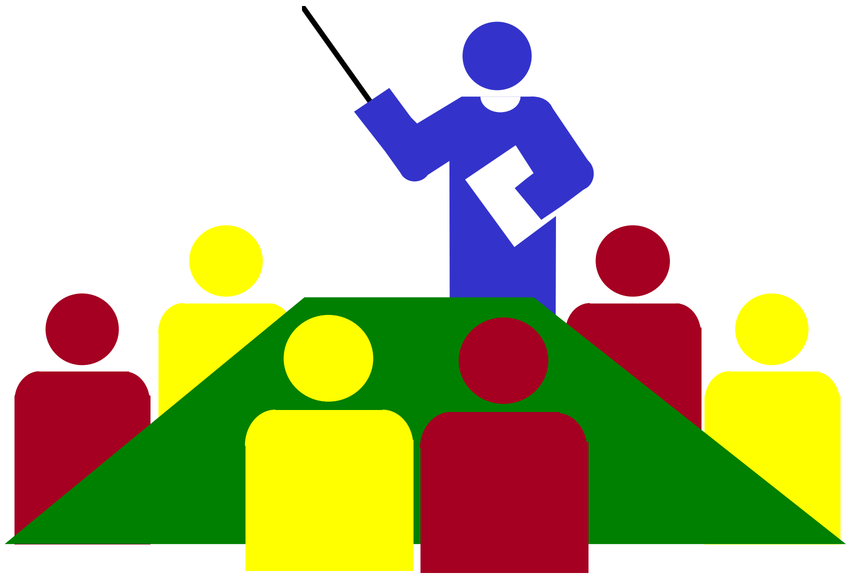
Lineáris programozás 2

Algebrai megoldás



Készítette: Dr. Ábrahám István

A lineáris programozási feladatok mátrixaritmetikai alakjai

Az LP feladatok algebrai megoldása függ a feladat típusától. *Tekintsük át ezeket!*

Normál feladat

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A} \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \quad (\underline{b} \geq \underline{0})$$
$$z = \underline{c}^* \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$$

Az algebrai megoldást a normál feladattal kezdjük.

Fokozatosan jutunk el az általános lineáris programozási problémák megoldásáig.

Módosított normál feladat

A módosított normál feladat csak annyiban tér el a normál feladattól, hogy a feltételek között egyenlőségek is vannak.

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A}_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1 \quad (\underline{b}_1 \geq \underline{0})$$
$$\underline{A}_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2 \quad (\underline{b}_2 \geq \underline{0})$$
$$z = \underline{c}^* \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$$

Példa:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50$$
$$4x_1 - x_2 + x_4 \leq 60$$
$$x_2 + x_4 = 15$$
$$x_3 + x_4 = 20$$
$$z = x_1 + 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

Általános lineáris programozási feladat

Az általános LP feladatban a feltételi relációk között "=" is és "≥" is lehet.

A cél vagy maximum, vagy minimum, közösen: $z \to$ optimum.

A matematikai modell:

$$\begin{aligned} &\underline{x} \geq \underline{0} \\ &\underline{A}_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1 \quad (\underline{b}_1 \geq \underline{0}) \\ &\underline{A}_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2 \quad (\underline{b}_2 \geq \underline{0}) \\ &\underline{A}_3 \cdot \underline{x} \geq \underline{b}_3 \quad (\underline{b}_3 \geq \underline{0}) \\ &z = \underline{c}^* \cdot \underline{x} \to \text{opt.} \end{aligned}$$

Az algebrai megoldáshoz a jobboldalon álló $\underline{b}_i$ vektoroknak nemnegatívaknak kell lenniük.

A célfüggvénynek pedig a maximumát kell keresnünk.

Példa: Egy lineáris programozási feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned} &\underline{x} \geq \underline{0} \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50 \\ &x_2 + x_4 = 15 \\ &-x_3 - x_4 = -20 \\ &-4x_1 + x_2 - x_4 \geq -60 \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 30 \\ &z = -x_1 - 2x_3 + 5x_4 \to \min \end{aligned}$$

A 3. és 4. feltételt, valamint a célfüggvényt szorozni kell (-1)-gyel, így a modell az algebrai megoldáshoz:

$$\begin{aligned} &\underline{x} \geq \underline{0} \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50 \\ &x_2 + x_4 = 15 \\ &x_3 + x_4 = 20 \\ &4x_1 - x_2 + x_4 \leq 60 \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 30 \\ &-z = x_1 + 2x_3 - 5x_4 \to \max \end{aligned}$$

A szimplex módszer

Az LP feladatok megoldására algebrai eszközöket, a **szimplex módszert** alkalmazhatjuk. A metódus az egyenletrendszerek megoldására épül.

