A SZERZŐ BEVEZETÉSE

A gondolkodás történetében gyakran megesik, hogy előtérbe kerül és gyorsan halad azoknak a problémáknak a tanulmányozása, amelyek egy hatékonynak ígérkező új módszer segítségével vizsgálhatók, míg a többi problémát hajlamosak elhanyagolni, vagy akár el is felejteni, tanulmányozásukat pedig lebecsülni.

Úgy látszik, századunkban — a metamatematika lendületes fejlődésének eredményeként — ilyen helyzet alakult ki a matematikai filozófia területén.

A metamatematika tárgya a matematikának egy olyan absztrakciója, ahol a matematikai elméleteket formális rendszerekkel, a bizonyításokat jól képzett formulák bizonyos sorozataival, a definíciókat olyan „rövidítésekkel" helyettesítik, amelyek „elméletileg mellőzhetők", de „tipográfiailag kényelmesek".[1] Ezt az absztrakciót Hilbert azért vezette be, hogy hatékony eljárást biztosítson a matematika

[1] *A. Church:* Introduction to Mathematical Logic. Princeton 1956. I. k. 76—77. o. Vö. még: *G. Peano:* Notations de logique mathématique. Torino 1894.; *B. Russell— A. N. Whitehead:* Principia Mathematica. I. k. Cambridge 1910. 12. o. Ez az euklideszi program Pascal-féle megfogalmazásának integráns része. L.: *B. Pascal:* Les réflexions sur la géométrie en général (De l'ésprit géométrique et de l'art persuader). *In:* J. Chevalier (szerk.): Oeuvres complètes. Párizs 1954. 575—604. o. Vö.: *I. Lakatos:* Infinite Regress and the Foundations of Mathematics. *In:* „Aristotelian Society Supplementary Volumes", 36. k. 1962. 158. o.

egyes módszertani problémáinak megközelítésére. Vannak azonban olyan problémák, amelyek kívül esnek a metamatematikai absztrakciók körén. Ezek közé tartozik az informális *(inhaltliche)* matematikával, az informális matematika fejlődésével és a matematikai problémamegoldás szituácionális logikájával kapcsolatos valamennyi kérdés.

Azt a matematikai filozófiai iskolát, amely hajlamos arra, hogy a matematikát formális axiomatikus absztrakciójával (és a matematika filozófiáját a metamatematikával) azonosítsa, „formalista" iskolának fogom nevezni. A formalista álláspont egyik legvilágosabb megfogalmazása Carnaptól származik. Carnap azt állítja, hogy *a)* „a filozófia helyét a tudomány logikája fogja elfoglalni...", *b)* „a tudomány logikája nem más, mint a tudomány nyelvének logikai szintaxisa...", *c)* „a metamatematika a matematikai nyelv szintaxisa".[1] Vagyis a matematika filozófiájának helyét a metamatematika foglalja el.

A formalizmus a matematika történetét elszakítja a matematika filozófiájától, mivel a matematikáról alkotott formalista elképzelés szerint a matematikának valójában nincsen története. A formalisták bármelyike alapjában véve egyetértene Russell „romantikusan" megfogalmazott, de komolyan gondolt megjegyzésével, hogy Boole-nak „A gondolkodás törvényei" (Laws of Thought. 1854.) című munkája volt „az első könyv, amelyet valaha is a matematikáról írtak".[2] A formalizmus nem hajlandó matematikának tartani annak nagy részét, amit általában oda sorolnak, s a matematika fejlődéséről egy szót sem tud szólni. A matematikai elméletek „alkotó" korszakai közül egyiket sem, a „kritikai" korszakok közül alig néhányat bocsátanának be a formalista mennyországba, ahol mint szeráfok, minden földi bizonytalanság szennyétől megtisztítva lakoznak a matematikai elméletek. A formalisták azért rendszerint a bukott angyalok számára is nyitva hagynak egy kis hátsó ajtót: ha kiderül, hogy a „matematika

1 *R. Carnap:* Logische Syntax der Sprache. Bécs 1934. XIII. és 9. o.

2 *B. Russell:* Miszticizmus és logika. Bp. 1976. 120. o. A „Miszticizmus és logika" előszavában Russell a következőket mondja erről az esszéről: „Hangvétele részben azzal magyarázható, hogy a szerkesztő igen szépen megkért arra, hogy a cikket »a lehető legromantikusabban« fogalmazzam meg."

