Matematikai modellezés

Bevezető

A diasorozat a Döntési modellek című könyvhöz készült.

Készítette: Dr. Ábrahám István

Döntési folyamatok matematikai modellezése

Az emberi tevékenységben meghatározó szerepe van a **döntéshozatalnak.**

A döntések **előkészítésére** gyakran használnak különféle **modelleket**.

A modell

A modell a vizsgált objektumot, szituációt, folyamatot **reprezentálja**, általában jelentős **egyszerűsítésekkel**, az adott szempont szerinti **lényegre koncentrálva.**

A modellek típusai

Többféle szempont szerint kategorizálhatók a modellek.

1. Anyagi modellek

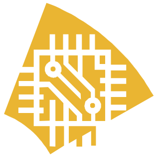
Általános jellemzőjük valamilyen **kézzelfogható** megjelenés. A főbb **kategóriák:**

a.) Geometriai modellek

Ezek legtöbb esetben **makettek**, a tárgyak leegyszerűsített, **kicsinyített-nagyított másai.**

b.) Fizikai modellek

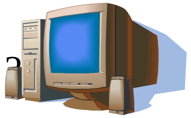
Ekkor a valósággal való **fizikai hasonlóság** ad alapot a modell készítéséhez.



c.) Tárgyi-matematikai modellek

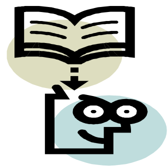
Általában a **mennyiségi viszonyok**, **számolási eljárások** modellezésére szolgálnak.

d.) Kibernetikai modellek



Az **irányítási folyamatban** használatos eszközöket szokás ide sorolni (pl. **számítógép**).

2. Eszmei modellek



A valóságot ez esetben **gondolatilag** modellezzük.

Lehet az eszmei modelleknek is „kézzel fogható” alakja, hiszen egy írásban is megjelenő eszmei modell ezzel nem válik tárgyivá.

a.) Képmás modell

A létező, vagy létesítendő **objektum egyszerűsített** (vagy speciális jellemzőkkel kiegészített) **mását** jelenti.

Ilyen **például** egy ház **építési tervrajza**.

b.) Jel modell

Az illető tárgyat, folyamatot **jelekkel** jeleníti meg.

Például ilyenek a **közlekedési jelek, vagy a matematikai formulák.**

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 300 \\
3x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 100 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 150 \\
x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\
 & & x_2 & & & - & x_4 & \geq & 3
\end{array}
$$

c.) Vegyes eszmei modell

A valóság leírásához, értelmezéséhez **jeleket is**, **képmásokat is** használ.

Példa erre a kémiában használt **szerkezeti képlet.**

A közgazdaságtan modelljei legtöbbször az eszmei (absztrakt) jelmodellek sorába tartoznak.

A gazdasági élet egyes területein a nagyobb feladatokra tudományosan is megalapozott modelleket a 20. századtól kezdtek alkalmazni.

A század második felétől egyre gyakoribbakká és jelentősebbekké váltak a számítógépes szimulációs (kibernetikai) modellek.

Az absztrakt jelmodellek

A gazdasági folyamatok modellezhetőségéhez **feltételek szükségesek.**

Feltételezzük,hogy a **véletlen tényezők**, így a **szubjektív elemek** és a **kiszámíthatatlan természeti erők** szerepe **csekély** legyen, vagy megfelelően **szabályozni** lehessen azokat.

A gazdasági folyamatok modellezéséhez általában a következő **lépéseket** kell tennünk:

1.) Absztrakció (egyszerűsítés, elvonatkoztatás)**:** a feladat **lényegének** megragadását jelenti.

Általában nem könnyű feladat, különböző minták útmutatásul szolgálhatnak ezen a téren.

2.) A matematikai megfogalmazás.

A **helyes** modell felvétele a probléma megoldhatóságának **kulcskérdése**, ez **előismereteket** kíván.

Gyakorlatot szerezni ezen a téren általában az egyszerű feladatok kézi megoldásával lehet.

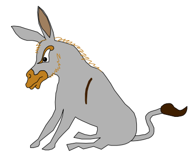
3.) A modell megoldása.

A gyakorlati feladatoknál szinte kizárólag számítógépes megoldásokat alkalmaznak.

