

TARTALOMJEGYZÉK.

ELSŐ FEJEZET.

A VALÓS SZÁMOK. EGY- ÉS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY.

I. A pozitív valós számok, mint végtelen tizedestörtek.

1. §.	Végtelen tizedestört; pozitív valós szám	1
2. §.	A nagyobb és kisebb fogalma pozitív számokra	5
3. §.	Számhalmaz felső határa	7
4. §.	Pozitív számok összege és szorzata	9
5. §.	Az egyenlőtlenségre vonatkozó műveleti szabályok	12
6. §.	A kommutatív, asszociatív és disztributív törvény	13
7. §.	Pozitív számok kivonása és osztása	14
8. §.	Számhalmaz alsó határa	16
9. §.	Pozitív szám n -edik gyöke	17
10. §.	Egyenesdarabok mérése	19

II. Áttérés a valós számok összeségére.

14. §.	Két pozitív szám, mint kisebbitendő és kivonandó, meghatároz egy valós számot	23
12. §.	A nagyobb és kisebb, az összeg és szorzat fogalma valós számokra. Műveleti szabályok	23
13. §.	Valós számok kivonása és osztása	25
14. §.	Az abszolút érték	25
15. §.	A számegyenes	26

III. Az egyszerű számtani, harmonikus és geometriai közép.

16. §.	A számtani és harmonikus közép	28
17. §.	A geometriai középre vonatkozó egyenlőtlenség	28
18. §.	Példák	30

IV. A kör kerülete és területe.

19. §.	A kör kerülete mint a beírt sokszögek kerületének felső határa	32
20. §.	A π szám	34
21—22. §.	Körív ívhosszúsága	34
23. §.	Szög abszolút mérőszáma	36
24. §.	Kör és körszektor területe	36
25. §.	Az ellipszis területe	38

V. Az összeg, szorzat és hányados folytonossága. Számhalmaz felső és alsó határa.

26. §.	Az összeg és szorzat folytonossága	39
27. §.	A hányados folytonossága	41
28. §.	Számhalmaz felső és alsó határa	42

VI. Monoton sorozatok.

29. §.	Korlátos monoton sorozat határértéke	43
30–32. §.	Példák	44
33. §.	Közönséges végtelen lánc tört	47
34. §.	$\sqrt{2}$ és $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ lánc tört alakja	53
35. §.	Nem korlátos monoton sorozat	55
36. §.	$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$	56
37. §.	$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} \rightarrow 0$	58
38–39. §.	Példák	59
40. §.	A BERNOULLI-féle egyenlőtlenség	61
41. §.	$q^n \rightarrow +\infty$ ($q > 1$), $q^n \rightarrow 0$ ($0 < q < 1$); $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$	62

VII. A függvény általános definíciója.

42. §.	DIRICHLET-definíciója. A függvény ábrázolása. Páros és páratlan függvény. Monoton függvény	63
43. §.	Példák függvény-értelmezésre	64
44. §.	Racionális egész- és törtfüggvény	67

VIII. Függvény határértéke.

45. §.	Határérték a végtelenben. Racionális függvény határértéke a $\pm\infty$ helyeken	69
46. §.	Határérték a végesben	72
47. §.	Jobb- és baloldali határérték	74
48. §.	Minden számsorozatból kiválaszthatunk egy monoton rész-sorozatot	76
49. §.	A véges határérték létezésének kritériuma	77

IX. Függvény folytonossága.

50. §.	A folytonosság definíciója. Összeg, szorzat és hányados folytonossága. Első- és másodfajú szakadás	78
51. §.	Példa minden racionális helyen megszüntethető szakadású függvényre	79
52. §.	Közvetett függvény folytonossága	80

X. A folytonos függvények alaptulajdonságai.

53. §.	BOLZANO tétele	80
54. §.	Valós együtthatós páratlanfokú egyenlet	82
55. §.	Az $x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \dots - c_n = 0$ egyenlet	83
56. §.	WEIERSTRASS tétele; folyományok	83
57. §.	Az egyenletes folytonosság tétele	85

