Valós analízis előadások II.

Valós analízis előadások II.

Komornik Vilmos

TypoTEX ⋄ Budapest 2003

Ez a könyv az illetékes kuratórium döntése alapján az Oktatási Minisztérium támogatásával a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított Tankönyvtámogatási Program keretében jelent meg.
A mű megjelenését az MTA Matematikai Tudományok osztálya is támogatta.

ISBN 963 9548 20 0 ö
ISBN 963 9548 22 7

Témakör: felsőfokú matematika

Kedves Olvasó! Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a www.typotex.hu címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa
Szerkesztette és tördelte: Gerner József
Borítóterv: Tóth Norbert
Terjedelem: 24,2 (A/5) ív
Készült a Naszály Print Kft. nyomdájában
Felelős vezető: Hemela Mihályné

Előszó

Könyvünk első kötete három féléves előadás anyagát tartalmazta, amelyeket a szerző matematikus és matematika tanári szakos hallgatók számára tartott a Strasbourg-i Louis Pasteur Egyetemen a *Topológia*, *Differenciálszámítás* és a *Közelítő módszerek* témakörében. A jelen kötet három további előadást tartalmaz: *Funkcionálanalízis*, *Integrálszámítás* és *Függvényterek*. Az első két rész lényegében egymástól független, és az első kötetből csak a *Topológia* alaperedményeit használja fel rendszeresen. A befejező *Függvényterek* előadás mintegy szintézise az egész munkának, és valamennyi korábbi előadásra épít.

A *Funkcionálanalízis* tárgyalása eltér a szokásostól: az anyag jobb motiválása érdekében négy egyszerű síkgeometriai tételt igyekszünk tetszőleges dimenziós terekre általánosítani. Ez a megközelítés természetes módon vezet el a legtöbb fontos fogalomhoz és tételhez. Egy másik rendhagyó vonás, hogy az egyszerűség kedvéért nem építünk itt a Lebesgue-integrál ismeretére, hanem legtöbb eredményt a kis ℓ^p terekben szemléltetjük.

Az *Integrálszámítás* részben a Lebesgue-integrált Riesz Frigyes rendkívül elegáns tárgyalásában ismertetjük, néhány azóta talált egyszerűsítéssel. A lépcsős függvényekre vonatkozó két „ártatlan” segédtételből kiindulva 15 oldalon egyszerűen és világosan felépíthető az általános elmélet. A mérhetőség Riesz-féle *konstruktív* definíciója gyorsan elvezet a klasszikus nagy tételek (Fubini–Tonelli, Radon–Nikodým) optimális változataihoz.

A befejező *Függvényterek* részben részletesen szemléltetjük a *Funkcionálanalízis* tételeit a folytonos függvények és a Lebesgue-integrálható függvények tereiben.

Akárcsak az első kötetben, most is megadjuk a legtöbb fogalom és eredmény eredeti forrását. Első olvasáskor célszerű kihagyni a csillaggal jelölt részeket. Sok példa és megjegyzés feladatként is tárgyalható. (Lásd a 325. oldali megjegyzéseket is.)

A ix. oldalon felsorolt cikkek tanulmányozása elősegítheti az olvasó általános matematikai kultúrájának a megszilárdítását.

Ezt a kötetet édesapám emlékének ajánlom.

Strasbourg, 2003. június 23.

Tartalom

Irodalom

[1] G. D. Birkhoff, *What is the ergodic theorem?*, Amer. Math. Monthly 49 (1942), 222–226.

[2] J. A. Clarkson és Erdős Pál, *Approximation by polynomials*, Duke Math. J. 10 (1943), 5–11.

[3] R. Courant, *Reminiscences from Hilbert's Göttingen*, Math. Intelligencer 3 (1980/81), 154–164.

[4] J. L. Doob, *What is martingale?*, Amer. Math. Monthly 78 (1971), 451–463.

[5] L. E. Dubins és E. H. Spanier, *How to cut a cake fairly*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 1–4.

[6] Erdős Pál, *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Sci. Math (Szeged), 5 (1930–32), 194–198.

