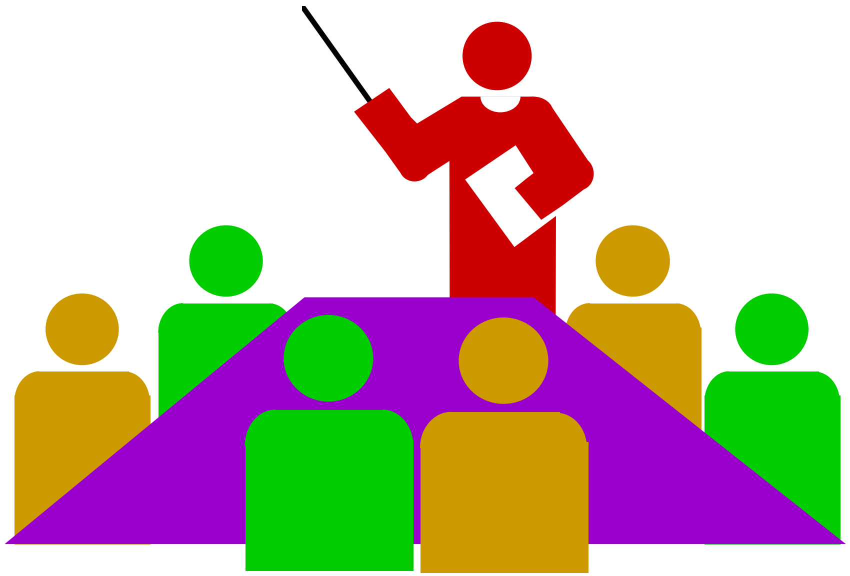
Lineáris programozás 3

Az általános feladat algebrai megoldása



Készítette: Dr. Ábrahám István

A normál feladat szimplex módszerrel történő megoldása (emlékeztetőül):

Példa: Oldjuk meg a következő feladatot:

$\underline{x} \geq \underline{0} \quad \underline{A}\cdot\underline{x} \leq \underline{b}$ **és** $z=\underline{c}^*\underline{x}\rightarrow \max$, ahol $\underline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{b}=[\,90\ \ 80\ \ 50\,]^*$, $\underline{c}^*=[\,2\ \ 3\ \ 2\ \ 2\,]$.

Megoldás: **Az induló tábla felvételéhez nem kell a matematikai modellt felírni.**

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b
u_1	1	1	0	1	90
u_2	0	1	1	1	80
u_3	1	$\boxed{1}$	1	0	50
$-z$	2	3	2	2	0

B_1	x_1	u_3	x_3	x_4	b
u_1	0	-1	-1	1	40
u_2	-1	-1	0	$\boxed{1}$	30
x_2	1	1	1	0	50
$-z$	-1	-3	-1	2	-150

A generáló elemet (a pozitív cél-érték felett) úgy választjuk, hogy a z értéke a lehető legjobban nőjön.

Az új táblázatok:

B_2	x_1	u_3	x_3	u_2	b
u_1	$\boxed{1}$	0	-1	-1	10
x_4	-1	-1	0	1	30
x_2	1	1	1	0	50
$-z$	1	-1	-1	-2	-210

B_{13}	u_1	u_3	x_3	u_2	b
x_1	1	0	-1	-1	10
x_4	1	-1	-1	0	40
x_2	-1	1	$\boxed{2}$	1	40
$-z$	-1	-1	0	-1	-220

B_4	u_1	u_3	x_2	u_2	b
x_1	.	.	.	.	30
x_4	.	.	.	.	60
x_3	.	.	.	.	20
$-z$	-1	-1	0	-1	-220

Alternatív optimum van:

$\underline{x}_{01}=[\,10\ \ 40\ \ 0\ \ 40\,]^*$ $\underline{u}_{01}=\underline{0}$

$\underline{x}_{02}=[\,30\ \ 0\ \ 20\ \ 60\,]^*$ $\underline{u}_{01}=\underline{0}$

$z_o=220$

Az új táblázatban (a betűcsere végrehajtása után):

1.) A generáló elem helyére írjuk a reciprokát.

2.) A generáló elem oszlopát szorozzuk a reciprok (-1)-szeresével.