XI. Számsorozat határértéke.

58. §.	Véges és végtelen határérték. A CAUCHY-féle konvergencia-principium	87
59. §.	Folyományok. Összeg, szorzat és hányados határértéke. LEIBNIZ tétele	88
60. §.	Véges határértékű sorozat származtatása monoton sorozatokból	90
61. §.	Példa	92
62. §.	Zérus-sorozatok. $\frac{q^n}{n!} \rightarrow 0$. Ha $\left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right \leq p < 1$ ($n \geq \nu$), akkor $a_n \rightarrow 0$	93
63. §.	A függvény-határérték fogalmának visszavezetése számsorozat határértékére	94
64. §.	Számsorozat felső és alsó határértéke	96

XII. Értékrendszerek tartományai.

65. §.	n -elemű értékrendszerek. Korlátos pontsorozatból mindig kiválaszthatunk egy konvergens rész-sorozatot	98
--------	--	----

66. §. Tartomány; belső, külső és határpont. Korlátos tartomány átmérője. Torlódási hely.	101
67. §. Közös ponttal nem bíró korlátos és zárt tartományok minimális távolsága	103
68. §. Egy segédétel. Nyílt és összefüggő tartomány két pontjának összeköthetése poligonnal	103
69. §. BOREL befödési tétele	104

XIII. Többváltozás függvény. Határértéke és folytonossága.

70. §. Többváltozós függvény	105
71. §. Függvény határértéke	106
72. §. Folytonosság. BOLZANO tétele	108
73. §. WEIERSTRASS tétele	109
74. §. Egyenletes folytonosság	110

MÁSODIK FEJEZET.

DIFFERENCIÁLHÁNYADOS. HATÁROZOTT ÉS HATÁROZATLAN INTEGRÁL.

I. Differenciálhányados.

75. §. Egyváltozós függvény differenciálhatósága, differenciálhányados vagy derivált. x^n és $\frac{1}{x^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) deriváltja	112
76. §. Differenciálható függvény folytonossága	114
77. §. Jobb- és baloldali differenciálhányados. Végtelen differenciálhányados...	115
78. §. A differenciálás formális törvényei	116
79. §. Szorzat és hányados differenciálási szabálya; determináns differenciálása	117
80. §. Közvetett függvény differenciálási szabálya	119
81. §. STIELTJES tétele a különbségi hányadosra vonatkozólag	120
82. §. Inverz függvény. $\sqrt[n]{x}$ deriváltja	121

II. A differenciálhányados geometriai jelentése.

83. §. A differenciálhányados geometriai jelentése. Az $y = x^n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) és $y = \frac{1}{x^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) görbék érintőinek szerkesztése	124
84. §. Az érintő és a normális egyenlete. Subtangens és subnormális, normális-darab, érintő-darab. Példák	127
85. §. A cisszois érintőjének szerkesztése	129

III. Magasabbrendű differenciálhányadosok.

86. §. Magasabbrendű deriváltak szukcesszív képezése	131
87. §. A TAYLOR-formula racionális egész függvényre	132
88. §. A LEIBNIZ-féle differenciálási szabály	134

IV. Racionális egész függvény gyökeinek multiplicitása.

89. §. m -szeres gyök; folyományok	134
90. §. Bizonyos számú helyen váltakozó előjelű polinom fokszáma	136
91. §. BOLZANO tétele racionális egész függvény esetében	137
92. §. ROLLE tétele racionális egész függvényre vonatkozólag	138
93. §. Alkalmazás	139

V. A lokális és a monoton növekedés tétele.

94. §. A lokális növekedés tétele. A derivált eltérése belső extrémális helyen	140
95. §. Példa lokálisan növekedő, de nem monoton növekedő differenciálható függvényre	141

VIII

96. §. A monoton növekedés tétele	141
97. §. Ellipszis normálisának a középponttól való maximális távolsága.....	142
98. §. A növekmények összehasonlításának elve. Az integrálszámítás alaptétele	144

