A lineáris tér

Készítette: Dr. Ábrahám István

A lineáris tér fogalma

A fejezetben a gyakorlati alkalmazásokban használt legfontosabb fogalmakat, összefüggéseket tárgyaljuk.

Adott egy **L halmaz**, amiben **azonos típusú oszlopvektorok** vannak.

Értelmezünk a vektorok között két műveletet: az **összeadást** és a vektorok λ **skalárral való szorzását**. $(\lambda \in R)$

Az L halmazt lineáris térnek nevezzük, ha fennáll:

A 1.) Az L halmaz az **összeadásra nézve zárt**, azaz ha $\underline{a} \in L$ és $\underline{b} \in L$, akkor $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c} \in L$.

2.) Az összeadás **kommutatív**: $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$.

3.) Az összeadás **asszociatív**: $\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})=(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$.

4.) Létezik az L-ben összeadásra vonatkozóan **semleges elem**: $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$.

5.) Minden elemnek van **ellentettje** L-ben: van olyan $-\underline{a}$ eleme L-nek, hogy $\underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}$.

B 6.) Ha $\underline{a} \in L$ és λ tetszőleges valós szám, akkor $\lambda \cdot \underline{a} \in L$. (Az L **zárt a szorzásra nézve**.)

7.) A skalárral való szorzás **kommutatív**: $\lambda \cdot \underline{a}=\underline{a} \cdot \lambda$.

8.) A skalárokkal történő szorzás **asszociatív**: $(\lambda\mu)\underline{a}=\lambda(\mu\underline{a})= \lambda\mu\underline{a}$.

9.) Létezik az L-ben a szorzásra vonatkozóan **semleges elem** (ez a λ=1): $1 \cdot \underline{a} =\underline{a}$.

C 10.) Érvényes a **disztributív** tulajdonság: $\lambda(\underline{a}+\underline{b})=\lambda\underline{a}+\lambda\underline{b}$.

11.) A **disztributivitás skalárokra** is igaz: $(\lambda+\mu)\underline{a}=\lambda\underline{a}+\mu\underline{a}$.

Az L halmaz elemei lehetnek **különböző** matematikai objektumok (**sorvektorok**, **mátrixok**, valós együtthatós **polinomok**, páros, vagy páratlan **függvények**, stb.)

Példa: Lineáris teret alkotnak-e a valós számok halmaza felett a diagonális mátrixok a mátrixok összeadására és a valós számmal való szorzásra? A választ indokoljuk!

Megoldás: Legyen $\underline{\mathbf{A}} = < \mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2} \ldots \mathbf{a_n} >$ és $\underline{\mathbf{B}} = < \mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2} \ldots \mathbf{b_m} >$.

***I. eset**: ha $n \neq m$, akkor a mátrixok nem adhatók össze, így lineáris térről sem lehet szó.*

***II. eset:** ha $n=m$, akkor igazak a következők:*

1. $\underline{A}+\underline{B}$ is diagonális.
2. Az összeadás kommutatív.
3. Az összeadás asszociatív.
4. Létezik zéruselem: $\underline{0}$.
5. Minden $\underline{A}$-hoz van $-\underline{A}$.
6. $\lambda\underline{A}$ is diagonális ($\lambda \in R$).
7. A szorzás kommutatív: $\lambda\underline{A}=\underline{A}\lambda$.
8. A skalárral való szorzás asszociatív.
9. A $\lambda=1$ semleges (neutrális) elem.
10. Disztributivitás: $\lambda(\underline{A}+\underline{B})= \lambda\underline{A}+\lambda\underline{B}$.
11. Igaz így is: $(\lambda+\mu)\underline{A}=\lambda\underline{A}+\mu\underline{A}$.

A diagonális mátrixok tehát lineáris teret alkotnak, ha azonos elemszámúak.

Ha az L-t **n komponensű** oszlopvektorok alkotják, akkor a lineáris teret L_n-nel jelöljük.

Az L_n-ben tett megállapításaink átvihetők más elemekből álló lineáris terekre.

Lineáris kombináció

Legyen az $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \ldots, \underline{A}_k$ k darab azonos, $m \cdot n$ típusú mátrix és legyenek adottak a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valós számok (skalárok).

Ekkor a $\lambda_1\underline{A}_1+\lambda_2\underline{A}_2+\ldots+\lambda_k\underline{A}_k$ kifejezést az $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \ldots, \underline{A}_k$ mátrixoknak a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal való lineáris kombinációjának nevezzük.

A lineáris kombinációt írhatjuk "**szummás**" alakban is:

$$\lambda_1\underline{A}_1+\lambda_2\underline{A}_2+\ldots+\lambda_k\underline{A}_k = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\underline{A}_i, \text{ ahol } \lambda_i \in R.$$

A lineáris kombináció eredménye egy $m \cdot n$ típusú mátrix, hiszen csupa ilyen jelzőszámú mátrixokkal végeztünk műveletet.

