Matematikai modellek megoldása számítógéppel

Solver
Lingo

Készítette: Dr. Ábrahám István

A matematikai modellek számítógépes megoldásait példákkal mutatjuk be.

Példa: Négy erőforrás felhasználásával négyféle terméket gyártanak. Az egyes termékek egy-egy egységébe az erőforrásokból rendre 1, 0, 2, 1; 1, 2, 2, 0; 0, 2, 2, 1 és 1, 2, 0, 0 épül be az egyes erőforrásokból. Az erőforrások felső korlátai: 100, 160, 100, 60. A termékek eladási egységárai rendre: 6, 6, 5, 4. Milyen termékszerkezetnél lesz maximális az árbevétel?

Adataink táblázata:

	I	II	III	IV	Kap.
A	1	1	0	1	100
B	0	2	2	2	160
C	2	2	2	0	100
D	1	0	1	0	60
Ár	6	6	5	4	Max.

A matematikai modell: A döntési változók a gyártandó darabszámok: $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4}$.

a.) $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4} \geq 0$ *Induló feltétel.*

b.) $\mathbf{x_1+x_2+x_4 \leq 100}$

$\mathbf{2x_2+2x_3+2x_4 \leq 160}$

$\mathbf{2x_1+2x_2+2x_3 \leq 100}$

$\mathbf{x_1+x_3 \leq 60}$ *Korlátozó feltételek.*

c.) $\mathbf{z=6x_1+6x_2+5x_3+4x_4 \rightarrow max}$ *A célfüggvény.*

A feladat megoldása szimplex módszerrel: $\underline{\mathbf{x}}_o$**=[35 0 15 65]*** $\underline{\mathbf{u}}_o$**=[0 0 0 10]***

$\mathbf{z_o=545}$

A duál optimumok: $\underline{\mathbf{y}}_o$**=[2,5 0,75 1,75 0]*** $\underline{\mathbf{w}}_o$**=[0 1,5 0 0]***

I. Megoldás az Excell Solverjével

1.) Adatbevitel

Az adatokat az előző lapon lévő adattáblázathoz hasonló formában vihetjük be.

Célszerű a termékek oszlopait x_i-vel, a feltételek sorait f_i-vel elnevezni.

A feltételek sorai alatt legyen a célegyütthatók sora (c*), alatta legyen az x*, az optimális megoldások sora, induláskor nullákkal feltöltve.

Az x_4 oszlopa után töltsünk fel egy oszlopot nullákkal a c* soráig, majd legyen egy oszlop a relációjeleknek és egy a kapacitásoknak.

Az induló táblánk:

	x1	x2	x3	x4			b
f1	1	1	0	1	0	<=	100
f2	0	2	2	2	0	<=	160
f3	2	2	2	0	0	<=	100
f4	1	0	1	0	0	<=	60
c*	6	6	5	4	0		
x*	0	0	0	0			

Az adattáblázatot az Excellben bárhol elhelyezhetjük. Legyen x1 a B1 cellában.

Az x4 utáni oszlopban állítjuk elő a modell feltételeinek baloldalát és a célfüggvényt. (*Az adatok és a változók skaláris szorzataként*.)

Konkrétan: az F2 cellába behívjuk a szorzatösszeg függvényt.

Az első tömbbe kerül a B2E2 sor, a másodikba a B7E7 sor „dollárjelekkel”, amit az F4 billentyűvel vihetünk fel.

Ezután az F2 cellában előállított skaláris szorzatot alkalmazzuk a többi sorra.

