

Dialógus a matematika alkalmazásairól

ARKHIMÉDÉSZ: Felség! Ily késői órában! Ez aztán a meglepetés! Minek köszönhetem, hogy Hierón király megtisztel engem látogatásával szerény otthonomban?

HIERÓN: Kedves barátom, Arkhimédész, ma este a palotámban vacsorát adtam, hogy megünnepeljük kicsiny városunk, Szirakuza győzelmét a hatalmas Róma felett. Te is meg voltál híva, de helyed üresen maradt. Miért maradtál távol éppen te, akinek mai győzelmünket köszönhetjük? A te hatalmas réztükreid gyűjtöttak fel tízet a rómaiak húsz nagy hadihajója közül; égő fákyaként száguldottak ki a kikötőből a délnyugati szélben, de mind elsüllyedtek, mielőtt a szabad tengerre kiértek volna. Nem akartam anélkül lefeküdni, hogy ne mondjak mégegyszer köszönetet neked azért, hogy megszabadítottad városunkat az ellenségtől.

ARKHIMÉDÉSZ: Még visszajöhetnek, és a szárazföldön még mindig körül vagyunk zárva.

HIERÓN: Erről majd később beszélünk. Hadd adjak előbb át neked egy ajándékot, a legszebbet, amit adni képes vagyok.

ARKHIMÉDÉSZ: Ez valóban csodálatos mestermű!

HIERÓN: Ez a tál szintiszta aranyból van: megvizsgálható a módszereddel is, nem fogsz benne egy szemernyi ezüstöt sem találni.

ARKHIMÉDÉSZ: Ha nem tévedek, a domborművek Odüsszeusz kalandjait ábrázolják. A középen látom a gyanútlan trójaiakat, amint várukba vonszolják a hatalmas falovat. Én gyakran tűnődtem azon, vajon használtak-e a trójaiak ehhez csigát? A falónak persze kerekai voltak, viszont a várba vezető út meredek kellett, hogy legyen...

HIERÓN: Drága barátom, felejtsd el egy pillanatra a csigái-

dat! Emlékezhetsz, hogy mennyire csodálatos, amikor háromszoros csigáddal egyesegyedül vízrebocsátottad a súlyosan megrakott hajót, amit Ptolemaiosz királynak akartam küldeni. Most azonban vess inkább egy pillantást a tálon ábrázolt többi jelenetre is!

ARKHIMÉDÉSZ: Látom a Küklopszot, meg Kirkét, amint Odüsszeusz társait disznókká változtatja, itt meg a szirének koncertjét, amit Odüsszeusz az árbochoz kötözve hallgat; ha rá nézek, szinte hallom az elbűvölő dalt! És itt van Odüsszeusz az alvilágban, amint Akhilleusz árnyával találkozik, ott meg, amint a bájos Nauszikaát és szolgálóit megijeszti, és végül persze itt látható a jelenet, amikor Odüsszeusz öreg koldusnak álcázva megfeszíti íját, és leszámol a kérőkkel – valóban bámulatos műalkotás. Köszönöm, királyom, nagylelkűségedet: ez igazán királyhoz méltó ajándék!

HIERÓN: Valóban, ez kincseskamráj legjobbjának darabja, de te megérdemelted. Egyébként nemcsak szépsége és értéke miatt választottam éppen ezt a darabot, hanem még egy okból. Amit te ma Szirakuzáért tettél, az csak Odüsszeusz furfangjával hasonlítható össze: mindkettő az ész diadala a nyers erő felett.

ARKHIMÉDÉSZ: Pirulásra készíted egy öreg embert, királyom. De hadd figyelmeztesselek ismét arra, hogy a háborúnak még nincsen vége. Akarod hallani a véleményemet?

HIERÓN: Mint királyod, parancsolom, mint barátod és rokonod, kérem, hogy mondd el őszintén, amit gondolsz.

ARKHIMÉDÉSZ: Ez az a pillanat, amikor békét kell kötnöd a rómaiakkal; most jobb pozícióból tudunk alkudni velük, mint bármikor a háború kezdete óta. Ha Marcellus nem küldi el a követét hozzád éjfélig, akkor te küldj hozzá követet még hajnalhasadás előtt, és köss békét, mielőtt a Nap újból lemegy. Marcellus alig várja, hogy visszavonhassa csapatait, amelyek a várost körülvéve tartják, mert szüksége van rájuk Hannibál ellen. Ha létrejön holnap a megegyezés, akkor a Rómába küldendő jelentésében azzal a szomorú hírral együtt, hogy flottája fele elveszett, egy diplomáciai sikerről is beszámolhat. Ha viszont elterjed Rómában a mai csata híre, a róma-

iak annyira el lesznek telve bosszúvággal, hogy a teljes győzelemnél kevesebbel nem lehet dühüket lecsillapítani. Arról fognak szónokolni a fórumon, hogy „le kell mosni a gyalázatot”. Jellemző barbár gondolat, mintha a megtörténteket meg nem törtéنتté lehetne tenni!

HIERÓN: Tökéletesen igazad van. A mai győzelmünkről még évezredek múlva is beszélni fognak, még ha előbb-utóbb mindannyiunkat kardélre hánynak is. Egyébként a helyzetelemzésed teljesen helyes. Marcellus már üzent is nekem, és felajánlotta a békét és csapatai visszavonását, bizonyos feltételek mellett. Ha azonban tudnád, hogy mik ezek a feltételek, kevésbé hevesen unszólnál a békekötésre.

ARKHIMÉDÉSZ: Mit kíván Marcellus?