Példa: Legyenek adottak az $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$ mátrixok és a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ skalárok:

$$\underline{A}_1=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -9 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_2=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_3=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ -8 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1=2,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=0.$$

$$\text{Ekkor } \underline{B} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\underline{A}_i = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -9 \end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ -8 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 4 & 21 & -30 \end{bmatrix}$$

Természetesen lineáris kombináció **vektorokkal** is végrehajtható.

Lineáris függetlenség

Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszer vektorait lineárisan függetlennek mondjuk, ha lineáris kombinációjuk csak akkor eredményezhet nullvektort, ha a lineáris kombinációban minden skaláregyüttható 0.

Tehát a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i = \underline{0}$ összefüggés csak akkor áll fenn, ha minden $\lambda_i=0$.

Példa: **Vizsgáljuk meg, hogy az $\underline{a}=[\,2\ \ 3\,]^*$ és a $\underline{b}=[\,-1\ \ 4\,]^*$ vektorok lineárisan függetlenek-e.**

A megoldáshoz a két vektor tetszőleges lineáris kombinációit nézzük meg:

$$\lambda_1\underline{a}+\lambda_2\underline{b}=\underline{0}. \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R})$$

Részletesebben: $\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + (-1)\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ha két vektor egyenlő, akkor a megfelelő komponenseiknek is meg kell egyezniük:

$$2\lambda_1-\lambda_2=0$$
$$3\lambda_1+4\lambda_2=0$$

Az egyenletrendszernek csak a $\lambda_1=\lambda_2=0$ a megoldásai, azaz a vektorok lineárisan függetlenek.

Ha egy vektorrendszer vektorai nem lineárisan függetlenek, akkor a vektorrendszert **lineárisan összefüggőnek** nevezzük.

Tehát az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszer összefüggő, ha a vektorok lineáris kombinációja nullvektort ad akkor is, ha nem minden együttható 0.

Példa: **Vizsgáljuk meg, hogy az $\underline{a}=[\ 2\ \ 3\ ]^*$, a $\underline{b}=[\ -1\ \ 4\ ]^*$ és a $\underline{c}=[\ 0\ \ 11\ ]^*$ vektorok lineárisan függetlenek-e.**

Észrevesszük (vagy megoldjuk a $\lambda_1\underline{a}+\lambda_2\underline{b}=\underline{c}$ vektoregyenletet), hogy $\underline{c}=\underline{a}+2\underline{b}$, vagyis:

$$\underline{a}+2\underline{b}-\underline{c}=\underline{0}$$

Eszerint lineáris kombinációval a nullvektort elő lehet állítani úgy, hogy van az együtthatók között 0-tól különböző, azaz a 3 vektor lineárisan nem független.

Belátható, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszer akkor és csak akkor összefüggő, ha van olyan eleme, amely előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Kompatibilitás

Ha a $\underline{b}$ vektor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszer vektoraiból lineáris kombinációval előállítható, akkor a $\underline{b}$ vektor kompatíbilis az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorrendszerrel.

Példa: **Az $\underline{a}=[\ 2\ \ 3\ ]^*$ és $\underline{b}=[\ -1\ \ 4\ ]^*$ vektorokkal a $\underline{c}=[\ 0\ \ 11\ ]^*$ vektor kompatíbilis, hiszen – mint láttuk – felírható: $\underline{c}=\underline{a}+2\underline{b}$.**

Kompatíbilis: „összemérhető”, „kikombinálható”.

Bázis

Ha egy vektoregyüttes (összes lehetséges) lineáris kombinációja lineáris teret állít elő (generál), akkor vektoregyüttest generátor rendszernek nevezzük.

Elnevezés: A bázis olyan speciális generátor rendszer, amely lineárisan független vektorokból áll.

Példa: Az $\underline{a}=[\ 2\ \ 3\ ]^*$ és $\underline{b}=[\ -1\ \ 4\ ]^*$ vektorokból álló rendszer az $\mathbf{L_2}$ lineáris térben **bázis**, ugyanis az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ függetlenek és a két vektorral az $\mathbf{L_2}$ bármely vektora lineáris kombinációval előállítható.

Ha a bázis csupa egységvektorból áll, akkor azt **triviális bázisnak** nevezzük.

Példa: Az $\underline{e}_1=[\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]^*$, $\underline{e}_2=[\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]^*$ és $\underline{e}_3=[\ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^*$ vektorrendszer triviális bázis, mert:

- a három vektor generátor rendszert alkot, hiszen lineáris kombinációjukkal az $\mathbf{L_3}$ tér bármely $\underline{\mathbf{v}}=[\ \mathbf{v_1}\ \ \mathbf{v_2}\ \ \mathbf{v_3}\ ]^*$ vektora előállítható: $\underline{\mathbf{v}}=\mathbf{v_1}\cdot\underline{\mathbf{e}}_1+\mathbf{v_2}\cdot\underline{\mathbf{e}}_2+\mathbf{v_3}\cdot\underline{\mathbf{e}}_3$,

- a három vektor lineárisan független: a $\lambda_1\cdot\underline{\mathbf{e}}_1+\lambda_2\cdot\underline{\mathbf{e}}_2+\lambda_3\cdot\underline{\mathbf{e}}_3$ csak akkor lesz nullvektor, ha mindhárom együttható 0.

