

# ELŐSZÓ

*Tökéletes a megoldási módszer akkor,  
ha kezdettől fogva előre látjuk, sőt be is  
bizonyíthatjuk, hogy azt követve, elérjük  
célunkat.*

LEIBNIZ: *Opuscules*, 161. old.

1. Bármilyen probléma megoldása valamilyen nehéz helyzetből kivezető út megtalálását, valamilyen akadály megkerülését jelenti, olyan cél elérését, amelyhez egyébként közvetlenül nem tudtunk volna eljutni. A probléma megoldása az értelem jellegzetes teljesítménye, és az értelem az emberiség jellegzetes képessége: tulajdonképpen a problémamegoldás a legjellemzőbben emberi tevékenység. Könyvem célja a problémamegoldó tevékenység megértése, eszközök ajánlása a tanítására — és természetesen — az olvasó problémamegoldó készségének fejlesztése.

2. A könyv két részből áll. Röviden jellemezni fogom mindkettőnek a célját. A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlás útján lehet. Nem adhatok bűvös kulcsot, amely minden ajtót megnyit és minden problémát megold, de adhatok utánozható jó példákat és sok alkalmat a gyakorlásra. Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar tanulni, annak problémák megoldását kell gyakorolnia.

Erőfeszítésünket akkor kamatoztathatjuk leghasznosabban, ha az előttünk levő problémának azokat a vonásait keressük, amelyek segíthetnek bennünket további problémák megoldásában is. Olyan megoldás, amelyet saját erőnk-ből értünk el, amelyről olvastunk vagy esetleg csak hallottunk, de amelyet igazi érdeklődéssel és intuícióval követtünk, előnyösen utánozható megoldástípussá lehet hasonló problémák megoldásában. Az I. rész célja az, hogy néhány hasznos megoldástípust ismertessen meg az olvasóval.

Könnyű egy probléma megoldását utánozni, ha feladatunk hozzá nagyon hasonló, de annál nehezebb, vagy alig lehetséges, ha a hasonlóság nem olyan szembeötlő. Az emberben azonban mélyen gyökerezik a vágy több és jobb után: valami korlátozástól mentes fogás után, mely minden probléma megoldására képesítene. Legtöbbünkben ez a vágy csak homályosan él, de tündérmesékben és néhány filozófus írásaiban világosabban nyilvánul meg. Emlékezzünk a mesebeli bűvös szóra, melyre minden ajtó megnyílik. Descartes

egy minden problémát megoldó, egyetemes módszerről elmélkedett, Leibniz már nagyon világosan meg is fogalmazta a „tökéletes módszer” eszméjét. De hát a „tökéletes módszert” nem keresték több sikerrel, mint a közönséges fémeket arannyá változtató bölcsek követ: vannak szép álmok, amelyeknek álmoknak kell maradniuk. Viszont az ilyen elérhetetlen ideálok foglalkoztatják az embert: senki sem járt még a Sarkcsillagon, de azt nézve sokan lelték meg a helyes utat. Ez a könyv nem adhat, és soha semmilyen könyv sem fog adni általános, tökéletes módszert problémák megoldására. De még pár kis lépés is, amelyet az elérhetetlen eszmény felé teszünk, világosabbá teheti gondolkodásunkat, és tovább fejlesztheti problémamegoldó képességünket. A II. rész néhány ilyen lépést körvonalaz.

3. A *heurisztika* a problémamegoldás eljárásainak és módszereinek a tanulmányozása. A „heurisztika” műszó (terminus technicus), amelyet a múltban némely filozófus használt, ma félig feledésbe merült, félig hitelét veszítette, de én nem riadok vissza a használatától: ebben a könyvben a heurisztikát igyekszem tárgyalni.

Pontosabban, a heurisztika kézzelfogható és gyakorlati oldalát hangsúlyozom. Igyekszem minden rendelkezésemre álló eszközzel arra csábítani az olvasót, hogy problémákat oldjon meg, és gondolkodjék azokon a módszereken és eszközökön, amelyeket megoldásukra felhasznál.

Az ezután következő fejezetek túlnyomó részében néhány probléma megoldását tárgyalom, részletesen, több oldali megvilágításban. A hivatásos matematikus szemében — ha módszertani szempontok nem érdeklík — ez a tárgyalás túlságosan részletesnek is tűnhetik. De amit én leírok, az nemcsak a megoldás, hanem a megoldásnak létrejötte is, mondjuk a „történeti háttére”. Egy-egy ilyen kázus (eset) történeti háttére a megoldás lépéseinek egymásutánját tárja fel — mutatja, hogyan jöttek rá végül is a megoldásra. Egyben megkísérli azoknak az indítékoknak és álláspontoknak a megértését, amelyek meggyorsítják ezeket a lépéseket. Egy-egy ilyen kázus gondos leírása arra szolgál, hogy valamilyen általános tanácsot vagy követendő példát adjon, amely hasonló helyzetekben irányíthatja az olvasót. Az ilyen tanács vagy megoldástípus explicit megfogalmazását általában különálló pontban tárgyalom, bár első kísérletező megfogalmazásait itt-ott beleszövöm a kázus történeti háttérének részleteibe is.