VI. Konvexitás és konkávitás.

99. §. Alulról konvex, resp. konkáv görbe. Az $y = x^n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) és $y = \frac{1}{x^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) görbék konvexitása	14
100. §. A JENSEN-féle egyenlőtlenség. Hatványközép	149
101. §. A konvexitás szükséges és elegendő feltétele differenciálható függvénynél	152
102. §. $f(x)$ és $xf\left(\frac{1}{x}\right)$ görbéi alakjának kapcsolata	154

VII. Lokális szélsőérték. Inflexiós pont.

103. §. Lokális konvexitás	155
104. §. Lokális maximum és minimum	156
105. §. Inflexiós pont	157

VIII. A derivált alaptulajdonságai. Az általános Taylor-formula.

106. §. DARBOUX-tétele. A deriváltak zárt számközben nem kell korláatosnak lennie	159
107. §. ROLLE tétele; általánosítás	160
108. §. Függvények diszkussziója	162
109. §. A LAGRANGE- és a CAUCHY-féle középértéktétel	164
110. §. Parameteres előállítású függvény differenciálási szabálya A CAUCHY-féle középértéktétel geometriai interpretációja	166
111. §. A TAYLOR-formula általános maradéktagja; speciális esetek	167
112. §. n -szeres zérus-hely	170

IX. Görbék érintkezése. Simuló kör.

113. §. n -edrendű érintkezés. A görbe és az érintő érintkezése	172
114. §. Kör meghatározása az $x, y, y', y' \neq 0$ adatokból	174
115. §. Simuló kör. Ennek középpontja, mint két normális metszéspontjának határhelyzete	175
116. §. A parabola simuló köre. A simuló kör sugara szélsőértékének esete	178
117. §. A simuló kör középpontja, mint a görbe három pontján átmenő kör középpontjának határhelyzete	179

X. Parciális differenciálhányados.

118. §. Első- és magasabbrendű parciális deriváltak	180
119. §. $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ eleget tesz a térbeli LAPLACE-egyenletnek	181
120. §. A differenciálások sorrendjének felcserélhetősége	182
121. §. SCHWARZ tétele	183

XI. Többváltozós lokális szélsőérték.

122. §. Többváltozós lokális szélsőérték. PEANO ellenpéldája	185
123. §. Példa abszolút szélsőértékre	187
124. §. Kétváltozós másodfokú racionális egész függvény maximuma, resp. minimuma	188
125. §. Példa	190

XII. Riemann szerint integrálható korlátos függvény.

126. §. Alsó- és felsőösszegek. RIEMANN-szerinti integrálhatóság. Az integrál mint határérték	191
127. §. Az integrálhatóság kritériuma	197
128. §. Monoton függvény integrálhatósága	198
129. §. Az integrandus megváltoztatása véges számú helyen	199

130. §.	Integrálható függvénynek az abszolút értéke is integrálható.....	200
131. §.	Folytonos függvény integrálhatósága. Általánosítás véges számú szakadási hely esetére.....	200
132. §.	Példa mindenütt sűrű helyeken diszkontinuus integrálható függvényre...	201
133. §.	Integrálható függvény folytonossági helyei mindenütt sűrűn töltik ki az intervallumot.....	202
134. §.	Az integrál formális tulajdonságai; kiszámítása, midőn az integrandus valamely függvény deriváltja. Példák.....	203

XIII. Korlátos variációjú függvény.

135. §.	A korlátos variációjú függvény két definíciója; integrálhatósága. JORDAN-féle variáció.....	206
136. §.	Korlátos variációjú függvény két monoton növekedő függvény különbsége	210
137. §.	Korlátos variációjú függvények szorzata és hányadosa.....	211

XIV. Szorzat és hányados integrálhatósága.

138. §.	Szorzat és hányados integrálhatósága.....	212
139. §.	A CAUCHY-féle egyenlőtlenség.....	213
140. §.	A SCHWARZ-féle egyenlőtlenség.....	214

XV. Az integrálszámítás első és második középértéktétele.

141. §.	Az integrálok összehasonlításának elve.....	215
142. §.	Az első középértéktétel; integrálközép.....	217
143. §.	Az integrál, mint a felső határ függvénye.....	219
144. §.	Az ABEL-féle egyenlőtlenség.....	221
145. §.	A második középértéktétel.....	222

