Bevezetés

Számos műszaki és természettudományi probléma vizsgálatánál véletlen függvényekre (sztochasztikus folyamatokra) vonatkozó differenciálegyenletek adódnak. Ezek az egyenletek legtöbbször a következő két — egymástól alapvetően különböző — típus egyikét képviselik. Egyrészt a klasszikus differenciálegyenlet problémákban bizonyos függvények, együtthatók, paraméterek, kezdeti- vagy peremértékek véletlen jellegűek lehetnek. Egyszerű példa erre az

$$\dot{X}_t = A(t)X_t + B(t), \qquad X_{t_0} = c$$

kezdeti érték probléma, az $A(t)$ és $B(t)$ véletlen függvényekkel mint együtthatókkal, és c véletlen kezdeti értékkel, vagy az

$$\dot{X}_t = f(t, X_t, \eta_t), \qquad X_{t_0} = c$$

kezdeti érték probléma, az η_t véletlen függvénnyel, c véletlen kezdeti értékkel és rögzített f függvénnyel. (A fenti egyenletekben szereplő összes függvény skalárértékű.) Ha a szóban forgó véletlen függvények bizonyos regularitási tulajdonsággal rendelkeznek, akkor a fenti problémákat egyszerűen az egyes realizációkra vonatkozó klasszikus problémák egy családjaként felfogva a differenciálegyenletek elméletének klasszikus módszereit lehet alkalmazni. Más a helyzet, ha a formálisan közönséges differenciálegyenletekben ún. „fehér zaj” típusú véletlen függvények lépnek fel, mint pl. az

$$(a) \qquad \dot{X}_t = f(t, X_t) + G(t, X_t)\xi_t, \qquad X_{t_0} = c$$

egyenletben a ξ_t függvény. A „fehér zajt” nulla középértékű, az egész valós tengelyen konstans spektrálsűrűségű, stacionárius Gauss-folyamatnak fogjuk fel. Az ilyen tulajdonságú folyamat nem értelmezhető a megszokott módon, mivel kovarianciafüggvénye a Dirac-féle delta függvény lenne, tehát végtelen szórású (és minden pontjában független értékekkel rendelkező) folyamatról lenne szó. Ennek ellenére a ξ_t „fehér zaj” hasznos matematikai idealizálásnak bizonyul azoknak a véletlen behatásoknak a leírására, amelyek gyorsan változnak és a különböző időpontokhoz tartozó értékeik gyakorlatilag korrelálatlanok.

Ilyen egyenleteket elsőként 1908-ban Langevin alkalmazott a folyadékban Brown-mozgást végző részecskék tanulmányozásánál [44]. Legyen X_t egy Brown-mozgást végző részecske valamelyik sebességkomponense a t időpillanatban, akkor a Langevin-egyenlet

$$(b) \qquad \dot{X}_t = -\alpha X_t + \sigma \xi_t$$

alakú, ahol $\alpha > 0$ és σ konstansok. Itt $-\alpha X_t$ a környező közeg hatásának szisztematikus része, amelyet a dinamikus súrlódás hoz létre. Az α konstans a Stokes-féle törvényből $\alpha = 6\pi a \eta / m$-nek adódik, ahol a jelöli a gömb alakú részecske sugarát, m a részecske tömegét, η pedig a környező folyadék viszkozitását. Ezzel szemben a $\sigma\xi_t$ kifejezés azt az erőhatást reprezentálja, amelyet a molekulák ütközése gyakorol a részecskére. Miután normális körülmények mellett másodpercenként 10^{21} körüli molekulaütközésről van szó, amely a részecskét minden irányból egyenletesen éri, így $\sigma\xi_t$ valóban egy gyorsan változó fluktuáció kifejezése, amelyet „fehér zajként“ idealizálhatunk. Ha a ξ_t folyamatot úgy normáljuk, hogy kovarianciája a delta-függvény legyen, akkor a $\sigma^2 = 2\alpha kT/m$ összefüggést kapjuk (itt k a Boltzmann-állandó, T a környező folyadék abszolút hőmérséklete). Alakilag ugyanez a (b) egyenlet adódik valamely áramkörben fellépő áramerősségre is, ahol ξ_t a termálzajt reprezentálja. Természetesen a (b) az (a) egyenlet speciális esete, amelynek jobb oldala additíve bomlik fel az f szisztematikus részre és a $G\xi_t$ fluktuációs részre.