A geometriai megoldáshoz hasonlóan először a lehetséges megoldásokat számoljuk ki, majd az optimum meghatározása következik.

A lehetséges megoldások halmaza, a bázismegoldás

A szimplex módszerrel először a **normál feladatot** oldjuk meg:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A} \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \quad (\underline{b} \geq \underline{0})$$
$$z = \underline{c}^* \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$$

A korlátozó feltételek egyenlőtlenségeit egyenletekké alakítjuk úgy, hogy a baloldalakhoz nemnegatív számokat (u_i eltérésváltozókat) adunk:

$$\underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b} \quad (\underline{u} \geq \underline{0})$$

Az $\underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$ egyenletrendszert (vektoregyenletet) kanonikus formulának hívjuk.

Példa: Adjunk lehetséges megoldásokat a normál feladatban szereplő változókra:

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 280$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$
$$x_2 \leq 50$$
$$z = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \max.$$

A korlátozó feltételekhez tartozó kanonikus formula:

$$3x_1 + 4x_2 + u_1 = 280$$
$$3x_1 + 2x_2 + u_2 = 240$$
$$x_2 + u_3 = 50$$

Az egyenletrendszer speciális: az egyes egyenletekben az u_i eltérésváltozóknak mindig 1 az együtthatója az i-edik egyenletben, a többiben pedig 0.

Az egyenletrendszer együttható mátrixában az u_i oszlopvektorok egységvektorok.

A bázistranszformációval történő megoldást rögtön ezek bevonásával kezdhetjük.

A bázistranszformáció induló táblázata:

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	b
	3	4	$\boxed{1}$	0	0	280
	3	2	0	$\boxed{1}$	0	240
	0	1	0	0	$\boxed{1}$	50

Ha a bázistranszformációt az u_1 bevonásával kezdjük, akkor az u_1 a táblázat első sorának első eleme lesz és a többi koordináta változatlan marad.

Hasonlóan nem változnak a koordináták az u_2 és az u_3 bevonásával, tehát a táblázatunk:

	x_1	x_2	b
u_1	3	4	280
u_2	3	2	240
u_3	0	1	50

Ezt a táblázatot tekinthetjük a kanonikus formulához tartozó speciális egyenletrendszer induló táblázatának.

Az egyenletrendszerünk egy lehetséges bázismegoldása a táblázatból leolvasható: u_1=280, u_2=240, u_3=50 és x_1=x_2=0.

(Bázismegoldás: „a be nem vont változók értékei nullák”.)

Újabb lehetséges megoldásokat akkor kapunk, ha az x_i -ket bevonjuk a bázisba:

Például ha az x_2-t bevonjuk:

	x_1	x_2	b
u_1	3	4	280
u_2	3	2	240
u_3	0	$\boxed{1}$	50

	x_1	u_3	b
u_1	3	–4	80
u_2	3	–2	140
x_2	0	1	50

Az új bázismegoldások:

u_1=80, u_2=140, x_2=50

A példánkhoz gazdasági háttér tartozhat: két terméket gyártunk 3 erőforrás felhasználásával, adottak: a beépülés, a kapacitások…

Az induló tábláról leolvasható bázismegoldás megfelel annak, hogy a termelést még nem kezdtük el, az $x_1=x_2=0$ és az eltérésváltozók a kapacitások adott értékeivel egyenlők.

	x_1	x_2	b
u_1	3	4	280
u_2	3	2	240
u_3	0	1	50

Következik a bázisvektor csere, például az x_2 bevonásával:

	x_1	x_2	b
u_1	3	4	280
u_2	3	2	240
u_3	0	$\boxed{1}$	50

	x_1	u_3	b
u_1	3	−4	80
u_2	3	−2	140
x_2	0	1	50

A gazdasági jelentés miatt nem hajthatunk végre olyan cserét, amely után a b, a kapacitásvektor oszlopában negatív érték lenne, azaz a generáló elem mindig pozitív.

Ha újabb (lehetséges) bázismegoldást akarunk kapni a következő táblázatból és és x_1-et szeretnénk bevonni, akkor a 3. koordinátát nyilván nem választhatjuk generáló elemnek (mert az 0).

A gazdasági jelentés miatt szükséges, hogy az új táblázatban ne legyen a b oszlopában negatív szám, így a generáló elemet a szűkkeresztmetszetnél kell választani.

A szűkkeresztmetszet: ahol a $\frac{b_i}{a_{ij}}$ hányados a legkisebb.

