

# Valós analízis előadások II.



# Valós analízis előadások II.

**Komornik Vilmos**

TypoT<sub>E</sub>X ◊ Budapest 2003



Ez a könyv az illetékes kuratórium döntése alapján az OM támogatásával a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított Tankönyvtámogatási Program keretében jelent meg.

A mű megjelenését az MTA Matematikai Tudományok osztálya is támogatta.

© Title of the original French edition: Précis d'analyse réelle, tome II – published by Ellipses – copyright 2001 Édition Marketing S. A.

© Hungarian edition Komornik Vilmos, Typotex, 2003

ISBN 963 9548 20 0 ö

ISBN 963 9548 22 7

Témakör: felsőfokú matematika

Kedves Olvasó! Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a [www.typotex.hu](http://www.typotex.hu) címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.  
Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa  
Szerkesztette és tördelte: Gerner József  
Borítóterv: Tóth Norbert  
Terjedelem: 24,2 (A/5) ív  
Készült a Naszály Print Kft. nyomdájában  
Felelős vezető: Hemela Mihályné

## Előszó

Könyvünk első kötete három féléves előadás anyagát tartalmazta, amelyeket a szerző matematikus és matematika tanári szakos hallgatók számára tartott a Strasbourg-i Louis Pasteur Egyetemen a *Topológia*, *Differenciálszámítás* és a *Közelítő módszerek* témakörében. A jelen kötet három további előadást tartalmaz: *Funkcionálanalízis*, *Integrálszámítás* és *Függvényterek*. Az első két rész lényegében egymástól független, és az első kötetből csak a *Topológia* alaperedményeit használja fel rendszeresen. A befejező *Függvényterek* előadás mintegy szintézise az egész munkának, és valamennyi korábbi előadásra épít.

A *Funkcionálanalízis* tárgyalása eltér a szokásostól: az anyag jobb motiválása érdekében négy egyszerű síkgeometriai tételt igyekszünk tetszőleges dimenziós terekre általánosítani. Ez a megközelítés természetes módon vezet el a legtöbb fontos fogalomhoz és tételhez. Egy másik rendhagyó vonás, hogy az egyszerűség kedvéért nem építünk itt a Lebesgue-integrál ismeretére, hanem legtöbb eredményt a kis  $\ell^p$  terekben szemléltetjük.

Az *Integrálszámítás* részben a Lebesgue-integrált Riesz Frigyes rendkívül elegáns tárgyalásában ismertetjük, néhány azóta talált egyszerűsítéssel. A lépcsős függvényekre vonatkozó két „ártatlan” segédteletből kiindulva 15 oldalon egyszerűen és világosan felépíthető az általános elmélet. A mérhetőség Riesz-féle *konstruktív* definíciója gyorsan elvezet a klasszikus nagy tételek (Fubini–Tonelli, Radon–Nikodým) optimális változataihoz.

A befejező *Függvényterek* részben részletesen szemléltetjük a *Funkcionálanalízis* tételeit a folytonos függvények és a Lebesgue-integrálható függvények tereiben.

Akárcsak az első kötetben, most is megadjuk a legtöbb fogalom és eredmény eredeti forrását. Első olvasáskor célszerű kihagyni a csillaggal jelölt részeket. Sok példa és megjegyzés feladatként is tárgyalható. (Lásd a 325. oldali megjegyzéseket is.)

A ix. oldalon felsorolt cikkek tanulmányozása elősegítheti az olvasó általános matematikai kultúrájának a megszilárdítását.

Ezt a kötetet édesapám emlékének ajánlom.

Strasbourg, 2003. június 23.

## Tartalom

Előszó . . . . .	v
Irodalom . . . . .	ix
<b>4. rész. Funkcionálanalízis . . . . .</b>	<b>1</b>
13. fejezet. Hilbert-terek . . . . .	3
13.1. Definíciók és példák . . . . .	3
13.2. Ortogonalitás . . . . .	9
13.3. Konvex halmazok szétválasztása . . . . .	14
13.4. Ortonormált bázisok . . . . .	19
13.5. Gyenge konvergencia. Kiválasztási tétel . . . . .	24
13.6. Folytonos és kompakt operátorok . . . . .	29
13.7. Hilbert spektráltétele . . . . .	33
13.8. * A komplex eset . . . . .	39
14. fejezet. Banach-terek . . . . .	42
14.1. Normált terek . . . . .	42
14.2. Konvex halmazok szétválasztása . . . . .	47
14.3. Kiterjesztési tétel . . . . .	54
14.4. Az $\ell^p$ terek duálisai . . . . .	56
14.5. Gyenge konvergencia. Banach–Steinhaus tétel . . . . .	60
14.6. Reflexív terek. Kiválasztási tétel . . . . .	67
14.7. Reflexív terek. Geometriai alkalmazások . . . . .	71
14.8. * Nyílt leképezések és zárt gráfok . . . . .	76
14.9. * Folytonos és kompakt operátorok . . . . .	80
14.10. * Fredholm–Riesz elmélet . . . . .	84
14.11. * A komplex eset . . . . .	92
15. fejezet. Lokálisan konvex terek . . . . .	94
15.1. Félnormacsaldók . . . . .	95
15.2. Szétválasztási és kiterjesztési tételek . . . . .	98
15.3. Krein–Milman tétel . . . . .	101
15.4. * Gyenge topológia. Farkas–Minkowski lemma . . . . .	104
15.5. * Gyenge csillag topológia. Banach–Alaoglu tétel . . . . .	109
15.6. * Reflexív terek . . . . .	115
15.7. * Topologikus vektorterek . . . . .	117