A Brown-mozgás (b) modelljében — annak ellenére, hogy ξ_t nem egy közönséges értelemben vett véletlen függvény — az X_t valószínűségeloszlásai explicite kiszámíthatók. Azonban valamennyi ilyen eloszlású X_t folyamat (Ornstein—Uhlenbeck-folyamat) 1 valószínűséggel nem differenciálható realizációkkal rendelkezik, úgyhogy (b) és általánosabban (a) nem fogható fel közönséges differenciálegyenletként.

Az (a) típusú egyenletek matematikailag szigorú kezelése teszi szükségessé a könyvünk tárgyát képező új számítási mód kifejlesztését. Ki fog derülni, hogy bár a „fehér zaj” csak általánosított sztochasztikus folyamat, a

$$(c) \qquad W_t = \int_0^t \xi_s \, ds$$

határozatlan integrált mégis a Wiener-folyamattal azonosíthatjuk. A Wiener-folyamat egy olyan folytonos (de seholsem differenciálható) realizációkkal bíró Gauss-folyamat, amelynek középértéke: $EW_t = 0$, és kovarianciája: $EW_t W_s = \min(t, s)$.

Alkalmazva (c)-re a

$$dW_t = \xi_t \, dt$$

szimbolikus írásmódot, az (a) kifejezés a

$$(d) \qquad dX_t = f(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW_t, \qquad X_{t_0} = c$$

differenciális alakot nyeri. Ez az X_t folyamatra nézve egy (Itô-féle) sztochasztikus differenciálegyenlet, amelyet az

$$(e) \qquad X_t = c + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s$$

integrálegyenlet rövid felírásaként értelmezünk. Az itt szereplő W_t folyamat realizációi 1 valószínűséggel folytonosak ugyan, azonban egyetlen intervallumban sem korlátos variációjúak, így az (e) kifejezésben szereplő második integrál általában még sima G függvény esetén sem fogható fel a W_t realizációira nézve vett közönséges Riemann—Stieltjes-integrálként, mivel ebben az esetben a közelítő összeg határértéke függ a közbenső pontok megválasztásától. 1951-ben Itô

$$Y_t = \int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s$$

alakú integrálokat definiált a W_t Wiener-folyamat ún. jövőtől nem függő G funkcionáljainak egy széles osztályára, és ezzel a sztochasztikus differenciálegyenletek elméletét szilárd alapra fektette. Ennek az elméletnek van néhány különös vonása. Például a

$$dX_t = X_t \, dW_t, \qquad X_0 = 1$$

egyenlet megoldása nem e^{W_t}, hanem

$$X_t = e^{W_t - \frac{t}{2}},$$

amit a klasszikus szabályok szerinti tisztán formális számítással nem kapunk meg.

Ki fog derülni, hogy a (d) sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása folytonos realizációkkal rendelkező Markov-folyamat, sőt ezen túlmenően diffúziós folyamat. Megfordítva, minden (sima) diffúziós folyamat egy (d) alakú sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása, ahol f a folyamat driftje és G^2 a folyamat diffúziós együtthatója. Ily módon hatékony módszereink vannak a diffúziós folyamatok átmeneti és véges dimenziós eloszlásainak, továbbá számos funkcionálja eloszlásának kiszámítására. Ezek a módszerek az ún. analitikus vagy indirekt valószínűségelméleti módszerek közé tartoznak, amelyek tárgya nem az X_t állapot, hanem pl. a $P(X_t \in B | X_s = x)$ átmenetvalószínűségek időbeli alakulása.

A sztochasztikus differenciálegyenletek megoldása viszont a valószínűségi vagy direkt módszerekhez tartozik, mivel ez magával az X_t valószínűségi változóval és annak változásával foglalkozik. A (d) vagy (e) alakú egyenlet egy olyan — bár általában bonyolult — konstrukciós előírást fejez ki, amelynek segítségével az X_t trajektóriái egy W_t Wiener-folyamat trajektóriáiból és egy c kezdeti értékből megkaphatók.

A (d) szerintinél általánosabban írható le valamely utóhatásmentes (emlékezet nélküli) sztochasztikus dinamikus rendszer állapotváltozása a

$$(f) \qquad dX_t = g(t, X_t, dt)$$

alakú egyenlettel. Egy szisztematikus részhez hozzáadódó fluktuáló külső hatások esetén:

$$g(t, x, h) = f(t, x)h + G(t, x)(Y_{t+h} - Y_t).$$

Itt Y_t egy független növekményű folyamat, amivel az (f) egyenlet a

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + G(t, x)\, dY_t$$

alakot nyeri. Az ilyen egyenleteket már Itô is tanulmányozta [42]. Mi azonban tárgyalásunk során csak az $Y_t = W_t$ legfontosabb speciális esetre szorítkozunk.