HIERÓN: Mindenekelőtt tíz új hajót azért a tízért, amit ma elsüllyesztettünk; ezen felül, hogy leromboljuk összes erődeinket, kivéve egyet, amelyben egy római helyőrség állomásozna; természetesen rengeteg aranyat és ezüstöt követel, és hogy üzenjünk hadat Karthagónak; végül pedig túszként kéri fiamat, Gelónt, Heléné lányomat és téged. Megígéri azonban, hogy a városban senkinek a haja szála sem fog meggörbülni, amíg betartjuk a szerződést.

ARKHIMÉDÉSZ: Valószínűleg egy és mást ebből le lehet alakítani. Természetesen az én kiadatásomhoz ragaszkodni fog.

HIERÓN: Hogy tudsz erről ilyen higgadtan beszélni? Az Olümposz összes isteneire, amíg én élek, nem adom gyermekeimet az ellenség kezébe – és téged sem adlak ki! Az aranyat és ezüstöt nem bánom, azt megkaphatja. De ami leginkább aggaszt a békefeltételekben, az, hogy ha mi teljesítjük azokat, teljesen ki leszünk nekik szolgáltatva. Mi a biztosíték arra, hogy ő betartja a szerződést?

ARKHIMÉDÉSZ: Őrizkedj attól, hogy ezt a kérdést felvessed. A rómaiak nagyon érzékenyek a becsületükre – legalábbis a tárgyalások alatt. De azt talán el tudod kerülni, hogy a gyermekeidet oda kelljen adni.

HIERÓN: És mi lesz veled? Kész volnál feláldozni magadat a városért?

ARKHIMÉDÉSZ: Ez kérdés vagy csupán kérdés?

HIERÓN: Természetesen csak kérdés. Akarod egyébként tudni, hogy mit válaszoltam Marcellusnak?

ARKHIMÉDÉSZ: Hogyan, hát már válaszoltál is?

HIERÓN: Összes feltételeit elfogadom, kivéve azt az egyet, hogy téged túszként odaadjalak. Gyermekeim kiadását azonban csak azzal a feltétellel fogadtam el, hogy Marcellus is elküld nekem kettőt a gyermekei közül túsznak. Ami téged illet, azt üzentem hogy magas korod miatt nem viselnéd el, hogy táborban lakjál. De tudva, hogy ő téged valójában nem túsznak akar, hanem a bölcsességére van szüksége, megígértem, hogy könyv alakban leírod számára összes találmányaidat, amelyeknek katonai szempontból jelentőségük van.

ARKHIMÉDÉSZ: Erre soha nem leszek hajlandó.

HIERÓN: Miért nem? Ha béke lesz, nekünk nem lesz többé szükségünk a találmányaidra. Magyarázd meg, miért zárkózol el az elől, hogy írájál róluk.

ARKHIMÉDÉSZ: Ha van türelmed meghallgatni, elmondom az indokaimat.

HIERÓN: Szívesen meghallgatlak, úgysem akarok lefeküdni, amíg Marcellus válasza meg nem érkezik.

ARKHIMÉDÉSZ: Akkor ráérünk, mert Marcellusnak időre lesz szüksége ahhoz, hogy a válaszát megfogalmazza. Úgy fog hangzani, mint az ostorcsapás.

HIERÓN: Azt hiszed, hogy megszakítja a tárgyalásokat?

ARKHIMÉDÉSZ: Ez nem is vitás. te becsületében sértetted őt meg, ezt soha nem fogja megbocsátani, a megegyezés ezek után lehetetlen. Én mindig csodáltam a te diplomáciai művészetedet és különösen pszichológiai érzékedet, amellyel ellenfeleid legtitikosabb gondolatait kitaláltad. De ez egyszer nem gyakoroltad ezt a tehetségedet!

HIERÓN: Attól félek, hogy igazad van: az volt a baj, hogy túl részeg voltam, nem is annyira a bortól, mint a győzelemtől. De hagyjuk ezt, hiszen ami megtörtént, azon nem tudok már változtatni. Halljuk inkább az indokaidat.

ARKHIMÉDÉSZ: Bár a kérdés most már teljesen elméletivé vált, ha kívánod, hát halljad álláspontomat. te az én hadi-

gépeimet a trójai falóval hasonlítottad össze. A hasonlat szerintem is találó, de egészen más értelemben, mint ahogy te gondolod. Odüsszeusz arra használta a falóvat, hogy magát és társait becsempéssze Trója várába. Én arra használtam hadigépeimet, hogy velük becsempésszek a görög világ közvéleményébe egy gondolatot: azt, hogy a matematikát – és pedig nemcsak annak elemeit, hanem magasabb fejezeteit is – sikerrel lehet alkalmazni a gyakorlatban. Bevallom, csak hosszú habozás után szántam el magam erre, mert gyűlölöm a háborút és a vérontást. De a háború itt volt a nyakunkon úgyis, és ez volt az egyetlen út, hogy megértessem magam. Én próbáltam más módon megértetni magam az emberekkel, de sikertelenül. Hadd emlékeztesselek, hogy néhány éve fel találtam egy szivattyút, amellyel ki lehetne szívni a vizet a bányáidból, hogy az emberek ne legyenek kénytelenek derékig vízben dolgozni. Ám téged nem érdekelt a dolog. A bányafelügyelőd azt mondta nekem, őt nem érdekli, hogy a rabszolgák lába vizes lesz-e, – nincsenek cukorból, mondta. Emlékszel arra, amikor felajánlottam, hogy építetek egy gépet a szántóföldjeid öntözésére? Azt válaszoltad, hogy a rabszolgamunka olcsóbb. Amikor azt javasoltam Ptolemaiosz királynak, hogy malmait gőzzel hajtsuk, emlékszel, mit válaszolt? Azt, hogy azok a malmok, amelyek jók voltak az apjának és a nagyapjának, neki is jók lesznek. Soroljak fel még további példákat is? Volt még egy fél tucat. Az a törekvésem, hogy megmutassam a világnak, hogyan lehet a matematikát békés célokra felhasználni, nem talált visszhangra. De amikor a háború kitört, egyszerre mindenkinek eszébe jutottak a csigáim, fogaskerekeim és emelőim. Békeidőben mindenki úgy tekintette a találmányaimat, mint játékokat, amelyek nem méltók egy felnőtt emberhez, még kevésbé egy filozófushoz. Még te, aki pedig mindig támogattál engem, és segítettél megvalósítani az ötleteimet, te sem vitted őket egészen komolyan. Gépeimmel dicsekedtél vendégeidnek, hogy szórakoztasd őket, de ez volt minden. Hanem amikor kitört a háború, és a római hajóhad vesztegzár alá vette a kikötőt, én egy alkalommal elejtettem egy megjegyzést, hogy el lehetne a római hajókat kergetni úgy, ha hajítógéppel nagy köveket hajítanánk

