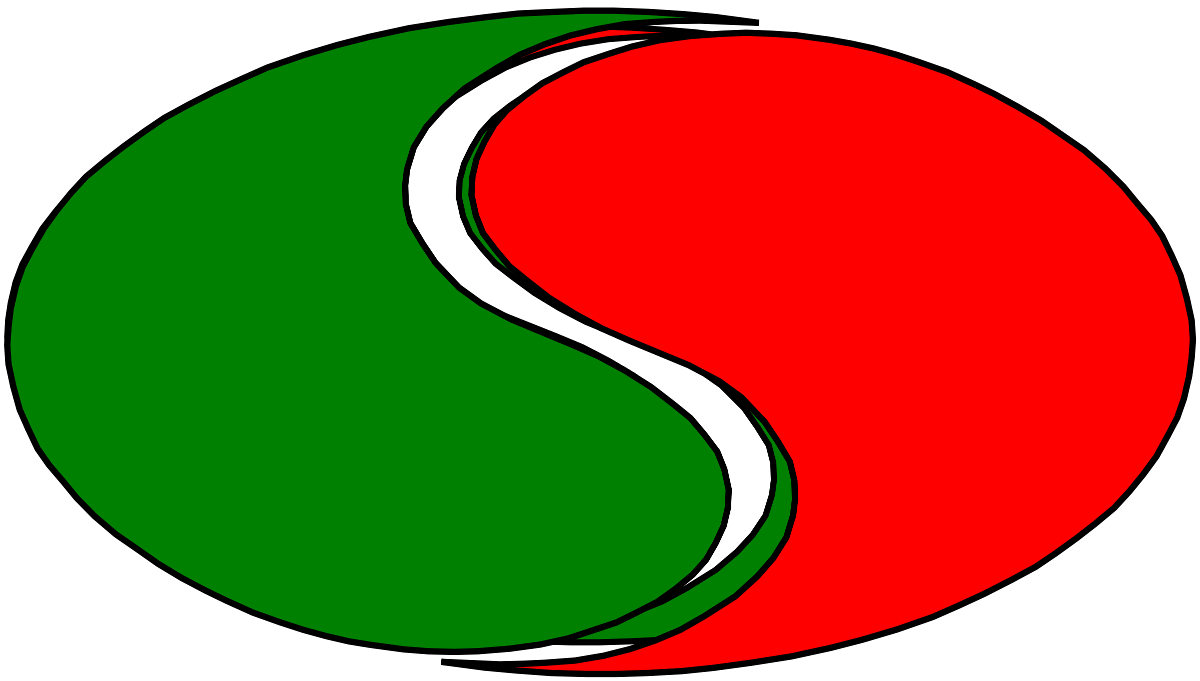
A dualitás elve



Készítette: Dr. Ábrahám István

A dualitás fogalma, alapösszefüggései

Definíció: Adott a lineáris programozás maximum feladata:

$$\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}$$
$$\underline{\mathbf{Ax}} \leq \underline{\mathbf{b}}$$
$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}^* \underline{\mathbf{x}} \rightarrow \max$$

Ekkor felírható a kővetkező minimum feladat:

$$\underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{0}}$$
$$\underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{c}}$$
$$g(\underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{b}}^* \underline{\mathbf{y}} \rightarrow \min$$

A két feladatot egymás duáljának nevezzük.

A későbbiekben az elsőként felírt feladatot **primál**, a másodikként feírtat **duál** feladatnak nevezzük, tehát a minimum feladat is nevezhető primál feladatnak.

A kanonikus alakok: $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{u}}=\underline{\mathbf{b}}$ és $\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{y}} - \underline{\mathbf{w}}=\underline{\mathbf{c}}$

A maximumfeladat eltérésvektorát ***u****-val, a minimumfeladatát* ***w****-vel jelöljük.*

Tétel: Ha az

$$\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}} \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{0}}$$
$$\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{b}} \qquad\qquad \underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{c}}$$
$$f(\underline{\mathbf{x}})=\underline{\mathbf{c}}^*\underline{\mathbf{x}}\to\max \qquad\qquad g(\underline{\mathbf{y}})=\underline{\mathbf{b}}^*\underline{\mathbf{y}}\to\min$$

feladatpárnál az **x** és az **y** lehetséges megoldás, akkor minden esetben igaz:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) \leq g(\underline{\mathbf{y}}).$$

Bizonyítás: A feltételek szerint $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}\leq\underline{\mathbf{b}}$ és $\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{y}}\geq\underline{\mathbf{c}}$, azaz (transzponálás): $\underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{A}} \geq\underline{\mathbf{c}}^*$.