XVI. Határozatlan integrál.

146. §.	Folytonos függvénynek van primitív függvénye. Formális törvények. Elsőrendű quadratura.....	224
147. §.	Parciális integrálás. Példák.....	226
148. §.	Integrálás helyettesítéssel. Példák.....	229
149. §.	Szétválasztott változójú elsőrendű differenciálegyenlet.....	232
150. §.	Ortogonalis trajektoriak.....	235
151. §.	A parciális integrálás általános formulája. A TAYLOR-formula integrálmaradéktagja.....	237
152. §.	n -edrendű quadratura.....	239

XVII. A Jordan-féle területfogalom.

153. §.	Korlátos tartomány belső és külső területe.....	240
154. §.	A belső és a külső területre vonatkozó egyenlőtlenségek.....	243
155. §.	Mérhető területű tartományok.....	245
156. §.	Zérus területű tartomány; a mérhető területűség feltétele. Folyományok	246
157. §.	JORDAN tétele.....	249
158. §.	Példa nem mérhető területű korlátos tartományra.....	251
159. §.	JORDAN-féle köbtartalom. Forgási test köbtartalma; példák.....	252
160. §.	Gömböik köbtartalma.....	255

HARMADIK FEJEZET.

ELEMI FÜGGVÉNYEK.

I. A logaritmus és az exponenciális függvény.

161. §.	A természetes logaritmus, mint integrál. Az alapszám $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	257
162. §.	Az EULER-féle állandó.....	261
163. §.	M modulusú logaritmus; görbéjének szerkesztése.....	263

X

164. §. Az a^x ($a > 0$) exponenciális függvény	265
165. §. e^x ($x > 0$) kamatos-kamatszámítási interpretációja; $e^{\xi} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\xi}{x}\right)^x$	268
166. §. $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \xrightarrow{ f } e$; $e = 2.71 \dots$ irracionális szám	270
167. §. A súlyos geometriai közép	272
168. §. $\int_a^b g(x)e^{ax} dx$ előállítása, midőn $g(x)$ racionális egész függvény; az $\int_a^b \log x dx$ integrál	272
169. §. Az $y' = \omega y$ differenciálegyenlet. Fényabszorpció planparallel lemezben	274
170. §. $\log(x^2 + y^2)$ eleget tesz a síkbeli LAPLACE-egyenletnek	275

II. A hatvány, mint az alap függvénye.

171. §. Az x^μ ($x > 0$) függvény	276
172. §. A BERNOULLI-féle egyenlőtlenség általánosítása. Általános hatvány-közép	279
173. §. $\log x$ és e^x nagyságrendje	280
174. §. Függvény zérussá vagy végtelenné válásának rendszáma	282
175. §. $\int_a^b x^\mu dx$ ($\mu \neq -1$) közvetlen kiszámítása. Példák improprius integrálra ..	283
176. §. $\int x^\mu (\log x)^n dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) előállítása	286

III. Trigonometrikus és ciklometrikus függvények.

177–178. §. Az arc $\operatorname{tg} x$ függvény, mint integrál	287
179. §. A $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ és arc $\operatorname{ctg} x$ függvények	292
180. §. A $\sin x$ és $\cos x$ függvények	296
181. §. Az arc $\sin x$ és arc $\cos x$ függvények	302
182. §. Az $y'' = -a^2 y$ differenciálegyenlet; harmonikus mozgás	306
183. §. A RIEMANN-féle lemma; a korlátos variációjú függvény esete	308
184. §. Trigonometrikus összegképletek	310

IV. Logaritmikus derivált. Zárt analitikai kifejezések differenciálása.

185. §. Logaritmikus derivált. WARING tétele	313
186. §. $u(x)^{v(x)}$ és $u(x) \log v(x)$ differenciálása	314
187. §. Zárt analitikai kifejezések differenciálása. Kidolgozatlan példák	315
188. §. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$, ha ez létezik és $f(x)$ folytonos az a helyen; példa	317