és valami egyéb dolog keverékére" olyan formális rendszert tudunk találni, amely „bizonyos értelemben magában foglalja e keveréket", akkor ez a rendszer is bejuthat a mennybe.[1] Így Newtonnak négy évszázadon át kellett várakoznia, mígnem Peano, Russell és Quine végül is besegítette a mennyországba, miután sikerült formalizálniuk az analízist. Dirac szerencsésebb volt: Schwarz még életében megmentette a lelkét. Talán itt kell említést tennünk a metamatematikus paradox helyzetéről: formalista, sőt, még deduktivista kritériumok alapján sem tisztességes matematikus. Dieudonné szerint „minden matematikusnak, *aki ad valamit a szellemi integritásra* (kiemelés tőlem — *L. I.*), abszolút szükségszerű" axiomatikus formába foglalni érvelését.[2]

Manapság, a formalizmus uralma alatt, az ember hajlik arra, hogy Kantot parafrazálja: a matematika története, a filozófia iránymutatását nélkülözve, *vakká*, a matematika filozófiája, mellőzve a matematika történetének legérdekesebb problémáit, *üressé* válik.

A „formalizmus" a logikai pozitivista filozófia bástyája. A logikai pozitivizmus szerint egy állításnak csak akkor van értelme, ha vagy „tautologikus", vagy empirikus. Mivel az informális matematika se nem „tautologikus", se nem empirikus, szükségképpen értelmetlen, merő badarság.[3] A logikai pozitivizmus dogmái ártanak a matematika történetének és filozófiájának.

1 *H. B. Curry:* Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics. Amszterdam 1951. 56—57. o.

2 *J. Dieudonné:* Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques. *In:* „Revue Scientifique", 1939. 225. o.

3 Turquette szerint a Gödel-féle mondatok értelmetlenek. (*A. Turquette:* Gödel and the Synthetic A Priori. *In:* „The Journal of Philosophy", 1950. 129. o.) Turquette Copival vitatkozik, aki azt állítja, hogy mivel ezek a mondatok *a priori igazságok*, de nem analitikusak, cáfolják az *a priori* analitikus elméletét. (*I. M. Copi:* Modern Logic and the Synthetic *A Priori*. *In:* „The Journal of Philosophy", 1949. 243—245. o.; Gödel and the Synthetic *A Priori:* a Rejoinder. *In:* „The Journal of Philosophy", 1950. 633—636. o.) Egyikük sem veszi észre, hogy ebből a szempontból a Gödel-féle mondatok sajátos státusa abból ered, hogy ezek a tételek nem formális matematikai tételek, és így tulajdonképpen az informális matematikának egy speciális esetben betöltött státusáról vitatkoznak.

Ezekben az esszékben a *matematika metodológiájának* néhány problémáját akarom megvizsgálni. A „metodológia" szót hasonló értelemben használom, mint Pólya és Bernays a „heurisztiká"-t,[1] vagy Popper a „felfedezéslogiká"-t, a „szituácionális logiká"-t.[2] A „matematika metodológiája" kifejezés mai, a „metamatematika" szinonimájaként való túlzott használata kétségtelenül a formalizmus jegyét viseli magán. Azt mutatja, hogy a formalista matematikai filozófiában a metodológiának — mint felfedezéslogikának — nincs megfelelő helye.[3] A formalisták szerint a matematika a képletekbe foglalt mate-

1 *Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Bp. 1977., különösen 142—143. o.; *G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. London 1954.; *Pólya Gy.:* A problémamegoldás iskolája. Bp. 1966.; *P. Bernays:* Review of Pólya's How to Solve It. *In:* „Dialectica", 1947., különösen 187. o.

2 *K. R. Popper:* Logik der Forschung. Bécs 1934. 90. o.; The Poverty of Historicism. London 1957. 147. o. és kk.

3 Ezt például Tarski két írásával szemléltethetjük. (*A. Tarski:* Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik. *In:* „Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres Varsovie", 1930. Cl. III. 22—29. o. és Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I. *In:* „Monatshefte für Mathematik und Physik", 1930. 361—404. o.) Az első dolgozatban Tarski a „deduktív tudományok" kifejezést *kimondottan* a „formalizált deduktív tudományok" rövidítéseként alkalmazza. A következőket mondja: „A formalizált deduktív tudományok alkotják a metamatematika kutatási területét, nagyjából azonos értelemben, mint ahogy a térbeli entitások alkotják a geometriai kutatások területét." A második dolgozatban fondorlatosan imperialista módon kicsavarja ezt az értelmes megfogalmazást: „A deduktív tudományok éppúgy a deduktív tudományok metodológiájának tárgyát alkotják, ahogy a térbeli entitások a geometriáét, az állatok az állattanét. Természetesen nem minden deduktív tudomány formája alkalmas arra, hogy tudományos vizsgálódás tárgya legyen. Azok a tudományok például, amelyek nem nyugszanak határozott logikai alapon, amelyeknek nincsenek pontos levezetési szabályaik, és amelyeknek a tételeit a köznyelv rendszerint kétértelmű és pontatlan kifejezéseivel fogalmazzák meg — egyszóval a nem formalizált tudományok —, nem alkalmasak erre. A metamatematikai kutatások tehát a formalizált deduktív tudományok tárgyalására korlátozódnak." Ebben az az újdonság, hogy míg az első megfogalmazás azt állította, hogy a metamatematika tárgyát a formalizált deduktív tudományok képzik, a második megfogalmazás szerint a metamatematika tárgya csak azért korlátozódik a formalizált deduktív tudományokra, mert a nem formalizált deduktív tudományok egyáltalán nem alkalma-

