

B

Mátrixműveletek számítógépen

A mátrixokkal, vektorokkal végezhető számításokat az adott műveletekre elméletileg megadott definíciók szabályai szerint számítógéppel is elvégezhethetjük. Az egyes műveletekre külön célszoftverek is rendelkezésre állnak, de az egyik leggyakrabban használt program, a Microsoft Excel segítségével mutatjuk be az eljárásokat.

Összeadás, szorzás skalárral

Mátrixok, vektorok összeadása és számmal (skalárral) történő szorzása egyszerű művelet, csupán arra kell ügyelni, hogy összeadni, kivonni csak azonos típusú (jelzőszámú) mátrixokat, vektorokat lehet. Számítógépre általában csak akkor van szükségünk ezeknél a műveleteknél, ha nagy méretűek a mátrixok, vektorok, vagy ha sok taggal kell elvégezni a műveletet.

Példa: Adjuk össze számítógéppel a következő két mátrixot!

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A művelet elvégezhető, a mátrixok azonos típusúak. A műveletet akár fejből is végrehajthatjuk ilyen egyszerű esetben. Tudjuk, a megfelelő indexű elemeket rendre össze kell adni, tehát az eredmény:

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 9 & 7 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Az Excelt ismerők számára egyszerű számítógéppel végrehajtani a mátrixok, vektorok összeadását. A kezdőkre gondolva részletezzük az eljárást: Az Excel behívása után a munkaterületre beírjuk a mátrixokat. Egy cellába (például

A3-ba) az első mátrix (A) nevét írjuk, majd B2-től D4-ig a háromszor három elemet. A másik mátrix neve kerülhet az E3 cellába, az elemek F2-től H4-ig. A eredmény neve (A+B) kerülhet a J3 cellába, majd az összegmátrix első sora első elemének helye legyen a K2 cella. Ide + jelet (vagy = jelet) írunk, majd az A mátrix első sorának első elemére kattintunk (B2 cella) . Ezután ismét + jelet írunk és a B mátrix első sorának első elemére kattintunk (F2 cella). Az Enter lenyomása után a K2 cellában megjelenik az összegmátrix első sorának első eleme: 3. A K2 cella jobb alsó sarkában a bal egérgomb lenyomásakor megjelenik a vonszolófüll (kis + jel). A bal egérgombot lenyomva tartva jobbra megyünk két cellával, ekkor ezekben a cellákban megjelennek az összeg mátrix első sorának elemei. Ezután ezt a sort a vonszolófüllet (L2 cella jobb alsó sarkában) lehúzzuk két sorral és megkapjuk az eredményt. Eljárhatunk úgy is, hogy a vonszolófüllet először az összeg mátrix első oszlopát állítjuk elő. majd ezt az oszlopot húzzuk kettő oszloppal jobbra. Vektorok összeadása, kivonása hasonlóan történik, csupán arra kell ügyelni, hogy a vektorok jelzőszámai azonosak legyenek.

A mátrix összeadás számítógépes elvégzése az Excelben is történhet más módon is.

A mátrix szorzása egy számmal szintén egyszerűen elvégezhető: az Excel munkaterületrebeírjuk a mátrixot és kijelölünk egy cellát az eredmény első sora első elemének, amelybe egyenlőségjelet írunk, majd azt a számot, amellyel meg akarjuk szorozni a mátrixot és a szorzásjelet, majd ezután a mátrix első sorának első elemét. A Enter lenyomása után megjelenik az eredmény első sora első eleme a cellában. Ezután a vonszolófüllet a fent leírt módon előállítjuk az eredményt.

Transzponálás

A mátrix sorait és oszlopait a számításainkban gyakran fel kell cserélni. Az Excelben a transzponálás végrehajtására külön függvény van, amelyet a Mátrix ablakban találunk. A művelet végrehajtása: felvisszük az $(m \cdot n)$ típusú mátrixot, majd a transzponálnak kijelölünk egy $(n \cdot m)$ nagyságú helyet. Nem a vonszolófüllet, hanem a "normál vastagkereszttel". Ezután behívjuk a Transzponálás függvényt és bevisszük az $(m \cdot n)$ nagyságú tömböt. Az Enter lenyomása után az F2 billentyűvel aktiváljuk a formulát, majd a Shift-Ctrl-Enter egyszerre történő lenyomásával megkapjuk az eredményt. A vektorok transzponálása (sorvektor oszlopvektorra alakítása és fordítva) ugyanígy végezhető el.

Inverz mátrix

Ismert, hogy csak a négyzetes mátrixnak lehet inverze, de csak akkor, ha a mátrix reguláris (oszlopvektorai függetlenek).

A művelet végrehajtása: felvisszük az n -ed rendű, azaz $(n \cdot n)$ típusú mátrixot, majd az inverznek kijelölünk egy $(n \cdot n)$ nagyságú helyet. Most sem a vonszólófüllel, hanem a "normál vastagkeresztel". Behívjuk az Inverz.matrix függvényt (Mat. és trig. függvénycsoporthoz) és bevisszük ide az $(n \cdot n)$ nagyságú tömböt. Az Enter lenyomása után az F2 billentyűvel aktiváljuk a formulát, majd a Shift-Ctrl-Enter egyszerre történő lenyomásával megkapjuk az eredményt.

Ha mátrix nem reguláris (szinguláris), akkor az eljárás során hibüzenetet kapunk.