3.) A generáló elem sorát szorozzuk a reciprokkal, megkapjuk a q értékeket.

4.) Új koo.=régi koo. - q·(a gen. elem oszlopából megfelelő régi koo.)

Speciális esetek a normál feladat megoldásakor

1.) Alternatív optimum

Előfordul, hogy pozitív érték már nincs a –z sorában, de van egy vagy több nulla.

Ha nulla fölött választhatunk generáló elemet, akkor újabb optimális megoldást, alternatív optimumot kapunk.

A célfüggvény értéke természetesen változatlan marad.

Ha egy LP feladatnak alternatív optimális megoldásai vannak, akkor **végtelen sok** optimális megoldás létezik, amelyeket az $\underline{\mathbf{x}}_{o1}$, $\underline{\mathbf{x}}_{o2}$, …, $\underline{\mathbf{x}}_{on}$ optimális megoldások **konvex lineáris kombinációja** szolgáltat.

Tehát ha: $\underline{c}^*\underline{x}_{o1}=\underline{c}^*\underline{x}_{o2}=\ldots=\underline{c}^*\underline{x}_{on}=z_o$, **akkor az általános megoldás:** $\underline{x}_o=\lambda_1\cdot\underline{x}_{o1}+\lambda_2\cdot\underline{x}_{o2}+\ldots+\lambda_n\cdot\underline{x}_{on}$, **ahol** $\lambda_i \geq 0$ **és** $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

Az előző feladatban: $\underline{x}_{01}=[\,10\;\;40\;\;0\;\;40\,]^*\quad \underline{u}_{01}=\underline{0}$

$\underline{x}_{02}=[\,30\;\;0\;\;20\;\;60\,]^*\quad \underline{u}_{01}=\underline{0}\quad z_o=220.$

Az általános megoldást az „alapmegoldások" konvex lineáris kombinációjával kapjuk:

$$\underline{x}_0=\lambda\underline{x}_{01}+(1-\lambda)\underline{x}_{02}\qquad (0\leq\lambda\leq 1)\qquad \underline{u}_0=\underline{0}\quad \text{és } z_o=220.$$

Az általános megoldás folytonos változók esetén végtelen sok megoldást jelent, hiszen a λ paraméter az adott határok között végtelen sok értéket vehet fel.

2.) Degeneráció

Degeneráció a szimplex algoritmus alkalmazása során akkor áll elő, ha a $\underline{b}$ oszlopában nulla van.

Ez bekövetkezhet: a.) Ha maga a matematikai modell ilyen.

b.) A generáló elem választásánál több sorban is adódik ugyanaz a szűkkeresztmetszet.

Ha lehetséges, a degenerációt jó elkerülni, mert végtelen ciklusba keveredhetünk.

3.) Nincs optimális megoldás

Ha a szimplex táblázatban a célfüggvény sorában van még pozitív szám, de felette generáló elemet már nem választhatunk, akkor a feladatnak nincs optimuma.

Példa: Oldjuk meg a következő feladatot szimplex módszerrel:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 3 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 1 \\ 3x_1 - 8x_2 \qquad - 2x_4 &\leq 7 \end{aligned}$$

$$z = 4x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 11x_4 \rightarrow \max$$

Megoldás: Induló tábla felvétele, majd a többi táblázat:

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b
u_1	1	−2	1	2	3
u_2	0	−3	2	$\boxed{1}$	1
u_3	3	−8	0	−2	7
−z	4	−9	3	11	0

B_1	x_1	x_2	x_3	u_2	b
u_1	1	$\boxed{4}$	−3	−2	1
x_4	0	−3	2	1	1
u_3	3	−14	4	2	9
−z	4	24	−19	−11	−11

B_2	x_1	u_1	x_3	u_2	b
x_2	1/4	1/4	−3/4	−1/2	1/4
x_4	3/4	3/4	−1/4	−1/2	7/4
u_3	13/2	7/2	−13/2	−5	25/2
−z	−2	−6	−1	1	−17

A **B_2 táblázatban a -z sorában egy pozitív elem található, azonban ez az oszlop nem tartalmaz pozitív generáló elemet, így a feladatnak nincs optimuma, a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.**

A kétfázisú szimplex módszer

A normál LP feladatnak jellegéből adódóan mindig van lehetséges megoldása, például a triviális $\underline{x}=\underline{0}$, $\underline{u}=\underline{b}$, $z=0$.