V. A L'Hospital-szabály.

189. §. A L'HOSPITAL szabály végesben fekvő helyen	318
190. §. Példák	319
191–192. §. A L'HOSPITAL-szabály, midőn számláló és nevező végtelenhez tart. Példák	320
193. §. A L'HOSPITAL-szabály a $\pm \infty$ helyeken	323
194. §. Kidolgozatlan példák	324
195. §. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ kiszámítása $f(x)$ és $\varphi(x)$ magasabbrendű deriváltjai alapján	325

VI. Harmadfokú racionális egész függvény.

196. §. A harmadfokú racionális egész függvény diszkussziója	326
197. §. Harmadfokú egyenlet	328
198. §. Példa	333

VII. Maximum-minimum feladatok.

199. §. Adott hosszúságú körív és a húrja közti maximális terület	334
200. §. LHUILIER feladata	335
201. §. Az $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ összeget minimizáló P pont meghatározása	338

VIII. Néhány függvény diszkussziója.

202. §.	$e^{-kx} \sin \alpha x$ ($k > 0$) diszkussziója	341
203. §.	Kidolgozatlan példák	344
204. §.	Az $x = \operatorname{tg} x$ egyenlet gyökei	344
205. A §.	$\frac{\sin x}{x}$ és $x \sin \frac{1}{x}$ függvények	347
206. §.	A $\sin \frac{1}{x}$ függvény	351
207. §.	Az $x^2 \sin \frac{1}{x}$ függvény	352

IX. Aszimptota.

208. §.	Az aszimptóta létezésének feltétele. Példák	355
209. §.	Konvex, resp. konkáv görbe aszimptotája	358
210. §.	Példa	360

X. Parameteres és polárkoordinátás előállítású görbék.

211. §.	Parameteres előállítású görbe érintője; simuló körének sugara	362
212. §.	A cyclois-görbe	364
213. §.	Polárkoordinátás egyenletű görbék. Spirálisok	366
214. §.	A lemniszkáta	370
215. §.	CASSINI-féle görbék	372

XI. Hiperbolás függvények.

216. §.	A $\operatorname{ch} x$ és $\operatorname{sh} x$ függvények; ezek inverzei	378
217. §.	A $\operatorname{cth} x$ és $\operatorname{th} x$ függvények; ezek inverzei	383
218. §.	A tractrix görbe	385

XII. A Cauchy-féle függvényegyenletek.

219. §.	Az $f(x+y) = f(x)f(y)$ és $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ függvényegyenletek	387
220. §.	Az $f(x+y) = f(x) + f(y)$ és $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ függvényegyenletek	389
221. §.	Az $f(x-y) + f(x+y) = 2f(x)f(y)$ függvényegyenlet	390

NEGYEDIK FEJEZET.

AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS EGYES RÉSZEI.

I. Alapintegrálok.

222. §.	Alapintegrálok. Integrálás megfelelő felbontással	393
223. §.	$\int \operatorname{tg}^n x \, dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) előállítása	395
224. §.	Valóságos kúpszelet egy jellemző tulajdonsága	396
225. §.	A cosinus- és sinus-multiplumok ortogonalitása. Trigonometrikus polinom együtthatóinak FOURIER-alakja	398

II. Néhány integrál kiszámítása.

226. §.	Az $\int g(x) \cdot e^{ax} \frac{\cos}{\sin} bx \, dx$ integrálok, ahol $g(x)$ racionális egész függvény	400
227. §.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ és $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x \, dx$ kiszámítása, midőn n és m pozitív egész szám. A WALLIS-formula	402
228–229. §.	Két határozott integrál kiszámítása	407
230. §.	Kidolgozatlan példák	410
231. §.	$\int x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) előállítása	411
232. §.	Kidolgozatlan példák	412

III. Területszámítások.

233. §.	Területszámítás parameteres előállítású görbéknel. A cyclois quadraturája	412
234. §.	Az ellipszis és a hiperbola quadraturája	413
235. §.	Az astroid területe	415
236. §.	Szektorszerű idom területe	416
237. §.	A cardioid területe	417

IV. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet.