4.) Az elméleti eredmények elemzése.

A megoldásból adódó **primál-duál optimumok**, az **érzékenység vizsgálatok** és más eredmények közgazdasági értelmezéséhez segítséget adnak a **manuálisan megoldott egyszerűbb feladatok**.

5.) Visszacsatolás: A gyakorlati **alkalmazás**, az **eredmények** ismeretében történik.



Sokszor előfordul, hogy a gyakorlat tükrében a modellünk finomításra szorul.

A matematikai döntési modellek struktúrája

A gyakorlatban előforduló gazdasági **döntési problémák** megoldásánál alkalmazott **lépések sorrendje** (a megoldás algoritmusa) általában **megegyezik**.

1.) A döntési változók meghatározása

Egyes problémáknál viszont nagy körültekintést igényel a feladat változóinak megadása.

Termékszerkezet optimalizálásakor legtöbbször a gyártásra kerülő **termékek darabszáma** a **döntési változó.**

2.) A feltétel rendszer felírása

Általában csak olyan kérdésekkel tudunk foglalkozni, ahol a **feltétel relációk elsőfokúak.**

A gazdasági döntések előkészítését, illetve elemzését szolgáló modellek többsége ilyen.

3.) A cél megfogalmazása

A **cél** az **optimum**, ami a lehető **legnagyobb**, vagy **legkisebb megoldások** megtalálását jelenti.

Gyakori, hogy a feltételrendszerhez több célfüggvény is tartozik, illetve nem elsőfokú a célfüggvény.

4.) A számolási eljárás megadása

A gyakorló feladatoknál általában a **kézi szimplex** megoldást, a nagyobb terjedelmű feladatoknál a **gép**i megoldást (megfelelő **célszoftverek** segítségével) választjuk.

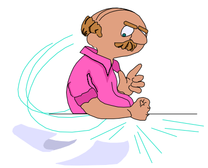
Optimumokat nemcsak lineáris programozási módszerekkel lehet számolni.

A matematikai döntési modellek megoldása

Az operációkutatási tanulmányaink során az optimalizálási feladatoknak a **geometriai** és **algebrai** megoldásokat tárgyaltuk.

A gyakorlatot modellező feladatokban a matematikai modell felvétele általában nem egyszerű, ez szokta a „szűk keresztmetszetet" jelenteni a megoldásban.

Példa: Van **1000** darab **7** méteres oszlopunk, ezekből **1,5** és **2,5** méteres oszlopokat kell vágnunk. Legalább **négyszer** annyi **1,5 méteres** oszlopra van szükségünk, mint **2,5 méteresre.** Hogyan vágjuk fel az 1000 darab 7 méteres oszlopot, hogy a **hulladékképződés minimális** legyen? (A hulladékdarab nem lehet **1 méternél** hosszabb.)



Megoldás: A lehetséges darabolási esetek:

I. 2 darab **2,5** méteres, **1** darab **1,5** méteres oszlop és marad **0,5** méter hulladék.

II. 1 darab **2,5** méteres, **3** darab **1,5** méteres oszlop és ekkor **nincs** hulladék.

III. 0 darab **2,5** méteres, **4** darab **1,5** méteres oszlop és marad **1** méter hulladék.

A **döntési változók** kijelölése: az x_1, x_2, x_3 jelentse azt, hogy az **I.**, a **II.**, illetve a **III.** változatot **hány** egész (7 méteres) **oszlopnál** alkalmaztuk.

A **modell** felvétele: Nyilván igaz: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. **(Triviális feltétel.)**

A **tevékenység feltételek:** $x_1+x_2+x_3 = 1000$. ***Hiszen az összes egész oszlopot felvágjuk.***

A **2,5** méteres oszlopokból lesz összesen $2x_1+x_2$ darab. ***(Az I. és a II. vágási módnál lesz ilyen oszlop).***

Az **1,5** méteres oszlopokból lesz összesen $x_1+3x_2+4x_3$ darab.

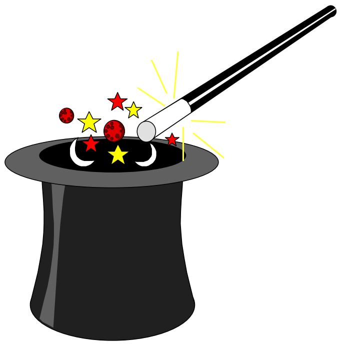
Tudjuk, hogy **legalább négyszer** annyi **1,5** méteres oszlopra van szükségünk, mint **2,5** méteresre.