Az általános feladatnál első lépésében el kell jutnunk a feladat egy lehetséges bázismegoldásához.

A második fázis az optimalizálás, ami úgy történik, mint a normál feladatoknál.

A módosított normál feladat lehetséges bázismegoldása és optimuma

A módosított normál feladat mátrixaritmetikai alakja:

$$\begin{array}{ll} \underline{x} \geq \underline{0} & \\ \underline{A}_1\underline{x} = \underline{b}_1 & \underline{b}_1 \geq \underline{0} \\ \underline{A}_2\underline{x} \leq \underline{b}_2 & \underline{b}_2 \geq \underline{0} \\ z=f(\underline{x})=\underline{c}^*\underline{x}\rightarrow \max. & \end{array}$$

Az egyenletrendszerré alakításban eltérésvektort alkalmazunk az $\underline{A}_1\underline{x}=\underline{b}_1$ formulánál is.

Ezt az egységes tárgyalásmód érdekében tesszük.

Ez az eltérésvektor speciális, komponensei minden esetben nullák.

Az ilyen eltérésvektort „kalappal” különböztetjük meg a „normál” eltérésvektortól.

A feltételrendszer kanonikus alakja tehát:

$$\underline{A}_1\underline{x} + \underline{\hat{u}}_1 = \underline{b}_1 \quad (\underline{\hat{u}}_1 = \underline{0})$$

$$\underline{A}_2\underline{x}+\underline{u}_2=\underline{b}_2 \; (\underline{u}_2 \geq \underline{0})$$

Tekintsük az eredeti módosított normál feladatból képzett normál feladatot:

$$\underline{A}_1\underline{x} \le \underline{b}_1$$
$$\underline{A}_2\underline{x} \le \underline{b}_2 \quad (\underline{x}, \underline{b}_1, \underline{b}_2 \ge \underline{0})$$
$$\hat{z} = \underline{1}^* \underline{A}_1\underline{x} \to \max$$

A „zé kalap”célfüggvényt másodlagos célfüggvénynek nevezzük.

Az $\underline{1}^*\underline{A}_1$ az $\underline{A}_1$ mátrix soraiban lévő elemek összege. Normál feladatot akkor kapunk, ha a ẑ maximuma éppen $\underline{1}^*\cdot\underline{b}_1$.

Példa: A következő módosított normál feladathoz írjuk fel a kanonikus alakot és a másodlagos célfüggvényt:

$$\underline{x} \ge \underline{0}$$
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 15 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & = & 20 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & \le & 50 \\
4x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & \le & 60
\end{array}$$

$$z = x_1 + 2x_3 - 5x_4 \to \max.$$

A kanonikus alak:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & + & \hat{u}_1 & = & 15 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & + & \hat{u}_2 & = & 20 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & u_3 & = & 50 \\
4x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & + & u_4 & = & 60
\end{array}$$

A másodlagos célfüggvény: $\hat{z} = x_2 + x_3 + 2x_4$

A másodlagos célfüggvényben az együtthatók a „kalapos” eltérésváltozókat tartalmazó sorokban lévő megfelelő együtthatók összeadásával adódnak.

Tétel: A módosított normál feladatnak akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha a belőle képzett normál feladatban a másodlagos célfüggvény sorában **nincs pozitív szám** és a célfüggvény értéke $\underline{1}^*\underline{b}_1$.

A tételt nem bizonyítjuk.

A módosított normál feladat szimplex módszerrel történő megoldásában először a lehetséges megoldásig kell eljutnunk.

Ennek elérésére csak a másodlagos célfüggvénnyel számolunk addig:

1.) amíg annak sorából „el nem tűnnek” a pozitív számok,

2.) és a másodlagos célfüggvény értéke $\underline{1}*\underline{b}_1$ nem lesz.

Ha ezt nem tudjuk elérni, akkor az eredeti módosított normál feladatnak nincs lehetséges megoldása és így természetesen optimuma sem.

A maximum keresése ezután a normál feladatnál megismert szimplex módszerrel történik.

A szimplex induló tábla a normál feladatéhoz hasonló. Annyi az eltérés, hogy a legalsó sor a másodlagos célfüggvény sora.

