Gráfok

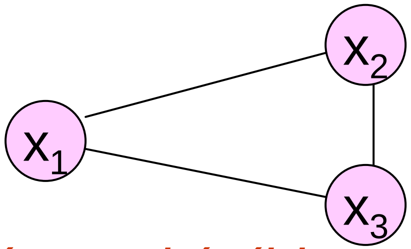
Készítette: Dr. Ábrahám István

A **gráf** olyan ábra, amelyen adott pontokat vonalak kötnek össze.

Sok olyan feladat létezik, amelyben bizonyos elemek (fogalmak, személyek, tárgyak, stb.) között kapcsolatok léteznek, amelyeket vonalakkal szemléltetünk.

Elnevezések: A pontok a gráf **csúcsai** (vagy: szögpontok).

A vonalak a gráf **élei.** Az irányított éleket **íveknek** nevezzük.



Csúcspontok és élek.

Szomszédos két csúcs, ha van él közöttük.

Csúcspont **fokszáma**: a pontból kiinduló élek száma.

Reguláris a gráf: minden csúcs (szögpont) fokszáma azonos.

Teljes (vagy: összefüggő) gráf: bármely két pontot él köt össze.

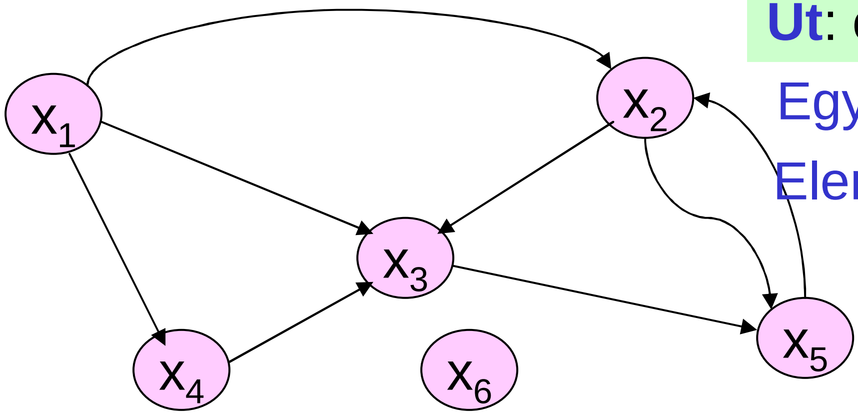
Izolált pont: nem indul ki belőle él. **Üres gráf**: nincs él, csak izolált pontok.

Tétel: az n csúcspontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{n}{2}$

Bizonyítás: az n csúcsból kell kettőt kiválasztani egy élhez, a sorrend nem számít, ismétlés nincs. A lehetőségek számát kombinációval számolhatjuk.

Egyszerű gráf: nincs benne **hurokél** (önmagába visszatérő él) és **többszörös él**.

Irányított gráf: olyan gráf, ahol az élekhez irány tartozik.



Út: csatlakozó ívek egymásutánja.

Egyszerű út: 1 ívet sem érintünk kétszer.

Elemi út: nem megy át kétszer szögponton.

Körút: kezdőpont=végpont.

Összefüggő gráf: bármely két szögpont között van út.

Az ív kapacitása: az ívhez rendelt valós szám. **Háló**: az íveknek van kapacitása.

Az irányított gráf megadása

1.) Vizuálisan (lásd a fenti ábrát).

2.) Mátrix segítségével: Van ív:1. Nincs ív:0.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	1	0	0
x_2	0	0	1	0	1	0
x_3	0	0	0	0	1	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	1	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0

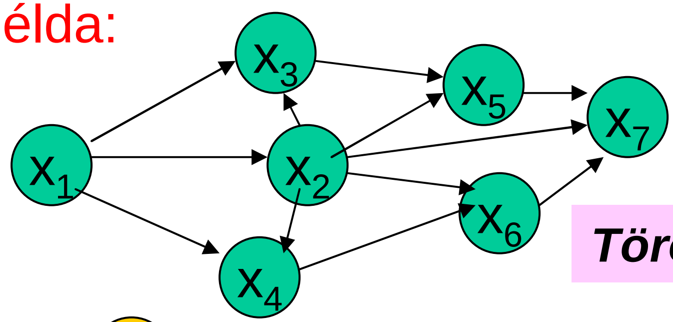
3.) Halmaz reprezentációval: $X=\{x_1, x_2,\ldots,x_6\}$

Rendezett párokat adunk meg:
(x_1,x_2); (x_1,x_3); (x_1,x_4)
(x_2,x_3); (x_2,x_5) és így tovább.

Háló szintekre bontása

Az összefüggő, irányított körpályamentes gráf (háló) szintekre bontható.

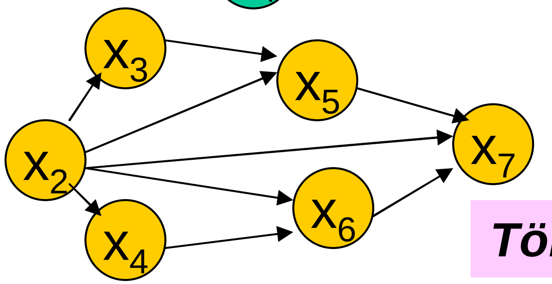
Példa:



Forrás (ős nélküli szögpont): x_1.

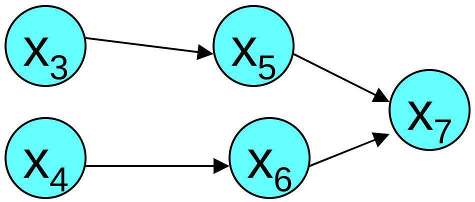
Ez az I. szint.