Mátrixok szorzása

A mátrixok szorzásának manuális elvégzése nem egyszerű, különösen nagyobb mátrixok esetén. A gépi megoldás az Excel megfelelő függvényével jóval könnyebb. A két mátrix szorzására bevezetett definíció szerint csupán arra kell ügyelnünk, hogy két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első tényező sorvektoraiban az elemek száma megegyezik a második tényező oszlopvektoraiban lévő elemek számával, tehát az $m \cdot p$ típusú mátrixot csak $p \cdot n$ típusúval szorozhatunk (ebben a sorrendben) és az eredmény $m \cdot n$ típusú lesz. Szoktuk ezt úgy is mondani, hogy mátrixok szorzásánál a "középső jelzőszámok" egyezzenek meg és az eredmény típusát a "szélső jelzőszámok" adják.

Példa: Adott az \underline{A} mátrix, készítsük el az $\underline{A} \cdot \underline{A}^*$ szorzatot!

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Az \underline{A} mátrix $4 \cdot 5$ típusú, ez a transzponált mátrixszal, amely $5 \cdot 4$ -es, szorozható és az eredmény $4 \cdot 4$ -es lesz.

Vigyünk be az Excelbe a mátrixot, legyen az első sor első eleme a B2 cellában, a negyedik sor ötödik eleme pedig ekkor az F5 cellában lesz.

	2	1	3	2	3
$\underline{A} =$	-1	0	2	3	-2
	0	3	-2	1	-3
	3	4	1	2	2

Elkészítjük a transzponáltat, amely $5 \cdot 4$ -es lesz. Legyen a transzponált első sorának első eleme a B7 cellában. Kijelöljük a transzponált mátrix helyét, egy $5 \cdot 4$ cellából álló területet. Ekkor értelemszerűen az ötödik sor negyedik eleme majd az E11-es cellában lesz. A terület kijelölés után behívjuk a Transzponálás függvényt és bevisszük az $(4 \cdot 5)$ nagyságú tömböt. Az Enter lenyomása után az F2 billentyűvel aktiváljuk a formulát, majd a Shift-Ctrl-Enter egyszerre történő lenyomásával megkapjuk az eredményt:

	2	-1	0	3
	1	0	3	4
$\underline{A}^* =$	3	2	-2	1
	2	3	1	2
	3	-2	-3	2

A szorzás végrehajtása: kijelöljük a szorzatmátrix helyét, egy $(4 \cdot 4)$ -es területet. Az eredménymátrix első sora első elemének helye legyen például az I2-es cella. Behívjuk az Mszorzat függvényt, első tömbként felvesszük az \underline{A} mátrixot, másodikként az \underline{A}^* -ot. Ezután az F4 billentyűvel a második tömbbe \$ jeleket kell írunk, majd: Enter. Megjelenik az eredmény első sorának első eleme. Ezután az F2 billentyűvel aktiváljuk a formulát, majd a Shift-Ctrl-Enter egyszerre történő lenyomásával megkapjuk az eredményt:

	27	4	-10
$\underline{A} \cdot \underline{A}^* =$	4	18	5
	-10	5	23
	23	1	6

Természetesen összesorozhatjuk fordított sorrendben is a két mátrixot, hiszen az $\underline{A}^* \cdot \underline{A}$ szorzás is elvégezhető, az eredmény $(5 \cdot 5)$ -ös mátrix lesz:

	14	14	7	7	14
	14	26	1	13	2
$\underline{A}^* \cdot \underline{A} =$	7	1	18	12	13
	7	13	12	18	1
	14	2	13	1	26

Nyilván az \underline{A} mátrixot most önmagával nem szorozhatjuk meg, hiszen ekkor a jelzőszámok "nem stimmelnek". Önmagával csak négyzetes mátrix szorozható meg.

Vektorokkal a szorzás teljesen hasonlóan végezhető el, ügyelnünk kell a szorozhatóság feltételének teljesülésére.

Példa: Adott az \underline{a} vektor, képezzük az $\underline{a}^* \cdot \underline{a}$ és az $\underline{a} \cdot \underline{a}^*$ szorzatokat!

$$\underline{a} = [4 \ -2 \ 0 \ 7]^*$$

Az Excelbe beírjuk az \underline{a} oszlopvektort, majd képezzük a transzponáltját, az \underline{a}^* sorvektort. (Eljárhatunk fordított sorrendben is és a transzponálás kihagyható, hiszen gyorsan fel tudjuk írni a négy számot függőlegesen is és vízszintesen is.)

Az Excel táblák:

	4										
$\underline{a} =$	-2	$\underline{a}^* =$	4	-2	0	7					
	0							16	-8	0	28
	7						$\underline{a} \cdot \underline{a}^* =$	-8	4	0	-14
		$\underline{a}^* \cdot \underline{a} =$	69					0	0	0	0
								28	-14	0	49

A skaláris szorzat ($\underline{a}^* \cdot \underline{a}$) géppel elvégezhető a Szorzatösszeg függvénnyel is.

A speciális mátrixokkal (egységmátrix, trianguláris, diagonális, stb.) és speciális vektorokkal (összegző vektor, egységvektor, stb.) a műveletek természetesen géppel is elvégezhetőek, bár gyakran egyszerűbb, gyorsabb ezekben az esetekben a kézi számolás.