Ahol a modellben egyenlőségek voltak, a táblázatban a megfelelő sorokban sorkezdőként kalapos eltérésváltozókat szerepeltetünk.

Az elsődleges célfüggvény sorában szereplő értéket az egyes bázistranszformációk során ki kell számolni.

Az elsődleges célfüggvény sorában szereplő értékek lehetnek negatívak is. A generáló elem választását a másodlagos célfüggvény határozza meg.

Példa: Oldjuk meg a 6. lapon közölt módosított normál feladatot!

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 15 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & \leq & 50 \\ 4x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 60 \end{array}$$

$$z = x_1 + 2x_3 - 5x_4 \to \max.$$

Az induló táblában kalapos eltérésváltozók és másodlagos célfüggvény is szerepelnek:

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b
$\hat{u}_1$	0	1	0	1	15
$\hat{u}_2$	0	0	1	1	20
u_3	1	2	1	0	50
u_4	4	–1	0	1	60
$-z$	1	0	2	–5	0
$-\hat{z}$	0	1	1	2	0

Egyszerűbb az az eset, hogy ha nem 0-t írunk a másodlagos célfüggvény sorába utolsó számként, hanem 35-öt és azt figyeljük, hogy az egymást követő bázis-transzformációk során ez az érték 0-ra lefogy-e, vagy sem.

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b
$\hat{u}_1$	0	1	0	1	15
$\hat{u}_2$	0	0	$\boxed{1}$	1	20
u_3	1	2	1	0	50
u_4	4	–1	0	1	60
$-z$	1	0	2	–5	0
$-\hat{z}$	0	1	1	2	35

A generáló elem választásnál csak a másodlagos célfüggvényre figyelünk a lehetséges megoldás eléréséig.

(Természetesen a szűkkeresztmetszetre ügyelve.)

Válasszuk a generáló elemet a **3.** oszlopból!

Az új tábla:

B_1	x_1	x_2	$\hat{u}_2$	x_4	b
$\hat{u}_1$	0	1	0	1	15
x_3	0	0	1	1	20
u_3	1	2	–1	–1	30
u_4	4	–1	0	1	60
–z	1	0	–2	–7	–40
$-\hat{z}$	0	1	–1	1	15

Újabb generáló elem választás és bázistranszformáció:

B_2	x_1	$\hat{u}_1$	$\hat{u}_2$	x_4	b
x_2	0	1	0	1	15
x_3	0	0	1	1	20
u_3	1	–2	–1	–3	0
u_4	4	1	0	2	75
–z	1	0	–2	–7	–40
$-\hat{z}$	0	–1	–1	0	0

A B_2 táblázat már lehetséges megoldást ad: a másodlagos célfüggvény sorában nincs pozitív szám, és annak értéke értéke éppen 35.

(U.i. kiinduláskor az elérendő értéket írtuk a táblázatba és az fogyott le 0-ra).

A kalapos eltérésváltozók is nullák, hiszen a táblázatban oszlopfőre kerültek, így a bázismegoldásban mindkettő értéke 0.

Ha az optimum meghatározása a célunk, akkor az első fázis után a másodlagos célfüggvény sorát elhagyjuk és elhagyhatók a kalapos oszlopok is:

B_2	x_1	x_4	b
x_2	0	1	15
x_3	0	1	20
u_3	$\boxed{1}$	–3	0
u_4	4	2	75
–z	1	–7	–40

Az optimális megoldás:

B_3	u_3	x_4	b
x_2	0	1	15
x_3	0	1	20
x_1	1	–3	0
u_4	–4	14	75
–z	–1	–4	–40

Leolvasás:
$\underline{x}_o$=[0 15 20 0]*
$\underline{u}_o$=[0 0 0 75]*
és z_o=40.