Az első egyenlőtlenséget balról szorozzuk $\underline{\mathbf{y}}^*$-gal: $\underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} \leq\underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{b}}=\underline{\mathbf{b}}^*\underline{\mathbf{y}} =g(\underline{\mathbf{y}})$.

A második egyenlőtlenséget jobbról szorozzuk $\underline{\mathbf{x}}$-szel: $\underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} \geq\underline{\mathbf{c}}^*\underline{\mathbf{x}}=f(\underline{\mathbf{x}})$.

Látható: $f(\underline{\mathbf{x}})\leq\underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}\leq g(\underline{\mathbf{y}})$.

A tétel következményei:

a.) Ha a primál feladatnak van megoldása és az f célfüggvény nem korlátos felülről, akkor, mivel g(y)≥f(x), a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása.
Hasonlóan: ha a duál feladat g célfüggvénye nem korlátos alulról, akkor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

b.) Ha a primál feladat f célfüggvényének értéke egy $\underline{x}_0$ helyen éppen egyenlő a duál feladat g célfüggvényének $\underline{y}_0$ helyen felvett értékével, akkor f($\underline{x}_0$) f-nek maximuma, g($\underline{y}_0$) a g-nek minimuma. Ekkor $\underline{x}_0$ a primál, $\underline{y}_0$ a duál feladat optimális megoldása.
Optimális megoldásnál tehát a célfüggvény értéke a primál és a duál feladatnál megegyezik.

Feladat: Kétféle terméket készítünk, három erőforrás felhasználásával, amelyekre felső kapacitás korlátok vannak: 140, 150, 12. Az egyes erőforrások beépülése a termékekbe: 20, 10, 2, illetve 10, 25, 0. A késztermékek eladási egységára mindkét esetben 300 pénzegység. Határozzuk meg a legnagyobb eladási árbevételt biztosító termelési programot!

Táblázatot készítünk:

		Termékek		Kapacitás
		I.	II.	
Erőforrások	A	20	10	140
	B	10	25	150
	C	2	0	12
Ár		300	300	

Az első termékből x_1 darabot, a másodikból x_2-t készítünk.

A matematikai modell (a táblázatból):

Erőf.	I.(x_1)	II.(x_2)	Kap.
A	20	10	140
B	10	25	150
C	2	0	12
Ár	300	300	

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 140$$

$$10x_1 + 25x_2 \leq 150$$

$$2x_1 \qquad\qquad \leq 12$$

$$z = 300x_1 + 300x_2 \rightarrow \max$$

A modellből felírjuk a szimplex induló táblázatot.

A szimplex táblázattal történő megoldás:

B_0	x_1	x_2	b	B_1	u_3	x_2	b	B_2	u_3	u_1	b	B_3	u_2	u_1	b
u_1	20	10	140	u_1	-10	**10**	20	x_2	-1	$1/10$	2	x_2	$1/20$	$-1/40$	4
u_2	10	25	150	u_2	-5	25	90	u_2	**20**	$-2{,}5$	40	u_3	$1/20$	$-1/8$	2
u_3	**2**	0	12	x_1	$1/2$	0	6	x_1	$1/2$	0	6	x_1	$-1/40$	$1/16$	5
$-z$	300	300	0	-z	-150	300	-1800	-z	150	-30	-2400	-z	$-15/2$	$-45/4$	-2700

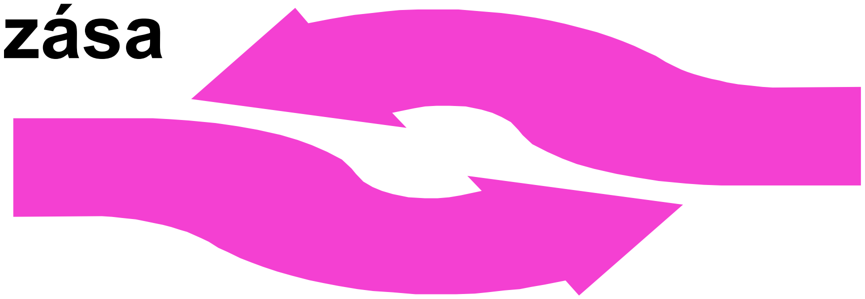
A táblázat felépülését nyomon követhetjük: **generáló elem** választás, **új koordináták** kiszámolása.