Töröljük ezt csúcspontot és megkeressük a forrást.



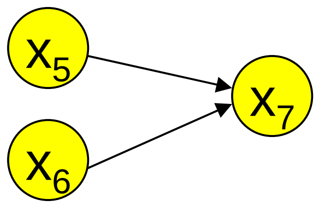
Ez az x_2, ez lesz a II. szint.

Töröljük ezt csúcspontot és megkeressük az újabb forrást.



Két forrás van, az x_3 és az x_4, ez lesz a III. szint.

Újabb törlés után 2 forrás lesz, x_5 ésx_6.



Ez a IV. szint.

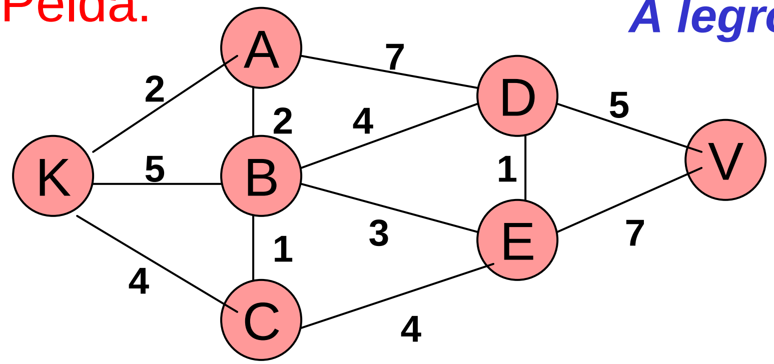
Az V. szint az x_7 („nyelőpont") .

Rangfüggvény: minden szögponthoz hozzárendeljük a szintje számát.

Minimális (maximális) út meghatározása gráfon

Egy gráfban az élekhez értékeket rendelünk (pl.: távolság a szögpontok között) és keressük a kezdőpont (K) és a végpont (V) között a legrövidebb utat.

Példa:



A legrövidebb utat minimális kifeszítő fának is nevezik.

Kereshetjük a maximális utat is, ha ez a feladat.

Táblázatot készíthetünk.

n	Megoldott pont	Legközelebbi pont	Távolság összeg	Új él	Megoldott új pont
1	K	A	2	KA	A
2	K A	C B	4 2+2=4	KC AB	C B
3	A B C	D E E	2+7=9 4+3=7 4+4=8	BE	E
4	A B E	D D D	2+7=9 4+4=8 7+1=8	BD ED	D
5	D E	V V	8+5=13 7+7=14	DV	V

Két min. út:

KABDV

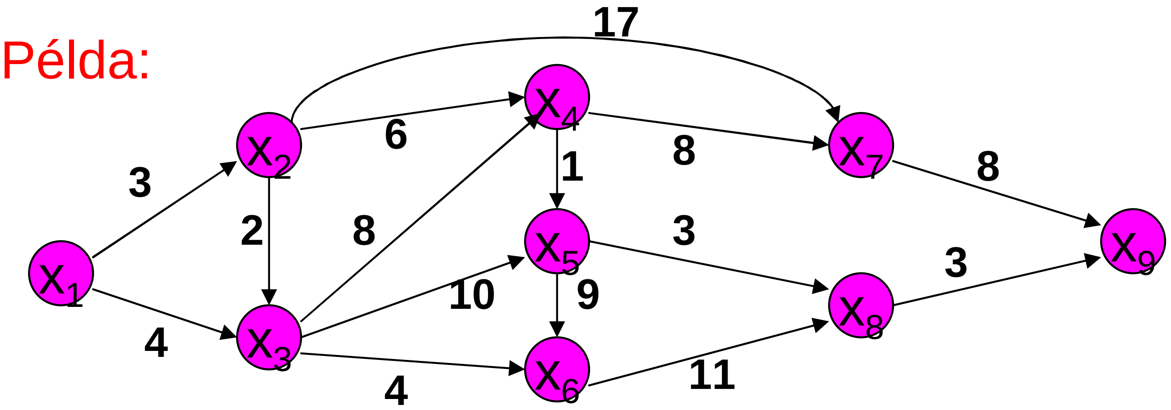
KABEDV

Hossza:13

Időtervezés hálózaton

A háló íveinek értéke időt jelent. Kérdés: mennyi idő alatt lehet a programot biztosan megvalósítani? A kritikus utat keressük (maximális időt).

Példa:



Az egyes szögpontokhoz maximális elérési időt rendelünk, a forrással kezdünk és ez az érték 0.

$t_1=0$

$t_2=\underline{t_1+3}=3$

$t_3=\max(t_1+4,\ \underline{t_2+2})=5$

$t_4=\max(t_2+6,\ \underline{t_3+8})=13$

$t_5=\max(\underline{t_3+10},\ t_4+1)=15$

$t_6=\max(t_3+4,\ \underline{t_5+9})=24$

$t_7=\max(t_2+17,\ \underline{t_4+8})=21$

$t_8=\max(t_5+3,\ \underline{t_6+11})=35$

$t_9=\max(t_7+8,\ \underline{t_8+3})=38$

A kritikus út: $x_1\ x_2\ x_3\ x_5\ x_6\ x_8\ x_9$.

Időigény: **38**.

Tartalék idő: a nem kritikus úton lévő események mennyit késhetnek anélkül, hogy a program megvalósulását késleltetnék.

Ehhez: a nyelőből az ívek irányát megfordítjuk és megnézzük, hogy a nyelőből a többi szögpontba mekkora a maximális út.

A fejezet tárgyalását befejeztük.