[7] Erdős Pál, *Über die Reihe* $\sum 1/p$, Mathematica, Zutphen B. 7 (1938), 1–2.

[8] Fejér Lipót, *On some characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points*, Amer. Math. Monthly 41 (1934), 1–14; lásd: *Fejér Lipót összegyűjtött munkái I-II*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970, II, 527–539.

[9] W. Feller, *The problem of* n *liars and Markov chains*, Amer. Math. Monthly 58 (1951), 606–608.

[10] P. R. Halmos, *The foundations of probability*, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 493–510.

[11] P. R. Halmos, *The legend of John von Neumann*, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 382–394.

[12] P. R. Halmos, *The heart of mathematics*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 519–524.

[13] R. W. Hamming, *An elementary discussion of the transcendental nature of the elementary transcendental functions*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 294–297.

[14] G. H. Hardy, *An introduction to the theory of numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1929), 778–818.

[15] G. H. Hardy, *The Indian mathematician Ramanujan*, Amer. Math. Monthly 44 (1937), 137–155.

[16] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten, 1900, 253–297, és Archiv der Mathematik und Physik (3) 1 (1901), 44–63 és 213–237. Angol fordítás: *Mathematical Problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437–479.

[17] H. Hochstadt, *Eduard Helly, father of the Hahn–Banach theorem*, Math. Intelligencer 2 (1979), 3, 123–125.

[18] J. Horváth, *An introduction to distributions*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 227–240.

[19] D. K. Kazarinoff, *A simple derivation of the Leibnitz–Gregory series for* $\pi/4$, Amer. Math. Monthly 62 (1955), 726–727.

[20] K. M. Kendig, *Algebra, geometry, and algebraic geometry: some interconnections*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 3, 161–174.

[21] J. Milnor, *Analytic proofs of the "hairy ball theorem" and the Brouwer fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 521–524.

[22] Neumann János, *A társasjátékok elméletéhez*, [25], 121–156.

[23] Neumann János, *A matematikus*, [25], 11–27.

[24] Neumann János, *A matematika szerepe a tudományokban ést a társadalomban*, [25], 28–43.
[25] Neumann János, *Válogatott előadások és tanulmányok*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.
[26] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 693–696.
[27] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859; lásd *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1876, 135–144. Angol fordítás: *On the number of primes less than a given magnitude*, lásd H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press, New York, 1974, 299–305.
[28] Riesz Frigyes, *Sur les valeurs moyennes des fonctions*, J. London Math. Soc. 5 (1930), 120–121; [31] I, 230–231.
[29] Riesz Frigyes, *Lebesgue integrálfogalmának fejlődése*, Matematikai Lapok 1 (1950), 79–90; [31] I, 341–352.
[30] Riesz Frigyes, *Nullahalmazok és szerepük az analízisben*, Az I. Magyar Mat. Kongr. Közl. (1952), 204–214; [31] I, 353–362.
[31] *Riesz Frigyes összegyűjtött munkái I-II*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.
[32] C. A. Rogers, *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980) , 525–527.
[33] S. Russ, *Bolzano's analytic programme*, 14 (1992), Math. Intelligencer 3, 45–53.
[34] A. Seidenberg, *A simple proof of a theorem of Erdös and Szekeres*, J. London Math. Soc. 34 (1959), 352.
[35] S. Smale, *What is global analysis?*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 4–9.
[36] K. Stromberg, *The Banach–Tarski paradox*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 151–161.
[37] Szegö Gábor, *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 23 (1924), 50–64, lásd *Collected papers I-III*, Birkhäuser, Basel, 1982.
[38] F. Treves, *Applications of distributions to PDE theory*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 241–248.
[39] E. M. Wright, *A prime-representing function*, Amer. Math. Monthly 58 (1951), 616–618.
[40] F. B. Wright, *The recurrence theorem*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 247–248.
[41] D. Zagier, *A one-sentence proof that every prime* $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ *is a sum of two squares*, Amer. Math. Monthly 97 (1990), 144.
[42] L. Zalcman, *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 115–137.