<b>5. rész. Integrálszámítás</b> . . . . .	121
16. fejezet. * Monoton függvények . . . . .	123
16.1. * Folytonosság. Megszámlálható halmazok . . . . .	123
16.2. * Differenciálhatóság. Nullahalmazok . . . . .	126
16.3. * Ugrófüggvények . . . . .	130
16.4. * A Lebesgue-tétel bizonyítása . . . . .	133
16.5. * Korlátos változású függvények . . . . .	137
17. fejezet. Lebesgue-integrál $\mathbb{R}$ -en . . . . .	139
17.1. Lépcsős függvények . . . . .	140
17.2. Integrálható függvények . . . . .	144
17.3. Beppo Levi tétele . . . . .	147
17.4. Lebesgue, Fatou és Riesz–Fischer tételei . . . . .	151
17.5. * Mérhető függvények és halmazok . . . . .	157
18. fejezet. * Általánosított Newton–Leibniz formula . . . . .	165
18.1. * Abszolút folytonosság . . . . .	166
18.2. * Primitív függvény . . . . .	171
18.3. * Parciális és helyettesítéses integrálás . . . . .	175
19. fejezet. Integrál mértékterekben . . . . .	178
19.1. Mértékek . . . . .	178
19.2. Véges mértékhez rendelt integrál . . . . .	184
19.3. Szorzatterek: Fubini és Tonelli tételei . . . . .	188
19.4. * Lebesgue-felbontás . . . . .	193
19.5. Előjeles mértékek. Hahn- és Jordan-felbontás . . . . .	195
19.6. Radon–Nikodým tétel . . . . .	200
19.7. * Mértékek kiterjesztése $\sigma$ -algebrákra . . . . .	207
<b>6. rész. Függvényterek</b> . . . . .	213
20. fejezet. Folytonos függvények terei . . . . .	215
20.1. Weierstrass approximációs tételei . . . . .	218
20.2. * Stone–Weierstrass tétel . . . . .	223
20.3. Kompakt halmazok. Arzelà–Ascoli tétel . . . . .	227
20.4. Fourier-sorok divergenciája . . . . .	228
20.5. Fourier-sorok szummációja. Fejér tétele . . . . .	232
20.6. * Korovkin tételei. Bernstein-polinomok . . . . .	234
20.7. * Harsiladze–Lozinszkij, Nyikolajev és Faber tételei . . . . .	239
20.8. * Duális tér. Riesz-féle reprezentációs tétel . . . . .	243

20.9.	Gyenge konvergencia . . . . .	252
21.	fejezet. Integrálható függvények terei . . . . .	254
21.1.	Az $L^p$ terek, $1 \leq p \leq \infty$ . . . . .	254
21.2.	* Kompakt halmazok . . . . .	264
21.3.	* Konvolúció . . . . .	267
21.4.	Egyenletesen konvex terek . . . . .	271
21.5.	Reflexivitás . . . . .	276
21.6.	Az $L^p$ terek duálisai . . . . .	278
21.7.	Gyenge és gyenge csillag konvergencia . . . . .	282
22.	fejezet. Majdnem mindenütt való konvergencia . . . . .	286
22.1.	Az $L^p$ terek, $1 \leq p \leq \infty$ . . . . .	286
22.2.	Az $L^p$ terek, $0 < p \leq 1$ . . . . .	289
22.3.	Az $L^0$ terek . . . . .	295
22.4.	Mértékben való konvergencia . . . . .	299
	Irodalom . . . . .	307
	Oktatási megjegyzések . . . . .	325
	Tárgymutató . . . . .	327
	Névmutató . . . . .	331
	Idézett matematikusok . . . . .	334