a hajóikra. Két kézzel kaptatok az ötleten! Én nem vonhatam vissza szavamat, meg kellett valósítanom az ötletet. A siker felülmúlta várakozásomat. Miután egyszer elindultam ezen az úton, nem volt többé megállás. Természetesen jólesett nekem, hogy többé nem nevetik ki találmányaimat, és hogy végre alkalmam nyílt megmutatni a világnak, mire képes a matematika. De érzéseim kezdettől fogva nagyon vegyesek voltak. Hiszen én nem így akartam megmutatni a matematika „hasznosságát”. Láttam, amint gépeim embereket öltek, és ez büntudattal töltött el. Lelkiismeretfurdalásoktól kínozva, szent esküdt tettem Athénának, hogy hadigépeim titkát soha senkinek nem árulom el, azokról soha egy árva szót nem írok le. Próbáltam azzal megnyugtatni lelkiismeretemet, hogy azt mondtam magamnak: annak a híre, hogy Arkhimédész a matematika segítségével kergette el a rómaiakat Szirakuza alól, el fog jutni a görögül beszélő világ minden sarkába, és erre emlékezni fognak akkor is, amikor a háborúnak már régen vége van, és hadigépeim titka velem együtt a sírba szállt.

HIERÓN: Valóban, hadigépeid híre máris elterjedt az egész görög világban. Egyre-másra kapom az olyan leveleket királyoktól, akik barátaim, amelyekben találmányaidról faggatnak.

ARKHIMÉDÉSZ: És te mit válaszolsz nekik?

HIERÓN: Azt szoktam válaszolni, hogy e kérdések szigorúan titkosnak minősülnek mindaddig, amíg a háború tart.

ARKHIMÉDÉSZ: Titkaimat sikerült még azok elől is megőriznem, akik végrehajtották elgondolásaimat. Minden ember csak egy-egy kis részletről tud. Örülök, hogy te sohasem faggattál engem, mert még neked is megtagadtam volna a választ.

HIERÓN: Eddig valóban nem faggattalak, de most kérdezni akarok tőled egyet és mást. De ne félj, nem a titkaidat óhajtom ellesni, hanem csak néhány általános kérdést kívánok feltenni a találmányaid elvi alapjaira vonatkozóan.

ARKHIMÉDÉSZ: Ha a válaszadás nem jelenti esküm megszegését, felelni fogok kérdéseidre.

HIERÓN: Mielőtt a matematika alkalmazásairól kérdeznék, először valami egészen mást akarok kérdezni. Miért volt annyira fontos számodra, hogy a matematika alkalmazhatóságára vonatkozó gondolataid köztudomásra jussanak?

ARKHIMÉDÉSZ: Lehet, hogy naiv voltam, de azt hittem, hogy meg tudom változtatni a történelem menetét. Aggódtam a mi görög világunkért. Azt gondoltam, hogy ha széles körben alkalmazni fogjuk a matematikát – ami végeredményben görög találmány, és én azt hiszem, a görög szellem legjellemzőbb és legnagyobb vívmánya –, talán még meg tudjuk menteni a mi görög életformánkat. De most már látom, hogy ezzel elkésztünk. A rómaiak nemcsak Szirakuzát, hanem a többi görög várost is el fogják foglalni; a mi időnk lejárt.

HIERÓN: Szerintem a mi görög kultúránk ez esetben sem megy veszendőbe, mert a rómaiak át fogják venni. Hiszen látod, hogyan próbálnak minket mindenben utánozni; lemásolják szobrainkat, lefordítják irodalmunkat, és mint látod, Marcellust már a te matematikád is érdekli.

ARKHIMÉDÉSZ: A rómaiak sohasem fogják a matematikát igazán megérteni. Túlságosan is gyakorlati gondolkosúak, az elvont gondolatokhoz nincsen érzékük.

HIERÓN: Annál jobban érdekli őket a matematika gyakorlati alkalmazása.

ARKHIMÉDÉSZ: Az elvont matematikát és annak gyakorlati alkalmazásait nem lehet elválasztani. Aki elutasítja az elvont matematikát, az eltorlaszolja maga előtt az utat a matematika alkalmazásaihoz is. Aki a matematikát sikerrel akarja alkalmazni a gyakorlatban, annak álmok álmodójának kell lennie.

HIERÓN: Paradoxonokban beszélsz. Én eddig azt hittem, hogy a matematika alkalmazásához elsősorban jó gyakorlati érzék kell.

ARKHIMÉDÉSZ: Persze, hogy kell az is, a gondolat gyakorlati kiviteléhez. De a gondolat hiányát a gyakorlati érzék nem pótolhatja. Hús nélkül nem lehet húsvest főzni.

HIERÓN: Ezzel eljutottunk ahhoz a kérdéshez, melyet tulajdonképpen fel akartam tenni neked. Mi tulajdonképpen a te sikereid titka, mi a titka annak az új tudománynak, amit te

felfedezettél – nevezzük talán alkalmazott matematikának –, és miben különbözik ez attól a matematikától – nevezzük tiszta matematikának –, amelyet az iskolában tanítanak?