238. §.	Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet összes megoldásai	418
239. §.	Lineáris zárt vezető önindukciója	420
240. §.	Pontosan gyűjtő plankonvex lencse	422
241. §.	CASSINI-féle görbe sereg ortogonális trajektoriái	424

V. Improprius integrálok.

242. §.	Az improprius integrálok három fő típusa	425
243. §.	$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele. Abszolút konvergens integrál; $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konvergens, de nem abszolút konvergens	429
244. §.	Az előbbi integrál kiszámítása	431
245. §.	$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ konvergenciájának elegendő feltétele	433
246. §.	$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} \frac{\cos bx}{\sin bx} dx$ ($a > 0$; $n = 1, 2, 3, \dots$) rekurzív meghatározása	434
247. §.	$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) rekurzív meghatározása	436
248. §.	Az $(a, +\infty)$ intervallumban folytonos és nem korlátos függvény integrálja konvergens lehet	437
249. §.	$\int_a^b f(x) dx$ konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele. Abszolút konvergens integrál	439
250. §.	$\int_a^b f(x) dx$ konvergenciájának elegendő feltétele	440
251–252. §.	Példák	441
253. §.	Kidolgozatlan példák	444

VI. Racionális törtfüggvények integrálása.

254. §.	Az $\int \frac{\alpha x + \beta}{(a x^2 + b x + c)^n} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) integrál	445
255. §.	Példák	447
256. §.	Valódi törtfüggvény valós parciális törtekre bontása	449
257. §.	A határozatlan együtthatók módszere; példa	455
258. §.	Kidolgozatlan példák	457

VII. Racionális függvény integráljára visszavezethető integrálok.

259. §.	Az $\int_{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$ integrál	458
260. §.	$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varrho^2}{1 - 2\varrho \cos x + \varrho^2} dx = \pm 1$ ($\varrho^2 \leq 1$)	459
261. §.	A $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítés, midőn $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$	460
262. §.	Kidolgozatlan példák	462

263. §.	Az $\int R \left(x, \left(\frac{px+q}{rx+s} \right)^{\sigma_1}, \dots, \left(\frac{px+q}{rx+s} \right)^{\sigma_n} dx \right.$ integrál. A cissois quadraturája	462
264. §.	Példa	464
265. §.	Kidolgozatlan példák	466
266. §.	Az $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ integrál	466
267. §.	Kidolgozatlan példák	468
268. §.	Példa ad hoc módszerre	468

VIII. Rektifikálható folytonos görbék a síkban.

269. §.	Folytonos vonal darab	469
270. §.	Rektifikálhatóság. Az ívhossz additív és folytonosan változik	471
271. §.	Az ívhosszúság a beírt poligon hosszának határértéke	473
272. §.	A rektifikálhatóság szükséges és elegendő feltétele	474
273. §.	$y = f(x)$ egyenletű görbe ívhosszának integrálalakja. A lánegörbe rektifikációja	476
274. §.	A parabola rektifikációja	478
275. §.	Parameteres előállítású görbe ívhosszának integrálalakja. A teljes cyclois-ív hossza; az astroid kerülete. Az ív és a húr viszonya	479
276. §.	Polárkoordinátás egyenletű görbe ívhosszának integrálalakja. A cardioid kerülete	483
277. §.	A logaritmikus spirális rektifikációja	484
278. §.	Improprius integrállal kifejezett ívhosszúság	485
279. §.	Görbületi mérték. A parabola görbülete	486

IX. Térgörbe ívhosszúsága és érintője.

280. §.	Térgörbe ívhosszúsága. Körhengerre irt csavarvonal	489
281. §.	Térgörbe érintője	490
282. §.	Körkúpra irt csavarvonal	491
283. §.	Gömbre irt loxodroma	493
284. §.	MERCATOR-térkép	496
285. §.	Stereografikus projekció	500

X. Forgási test palástjának felszíne.

286. §.	A palást felszínének definíciója és képlete rektifikálható meridián esetében. A gömbsüveg felszíne	504
287. §.	Forgási ellipszoid felszíne	507
288. §.	Vonaldarab súlypontja; GULDIN-szabály. Teljes cyclois-ív súlypontja	509
289. §.	Negyedastroid súlypontja	510
290. §.	Félcarioid súlypontja	511

FÜGGELÉK.