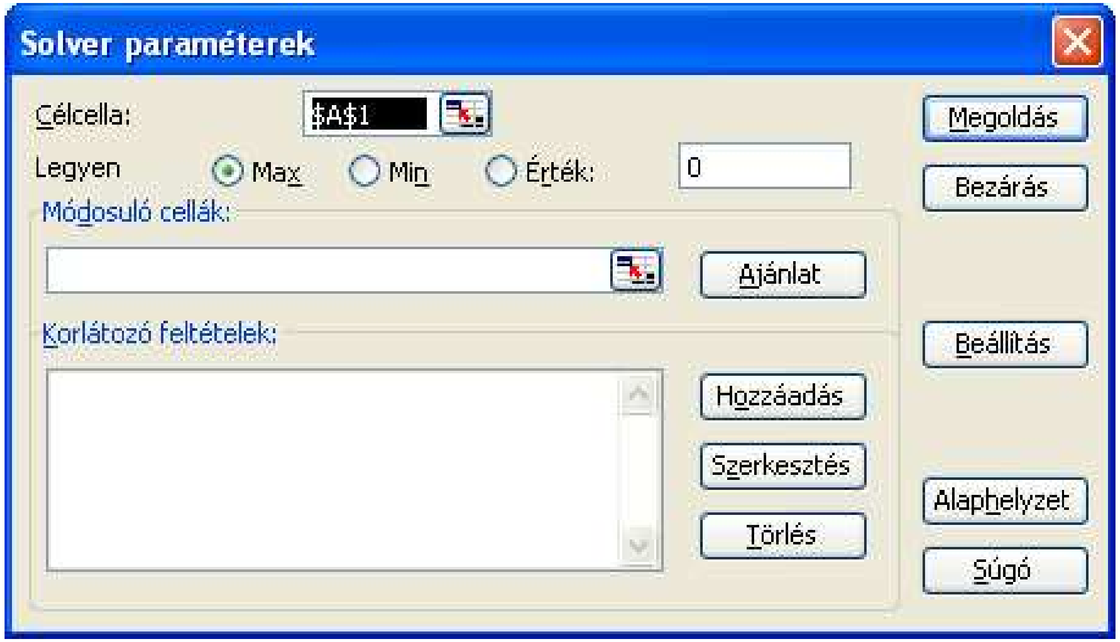
Az F2 cella jobb alsó sarkában megjelenő vonszoló füllel lejövünk az F6 celláig.

Majd külön rákattintunk az F6 cellára, ez lesz a célcella.

2.) Megoldás

Az Excell eszközök menüjéből behívjuk a Solvert.

Ha nincs ott, akkor a Bővítmények menüpontból bekérjük.



A célcella most F6 (rákattintunk).

Maximumot keresünk (bejelölés).

Módosuló cellák: x* sora (B7E7), rákattintunk a sorra.

Korlátozó feltételek: Hozzáadás gombbal egyesével bevisszük: F2<=H2 (rákattintunk a cellákra), majd a Felvesz gomb után jön a következő: F3<=H3 és a többi.

A Beállítás gombon a nemnegatív és a lineáris feltételeket jelöljük be.

Ezt követően indulhat a Megoldás.

A megoldás gombra kattintva megkapjuk az optimális (primál) megoldást:

	x1	x2	x3	x4			b
f1	1	1	0	1	100	<=	100
f2	0	2	2	2	160	<=	160
f3	2	2	2	0	100	<=	100
f4	1	0	1	0	50	<=	60
c*	6	6	5	4	545		
x*	35	0	15	65			

Az **x*** sorából az optimum:

$\underline{x}_o$=[35 0 15 65]* z_o=545.

Az eltérésváltozó optimumok a kapacitás „maradványok: **$\underline{u}_o$=[0 0 0 10]***.

Az $\underline{u}_o$ értékei a Solver eredményjelentéséből is kiolvashatók.

A duál optimum, az érzékenységvizsgálat az érzékenységjelentésből adódnak:

Microsoft Excel 11.0 Érzékenység jelentés

Módosuló cellák

Cella	Név	Végérték	Redukált költség	Objective Célegyüttható	Megengedhető növekedés	Megengedhető csökkenés
B8	x* x1	35	0	6	3	3
C8	x* x2	0	-1,5	6	1,5	1E+30
D8	x* x3	15	0	5	5	3
E8	x* x4	65	0	4	1E+30	3

Korlátozó feltételek

Cella	Név	Végérték	Shadow Árnyékár	Feltétel jobb oldala	Megengedhető növekedés	Megengedhető csökkenés
F3	f1	100	2,5	100	30	70
F4	f2	160	0,75	160	140	60
F6	f4	50	0	60	1E+30	10
F5	f3	100	1,75	100	20	60

A duál optimum:

$\underline{y}_o$=[2,5 0,75 1,75 0]*

Az árnyékárak oszlopából.

Valamint: **$\underline{w}_o$=[0 1,5 0 0]***

A redukált költség oszlopából.

Érzékenységvizsgálat:

b_1-re: $100-70 \leq b_1 \leq 100+30$

b_2-re: $160-60 \leq b_2 \leq 160+140$, és így tovább.

Az érzékenységvizsgálat szerint: ha a b_i értékekkel kilépünk a kapott intervallumból, akkor az optimális tábla szerkezete megváltozik.

Például: Ha a b_1 értéke 140 lesz, akkor: $\underline{\mathbf{x}}_\mathbf{o}$**=[50 0 0 80]*.**

Az érzékenységjelentésből a célegyütthatókra is kapunk határokat:

c_1-re: az eredeti érték mindkét irányban 3-mal változhat: $3 \le c_1 \le 9$.

c_2-re: az eredeti érték felfelé 1,5-del, lefelé10^{30}-nal (azaz végtelennel) változhat:

Így: $-\infty < c_2 \le 7{,}5$

Hasonlóan: $2 \le c_3 \le 10$ és $1 \le c_4 < \infty$.