Minden fejezetet példák és megjegyzések követnek. Amikor az olvasó kidolgozza a példákat, alkalma van hozzáfűzni, világosabbá tenni és kibővíteni azokat a módszertani megjegyzéseket, amelyeket a fejezet szövege nyújt. A példák közé szőtt megjegyzések részben technikailag nehezebbek, vagy elméleti szempontokra mutatnak rá, részben csak alkalomszerű fejezetek.

Nem tudom, mennyire sikerült, de nagyon igyekeztem arra, hogy az olvasó közreműködését biztosítsam. Megpróbáltam nyomtatásban rögzíteni mindazt,

amit szóbeli tanításom folyamán az osztályban a legeredményesebbnek találtam. A kázusok bemutatásával igyekeztem az olvasót a kutatás légköréhez hozzászoktatni. Az ajánlott problémák kiválasztásával, megfogalmazásával és beosztásával arra törekedtem, hogy az olvasó érdeklődését, kíváncsiságát és kezdeményezését felébresszem, és egyben bő alkalmat adjak arra, hogy a kutatási helyzetek változatosságát megismerje.

4. Ebben a könyvben többnyire matematikai problémákkal foglalkozom. Ritkán említek nem matematikai problémákat, ám ezek mindig ott vannak a háttérben, gondosan figyelembe is vettem őket. Megkísértem a matematikai problémák olyan kidolgozását, hogy az lehetőség szerint a nem matematikai problémák kezelésére is fényt vessen.

Többnyire elemi matematikai problémákkal foglalkozom ebben a könyvben. Bár ritkán tárgyalok felsőbb matematikai problémákat, mégis ezek vezettek a könyv anyagának megformálásában. Fő forrásom saját kutatásom volt. Nem egy elemi probléma tárgyalása magasabb szintű problémákkal összefüggő tapasztalataimat tükrözi. Eredeti alakjukban ezeket nem foglalhattam volna ebbe a könyvbe.

5. Elméleti célom a heurisztika tanulmányozása, de van emellett másik, sürgető, konkrét, gyakorlati célom is: középiskolai matematikatanárok előkészítésének a megjavítása.

A középiskolai matematikatanárok előkészítésének megfigyelésére és véleményem kialakítására kitűnő alkalmam volt. Az utóbbi éveimet ugyanis középiskolai tanárok tanításának szenteltem. Remélem, hogy aránylag elfogulatlan megfigyelő vagyok, de mint ilyennek, csak egy véleményem lehet: *a középiskolai matematikatanárok előkészítése nem kielégítő*. Továbbá az a véleményem, hogy minden felelős tényezőnek egyaránt osztoznia kell ebben a bírálatban, és ha javítani akarnak a fennálló helyzeten, akkor mind a pedagógia főiskoláknak, mind az egyetemek matematikai tanszékeinek gondosan felül kell vizsgálniuk, hogy mit tudnak nyújtani a tanárjelölteknek.

*Milyen tananyagot kell tehát adniuk az egyetemeknek a jövőben középiskolai tanárok előkészítésére?* Nem adhatunk választ erre, amíg nincs válasz arra a vele összefüggő kérdésre: *mit adjon a középiskola a tanulóknak?*

Azt gondolhatnók, hogy ez a kérdés nem visz előre, mert annyi különféle vélemény van róla. Úgy tűnik, mintha nem is adhatnánk reá olyan választ, amellyel mindenki vagy a nagy többség egyetérthetne. Sajnos, ez így is van. Ám akad ehhez a kérdéshez olyan szempont, amelyet legalább a szakértők elfogadhatnak.

Minden ismeretünknek *tárgyi tudás* és *gondolkodási készség* az alapja. Ha *valódi és alapos* ismeretünk van a matematikai munka bármely fokáról, legyen az elemi vagy felső fokú, kétségtelenül világossá válik, hogy a matematikában a gondolkodási készség sokkal fontosabb, mint a tárgyi ismeretek elsajátítása.

Ennélfogva a középiskolában csakúgy, mint bármely más szinten, bizonyos mennyiségű tárgyi tudás megtanításán kívül bizonyos irányú *gondolkodási* készséget is fejleszteniünk kell.

Mi a matematikában a gondolkodási készség? A problémamegoldás képessége, mégpedig nemcsak rutinproblémáké, hanem olyanoké is, amelyek bizonyos fokú önállóságot, ítélőképességet, eredetiséget és alkotóképességet kívánnak. Ennek következtében a matematikatanításban a középiskola legfőbb feladata az, hogy hangsúlyozza a *problémamegoldás módszeres munkáját*. Ez meggyőződésem. Lehet, hogy ebben nem mindenki ért egyet velem, de azt hiszem, abban megegyezhetünk, hogy a problémamegoldásnak bizonyos jelentőséget kell tulajdonítani, és ez egyelőre elég is.