A komplex számok. Az algebra alaptétele.

291. §.	A komplex számok, mint valós számpárok; a számsík. Összeadás és szorzás, az i szám	513
292. §.	Kivonás és osztás	517
293. §.	A MOIURE-képlet. Alkalmazások	519
294. §.	Az abszolút értékre vonatkozó egyenlőtlenségek	521
295. §.	Elemi geometriai alkalmazások	523
296. §.	Négyzetgyökök; másodfokú egyenlet	524
297. §.	Binom egyenlet; egységgyökök	527
298. §.	Az ötödik egységgyökök előállítása normálalakban. Szabályos ötszög és tizszög szerkesztése	529
299. §.	Az összeg, szorzat és hányados folytonossága. Számsorozat határértéke	531
300. §.	Az algebra alaptétele. Az egyenlet gyökeinek elemi szimmetrikus formái	533

ÖTÖDIK FEJEZET.

VÉGTELEN SOROK.

I. Aszimptotikus egyenlőségek.

301. §. Aszimptotikus egyenlőségek	539
302. §. Példa	540
303. §. A STIRLING-formula	541

II. A Cauchy- és a Toeplitz-féle határértéktétel.

304. §. CAUCHY első határértéktétele	544
305. §. Példa	546
306. §. CAUCHY második határértéktétele	547
307. §. Példák	548
308. §. TOEPLITZ határértéktétele. Példa	549
309. §. Folyomány	552

III. Végtelen sor konvergenciája és divergenciája.

310. §. Konvergens, ill. divergens sor. Folyományok	553
311. §. Konvergens sor asszociatív sajátága. A zárójelek elhagyhatásának feltétele	554
312. §. Konvergens sorok összeadása; szorzása egy számmal	555
313. §. LEIBNIZ tétele a váltakozó előjelű sorról	556
314—315. §. A MARKOV- és az EULER-féle sortranszformatio	558

IV. Példák hatványsorba fejtésre.

316. §. A geometriai sor; ennek tagonkénti differenciálhatósága	562
317. §. arc tg x hatványsora	564
318. §. π kiszámítása öt tizedesig	565
319. §. $\log(1+x)$ hatványsora	567
320. §. Logaritmusok kiszámítása; a 10 alapú logaritmusok modulusa	569
321. §. e^x hatványsora	573
322. §. $\sin x$ és $\cos x$ hatványsora	575
323. §. $\sin 5^\circ$ kiszámítása öt tizedesig	576

V. Feltételes és abszolút konvergencia.

324. §. A sor összege függhet a tagok sorrendjétől	578
325. §. RIEMANN tétele. Feltételesen konvergens sor	579
326. §. Abszolút konvergens sor	580

VI. Pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergencia-
és divergencia-kritériumok.

327. §. A konvergencia szükséges és elegendő feltétele	582
328. §. Az általános összehasonlító kritériumok	582
329. §. A CAUCHY-féle gyök- és hányados-kritérium	584
330. §. A $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ és $\sum \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ sorok ($\alpha > 0$)	585
331. §. Az ABEL-DINI-tétel	586
332. §. A $\sum \frac{1}{n \log n \log \log n \dots (\log \log \dots \log n)^\alpha}$ sorok ($\alpha > 0$)	588
333. §. A logaritmikus kritériumok	590
334. §. A RAABE-féle kritérium	594
335. §. Az általánosított GAUSS-féle kritérium	595
336. §. A CAUCHY-féle integrál-kritérium	598

VII. Abszolút konvergencia sor felbontása rész-sorokra.

337. §. Abszolút konvergencia sor rész-sorai abszolút konvergensek. A $\sum a_n = \sum a_n' + \sum a_n'' + \dots$ felbontás	601
338. §. Abszolút konvergencia sorok összetétele. A $\sum_{v=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(v)}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{v=1}^{\infty} a_n^{(v)})$ képlet.	603
339. §. A LAMBERT-féle sor	604