Esetünkben: $\frac{80}{3} < \frac{140}{2}$

Tehát az x_1 első koordinátáját kell generáló elemnek választanunk. Így:

	x_1	u_3	b
u_1	$\boxed{3}$	−4	80
u_2	3	−1	140
x_2	0	1	50

	u_1	u_3	b
x_1	1/3	−4/3	80/3
u_2	−1	2	60
x_2	0	1	50

A táblázataink:

	x_1	x_2	b		x_1	u_3	b		u_1	u_3	b
u_1	3	4	280	u_1	$\boxed{3}$	-4	80	x_1	$1/3$	$-4/3$	$80/3$
u_2	3	2	240	u_2	3	-2	140	u_2	-1	2	60
u_3	0	$\boxed{1}$	50	x_2	0	1	50	x_2	0	1	50

Leolvashatók az új bázis-megoldások: x_1=80/3, x_2=50 és u_1=0, u_2=60, u_3=0.

A bázismegoldásokat vektorként felírva: **$\underline{x}$=[80/3 50]*** és **$\underline{u}$=[0 60 0]*.**

Ha újabb bázismegoldást akarunk, például az u_3 kicserélésével, akkor mivel a szűkkeresztmetszet 3-nál van, ennek kell lennie a generáló elemnek.

A lineáris programozási feladatban célfüggvény is van.

Az algebrai megoldásban mindig ennek a maximumát keressük.

Így a bázistranszformáció során alkalmazható és alkalmazandó cseréket további feltételek határozzák meg.

A lineáris programozási feladatok geometriai megoldásában alkalmazott eljárás-hoz hasonlóan az algebrai megoldásban a lehetséges megoldások közül ki kell választani az optimálist.

Ezt úgy érjük el, hogy a kanonikus egyenletrendszer táblázatához még egy sort csatolunk, a célfüggvény sorát.

A normál feladat megoldása szimplex módszerrel

A <u>szimplex módszer lényege</u>: olyan bázismegoldásokat keresünk, amelyeknél a célfüggvény értéke nagyobb, mint amennyi az előző bázismegoldásnál volt.

A normál LP feladat:

$\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{b}} \quad (\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{b}} \geq \underline{\mathbf{0}})$

$\mathbf{z}=\underline{\mathbf{c}}^*\underline{\mathbf{x}}\to\mathbf{max}.$

A kanonikus alak:

$\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{b}}. \quad (\underline{\mathbf{u}} \geq \underline{\mathbf{0}})$

$-\mathbf{z}+\underline{\mathbf{c}}^*\underline{\mathbf{x}}=\mathbf{0}.$

Felvesszük a kanonikus alakhoz tartozó megoldó táblázatot:

	x_1	x_2	...	x_n	u_1	u_2	...	u_m	$-z$	b
	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	0	b_2
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	0	b_m
	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0	1	0

A „rövidebb alak” az egységvektorok bevonása után:

	x_1	x_2	...	x_n	b
u_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
u_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
u_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
$-z$	c_1	c_2	...	c_n	0

Ezt a táblázatot nevezzük a normál feladat <u>szimplex induló táblázatának</u>.

Új bázismegoldásokat akkor kapunk, ha a generáló elem pozitív és betartjuk a szűkkeresztmetszet választás szabályát.

A célfüggvényben maximum a cél, ezért olyan bázismegoldást kell választanunk, amelyben a z értéke nagyobb lesz, mint az előző bázismegoldásban.

Ezt úgy érhetjük el, hogy a generáló elemet pozitív c_j érték felett választjuk.

Például: Ha generáló elem az $\mathbf{u_i}$ és $\mathbf{x_j}$ cseréjét generálja, az új táblázatunk:

	x_1 ... u_i ... x_n	b
u_1		$b_1 - qa_{1j}$
...		...
x_j		q
...		...
u_m		$b_m - qa_{mj}$
$-z$		$0 - qc_j$

Az induló tábla bázismegoldásában a z értéke 0 volt.

A tábláról leolvasva: $\mathbf{-z=0-qc_j}$, azaz $\mathbf{z=qc_j}$.

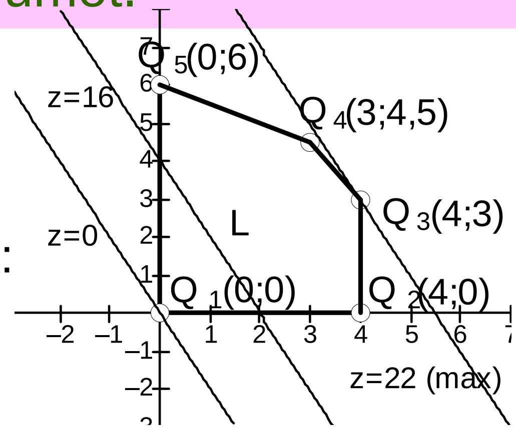
A $\mathbf{qc_j}$ akkor lesz nagyobb **0**-nál, ha $\mathbf{c_j}$ pozitív, ugyanis a **q** mindenképpen pozitív.

