Lehetséges esetek lineáris programozási feladatoknál

Készítette: Dr. Ábrahám István

A modell felvételekor előforduló esetek

A matematikai modellek mindhárom eleménél több eset lehetséges.

Az induló feltételeknél

1. A döntési változók folytonosak és nem negatívak. Jelölése általában: $x \geq 0$.

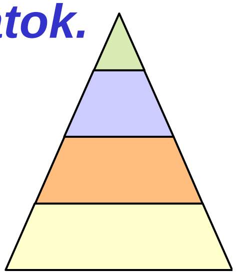
A gyakorló feladataink többségénél ez az eset fordul elő.

2. A döntési változók vagy nem negatív, vagy csak pozitív egészek lehetnek.

Jelölése : $x_i \in N$, vagy $x_i \in N^+$. ***Ezek az integer (egészértékű) feladatok.***

3. A döntési változók csak a 0 vagy 1 értékeket vehetik fel.

Jelölése: x_i értéke 0 vagy 1, illetve x_i bináris. ***Ezek a bináris feladatok.***



4. A döntési változók bármilyen értéket felvehetnek.

Jelölése: $x_i \in R$. ***Előjel korlátozás nélküli feladatok.***

5. A döntési változók adott intervallumokba eshetnek, és adott típusúak.

A döntési változóra vonatkozó határokat a korlátozó feltételeknél vesszük fel.

A korlátozó feltételeknél

A modell korlátozó feltételeit rendezett alakban írjuk fel. A relációk: ≤, =, ≥.

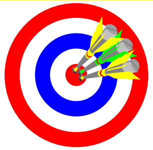
Ez azt jelenti, hogy a relációkban a változók („a betűk”) a baloldalon, konstansok, amelyekre a nemnegatívitás is előírás, a jobboldalon legyenek.

A lineáris programozási modellek formuláiban a változók elsőfokon szerepelnek.

Egyes gépi megoldások akkor is működnek, ha nem tartjuk be a fentieket.

A korlátozó feltételek felvételénél kerüljük a felesleges feltételeket és igyekezzünk kiszűrni az ellentmondásokat.

A célfüggvénynél



Az optimális megoldás célja lehet maximum, minimum, vagy egy adott érték.

1. A célfüggvény lineáris. ***Feladataink többségében ez az eset fordul elő.***
2. Hiperbolikus a célfüggvény. ***Két függvény hányadosa a célfüggvény.***

   Gazdasági feladatoknál gyakori, hogy valamire vonatkoztatjuk a célt.
3. Tetszőleges függvény lehet a célfüggvény.

   Az ilyen feladatok megoldására többnyire speciális szoftverek szolgálnak.
4. Több célfüggvénye lehet a feladatnak.

LP feladatok megoldásánál előforduló esetek

A lineáris programozási feladatoknál a matematikai modell felvétele után először a lehetséges megoldások L halmazát keressük.

Ezután a célfüggvény optimumát igyekszünk előállítani.

Mindkét lépésnél találkozunk különböző esetekkel.

1.) Az L halmaz üres, nincs lehetséges megoldás

Akkor következik be ez az eset, ha a korlátozó feltételek ellentmondóak, az általuk meghatározott halmazoknak nincs közös részük.

Példa: Ha az egyik feltétel: $\mathbf{2x_1+3x_2 \leq 6.}$

a másik pedig: $\mathbf{2x_1+3x_2 \geq 9.}$

Ez rajzban a határoló egyenestől az origó felé eső pontokat jelenti.

Ez az előző határoló egyenessel párhuzamos,de az „a felett" lévő egyenestől az origóval ellenkező irányba eső pontokat adja meg.

A két halmaznak ekkor nyilván **nincs közös eleme**.

A két feltétel közötti ellentmondás „ránézésre" látszik: ugyanaz a mennyiség nem lehet egyszerre 6-nál kisebb és 9-nél nagyobb.

A feladatnak ilyen esetben **nincs megoldása**, tehát optimum sincs.

Megjegyzés: a normál LP feladatnak mindig van lehetséges megoldása.

2.) Van lehetséges megoldás, de nincs optimum

Ez az eset például akkor következhet be, ha a lehetséges megoldások halmaza csak alulról korlátos és a feladatban maximum a cél.

Geometriailag: a célfüggvény alapegyenesének „emelésekor” minden határnál nagyobb értékeket kapunk: a célfüggvényre nincs felső korlát.

Más esetek is lehetségesek, például akkor, ha az L nyitott szögtartomány és a célfüggvény egyenesek a szögtartományba esnek.

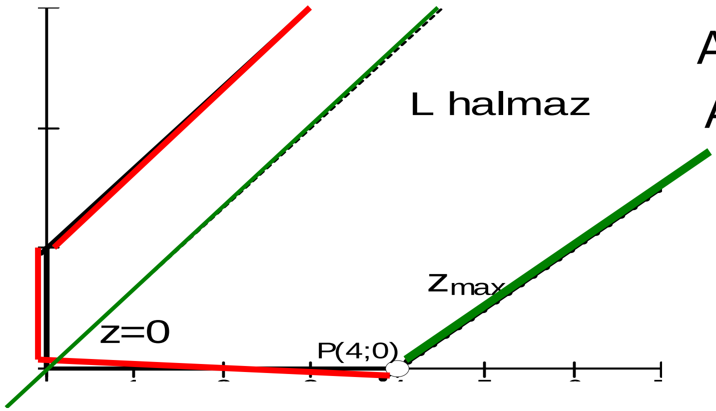
3.) Nem egy optimális megoldás létezik (kétváltozós eset)

Előfordul, hogy az optimális megoldást jelentő célfüggvény egyenes a lehetséges megoldások halmazán egy szakasszal, vagy egy félegyenessel esik egybe.

a.) Az optimális megoldást **egy szakasz** pontjai jelentik

Ekkor a szakasz pontjait a végpontokba mutató vektorok konvex lineáris kombinációjával írhatjuk fel, az általános megoldás: $\underline{x}_o=\lambda\underline{x}_{o1}+(1-\lambda)\underline{x}_{o2}$, ahol $0 \le \lambda \le 1$.

b.) Az optimális megoldást **egy félegyenes** pontjai jelentik. **Például:**



Az **L** felülről nem korlátos, a célfüggvény: $\mathbf{z=2x_1-4x_2}$

Az optimum: $\mathbf{z_{max}}$ a **P(4;0)** pontból kiinduló félegyenes.

A félegyenes egyenlete:

$$\underline{x}_0=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$ ahol esetünkben $\lambda \ge \mathbf{0}$.

A fejezet tárgyalását befejeztük.