Például: Ha a c_1 értéke 10 lesz, akkor: $\underline{\mathbf{x}}_\mathbf{o}$**=[50 0 0 50]*.**

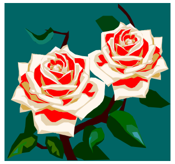
A szimplex módszerrel számolva az érzékenységvizsgálatra hasonló eredményeket kapunk. (Eltérés lehet, az Excel közelítő számolást végez.)

A számítógépes megoldásnál nem kell megkülönböztetni a normál feladatot (ez volt a példánk) az általános lineáris programozási feladattól.

Így a relációjelek lehetnek tetszőlegesek és a cél is lehet minimum.

A Solverben kérhetjük, hogy a döntési változók egész értékűek legyenek.

Ez utóbbi esetben a program nem tud érzékenységi vizsgálatot végezni.



Disztribúciós feladat megoldása Solverrel

Példa: Egy szállítási feladatban az F_1 és F_2 feladótól a teljes készletet el kell szállítani. Az F_1 feladó az R_1 megrendelőnek nem szállíthat. Adatok:

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	4	3	5	6	40
F_2	3	5	4	7	80
F_3	2	3	5	4	90
	70	70	40	20	

Az F_i sorok végén a szállítandó mennyiségek, az R_j oszlopok „alján” az igényelt mennyiségek állnak.

A táblázat belsejében lévő számok az F_i-ből R_j-be történő egységnyi mennyiség szállításának költségét mutatják.

Névleges állomást (ötödik rendeltetési helyet) és tiltótarifákat kell felvennünk:

M	3	5	6	M	40
3	5	4	7	M	80
2	3	5	4	0	90
70	70	40	20	10	

A tiltásokat a többi költségelemhez képest igen nagy számok beírásával (M) valósítjuk meg. Például: M=99.

Cél: az F_i-ből az R_j- be szállítandó $x_{i\,j}$ mennyiségek mátrixának meghatározása úgy, hogy az összköltség minimális legyen.

A feladat megoldható a „szokásos” matematikai modellel, 15 változóval.

Egyszerűbb, gyorsabb megoldást kapunk a „mátrixcsere”-módszerrel.

Ehhez felvesszük az Excellben a névleges állomással, tiltásokkal kiegészített táblázatunkat:

	R1	R2	R3	R4	R5	
F1	99	3	5	6	99	40
F2	3	5	4	7	99	80
F3	2	3	5	4	0	90
	70	70	40	20	10	

Az adattáblázatot az Excellben bárhol elhelyezhetjük. Legyen most R1 a B2 cellában.

Ezután a megoldás $\underline{X}=[x_{i\,j}]$ mátrixot jelöljük ki, célszerűen az adatok alatt:

	R1	R2	R3	R4	R5		
F1	0	0	0	0	0	0	
F2	0	0	0	0	0	0	
F3	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0		0

Ebben a táblázatban legyen az R1 helye (például) B9 cellában, a célcella pedig legyen a H13.

A cellákat nullákkal töltsük fel.

Az $\underline{X}$ mátrix oszlopaiban és soraiban összesen az előírt mennyiségek legyenek.

Ehhez: a B13 cellába az összegfüggvényt hívjuk be: SZUM(B10;B12), majd a vonszolófüllel a többi oszlopösszeget is előállítjuk R5-ig.

A sorcellák összegzése: a G10 cellába összegzünk: SZUM(B10;F10) és ezután a vonszolófüllel összegezzük a többi sort F3-ig.

A célcellába (H13) szorzatösszeg kerül. A két tömb: B3-F5 és B10-F12 ($ jel!).

A H13 cellán állva ezután behívjuk a Solvert.

Célcellaként H13 jelenik meg (ha nem: írjuk oda), bejelöljük a minimumot és módosuló cellák legyenek a B10-F12.

A korlátozó feltételek: a B6-F6 és B13-F13 sorok egyenlők, valamint egyenlőek a G3-G5 és a G10-G12 oszlopok is.

A Solverbe célszerű az egérmutatóval bevinni az adatokat.

Végül beállítjuk a nemnegatív és a lineáris modell feltételeket.

A megoldás gombot lenyomva megkapjuk az eredményt:

	R1	R2	R3	R4	R5		
F1	0	40	0	0	0	40	
F2	40	0	40	0	0	80	
F3	30	30	0	20	10	90	
	70	70	40	20	10		630

Az összköltség minimuma 630.

Az egyes relációkban szállítandó mennyiségeket a szállítási mátrix mutatja.