Az eljárásunk **véges sok** lépésig folytatható, tehát ha elértük, hogy a **–z** sorában nincs olyan $\mathbf{c_j}$ érték, amely pozitív lenne, akkor a célfüggvény értéke tovább nem növelhető, elértük a maximumot.

Példa: Oldjuk meg szimplex módszerrel:

$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$3x_1+2x_2 \leq 18$$
$$4x_1 \leq 16$$
$$2x_1+4x_2 \leq 24$$
$$z=4x_1+2x_2 \rightarrow \max.$$

A feladat grafikus megoldását korábban láttuk:



$\mathbf{x_o=[4\ \ 3]^*}$

$\mathbf{u_o=[0\ \ 0\ \ 4]^*}$

$\mathbf{z_o=22}$

A kanonikus alak:

$$3x_1+2x_2+u_1=18$$
$$4x_1+u_2=16$$
$$2x_1+4x_2+u_3=24$$
$$-z+4x_1+2x_2=0$$

A szimplex induló táblázat:

B_0	x_1	x_2	b
u_1	3	2	18
u_2	4	0	16
u_3	2	4	24
$-z$	4	2	0

Válasszunk generáló elemet az első oszlopból (szűkkeresztmetszet!!!):

B_0	x_1	x_2	b	B_1	u_2	x_2	b
u_1	3	2	18	u_1	$-3/4$	2	6
u_2	$\boxed{4}$	0	16	x_1	$1/4$	0	4
u_3	2	4	24	u_3	$-2/4$	4	16
$-z$	4	2	0	$-z$	-1	2	-16

A bázismegoldás az eredeti LP feladatnak egy lehetséges, de még nem optimális megoldása:

$\underline{x}_{b1}=[\ 4\ \ 0\ ]^*$, $\underline{u}_{b1}=[\ 6\ \ 0\ \ 16\ ]^*$, $z_{b1}=16.$

Észrevehetjük azt is, hogy a geometriai megoldásban ezzel a bázismegoldással a $Q_2(4;0)$ extremális pontra léptünk.

A célfüggvény értéke növekszik, ha a pozitív célérték felett, a 2. oszlopban választunk generáló elemet:

B_0	x_1	x_2	b	B_1	u_2	x_2	b	B_2	u_2	u_1	b
u_1	3	2	18	u_1	$-3/4$	$\boxed{2}$	6	x_2	$-3/8$	$1/2$	3
u_2	$\boxed{4}$	0	16	x_1	$1/4$	0	4	x_1	$1/4$	0	4
u_3	2	4	24	u_3	$-2/4$	4	16	u_3	1	-2	4
$-z$	4	2	0	$-z$	-1	2	-16	$-z$	$-1/4$	-1	-22

A táblázatunk **optimális:** a –z sorában nincs pozitív elem: $\underline{x}_o=[\ 4\ \ 3\ ]^*$, $\underline{u}_o=[\ 0\ \ 0\ \ 4\ ]^*$ **és** $z_o=22.$

Összefoglalás

1.) A normál feladat algebrai megoldását a matematikai modellből, az ahhoz tartozó kanonikus alakból felírt táblázattal, az induló táblával kezdjük.

A kanonikus alak: $\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{b}}.\quad (\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{u}} \geq \underline{\mathbf{0}})$

$-\mathbf{z}+\underline{\mathbf{c}}^*\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$

Az induló tábla:

	$\underline{x}^*$	
$\underline{u}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
$-z$	$\underline{c}^*$	0

2.) Az egymást követő bázismegoldások kiszámolása.

Ehhez: a.) Generáló elem választás:

Generáló elemet nemnegatív célfüggvényérték felett választunk.

Generáló elem csak pozitív szám lehet.

Generáló elemet a szűkkeresztmetszetnél választhatunk.

b.) Végrehajtjuk a teljes bázistranszformációt.

3.) Az eljárás befejezése

a.) Ha a $-z$ sorában nincs pozitív szám, akkor elértük a maximumot.

b.) Ha a $-z$ sorában van pozitív szám, de nem tudunk „kívánt tulajdonságú” generáló elemet választani, akkor nincs maximuma a feladatnak.

A fejezet tárgyalását befejeztük.