ARKHIMÉDÉSZ: Sajnálom, királyom, hogy válaszómmal csalódást fogok neked okozni; a kettő tulajdonképpen egy és ugyanaz. Nincs két matematika: csak az a matematika létezik, amelyet te is ismersz, és amire fiatalkorodban –amennyire emlékszem, nem is sikertelenül – téged is tanítottak, és ezt lehet alkalmazni. Alkalmazott matematika abban az értelemben, ahogyan te gondolod –tehát mint a tulajdonképpeni matematikától különálló és különböző önálló tudomány – nem létezik. Az én „titkom” azért képes rejtve maradni, mert tulajdonképpen nem is titok; úgy van elrejtve, mint egy arany érme, mely az utca porában hever. Bárki megtalálhatja, aki lehajol érte, de aki titkos rejtekhelyek után kutat, az sohasem fogja megtalálni.

HIERÓN: Tehát te azt mondd, hogy csodálatos hadigépeid azon a közönséges matematikán alapszanak, amelyet minden művelt ember ismer?

ARKHIMÉDÉSZ: Úgy látom, kezdesz megérteni.

HIERÓN: Mondj egy kézzelfogható példát.

ARKHIMÉDÉSZ: Vegyük például tükreimet, melyek ma olyan jó szolgálatot tettek. Amit tettem, az egyszerűen abban állt, hogy eszembe jutott a parabola egy jól ismert tulajdonsága, az, hogy ha a parabola bármely P pontját összekötjük F fókuszával, továbbá párhuzamosat húzunk a P pontból a parabola tengelyével, az így kapott két egyenes ugyanazt az α szöveget zárja be a parabola P pont-beli érintőjével. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy a parabolikus tükör a párhuzamosan érkező napsugarakat úgy veri vissza, hogy azok mind egy ponton mennek át, és így az e pontban lévő gyúlékony tárgy a napsugarak hevétől meggyullad. A tételt magát megtalálod nagyrabecsült alexandriai kollégáim könyveiben is.

HIERÓN: Nehéz elhinni, hogy Marcellus hajóhadának felét ez az ártatlanul hangzó geometriai tétel pusztította el, amelyhez hasonló hangzású tétel tucatszám található minden geometriai tankönyvben. Emlékszem rá, hogy e tételt én is tanul-

tam: a bizonyítását persze már teljesen elfelejtettem.

ARKHIMÉDÉSZ: Valószínűleg amikor tanultál róla, a bizonyítását is megértetted, talán még meg is csodáltad ötletességét és eleganciáját, de itt megálltál. A matematikusok közül egyesek ennél tovább mentek: megvizsgálták a tétel tisztán geometriai következményeit is, vagy esetleg új bizonyítást adtak a tételre, de itt ők is megálltak. Én csak egyetlen egy szerény lépéssel mentem tovább: elgondolkoztam azon, hogy mire lehetne felhasználni ezt a tételt.

HIERÓN: Én eddig azt hittem, hogy valami új optikai törvényt fedeztél fel.

ARKHIMÉDÉSZ: Az optika sem más tulajdonképpen, mint a geometria egy fejezete, illetve a geometriai tételek felhasználása a fénysugarak útjának vizsgálatára. Egyébként az optikából semmi mást nem használtam fel, mint a visszaverődés törvényét, ami már egy ideje ismeretes.

HIERÓN: Azt mondod tehát, hogy a matematika gyakorlati alkalmazásához nincs szükség új matematikai felfedezésekre, csak arra, hogy az ember az adott gyakorlati helyzethez megkeresse a matematika jól ismert tételei közül a legmegfelelőbbet, és azt, hogy úgy mondjam, hozzáillessze?

ARKHIMÉDÉSZ: Nem, királyom, a dolog távolról sem ilyen egyszerű. Gyakran előfordul, hogy a tétel, amelyre szükség volna, nem ismeretes, és azt az embernek magának kell felfedeznie és bebizonyítania. De még ha nem is ez a helyzet, akkor sem olyan egyszerű a dolog: megtalálni egy gyakorlati helyzet matematikai megfelelőjét, ahogy te nevezed – én inkább matematikai modellnek nevezném –; ez egészen más dolog, mint egy kesztyűhöz megkeresni a párját. Először is ugyanazon gyakorlati helyzethez számtalan sok matematikai modell található, és az embernek ezek közül kell kiválasztania a legalkalmasabbat: azt, amelyik lehetőleg jól illeszkedik hozzá a gyakorlati helyzethez (bár sohasem illeszkedhet hozzá tökéletesen), és ugyanakkor nem túl bonyolult, úgy-hogy matematikailag még éppen kezelhető. Pontos illeszkedés és egyszerűség persze ellentmondó követelmények, és e két követelmény egyensúlyba hozása általában igen bonyo-