Leolvassuk az optimális megoldásokat:

$\underline{\mathbf{x}}_o = [\ 5\ \ 4\ ]^*$ $\underline{\mathbf{u}}_o = [\ 0\ \ 0\ \ 2\ ]^*$ $z_o = 2700$

A felvetett és megoldott problémához duál feladatot rendelhetünk.

A duál probléma megfogalmazása



Emlékeztetőül az eredeti szövegünk:

Feladat: Kétféle terméket készítünk, három erőforrás felhasználásával, amelyekre felső kapacitás korlátok vannak: 140, 150, 12. Az egyes erőforrások beépülése a termékekbe: 20, 10, 2, illetve 10, 25, 0. A késztermékek eladási egységára mindkét esetben 300 pénzegység. Határozzuk meg a legnagyobb eladási árbevételt biztosító termelési programot!

Duál értelmezés: Ha nem kívánunk termelni, hanem a meglévő erőforrásainkat y_1, y_2, y_3 egységárakon el akarjuk adni, akkor a következő modell vehető fel:

Adatainkat táblázatba írjuk:

Termék / Erőforr.	I.	II.	Kapacitás
A e.ár: y_1	20	10	140
B e.ár: y_2	10	25	150
C e.ár: y_3	2	0	12
Ár	300	300	

A matematikai modell:

a.) $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

b.) Az első termékben felhasznált erőforrások ára darabonként:

$$20y_1+10y_2+2y_3 \geq 300$$

Ugyanis ennek a terméknek eladási egységára 300, legalább ennyit szeretnénk kapni érte. Hasonlóan:

$$10y_1+25y_2+0y_3 \geq 300$$

A vevő összes kiadása vásárlás esetén:

$$140y_1+150y_2+12y_3$$

A vevő kiadásai minimalizálására törekszik, tehát:

c.) $z' = 140y_1+150y_2+12y_3 \rightarrow \min$

A szöveges feladathoz tartozó, elsőként felírt (**primál**) matematikai modell:

a.) $x_1,\ x_2,\ \geq 0$

b.) $20x_1+10x_2 \leq 140$

$10x_1+25x_2 \leq 150$

$2x_1 \leq 12$

c.) $z=300x_1+300x_2 \rightarrow \max$

A feladat **duál** modellje:

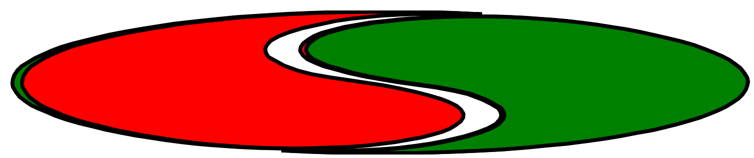
a.) $y_1, y_2,\ y_3 \geq 0$

b.) $20y_1+10y_2+2y_3 \geq 300$

$10y_1+25y_2 \geq 300$

c.) $z'=140y_1+150y_2+12y_3 \rightarrow \min$

A primál-duál megnevezés a modell felírásának sorrendjére utal, az egyik modellből következik a másik.



Az egyik modellből a másik felírása mechanikusan történhet:

A sorok helyére oszlopok kerülnek, a relációk és a cél „átfordul".

Általánosan : minden LP feladat felírható ***primál*** és ***duál*** alakban.

Adott maximum, illetve **minimum** feladatnál: a **primál** modell **oszlopaiból** lesznek a **duál** modell **sorai**, a **relációjelek megfordulnak** és a **cél** is **ellenkezőjére változik.**

A primál modell optimális szimplex táblázatából leolvasható a duál feladat optimuma: ez az **utolsó oszlop helyett az utolsó sorból történik, ellenkező előjellel.**

Az $\underline{x}$ változók a duál $\underline{w}$ eltérésvátozókkal, az $\underline{u}$ eltérés-változók az $\underline{y}$ változókkal vannak kapcsolatban.

Példánknál az optimális táblázat:

B_2	u_2	u_1	b
x_2			4
u_3			2
x_1			5
-z	-15/2	-45/4	-2700

A táblázat „közepét" nem kell kitölteni az optimum leolvasásához.

A **primál** optimum:

$\underline{x}_o$=[5 4]* $\underline{u}_o$=[0 0 2]* z_o=2700.