Így **igaz**: $x_1+3x_2+4x_3 \geq 4(2x_1+x_2)=8x_1+4x_2$. Rendezve: $7x_1+x_2-4x_3 \leq 0$.

A **célfüggvényt** a maradékokra írjuk fel: $z=0{,}5x_1+x_3 \to \min.$

A **matematikai modell** tehát :

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$
$$x_1+x_2+x_3 = 1000$$
$$7x_1+x_2-4x_3 \leq 0$$
$$z=0{,}5x_1+x_3 \to \min.$$



A feladat egyszerűen megoldható **szimplex** módszerrel:

	x_1	x_2	x_3	b		x_1	x_2	b		x_1	u_2	b
$\hat{u}_1$	1	1	$\boxed{1}$	1000	x_3	1	1	1000	x_3	$-6/5$	$-1/5$	200
u_2	7	1	-4	0	u_2	11	$\boxed{5}$	4000	x_2	$11/5$	$1/5$	800
z	$-0{,}5$	0	-1	0	z	$1/2$	1	1000	z	$-17/10$	$-1/5$	200
$-\hat{z}$	1	1	1	1000	$-\hat{z}$	0	0	0				

Az **optimális** megoldás:

$\underline{x}_o=[\ 0\ \ 800\ \ 200\ ]^*$ $\quad \underline{u}_o=\underline{0}$

$z_o=200.$

Tehát **800** darab **7** méteres oszlopot a **II.** módon, **200** darabot a **III.** módon kell darabolni.

Lesz: **800** darab **2,5** méteres, 3·800=2400 és 4·200=800, összesen **3200** darab **1,5** méteres oszlop.

Összesen **200** méternyi hulladék keletkezik.

A döntési változók felvétele a fenti példa szerint is általában alapos megfontolást igényel.

Gyakran találkozhatunk olyan problémával, ahol az **adathalmaz kétdimenziós**. Ekkor a **döntési változók „kétindexesek”.**

Példa: Az F_1 és F_2 feladóhelyekről az R_1, R_2, R_3 célállomásokra adottak a **mozgatandó mennyiségek** és az egyes relációkban az **egységnyi szállítandó mennyiségre jutó költségek:**

	R_1	R_2	R_3	
F_1	1	4	2	70
F_2	3	2	1	30
	30	20	50	

Készítsünk **minimális költségű** szállítási tervet!

Megoldás: az x_{ij} változó jelentse az egyes relációkban **szállításra kerülő árumennyiséget.**

A **triviális** feltétel: $x_{ij} \geq 0$, ahol $1 \leq i \leq 2$ és $1 \leq j \leq 3$.

A **feltételi relációkat** a szállítandó mennyiségek határozzák meg:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=70$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=30$$
$$x_{11}+x_{21}=30$$
$$x_{12}+x_{22}=20$$
$$x_{13}+x_{23}=50$$

A **célunk** a szállítás összköltségének minimalizálása:

$$z= x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+3x_{21}+2x_{22}+x_{23}\rightarrow \min.$$

A feladat **szimplex** induló táblája:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	b
$\hat{u}_1$	1	1	1	0	0	0	70
$\hat{u}_2$	0	0	0	1	1	1	30
$\hat{u}_3$	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	30
$\hat{u}_4$	0	1	0	0	1	0	20
$\hat{u}_5$	0	0	1	0	0	1	50
z	–1	–4	–2	–3	–2	–1	0
$-\hat{z}$	2	2	2	2	2	2	200

A **optimális** megoldás:

	x_{12}	x_{21}	
x_{13}	1	– 1	40
x_{23}	– 1	1	10
x_{11}	0	1	30
x_{22}	1	0	20
$\hat{u}_5$	0	0	0
z	– 1	– 3	160

Tehát **optimális** esetben:
$x_{11}=30$, $x_{13}=40$, $x_{22}=20$, $x_{23}=20$, a **többi relációban 0** a szállított mennyiség és az **összköltség minimuma 160.**

A fejezet tárgyalását befejeztük.