lult és kényes feladat. Arról van szó, hogy a valóságot jól kell megközelíteni minden olyan szempontból, ami a cél érdekében fontos, de ugyanakkor minden olyan vonatkozás, ami a pillanatnyi cél szempontjából mellékes, figyelmen kívül hagyható. Nem cél arra törekedni, hogy a matematikai modell minden tekintetben hasonló legyen a valósághoz – ez egyébként nem is lehetséges. Elegendő, ha a modell híven írja le a valóságot minden olyan vonatkozásban, ami az adott feladatot illetően jelentőséggel bír. Ez a magyarázata egyébként annak is, hogy ugyanaz a matematikai modell egész különböző valóságos helyzetek leírására használható fel. Például a parabola tulajdonságait felhasználtam a katapulták építésénél is, mivel az eldobott kő közelítőleg parabola alakú pályán repül. A parabola tulajdonságait felhasználtam akkor is, amikor kiszámítottam, hogy milyen mélyre merül egy hajó a tengerben különböző terhelések mellett. Persze, egy hajó keresztmetszete nem pontosan parabola alakú, de egy ennél pontosabb modell már matematikailag túl bonyolult és ezáltal használhatatlan lett volna. Az eredmények így is jó egyezést mutattak a tényekkel. Elsősorban azt sikerült kiderítenem, hogy milyen feltételek mellett fog a hajó újból felgyenesedni, ha a szél és a hullámok megdöntik: ez azon múlik, hogy a hajó súlypontja mindig a lehető legmélyebb helyzetet igyekszik elfoglalni. Általában egy bonyolult gyakorlati helyzet vizsgálatánál gyakran még olyan matematikai modell is nagyon hasznos lehet, amely legalább minőségileg helyes eredményeket ad, mert ezek néha még fontosabbak, mint a számszerű eredmények. Tapasztalataim arra tanítottak, hogy a megfelelő matematikai modell keresése gyakran vezet a vizsgált jelenségek mélyebb megértéséhez azáltal, hogy rákényszerít minket, hogy az összes lehetőséget logikusan végiggondoljuk, a használt fogalmakat világosan definiáljuk, az összes tényezőt számba vegyük, és megtaláljuk ezek közül azokat, amelyek döntőek. Ha a matematikai modell, amit választottunk, olyan eredményekre vezet, amelyek nincsenek összhangban a tényekkel, ez azt jelenti, hogy a modell felállításakor elhanyagoltunk valami fontos körülményt. Ilyenkor persze a modellt módosítani kell, az elhanyagolt kö-

rülmény számbavételével. Ilyen módon tehát gyakran egy modell azáltal hasznos, hogy kiderül róla, hogy nem megfelelő, és ez segít hozzá a szóban forgó jelenség mélyebb megértéséhez.

HIERÓN: Úgy látom, a matematika alkalmazása hasonlít a hadviseléshez, ahol gyakran egy vereség értékesebb, mint egy győzelem, mert segít annak felismerésében, hogyan kell fegyverzetünket vagy stratégiánkat megváltoztatni.

ARKHIMÉDÉSZ: Úgy látom, megértetted a kérdés lényegét.

HIERÓN: Mondj még valamit a tükreidről.

ARKHIMÉDÉSZ: Az alapötletet már elmondtam. Persze, miután rájöttem, hogy a parabola említett tulajdonságát kell felhasználni, még egy sor gyakorlati problémát kellett megoldani, elsősorban azt, hogyan lehet konkáv forgási paraboloid alakú fémtükroket csiszolni, de erről a kérdésről nem szeretnék többet mondani. Természetesen a megfelelő ötvözetet is meg kellett találni, de engedd meg, hogy erről se beszéljek.

HIERÓN: Jól van, már mondtam, hogy nem akarom a titkaidat ellesni. Annyi azonban látszik abból is, amit mondtál, hogy a parabola említett tulajdonsága mellett a fémek tulajdonságainak és megmunkálásának alapos ismeretére is szükséged volt. Ez, úgy látom, azt mutatja, hogy ha valaki a matematikát alkalmazni akarja, ehhez egyáltalán nem elégséges, ha csak a matematikához ért. Nem olyan helyzetben van-e az, aki a matematikát alkalmazni kívánja, mint aki két lovat akar egyidejűleg megülni?

ARKHIMÉDÉSZ: Csak egy árnyalatnyit módosítanám a hasonlatodat. Aki a matematikát alkalmazni akarja, hasonló helyzetben van, mint aki két lovat akar a kocsija elé befogni. Ez nem is olyan nehéz dolog: persze, ismerni kell a lovakat és a kocsit, de azért ez olyan feladat, amellyel bármelyik kocsisos meg tud birkózni.

HIERÓN: Most már végképp összezavartál. Amikor a matematika alkalmazása éppen rejtélyesnek tűnik nekem, mindig megmagyarázod, hogy valójában egészen egyszerű dolog; de alighogy kezdem elhinni, hogy a dolog valóban egészen kézenfekvő, mindig rámutatsz, hogy tulajdonképpen sokkal bonyolultabb, mint hiszem.

ARKHIMÉDÉSZ: Elvileg a dolog valóban nyilvánvaló és egyszerű, de a részletek többnyire tényleg meglehetősen bonyolultak.

HIERÓN: Még nem látom, mit is értesz tulajdonképpen matematikai modellen.

ARKHIMÉDÉSZ: Emlékszel arra a szerkezetre, melyet néhány évvel ezelőtt készítettem a Nap, a Hold és az öt bolygó mozgásának leírására? Ennek segítségével meg lehetett például mutatni, hogyan jön létre napfogyatkozás.

HIERÓN: Persze hogy emlékszem, hiszen ma is ott áll a palotában, és minden vendégemnek meg szoktam mutatni; tártott szájjal szokták bámulni. Ez a szerkezet a világmindenség matematikai modellje?

ARKHIMÉDÉSZ: Nem, én ezt fizikai modellnek nevezném. A matematikai modellek láthatatlanok, csak a mi gondolatainkban léteznek és képletekkel fejezhető ki. A világegyetem matematikai modellje az, ami a valódi világegyetemben és az én fizikai modellemben közös. A fizikai modellben minden egyes bolygónak egy golyó felel meg, amelyek közül a legkisebb akkora, mint egy narancs. A matematikai modellben a bolygóknak kiterjedés nélküli pontok felelnek meg.

HIERÓN: Kezdem már érteni, mit nevezel matematikai modellnek. De térjünk vissza a lovakra vonatkozó hasonlathoz. Más dolog, ha valaki lovak megnyergeléséhez és kocsik elé fogásához ért, és más dolog, ha valaki a lótenyésztéshez ért. Nem így áll-e a dolog a matematikával is: egészen más dolog, ha valaki a matematika alkalmazásához ért, mint ha ahhoz ért, hogy a matematikát fejlessze: mindig új tételeket fedezzen fel és bizonyítsa be?