Bázisvektorokkal a lineáris tér **tetszőleges** vektorát **egyértelműen** kifejezhetjük.

Vektor koordináták, komponenesek

Az L_n lineáris tér egy bázisa legyen a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszer. Ekkor a tér tetszőleges $\underline{v}$ vektorának

$$\underline{v} = v_1\underline{b}_1 + v_2\underline{b}_2 + \ldots + v_n\underline{b}_n$$

előállításában szereplő $v_1, v_2, \ldots, v_n$ skalárszorzókat (számokat) a $\underline{v}$ vektornak a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük.

Példa: Egy korábbi példánkban szerepelt: $\underline{c} = 1 \cdot \underline{a} + 2 \cdot \underline{b}$.

Ez azt jelenti, hogy a $\underline{c}$ vektornak az $(\underline{a};\underline{b})$ bázisra vonatkozó koordinátái: [1 2]*.

Elnevezés: A triviális bázisra (az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ egységvektorokra) vonatkozó koordinátákat **komponenseknek** nevezzük.

***Megállapodás:* *A későbbiekben amikor egy vektort számokkal adunk meg, akkor, ha külön nem jelezzük a bázist, a koordináták mindig komponensek, azaz az egységvektorokra vonatkozó koordináták*.**

Példa: **Az $\underline{a}$=[2 3]* és $\underline{b}$=[–1 4]*vektorokat tehát komponenseikkel adtuk meg,**

azaz: $\underline{a} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2$ **és** $\underline{b} = -\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2$.

Igazolható, hogy tetszőleges lineáris térben a bázist alkotó vektorok száma egyértelműen meghatározott.

Dimenzió

A lineáris tér **dimenziója n**, ha van **n elemű** (n darab független vektorból álló) **bázisa**.

Ha az L lineáris térnek nincs véges elemszámú bázisa, akkor az L dimenziója **végtelen**.

A **nulltér** dimenziója **0**.

Következésképpen: ***ha a dimenzió nem ∞ vagy 0, akkor az adott lineáris térben a vektorok koordinátáinak száma megegyezik a dimenzióval .***

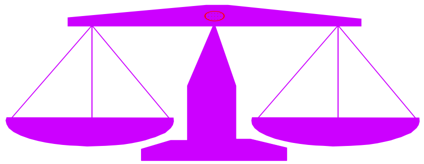
A vektorrendszer rangja

Egy tetszőleges vektorrendszerből kiválasztható független vektorok maximális számát a **vektorrendszer rangjának** nevezzük.

Példa: Az **a=[2 3]*, b=[–1 4]*** és **c=[0 11]*** vektorrendszer rangja 2, hiszen **c=a+2b**, azaz a 3 vektor közül 2 független, a **c** kifejezhető **a** és **b**-vel.

Ebből **következik**, hogy bármely L lineáris térből kiválasztott **vektorrendszer rangja nem lehet nagyobb, mint a tér dimenziója.**

Így ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorrendszer **rangja r**, akkor az általa generált lineáris tér dimenziója is r.



Mátrix rangja

Minden **mátrixhoz** hozzárendelhetünk **két lineáris teret**:

a mátrix **oszlopvektorai** által generált teret (**oszlopvektor tér**),

a mátrix **sorvektorai** által generált alteret (**sorvektor tér**).

Igazolható, hogy bármely mátrix oszlopvektor terének dimenziója megegyezik a sorvektor terének dimenziójával.

Elnevezés: Az $\underline{A}$ mátrix oszlop-, illetve sorvektor terének rangját a **mátrix rangjának** nevezzük. Jelölése: **r($\underline{A}$).**

Példa: Legyen az $\underline{A}$ mátrix:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

A mátrix 3 oszlopvektora: $\underline{a}_1$=[3 2 –1 0]*, $\underline{a}_2$=[2 2 1 3]*, $\underline{a}_3$=[–2 –1 3 0]*.
Észrevehetjük, hogy: $\underline{a}_4=2\underline{a}_1-\underline{a}_2+3\underline{a}_3$=[–2 –1 8 –3]* , valamint igazolható, hogy az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ vektorok függetlenek. Így a mátrix rangja: **r($\underline{A}$)=3**.

Elnevezés: Az n-ed rendű $\underline{A}$ mátrix **szinguláris** („hiányos”), ha **r($\underline{A}$)< n**.
Ha **r($\underline{A}$)=n**, akkor a mátrix **reguláris** (nem szinguláris).

A fejezet tárgyalását befejeztük.