matikával azonos. De mit lehet *felfedezni* egy formalizált elméletben? Kétféle dolgot. *Először:* olyan problémák megoldását, amelyeket egy megfelelően programozott Turing-gép véges időn belül képes megoldani. (Például: bizonyítás-e valami, amiről ezt feltételezik, vagy nem?) Nincs olyan matematikus, akit érdekelne annak a halálosan unalmas mechanikus „módszernek" a végigvitele, amelyet az efféle eldöntési eljárások előírnak. *Másodszor:* olyan problémák megoldását fedezheti fel az ember (például: egy eldönthetetlen elmélet egy bizonyos formulája tétel-e, vagy nem), ahol a „szabályozhatatlan intuíció és a jó szerencse" az egyetlen eligazító „módszer".

Az élő matematikában nemcsak ez a soványka választási lehetőség van egy gép racionalitása és a vak találgatás irracionalitása között:[1]

sak arra, hogy tudományos vizsgálat tárgyát képezzék. Ez az állítás azt is magában foglalja, hogy egy formalizált tudomány előtörténete nem lehet tudományos vizsgálat tárgya, eltérően egy állatfaj előtörténetétől, amely a valóban tudományos fejlődéselmélet tárgya lehet. Senki sem kételkedik abban, hogy egy matematikai elmélet egyes problémáit csakis azután lehet megvizsgálni, miután formalizálták az elméletet, mint ahogy az emberi lényekkel kapcsolatos kérdések némelyikét (mondjuk, az emberek anatómiáját) csak haláluk után vizsgálhatjuk meg. Mégis kevesen fognak ebből arra a következtetésre jutni, hogy az emberi lények csak akkor „alkalmasak tudományos vizsgálatra", ha „halottként" szerepelnek, tehát a biológiai kutatások a holtak tárgyalására korlátozódnak. Bár nem lepődnék meg, ha Vesalius valamelyik lelkes tanítványa az anatómia kialakulásának dicsőséges napjaiban, amikor a boncolás hatékony új módszere kialakult, az élettant azonosította volna a holttestek elemzésével.

Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences (New York 1941.) című műve előszavában Tarski részletesen kifejti a formális rendszerektől eltérő bármely metodológia lehetőségére vonatkozó tagadó álláspontját: „Az empirikus tudományok metodológiájával foglalkozó könyv... főként tapogatózások és sikertelen erőfeszítések értékelésére és kritikájára kénytelen korlátozódni." Ennek az az oka, hogy az empirikus tudományok tudománytalanok: Tarski definíciója szerint ugyanis a tudományos elmélet „bizonyos szabályok szerint rendezett, igazolt állítások rendszere" (uo.).

1 A formalista filozófia egyik legveszélyesebb hóbortja az, hogy 1. valamit — helyesen — állít a formális rendszerekről, 2. azután azt mondja, hogy ez a „matematikára" is érvényes, s ez ismét helyes, ha elfogadjuk a matematika azonosítását a formális rendszerekkel, 3. végül hamis jelentéseltolással a „matematika" szót ismét

2

az informális matematika vizsgálata a gyakorló matematikusok számára gazdag szituácionális logikát eredményez, egy olyan szituácionális logikát, amely nem mechanikus, nem irracionális, de amelyet a formalista filozófia nem ismerhet el, még kevésbé ösztönözhet.

A matematikatörténet és a matematikai felfedezés logikája, azaz a matematikai gondolkodás filogenezise és ontogenezise,[1] csak a formalizmus kritikájával és végső elutasításával építhető fel.