A gyakorlatban az eljárást tömörebben írjuk: az oszlopfőre kerüléskor a kalapos változók oszlopai elhagyhatók, ha „csak” optimum számítás a célunk:

B_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b
$\hat{u}_1$	0	1	0	1	15
$\hat{u}_2$	0	0	$\boxed{1}$	1	20
u_3	1	2	1	0	50
u_4	4	-1	0	1	60
$-z$	1	0	2	-5	0
$-\hat{z}$	0	1	1	2	35

B_1	x_1	x_2	x_4	b
$\hat{u}_i$	0	$\boxed{1}$	1	15
x_3	0	0	1	20
u_3	1	2	-1	30
u_4	4	-1	1	60
$-z$	1	0	-7	-40
$-\hat{z}$	0	1	1	15

B_2	x_1	x_4	b
x_2	0	1	15
x_3	0	1	20
u_3	$\boxed{1}$	-3	0
u_4	4	2	75
$-z$	1	-7	-40
$-\hat{z}$	0	0	0

B_3	u_3	x_4	b
x_2	0	1	15
x_3	0	1	20
x_1	1	-3	0
u_4	-4	14	75
$-z$	-1	-4	-40

Megjegyzés: a B_2 tábla degenerált, de ez az optimumszámítást nem zavarja.

Az általános LP feladat megoldása

Az általános LP feladat megoldását a módosított normál feladat megoldására vezetjük vissza.

Az általános feladat mátrixaritmetikai alakja:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A_1 x} = \underline{b_1} \quad \underline{b_1} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A_2 x} \leq \underline{b_2} \quad \underline{b_2} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A_3 x} \geq \underline{b_3} \quad \underline{b_3} \geq \underline{0}$$
$$z = f(\underline{x}) = \underline{c}^* \underline{x} \to \max.$$

Két dolgot kell először megtennünk:

1.) a feltételi egyenlőtlenségeket egyenlőségekké alakítjuk.

(Ha a baloldal nagyobb-egyenlő, akkor elveszünk $\underline{v}$-t.)

2.) célfüggvényt átalakítjuk úgy, hogy a keresett optimum maximum legyen.

Az általános feladat célfüggvényénél is mindig maximumot keresünk.

Példa: Szimplex módszerrel oldjuk meg a következő feladatot:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$-2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq -24$$
$$x_1 - x_2 \leq -8$$
$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 8$$

$$z=f(\underline{x}) = -6x_1 + 8x_2 \rightarrow \min$$

Szükséges a feltételek átírása, hiszen a jobboldalon negatív számok nem szerepelhetnek:

$$2x_1-3x_2+2x_3 \leq 24$$
$$-x_1+x_2 \geq 8$$

(Mindkét oldalt szoroztuk (-1)-gyel.)

Felvesszük a kanonikus alakot:

$$2x_1-3x_2+2x_3+u_1=24$$
$$-x_1+x_2-v_2+\hat{u}_1 =8$$
$$x_1+2x_2-2x_3 +u_3=8$$

A második feltételnél:

A $-v_2$ beírásával egyenlőséget kaptunk. Ekkor az eltérésváltozó „kalapos”.

A célfüggvényt szorozzuk –1-gyel: $-z=6x_1 - 8x_2 \rightarrow \max$

$$z= - 6x_1+8x_2.$$

Rendezve: $z+6x_1 - 8x_2=0$

A szimplex táblázatba nem $-z$-t, hanem z-t írunk. Az induló tábla és az első optimális megoldás táblázata:

	x_1	x_2	x_3	v_2	b			x_1	u_3	v_2	b
u_1	2	-3	2	0	24		u_1	2	1	-1	40
$\hat{u}_2$	-1	1	0	-1	8	....	x_3	$-3/2$	$-1/2$	-1	4
u_3	1	$\boxed{2}$	-2	0	8		x_2	-1	0	-1	8
z	6	-8	0	0	0		z	-2	0	-8	64
$-\hat{z}$	-1	1	0	-1	8						

Alternatív optimum van:

$\underline{x}_{o1}$=[0 8 4]* z_o=64 $\underline{u}_{o1}$=[40 0 0]*

$\underline{x}_{o2}$=[0 8 24]* $\underline{u}_{o2}$=[0 0 40]*

Az általános megoldás:

$$\underline{x}_o=\lambda\underline{x}_{o1}+(1-\lambda)\underline{x}_{o2} \quad \underline{u}_o=\lambda\underline{u}_{o1}+(1-\lambda)\underline{u}_{o2} \quad 0\leq\lambda\leq1 \quad z_o=64$$

(A közbeeső számításokat nem részletezzük.)

A fejezet tárgyalását befejeztük.