## Irodalom

- [1] G. D. Birkhoff, *What is the ergodic theorem?*, Amer. Math. Monthly 49 (1942), 222–226.
- [2] J. A. Clarkson és Erdős Pál, *Approximation by polynomials*, Duke Math. J. 10 (1943), 5–11.
- [3] R. Courant, *Reminiscences from Hilbert's Göttingen*, Math. Intelligencer 3 (1980/81), 154–164.
- [4] J. L. Doob, *What is martingale?*, Amer. Math. Monthly 78 (1971), 451–463.
- [5] L. E. Dubins és E. H. Spanier, *How to cut a cake fairly*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 1–4.
- [6] Erdős Pál, *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Sci. Math (Szeged), 5 (1930–32), 194–198.
- [7] Erdős Pál, *Über die Reihe  $\sum 1/p$* , Mathematica, Zutphen B. 7 (1938), 1–2.
- [8] Fejér Lipót, *On some characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points*, Amer. Math. Monthly 41 (1934), 1–14; lásd: *Fejér Lipót összegyűjtött munkái I-II*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970, II, 527–539.
- [9] W. Feller, *The problem of  $n$  liars and Markov chains*, Amer. Math. Monthly 58 (1951), 606–608.
- [10] P. R. Halmos, *The foundations of probability*, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 493–510.
- [11] P. R. Halmos, *The legend of John von Neumann*, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 382–394.
- [12] P. R. Halmos, *The heart of mathematics*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 519–524.
- [13] R. W. Hamming, *An elementary discussion of the transcendental nature of the elementary transcendental functions*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 294–297.
- [14] G. H. Hardy, *An introduction to the theory of numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1929), 778–818.
- [15] G. H. Hardy, *The Indian mathematician Ramanujan*, Amer. Math. Monthly 44 (1937), 137–155.
- [16] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten, 1900, 253–297, és Archiv der Mathematik und Physik (3) 1 (1901), 44–63 és 213–237. Angol fordítás: *Mathematical Problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437–479.
- [17] H. Hochstadt, *Eduard Helly, father of the Hahn–Banach theorem*, Math. Intelligencer 2 (1979), 3, 123–125.
- [18] J. Horváth, *An introduction to distributions*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 227–240.
- [19] D. K. Kazarinoff, *A simple derivation of the Leibnitz–Gregory series for  $\pi/4$* , Amer. Math. Monthly 62 (1955), 726–727.
- [20] K. M. Kendig, *Algebra, geometry, and algebraic geometry: some interconnections*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 3, 161–174.
- [21] J. Milnor, *Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 521–524.
- [22] Neumann János, *A társasjátékok elméletéhez*, [25], 121–156.
- [23] Neumann János, *A matematikus*, [25], 11–27.

- [24] Neumann János, *A matematika szerepe a tudományokban és a társadalomban*, [25], 28–43.
- [25] Neumann János, *Válogatott előadások és tanulmányok*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- [26] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 693–696.
- [27] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859; lásd *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1876, 135–144. Angol fordítás: *On the number of primes less than a given magnitude*, lásd H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press, New York, 1974, 299–305.
- [28] Riesz Frigyes, *Sur les valeurs moyennes des fonctions*, J. London Math. Soc. 5 (1930), 120–121; [31] I, 230–231.
- [29] Riesz Frigyes, *Lebesgue integrálfogalmának fejlődése*, Matematikai Lapok 1 (1950), 79–90; [31] I, 341–352.
- [30] Riesz Frigyes, *Nullahalmazok és szerepük az analízisben*, Az I. Magyar Mat. Kongr. Közl. (1952), 204–214; [31] I, 353–362.
- [31] *Riesz Frigyes összegyűjtött munkái I-II*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.
- [32] C. A. Rogers, *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 525–527.
- [33] S. Russ, *Bolzano's analytic programme*, 14 (1992), Math. Intelligencer 3, 45–53.
- [34] A. Seidenberg, *A simple proof of a theorem of Erdős and Szekeres*, J. London Math. Soc. 34 (1959), 352.
- [35] S. Smale, *What is global analysis?*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 4–9.
- [36] K. Stromberg, *The Banach–Tarski paradox*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 151–161.
- [37] Szegő Gábor, *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 23 (1924), 50–64, lásd *Collected papers I-III*, Birkhäuser, Basel, 1982.
- [38] F. Trèves, *Applications of distributions to PDE theory*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 241–248.
- [39] E. M. Wright, *A prime-representing function*, Amer. Math. Monthly 58 (1951), 616–618.
- [40] F. B. Wright, *The recurrence theorem*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 247–248.
- [41] D. Zagier, *A one-sentence proof that every prime  $p \equiv 1 \pmod{4}$  is a sum of two squares*, Amer. Math. Monthly 97 (1990), 144.
- [42] L. Zalcman, *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 115–137.