A matematika formalista filozófiájának azonban nagyon mély gyökerei vannak. Ez a *dogmatikus* matematikai elméletek hosszú láncolatának utolsó láncszeme. Több mint kétezer éve vitatkoznak egymással a *dogmatikusok* és a *szkeptikusok*. A dogmatikusok azt állítják, hogy — emberi értelmünk és/vagy érzékszerveink segítségével — képesek vagyunk eljutni az igazsághoz, és meg is tudjuk állapítani, hogy eljutottunk hozzá. A szkeptikusok viszont vagy azt állítják, hogy egyáltalán nem juthatunk el az igazsághoz (hacsak misztikus élményeken keresztül nem), vagy azt, hogy nem tudhatjuk, képesek vagyunk-e elérni avagy hogy elértük-e az igazságot. Ebben a nagy vitában, amelyben újra és újra korszerűsítik az érveket, a matematika a dogmatizmus

a hagyományos értelemben használja. Erről mondja Quine, hogy „ez a matematika jellegzetes helyzetét tükrözi: a matematikus a szabályozhatatlan intuíció és jó szerencse segítségével bukkan rá egy bizonyításra, más matematikusok viszont később ellenőrizni tudják ezt a bizonyítást" (*W. V. O. Quine:* Mathematical Logic. Cambridge—Massachusetts 1951. 87. o.). Gyakran azonban igen kényes vállalkozásnak bizonyul egy *köznapi* (informális) bizonyítás ellenőrzése. Ahhoz, hogy valaki ráakadjon egy „hibára" éppen annyi intuícióra és szerencsére van szükség, mint ahhoz, hogy rájöjjön egy bizonyításra. Az informális bizonyításokban a „hibák" felfedezése néha évtizedekbe telhet, ha nem évszázadokba.

1 Poincaré és Pólya szerint Haeckel „biogenetikai alaptörvénye", amely szerint az ontogenezis a filogenezis megismétlése, a szellemi fejlődésre is alkalmazható, különösen a matematikában. [*H. Poincaré:* Science et méthode. Párizs 1908. 135. o.; *G. Pólya:* The Teaching of Mathematics and the Biogenetic Law. *In:* I. J. Good (szerk.): The Scientist Speculates. London 1962. 352—356. o.] Hogy Poincarét idézzük: „A zoológusok azt állítják, hogy az állat embrionális fejlődése röviden megismétli őseinek a geológiai korszakokban lezajlott egész történetét. Úgy látszik, ugyanez a helyzet a szellemi fejlődéssel is... Ezért legelső kalauzunknak a tudomány történetének kell lennie."

büszke fellegvára volt. Valahányszor „válságba" került az adott kor matematikai dogmatizmusa, egy új változat ismét teljes pontosságot és végleges alapokat szolgáltatott, ily módon állítván helyre azt az elképzelést, hogy a matematika ellentmondást nem tűrő, tévedhetetlen, cáfolhatatlan tudomány, „az egyetlen tudomány..., amellyel Istennek ez ideig az emberiséget megajándékoznia tetszett".[1] A legtöbb szkeptikus belenyugodott a dogmatikus ismeretelmélet e védőbástyájának rendíthetetlenségébe.[2] Igencsak ideje már, hogy leszámoljunk ezzel a képzettel.

Az itt következő tanulmány lényege vitatja a matematikai formalizmust, de a matematikai dogmatizmus végső állásait közvetlenül nem támadja. Szerény célja annak a nézetnek a kifejtése, hogy az informális, kváziempirikus matematika nem a kétségbevonhatatlanul megalapozott tételek számának egyhangú növekedése révén fejlődik, hanem a találgatások szüntelen helyesbítésével, az elmélkedés és a kritika, a bizonyítások és cáfolatok logikája segítségével. Mivel azonban a metamatematika az éppen most gyorsan fejlődő informális, kváziempirikus matematika egyik paradigmája, a tanulmány, témájánál fogva, a modern matematikai dogmatizmussal is szembefordul. Aki tanulmányozza a metamatematika legújabb történetét, az itt leírt modelleket saját területén is fel fogja ismerni.

A dialógus forma a történet dialektikáját kívánja tükrözni: az a célja, hogy valamiféle *racionálisan rekonstruált vagy „desztillált" történelmet* mutasson be. *A tényleges történelem ez alatt, a lábjegyzetekben olvasható, melyek legtöbbjét ezért a tanulmány szerves részének kell tekinteni.*

1 *T. Hobbes:* Leviatán. Bp. 1970. 31 o.
2 A matematika szerepéről a dogmatikusok és szkeptikusok vitájában lásd: *I. Lakatos:* Infinite Regress and the Foundations of Mathematics. Id. kiad. 155—184. o.