ARKHIMÉDÉSZ: Ami a lovakat illeti, nagyjából igazad van, bár még ezzel kapcsolatban is elmondható, hogy az, aki egy lovat felnevelt, azt gyakran jobban ismeri, és így jobban tudja rajta lovagolni, mint bárki más. Ami mármost a matematikát illeti, az a helyzet, hogy ahhoz, hogy valaki azt eredményesen alkalmazni tudja, igen alaposan és mélyrehatóan kell ismernie. Ahhoz pedig, hogy valaki a matematika alkalmazása terén ne csak megismételje azt, amit már többé-kevésbé hasonló kö-

rülmények között mások megcsináltak, hanem a matematikát alkotó módon alkalmazza olyan célokra, melyekre előtte mások még nem használták, ahhoz neki magának alkotó matematikusnak kell lennie. Megfordítva: az alkalmazásokkal való foglalkozás az elméleti matematikai kutatásnak is ösztönzést adhat és irányt mutathat.

HIERÓN: Hogyan lehetséges ez? Mondj erre egy példát.

ARKHIMÉDÉSZ: Talán emlékszel, hogy egy időben nagyon érdekelt a mechanika egy problémája, a testek súlypontjának megkeresése. Azok az eredményeim, melyeket a súlypontra vonatkozóan mechanikai megfontolásokkal találtam, nemcsak eredeti céljaim megvalósítását – például a hajók felegyenesedésének megértését – tették lehetővé, hanem abban is segítségemre voltak, hogy új geometriai tételeket fedezzek fel. *Egy sajátos módszert dolgoztam ki, amely abban áll, hogy geometriai problémákat a súlypontra vonatkozó mechanikai megfontolások segítségével vizsgállok. Sok tételt először ezzel a módszerrel fedeztem fel; később azután – mivel e módszer nem alkalmas szigorú bizonyításra – e tételeket bebizonyítottam a geometria hagyományos precíz módszereivel. Azonban sokkal könnyebb egy tételre szabatos bizonyítást találni akkor, ha előzőleg a mechanikai analógiák módszerével a kérdésben bizonyos tájékozódást szerzett az ember, és így többkevesebb bizonyossággal tudja, hogy mit kell bebizonyítani, mint ha enélkül, vaktában vág neki a problémának.*

HIERÓN: Mondj legalább egy tételt, amelyet ezen furcsa módon fedeztél fel.

ARKHIMÉDÉSZ: *Egy parabolaszélet területe négyharmada azon háromszög területének, amelynek alapja és magassága megegyezik a parabolaszéletével;* erre a tételre mechanikai megfontolásokkal jutottam, azután később bebizonyítottam a geometria szokásos szabatos módszereivel.

HIERÓN: Miután mechanikai megfontolásokon át felfedezted a tételt, miért volt egyáltalán szükség arra, hogy a geometria hagyományos módszereivel is bebizonyítsad?

ARKHIMÉDÉSZ: Eleinte, amikor a módszeremet felfedeztem, a módszer segítségével kapott eredmények között volt néhány olyan is, amely később tévesnek bizonyult. Miután gon-

dosan elemeztem azokat az eseteket, amelyekben a módszerem tévútra vezetett, ma már ott tartok, hogy módszerem mindig helyes eredményre vezet. De bebizonyítani ma sem tudom, hogy minden eredmény, amit ezen az úton kapok, tényleg helyes; lehet, hogy idővel meg fogom tudni ezt mutatni, vagy más bizonyítja be, de amíg ez nem történt meg, nem bízom a módszerben fenntartás nélkül, hanem minden eredményt ellenőrzök azáltal, hogy bebizonyítom a szokásos, vitathatatlanul helyes módszerekkel is.

HIERÓN: Ezt értem, de ami az alkalmazásokat illeti, nem látom, hogy a szabatos bizonyításokra tulajdonképpen miért van szükség. Hiszen, amint az előbb mondtad, a matematikai modell úgyis csak közelítése a valóságnak. Ha nagyjából helyes képleteket használunk, az eredmény akkor is nagyjából egyezni fog a valósággal, és pontosan úgysem egyezhet vele sohasem, amint az előbb magad hangsúlyoztad.

ARKHIMÉDÉSZ: Tévedsz, királyom. Éppen azért, mivel a matematikai modell a valóságnak csak közelítése, és soha nem írja le a tényeket teljes pontossággal, ezért kell gondosan ügyelnünk, hogy ezt az eltérést a modell és a valóság között ne növeljük még feleslegesen a matematika gondatlan és pontatlan kezelésével; a matematika alkalmazása során éppen úgy kell ügyelnünk a matematikai szabatososságra, mint a tisztán matematikai vizsgálatokban. Egyébként, ami a közelítéseket illeti, helytelen az a széles körben elterjedt nézet, hogy közelítések használata a matematikai szabatoságtól való eltérést jelent. A közelítéseknek is megvan a szabatos elmélete, és közelítésekre, egyenlőtlenségekre vonatkozó állításokat éppen olyan szigorral kell bizonyítani, mint például az egyenlőségekre vonatkozó állításokat. Talán emlékszel azokra a közelítésekre, amelyeket néhány éve az egységnyi sugarú kör területére adtam: ezek bizonyítása szabatoság tekintetében nem különbözik Euklidész tételeitől.

HIERÓN: Milyen egyéb új eredményeket fedeztél fel mechanikai módszereddel?