A **duál** optimum:

$\underline{y}_o$=[45/4 15/2 0]*

$\underline{w}_o$=[0 0]* z_o=2700.

Példa minimumfeladat duáljára:

Egy gazdaságban állatok etetésére kétféle takarmánykeveréket akarnak használni. A keverékek négyféle tápanyagból készülnek, amelyeket 1, 0, 1, 7, illetve 0, 2, 2, 6 mennyiségben tartalmaznak. Az egyes tápanyagokból legalább 2, 4, 10, 42 egységnyit fel kell használni. A takarmánykeverékek egységárai: 200, 300. Az egyes takarmánykeverékekből mennyit szerezzünk be, hogy a lehető legkisebb legyen a beszerzési költség?

Táblázat:

		Keverék I.	Keverék II.	Előírás
Tápanyag	A	1	0	2
	B	0	2	4
	C	1	2	10
	D	7	6	42
	Ár	200	300	

A (primál) matematikai modell:

a.) $x_1, x_2 \geq 0$

b.) $1x_1 + 0x_2 \geq 2$

$2x_2 \geq 4$

$x_1 + 2x_2 \geq 10$

$7x_1 + 6x_2 \geq 42$

c.) $z = 200x_1 + 300x_2 \to \min$

A duál modell:

a.) $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

b.) $1y_1 + 0y_2 + 1y_3 + 7y_4 \leq 200$

$2y_2 + 2y_3 + 6y_4 \leq 300$

c.) $z' = 2y_1 + 4y_2 + 10y_3 + 42y_4 \to \max$

A primál modellben x_1 és x_2 a keverékek mennyiségei.

A duál modellben az y_i értékek a tápanyag egységárak.

Mechanikusan: sorok és oszlopok, relácójelek megcserélődnek, a cél átfordul.

A primál modell megoldása szimplex módszerrel hosszadalmas, az eltérésváltozók „kalaposak”, 4 darab v_i változót, valamint másodlagos célfüggvényt kell szerepeltetni.

A duálfeladat viszont egyszerű normálfeladat, megoldása:

Az induló szimplex tábla:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
w_1	1	0	1	7	200
w_2	0	2	2	6	300
-z'	2	4	10	42	0

Az optimális szimplex tábla:

	y_1	w_2	y_2	w_1	
y_4					12,5
y_3					112,5
-z'	-1	-3,5	-3	-3	-1650

Az optimális megoldások **(„direkt” leolvasás y-ra és w-re, az alsó sorból x-re és v-re, és tudjuk: az oszlopfőn lévő változók az optimumnál nullák)**:

$\underline{y}_o$=[0 0 112,5 12,5]* z'_o=1650 $\underline{x}_o$=[3 3,5]*

$\underline{w}_o$=[0 0]* $\underline{u}_o$=[1 3 0 0]*

Tehát az első keverékből 3, a másodikból 3,5 beszerzése optimális.

A primál-duál feladatpár általánosabb változata

Az általános lineáris programozási feladatot maximum, vagy „tiszta minimum típusú” modellé alakítjuk és ezután képezzük a duálját.

Példa: Ha $\underline{A}_1\underline{x} \le \underline{b}_1$, $\underline{A}_2\underline{x} \ge \underline{b}_2$ **és** $\underline{c}^*\underline{x} \to \max$, akkor a második feltételt szorozzuk -1-gyel és a „maximum” feladatra felírjuk a duálját:

$$\underline{y} \ge \underline{0} \quad (\underline{A}_1 \ -\underline{A}_2)^*\underline{y} \ge \underline{c} \quad \text{és} \quad (\underline{b}_1 \ -\underline{b}_2)^*\underline{y} \to \min.$$

Ha $\underline{A}_1\underline{x} \le \underline{b}_1$, $\underline{A}_2\underline{x} \ge \underline{b}_2$ **és** $\underline{c}^*\underline{x} \to \max$, akkor a modellt „tiszta minimum típusú” modellé alakítjuk az első feltételt és a célfüggvényt -1-gyel szorozva, és ezután képezzük a duálját:

$$\underline{y} \ge \underline{0} \quad (-\underline{A}_1 \ \underline{A}_2)^*\underline{y} \le \underline{c} \quad \text{és} \quad (-\underline{b}_1 \ \underline{b}_2)^*\underline{y} \to \max.$$

Ha a modellben egyenlőség is van, akkor az átalakításnál ezt a relációt változatlanul hagyjuk, képezzük a duál modellt és az egyenlőség sorokhoz tartozó duál változókra nem lesz előjelkorlát.
Ha pedig valamelyik változóra nincs előjelkorlát, akkor a duál feladatban a hozzá tartozó feltétel egyenlőség.