Például: F1-ből R1-be nincs szállítás, az R2-be pedig 40 egységnyit szállítunk.

A szállítási mátrix:

$$\underline{X}=\begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & 0 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Ez azt is jeleneti, hogy a 3. feladónál 10 egység marad (a névleges állomásnak szállít).

Megoldás Lingoval

A program lingo.com lapról tölthető le (a demo változat, ez oktatási célra elég).

A szofver előnye, hogy a matematikai modell a szokásos alakban írható be, tud speciális modelleket kezelni és pontosabb az Excelnél.

Használatához szükséges tudni:

1.) A nemnegatív feltételt külön nem kell beírni, a program ezt feltételezi.

2.) A feltételek sorait pontosvesszővel kell lezárni, a szorzásjelet ki kell írni.

3.) A nagyobb-egyenlő, kisebb-egyenlő relációknál nem kell egyenlőséget írni.

4.) A célt (min vagy max) sor elején ki kell írni.

5.) A felkiáltójelek közé tett szöveget a program megjegyzésként kezeli.

A program indítása után begépeljük a modellt (legyen ez a 2. lapon lévő példa).

```
x1+x2+x4<100;
2*x2+2*x3+2*x4<160;
2*x1+2*x2+2*x3<100;
x1+x3<60;
max=6*x1+6*x2+5*x3+4*x4;
```

A Lingoban célfüggvényként szerepeltethetünk törtfüggvényt (ez a gyakorlatban sokszor előfordul), vagy más nem lineáris (pl. másodfokú) függvényt.

A megoldást a solve parancsra lépve kapjuk.

A megoldásból leolvasható mind a primál, mind a duál optimum:

Global optimal solution found.
Objective value: 545.0000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 4

Variable	Value	Reduced Cost
X1	35.00000	0.000000
X2	0.000000	1.500000
X4	65.00000	0.000000
X3	15.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	2.500000
2	0.000000	0.7500000
3	0.000000	1.750000
4	10.00000	0.000000
5	545.0000	1.000000

A program globális optimumot talált, ehhez 4 lépésben jutott el.

Emlékeztetőül a jelöléseinkkel:

$z_o=545$

$\underline{x}_o=[35\ 0\ 15\ 65]^*$ $\underline{u}_o=[0\ 0\ 0\ 10]^*$

$\underline{y}_o=[2{,}5\ 0{,}75\ 1{,}75\ 0]^*$

$\underline{w}_o=[0\ 1{,}5\ 0\ 0]^*$

Az egyes optimális megoldások elhelyezkedése a táblázaton jól látható.

Példa: Egy üzem 2 terméket gyárt, két eőforrás felhasználásával. Az egyes termékek egységnyi mennyiségébe az erőforrásokból 2, 2, illetve 1, 2 egységnyi épül be. A kapacitások felső korlátai: 3000 és 4000. A piaci igény az egyes termékekre maximum 1200, illetve1500 darab. A termékek eladási egységárai 110 és 80, az önköltségi egységárak: 50, 50. A gyártás fix költsége: 500. Adjuk meg azt a termékösszetételt, amelynél az egységnyi költségre eső fedezeti összeg maximális!

A matematikai modell célfüggvénye tört (hiperbolikus programozás):

```
!Hiperbolikus programozás szélsőértéke!
2*x1+x2<3000;
2*x1+2*x2<4000;
x1<1200;
x2<1500;
max=(60*x1+50*x2)/(50*x1+50*x2+500);
```

A Lingoba történő adatbevitel módját is mutatja a modellünk.

A megoldást a solve gomb lenyomásával szinte azonnal megkapjuk:

Local optimal solution found.

Objective value:	1.190083
Infeasibilities:	0.000000
Extended solver steps:	5
Total solver iterations:	25

Variable	Value	Reduced Cost
X1	1200.000	0.000000
X2	0.000000	0.1570931E-03

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1600.000	0.000000
2	0.000000	0.8196161E-05
3	1500.000	0.000000
4	1.190083	1.000000

A célfüggvény optimális (legnagyobb) értéke: z_o=1,19, ezt 25 lépésben számolta ki a Lingo.

Eredményül azt kaptuk, hogy ehhez csak az első terméket gyártsuk: $\underline{\mathbf{x}}_o$**=[1200 0]*.**

A táblázatból a többi optimális érték is kiolvas-ható.

A Lingo is lehetővé teszi azt, hogy egészértékűek legyenek a megoldások (integer programozás), és más számításokra (érzékenységvizsgálat!) is alkalmas.

Az internetről további más optimalizáló szoftverek tölthetők le, illetve konkrét gazdasági problémák megoldásához vásárolhatunk ilyeneket.

A fejezet tárgyalását befejeztük.