ARKHIMÉDÉSZ: Ez a módszer vezetett el annak felismeréséhez is, hogy *a gömb térfogata egyenlő a köré írt henger térfogatának kétharmadával.*

HIERÓN: Hallottam, hogy azt mondtad, szeretnéd, hogyha sírköveden ez a tétel lenne feltüntetve. Azt jelenti ez, hogy ezt tekinted legjelentősebb eredményednek?

ARKHIMÉDÉSZ: Ez az eredmény valóban különösen kedves nekem, de mégis úgy érzem, hogy maga a módszer, amit felfedeztem, jelentősebb, mint bármelyik konkrét eredmény, amit segítségével találtam. Mint mondtam, a módszeremmel viszont nem vagyok még teljesen megelégedve, mert nem sikerült kimutatnom, hogy az mindig helyes eredményre vezet. Emlékszel, hogy egyszer, amikor az emelőről beszélgettünk, azt mondtam neked: *adj nekem egy szilárd pontot, amin megállhatok, és kimozdítom sarkából a Földet?* Persze, ilyen szilárd pont a világban nem létezik. A matematikában azonban van ilyen szilárd pont, tudniillik az axiómák és a logika alkotják azt. Ezért mondom azt, hogy a szabatos bizonyítások és a szigorú logika nélkülözhetetlenek a matematika alkalmazása során is. A matematikát alkalmazni a valóságra annyit jelent, mint kimozdítani a világot a sarkából a matematika szilárd pontjára támaszkodva.

HIERÓN: Te mindig a matematika alkalmazásairól beszélsz, de az összes példák, amiket említettél, a geometria alkalmazásaira vonatkoztak. Ami a geometria alkalmazásait illeti, azt hiszem, már értem, hogy ezek hogyan lehetségesek. Egy gép működése nyilván részeinek alakjától és méreteitől függ; egy kő pályája, amelyet katapultáddal kilősz, egy görbe – amint mondtad, közelítőleg parabola –; e példákban látom, hogy a geometria és a valóság között hogyan lehet kapcsolatot létesíteni. De mi a helyzet a matematika más ágaival, mondjuk a számelmélettel? Nehezen tudom elképzelni, hogy annak is lehet gyakorlati jelentősége. Ne érts félre, nem az aritmetika elemeire gondolok, amelyeket az ember minden számolás során felhasználna; olyanfajta dolgokra gondolok, mint például az oszthatóság, prímszámok, legkisebb közös többszörös, stb.

ARKHIMÉDÉSZ: Ha két különböző fokszámú fogaskereket összekapcsolsz és forgatni kezded őket, s azt kérdezed, hogy mikor jut a rendszer először vissza kiindulási helyzetébe, a válasz meg sem fogalmazható a legkisebb többszörös fogalma

nélkül. Megelégszel ezzel az egyszerű példával, vagy mondjak még továbbiakat?

HIERÓN: Elég lesz ez is.

ARKHIMÉDÉSZ: Egyébként ezzel kapcsolatban elmondom egy tervemet. Nemrégiben levelet kaptam jó barátomtól, a kürénei Eratoszthenésztől, amelyben beszámol egy egyszerű, de rendkívül ötletes eljárásról, amelyet felfedezett a prímszámok megtalálására, ahogy ő mondja: „kiszitálására”. Módszerén tűnődve, megterveztem egy gépet, amely megvalósítja Eratoszthenész szitáját. Ez a gép közös tengelyre szerelt fogaskerekekkel működne: ha a tengelyt egy karral n -szer forgatod meg, ahol n egy nem túlságosan nagy szám, és belenézel egy lyukba, akkor azon akkor és csak akkor látsz keresztül, ha az n szám törzsszám: ellenkező esetben egy fogaskerék foga elzárja a fény útját. Így ezzel a géppel el lehetne dönteni azt, hogy egy szám prímszám-e vagy nem.

HIERÓN: Ha a háborúnak vége lesz, ezt a gépet meg kell építened! A vendégeim oda lesznek a bámulattól!

ARKHIMÉDÉSZ: Ha még élünk akkor, meg fogom építeni. Ez azért lesz érdekes, mert ebből látható lesz, hogy gépek képesek matematikai problémák megoldására. Talán ebből megértik a matematikusok, hogy pusztán a saját kutatásaik szempontjából is hasznos és érdemes a gépekkel foglalkozniuk.

HIERÓN: Ez eszembe juttat egy Euklidészre vonatkozó anekdotát, amit nyilván te is ismersz. *Állítólag egyik tanítványa, akit geometriára oktatott, azt kérdezte Euklidésztől: Mi hasznom lesz abból, ha ezeket a dolgokat megtanulom? Erre Euklidész odahívta a szolgáját, és azt mondta neki: „adj ennek az embernek egy obulust, mert ő hasznot akar húzni abból, amit tanul”. Úgy látom, e történet azt mutatja, hogy Euklidész úgy gondolta, nem méltó egy matematikushoz, hogy azon törje a fejét, milyen gyakorlati haszon származhat a tudásból, amit a matematikában szerez.*

ARKHIMÉDÉSZ: Az anekdotát persze én is hallottam, de te, azt hiszem, meg fogsz lepődni, ha megmondom, hogy én teljes mértékben együttlérzek Euklidésszel; az adott helyzetben én is valami hasonlót mondtam volna.

HIERÓN: Most megint összezavartál. Eddig oly lelkesedés-

sel beszéltél a matematika gyakorlati alkalmazásairól, és most egyszerre azokkal értesz egyet, akik úgy gondolják, hogy az egyetlen haszon, amire egy tudósnak törekednie kell, amikor a matematikával foglalkozik, a tudás öröme.