A primál-duál feladatpár felvétele

Ha adott a kiinduló LP feladat, akkor azt először a definícióban lévő primál, vagy duál alakra hozzuk.

Példa: Legyen a kiinduló feladat:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$3x_1+4x_2-6x_3 \leq 13$

$x_1-5x_2+2x_3 \geq 8$

$z=6x_1+4x_2-7x_3 \rightarrow max$

A második feltételben a relációt megfordítjuk, szorzás -1-gyel. Ekkor a modell:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$3x_1+4x_2-6x_3 \leq 13$

$-x_1+5x_2-2x_3 \leq -8$

$z=6x_1+4x_2-7x_3 \rightarrow max$

Ehhez a definícióban meghatározott módon felírhatjuk a duál alakot:

$y_1, y_2 \geq 0$

$3y_1-y_2 \geq 6$

$4y_1+5y_2 \geq 4$

$-6y_1-2y_2 \geq -7$

$z=13y_1-8y_2 \rightarrow min$

Eljárhattunk volna úgy is, hogy a célfüggvényt fordítjuk át és az első feltételt. Ekkor a definícióban szereplő duál alak lenne a kiinduló modell.

A szimplex módszerrel történő megoldáshoz a harmadik feltételt meg kell szorozni -1-gyel.

A feltételek között egyenlőséget tartalmazó modell duálja

Alapelv: az egyenlőséget két egyenlőtlenségre „bontjuk”.

Példa:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$3x_1+2x_2-x_3 \leq 13$

$4x_1-5x_2+6x_3=21$

$z=2x_1+7x_2-3x_3 \to \max$

A második feltétel felírható 2 egyenlőtlenséggel:

$4x_1-5x_2+6x_3 \leq 21 \quad 4x_1-5x_2+6x_3 \geq 21$

A második egyenlőtlenséget szorozzuk -1-gyel:

$-4x_1+5x_2-6x_3 \leq -21$

Így a modellünk:

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$3x_1+2x_2-x_3 \leq 13$

$4x_1-5x_2+6x_3 \leq 21$

$-4x_1+5x_2-6x_3 \leq -21$

$z=2x_1+7x_2-3x_3 \to \max$

Az átíráshoz az y_2 változót is 2 részre bontjuk: y_2' és y_2''. Így:

$y_1, y_2', y_2'' \geq 0$

$3y_1+4y_2'-4y_2'' \geq 2$

$2y_1-5y_2'+5y_2'' \geq 7$

$-y_1+6y_2'-6y_2'' \geq -3$

$z=13y_1+21y_2'-21y_2'' \to \min$

Kiemelés és legyen $y_2'-y_2''=y_2$. Ekkor, mivel az $y_2'-y_2''$ előjelét nem ismerjük: $y_2 \in R$.

A duál modell:

$y_1, \geq 0$, és $y_2 \in R$

$3y_1+4y_2 \geq 2$

$2y_1-5y_2 \geq 7$

$-y_1+6y_2 \geq -3$

$z=13y_1+21y_2 \to \min$

<u>Összefoglalva</u>: ha egy LP feladatban valamelyik feltétel egyenlőség, akkor a duáljában a neki megfelelő változóra nincs előjelkorlát.
Ha pedig valamelyik változóra nincs előjelkorlát, akkor a duál feladatban a hozzá tartozó feltétel egyenlőség.

Példa: Képezzük a következő primál modell duálját kétféleképpen:

$\underline{x \geq 0}$

$3x_1+2x_2-4x_3 \leq 31$

$-x_1+4x_2+x_3 \leq 20$

$2x_1-5x_2-7x_3 \geq 15$

$z=2x_1+6x_2-8x_3 \to \min$

A modellt maximum típusúvá alakítjuk:

$\underline{x \geq 0}$

$3x_1+2x_2-4x_3 \leq 31$

$-x_1+4x_2+x_3 \leq 20$

$-2x_1+5x_2+7x_3 \leq -15$

$-z=-2x_1-6x_2+8x_3 \to \max$

A duál modell:

$\underline{y \geq 0}$

$3y_1-y_2-2y_3 \geq -2$

$2y_1+4y_2+5y_3 \geq -6$

$-4y_1+y_2+7y_3 \geq 8$

$z'=31y_1+20y_2-15y_3 \to \min$

Ha a modellt tiszta minimum típusúvá alakítjuk:

$\underline{x \geq 0}$

$-3x_1-2x_2+4x_3 \geq -31$

$x_1-4x_2-x_3 \geq -20$

$2x_1-5x_2-7x_3 \geq 15$

$z=2x_1+6x_2-8x_3 \to \min$

Az ehhez tartozó duál modell:

$\underline{y \geq 0}$

$-3y_1+y_2+2y_3 \leq 2$

$-2y_1-4y_2-5y_3 \leq 6$

$4y_1-y_2-7y_3 \leq -8$

$z'=-31y_1-20y_2+15y_3 \to \max$

Ha a modellünkben a második feltétel egyenlőség:

$\underline{x \geq 0}$

$3x_1+2x_2-4x_3 \leq 31$

$-x_1+4x_2+x_3 = 20$

$2x_1-5x_2-7x_3 \geq 15$

$z=2x_1+6x_2-8x_3 \to \min$

Ekkor a normál típusú duál modell:

$y_1, y_3 \geq 0$ és $y_2 \in R$

$3y_1-y_2-2y_3 \geq -2$

$2y_1+4y_2+5y_3 \geq -6$

$-4y_1+y_2+7y_3 \geq 8$

$z'=31y_1+20y_2-15y_3 \to \min$

Gyakorló feladat:

Egy vállalat kétféle terméket gyárt, amelyekbe 3 erőforrásból 11, 8, és 6, valamint 7, 8 és 14 egységnyi épül be. Az erőforrások kapacitásai: 770, 640 és 840. A termékek egységárai: 1 és 2. Ismert még, hogy az első termékből legfeljebb 600 darabot, a másodikból maximálisan 400 darabot lehet eladni. Célunk a maximális árbevétel. Írjuk fel a feladathoz tartozó primál és duál modellt, valamint számoljuk ki a primál és duál optimális megoldásokat!

A modellek:

A primál feladat változója legyen a gyártásra kerülő termékek darabszáma.

A duál feladat változója legyen az erőforrások egységára.

Primál:

$$\underline{x}\geq\underline{0}$$

$$11x_1+7x_2\leq 770$$

$$8x_1+8x_2\leq 640$$

$$6x_1+14x_2\leq 840$$

$$x_1\leq 600$$

$$x_2\leq 400$$

$$f(\underline{\mathbf{x}})=z=x_1+2x_2\rightarrow \max$$

Duál:

$$\underline{y}\geq\underline{0}$$

$$11y_1+8y_2+6y_3+y_4\geq 1$$

$$7y_1+8y_2+14y_3+y_5\geq 2$$

$$g(\underline{\mathbf{y}})=z'=770y_y+640y_2+840y_3+600y_4+400y_5\rightarrow \min$$

A primál feladat megoldása szimplex módszerrel:

	x_1	x_2	
u_1	11	7	770
u_2	8	8	640
u_3	6	$\boxed{14}$	840
u_4	1	0	600
u_5	0	1	400
$-z$	1	2	0

	x_1	u_3	
u_1	8	$-7/14$	350
u_2	$\boxed{64/14}$	$-8/14$	160
x_2	$6/14$	$1/14$	60
u_4	1	0	600
u_5	$-6/14$	$-1/14$	340
$-z$	$2/14$	$-2/14$	-120

	u_2	u_3	
u_1	.	.	70
x_1	$14/64$	$-1/8$	35
x_2	.	.	45
u_4	.	.	565
u_5	.	.	355
$-z$	$-1/32$	$-1/8$	-125

Az utolsó táblázatban elegendő a legalsó sor és a jobboldali oszlop kitöltése.

Az optimális megoldások:

$\underline{\mathbf{x}}_o=[\,35\;\;45\,]^*$ $\quad\underline{\mathbf{u}}_o=[\,70\;\;0\;\;0\;\;565\;\;355\,]^*$ $\quad z_o=125$

$\underline{\mathbf{y}}_o=[\,0\;\;1/32\;\;1/18\;\;0\;\;0\,]^*$ $\quad\underline{\mathbf{w}}_o=\underline{\mathbf{0}}$

A fejezet tárgyalását befejeztük.