VIII. Szummábilis sor.

340. §. A $\sum \cos(\omega + nx)$ sor ($x \neq k\pi$) divergenciája. Folyományok	605
341. §. A $\sum \cos(\omega + nx)$ sor ($x \neq 2k\pi$) szummája. Folyományok	606
342. §. A szummábilis sor általános definíciója. Folyományok	608
343. §. Az $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ ($a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$) sor szummabilitása	610
344. §. A HARDY-LANDAU-tétel	611

IX. Konvergencia sorok szorzása.

345. §. Az általános szorzási szabály. Abszolút konvergencia sorok szorzása. A CAUCHY-féle szorzási szabály	613
346. §. MERTENS tétele	615
347. §. Sorok CAUCHY-féle szorzata	616

X. Hatványsorok.

348. §. A CAUCHY-HADAMARD-tétel	620
349. §. Hatványszor tagonkénti differenciálhatósága	622
350. §. ABEL folytonossági tétele	624
351. §. FROBENIUS tétele	625
352. §. Koefficiens-összehasonlítás	627
353. §. TAYLOR-sor. CAUCHY ellenpéldája	628
354. §. Elegendő feltétel a TAYLOR-sorba fejthetőségre	630

XI. A binomiális sor.

355. §. A binomiális sor konvergencia-tartománya	631
356. §. $(1+x)^{\mu} = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \dots$ valahányszor a sor konvergencia	634
357. §. Példák binomiális sorba fejtésre	636
358. §. $\arcsin x$ hatványsora	637

XII. Függvénysorozat és függvénysor egyenletes konvergenciája.

359. §. Egyenletes és egyenlőtlen konvergencia	637
360. §. Az egyenletes konvergencia szükséges és elegendő feltétele	640
361. §. A WEIERSTRASS-féle elegendő kritérium. A $\sum r^n \cos nx$ és $\sum r^n \sin nx$ sorok összege ($ r < 1$)	641
362. §. A $\sum u_n(x) v_n(x)$ sor egyenletes konvergenciájára vonatkozó elegendő kritériumok	642
363. §. Függvénysorozat határfüggvényének folytonossága	645
364. §. WEIERSTRASS példája mindenütt folytonos, seholsem differenciálható függvényre	646
365. §. Egy segéd-tétel	649

XIII. Példák trigonometrikus sorba fejtésre.

366. §. $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ($0 < x < 2\pi$). Folyományok	650
367. §. $\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). Folyományok	653

368. §.	$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na \sin nx}{n^2}$ ($0 < a < \pi$) sor összege	658
369. §.	$-\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ ($0 < x < 2\pi$). Folyományok	660
370. §.	$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{n}$ sor összegének vizsgálata	663

XIV. Függvénysor tagonkénti differenciálása és integrálása

371. §.	Tagonkénti differenciálás	666
372. §.	$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ sor összegének vizsgálata	669
373. §.	$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{(2n-1)^2}$ sor összegének vizsgálata	670
374. §.	Tagonkénti integrálás. Példa	670
375–376. §.	Példák	674
377. §.	A tagonkénti differenciálhatóságra vonatkozó tétel kiegészítése	676
378–379. §.	Első- és másodfajú teljes elliptikus integrálok sorbafejtése. Az ellipszis és a lemniszkáta kerülete	677

XV. Az Euler-féle összegképlet.

380. §.	BERNOULLI-polinomok és BERNOULLI-számok	680
381. §.	Az EULER-féle összegképlet	685
382. §.	$\log n!$ közelítő meghatározása; az általános STIRLING-formula	688
383. §.	$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ közelítő meghatározása	693
384. §.	A BERNOULLI-polinomok generátor-sora. $x \operatorname{cth} x$ és tx hatványsora	695
385. §.	$x \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$, $\log \cos x$ és $\log \frac{\sin x}{x}$ hatványsora. Folyományok	698
386. §.	$1/\cos x$ és $1/\operatorname{ch} x$ hatványsora; EULER-féle számok	701