ARKHIMÉDÉSZ: Azt hiszem, te ugyanúgy félreérted az Euklidészről szóló anekdotát, mint a legtöbb ember. Nem arról van szó, mintha őt nem érdekelte volna a matematika eredményeinek gyakorlati hasznossága, és az ezekkel való foglalkozást tudóshoz méltatlannak tekintette volna: ez ostobaság. Euklidész, amint nyilván te is tudod, írt egy könyvet a csillagászatról, egy másikat az optikáról, és ő a szerzője a Katoptrika című munkának is, amelyet tükreim építésénél felhasználtam. A mechanikával is sokat foglalkozott. Én úgy értelmezem a történetet, hogy Euklidész azt a figyelemre méltó tapasztalati tényt kívánta hangsúlyozni, hogy a matematikába csak azok képesek igazán mélyre hatolni, akik nemcsak a hasznossága miatt, hanem önmagáért érdeklődnek iránta. A matematika olyan, mint a te Heléné lányod, aki minden kérőjére gyanakszik, hogy az valójában nem is őt szereti, hanem csak azért udvarol neki, mert a király veje akar lenni. Ő olyan férjet akar, aki önmagáért, szépségéért, bájáért és sziporkázó szelleméért szereti őt, és nem azért a vagyonért és hatalomért, amit a királylány feleségül vételével szerezhet. Hasonlóképpen a matematika csak azoknak enged bepillantást titkaiba, akik szépségéért lelkesedve, tiszta tudásvágygal közelednek hozzá. Ha valaki minden apró lépés előtt azt kérdezi? „Mi hasznom származik abból, ha ezen átrágom magam?“, nem fog messzire jutni a matematikában. Az előbb mondtam neked, hogy a rómaiak sohasem fogják sokra vinni a matematikában. Most már megérted, hogy ezt mire alapozom: a gyakorlatiasság túlságosan szűk szemellenzőjével közelednek hozzá.

HIERÓN: Szerintem egyet és mást tanulhatnánk a rómaiaktól gyakorlatiasságban, akkor eredményesebben tudnánk ellenük küzdeni.

ARKHIMÉDÉSZ: Nem értek ezzel egyet. Ha úgy próbálunk győzni, hogy már eleve feladjuk azokat az eszméket, amelyeket mi képviselünk, és az ellenségeinket utánozzuk, akkor

elvesztettük a harcot, még mielőtt csatára kerül a sor. Még ha ilyen módon győzni tudnánk is, annak sem lenne semmi értéke; az ilyen győzelem rosszabb, mint egy vereség.

HIERÓN: Hagyjuk a háborút, és térjünk inkább vissza a matematikára. Tulajdonképpen hogyan állítasz fel egy matematikai modellt?

ARKHIMÉDÉSZ: Nehéz erre általánosságban válaszolni. Talán egy hasonlat segíteni fog: egy gyakorlati helyzet matematikai modellje nem más, mint annak árnyéka az agy vásznán.

HIERÓN: Úgy látom, a te filozófiád Platónénak a szöges elmentéje. Ő azt mondta, hogy a valóságos tárgyak az ideák árnyai, te meg, ha jól értem, azt mondod, hogy a gondolatok a valóságos tárgyak árnyai.

ARKHIMÉDÉSZ: A két felfogás egyáltalában nem áll olyan távol egymástól, mint első pillantásra tűnik. Platón a matematikai fogalmak és a valóság kapcsolata izgatta és úgy érezte, a filozófia legfőbb feladata ennek a rejtélyes kapcsolatnak a felderítése. Eddig teljesen egyetérték vele. Valóban nem értek egyet azzal a válasszal, amit ő e kérdésre adott, de annyit el kell ismerni, hogy ő világosan felvetette ezt a fontos kérdést, és igyekezett kidolgozni a logikailag lehetséges válaszok egyikét. De azt hiszem, a filozófiától vissza kell térnünk a szürke valósághoz, mert úgy hallom, valaki kopogtat az ajtón; megyek és ajtót nyitok.

HIERÓN: Majd inkább én nyitok ajtót, azt hiszem, a követem jött meg Marcellus válaszával... Jól sejtettem, itt van a kezemben Marcellus válasza.

ARKHIMÉDÉSZ: Mit ír?

HIERÓN: Olvasd el magad.

ARKHIMÉDÉSZ: „Marcellus üdvözlétét küldi Hierón királynak és értesíti, hogy Szirakuzát még az újjhold megjelenése előtt el fogja foglalni. Ez meg fogja győzni Hierón királyt arról, hogy egy római mindig megtartja adott szavát.”

HIERÓN: Mit szólsz ehhez?

ARKHIMÉDÉSZ: Görög stílusa nem is rossz. Ami a tartalmat illeti, pontosan az, amit vártam.

HIERÓN: Valóban, sejtésed annyira helyesnek bizonyult, mintha azt is a módszereddel találtad volna.

ARKHIMÉDÉSZ: Most legalább tudjuk, hogy mi vár ránk.

HIERÓN: Én most megyek, mert ki kell aludnom magam. Holnap fel kell készülnünk az új támadásra. Köszönöm ezt az érdekes beszélgetést.

ARKHIMÉDÉSZ: Utóbbi időben ritkán volt alkalmam arra, hogy matematikáról beszélgessek; nagyon jól esett, hogy erre alkalmat adtál. És köszönöm még egyszer a gyönyörű tálat.

HIERÓN: Örülök, hogy tetszik. Jó éjszakát, barátom, azt hiszem, neked is jót fog tenni az alvás.

ARKHIMÉDÉSZ: Jó éjszakát, királyom. Én még nem fekszem le, mert be akarok fejezni egy levelet barátomhoz, a pelusi-umi Dositheushoz, legújabb eredményeimről. Most, hogy a római hajóhad elvonult, holnap nyilván indulnak ki hajók a kikötőből, de lehet, hogy holnaputánra a rómaiak újból ostromzár alá vesznek. Ki akarom használni ezt az alkalmat, hiszen lehet, hogy ez az utolsó.