0.4}$$

Ez az eredmény két szempontból is különös. Egyrészt törtszámot kaptunk, holott egész számokat adtunk össze. Másrészt a sor tagjait párosával zárójelezve az eredmény

$$(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots = 0.$$

Sőt, ha a zárójelezést a második tagnál kezdjük, akkor

$$1-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1-0-0-\ldots = 1$$

adódik. Tehát az $1-1+1-1+\ldots$ sor összegére három szám: $1/2$, 0 és 1 is pályázik.

Ezzel ellentétes problémába ütközünk, ha az $1+1+1+\ldots$ sor összegét keressük. Ha az összeg értéke y, akkor

$$1+y = 1+(1+1+1+\ldots) = 1+1+1+\ldots = y.$$

Ilyen y szám azonban nem létezik! Mondhatnánk, hogy az összeg ∞ kell, hogy legyen, de kizárhatjuk-e a $-\infty$ összeget? Ez ellen szólna, hogy pozitív tagokat összeadva nem kaphatunk negatív számot, de biztos ez? Ha ugyanis (0.3)-ba $x = 2$-t helyettesítünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$1+2+4+\ldots = -1, \tag{0.5}$$

tehát – látszólag – pozitív számok összegeként mégis kaphatunk negatív értéket.

Ezek a különös, lehetetlen, sőt ellentmondásos eredmények sok vita tárgyát képezték egészen a XIX. század elejéig. Az ellentmondások feloldására fantasztikus elképzelések születtek; az $1+2+4+\ldots = -1$ összefüggéssel kapcsolatban például volt, aki úgy vélte, hogy a számegyenes bizonyára „újra kezdődik”, és a végtelen után ismét a negatív számok következnek.

A kalkulus körüli vita egészen a XIX. század végéig zajlott, és nemegyszer filozófiai síkra terelődött. Berkeley kimutatta, hogy a kalkulus állításai szemernyivel sem tudományosabbak, mint a hit igazságai, Hegel pedig amellett érvelt, hogy a kalkulus belső problémáinak megoldására csakis a filozófia hivatott.

Ezeket a belső problémákat végül mégis a matematikusok oldották meg a XIX. században, amennyiben a kalkulus intuitív, de homályos és ellentmondásos fogalmait precízen definiált matematikai fogalmakkal helyettesítették. A változó mennyiség fogalmát a függvény fogalmával, a differenciált a határértékkel, a differenciálhányadost pedig a deriválttal váltották fel. A végtelen sorok összegét Augustin Cauchy (1789–1857) úgy definiálta mint a részletösszegek határértékét[2]. Ennek a tisztázási

[2] Ennek részleteit lásd a 6. fejezetben.

folyamatnak az eredményeképpen – amelyben Cauchy, Karl Weierstrass (1815–1897) és Richard Dedekind (1831–1916) vállaltak úttörő szerepet – a XIX. század végére a **differenciál- és integrálszámítás** (röviden **analízis**) elérte a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel.

Az analízis precíz elméletének kidolgozása az újkori nyugati kultúra egyik legnagyobb szellemi teljesítménye volt. Ne csodálkozzunk hát, ha ezt az elméletet – főleg az alapjait, mindenekelőtt pedig annak centrális fogalmát, a határértéket – nehéznek találjuk. Hogy megkönnyítsük a határérték fogalmának elsajátítását, először a sorozatok határértékét tárgyaljuk. De mindenekelőtt meg kell ismerkednünk azokkal az alapokkal, amelyekre az analízis mint a matematika egy fejezete épül.