A tanárnak tudnia kell azt, aminek a tanítását elvárják tőle. Tehát tudnia kell azt is, hogy a tanulóknak hogyan mutassa meg a problémák megoldását. — De ha ő maga sem ért hozzá, a tanulókat hogyan tanítsa meg rá? A tanárnak képesnek kell lennie arra, hogy kifejlessze tanítványaiában a gondolkodási és a következtetési készséget. Fel kell ismernie bennük az alkotó gondolkodást, és bátorítania kell őket ebben. Dehát az a képzés amit ő maga kapott, csak kevés figyelmet szentelt arra, hogy valóban elsajátította-e a tanultakat, és egyáltalán nem vette figyelembe, hogy milyen a gondolkodási készsége, milyen a következtetésre, a problémamegoldásra, az alkotó gondolkodásra való képessége. Véleményem szerint itt van ma a legnagyobb hiány a középiskolai matematikatanárok előkészítésében.

Hogy ezt a hiányt pótolni lehessen, ahhoz a tanár tanulmányi anyagában helyet kellene adni a *megfelelő szintű alkotó munkának*. Én problémamegoldó szemináriumok vezetésével igyekeztem ilyen munkára módot nyújtani. Ez a mű azt az anyagot tartalmazza, amelyet szemináriumaim számára gyűjtöttem össze, és egyben utasításokat is ad az anyag felhasználására. (Lásd a kötet végén: „Útmutatás tanárok és tanárok tanárai számára”.) Remélem, valamenynyire segíteni fog a matematikatanárok előkészítésében, és éppen ez művem gyakorlati célja.

Bízom abban, hogy mindkét említett célnak — az elméletinek és a gyakorlatinak — szem előtt tartása segített abban, hogy jobb könyvet írjak. Remélem azt is, hogy nem lesz ellentét a várható legkülönbözőbb olvasók érdeklődése között, bár némelyek általában problémamegoldásra, mások saját maguk, megint mások viszont tanítványaik képességeinek továbbfejlesztésére akarják felhasználni a könyvet. Ami megfelel az egyik típusú olvasónak, annak esélye van arra, hogy hasznára legyen a többinek is.

6. Ez a mű két előző könyv folytatása: „How to Solve It” (magyar fordításban: „A Gondolkodás Iskolája”) és „Mathematics and Plausible Reasoning” (egy-egy fejezeteinek magyar fordítása Varga Tamás: A „Matematika Tanítása” c. szemelvénygyűjteményében jelent meg); az utóbbi két kötetének más-más cí-

me van: „Induction and Analogy in Mathematics” (I. kötet) és „Patterns of Plausible Inference” (II. kötet). Ezek a könyvek kiegészítik egymást anélkül, hogy lényeges átfedést tartalmaznának. Lehet, hogy valamelyik témát egyik is, másik is megtárgyalja, de más eljárással, más példákkal, más részletekkel, más szempontokkal. Ezért nagyjából mindegy, hogy melyiket olvassuk előbb és melyiket később.

Az Olvasó könnyebbségére a három művet összehasonlító és a megfelelő részeket összefoglaló tárgymutatót közlünk e mű II. kötetének végén.

7. Olyan könyv első részét kiadni, amelynek a második része még nincs készen, némi kockázatot rejt magában. (Van egy német közmondás: „Bolondnak ne mutass félig kész házat!”) Ezt a kockázatot ugyan nem volna szabad figyelmen kívül hagyni, de a mű gyakorlati célja miatt mégis úgy határoztam, hogy nem halasztom tovább a kötet kiadását. (Lásd 210. old.)

Ez a kötet a mű első részét tartalmazza („Megoldástípusok”) és két fejezetet a második részből („Útban az általános módszer felé”).

Az első rész első négy fejezetében bővebb a példaanyag, mint a továbbiakban. Alapjában véve az első rész sok tekintetben hasonlít Szegő Gábor és a Szerző analízisprobléma-gyűjteményéhez (lásd Irodalomjegyzék). Vannak azonban nyilvánvaló különbségek is. Ebben a kötetben az ajánlott példák sokkal elemibb szintűek, a módszertani szempontokat pedig nemcsak felvetettem, hanem kifejezetten megfogalmaztam és *megvitattam*.

A második rész második fejezetére Werner Hartkopf egyik új műve inspirált (lásd Irodalomjegyzék). Hartkopf művének csak némely szempontját mutatom be, azokat, amelyek szerintem a legvonzóbbak. Azért mutatom be éppen azokat, mert heurisztikus felfogásomnak legjobban megfelelnek, s azokhoz példákat és kiegészítő megjegyzéseket fűztem.

8. A könyv kéziratának elkészítéséhez a Ford-alapítványból anyagi támogatást adott a Committee on the Undergraduate Program in Mathematics. Köszönetet mondok ezért is és a bizottság erkölcsi támogatásáért is. Köszönetemet fejezem ki a *Journal of Education of the Faculty and College of Education, Vancouver and Victoria* kiadójának, aki lehetővé tette, hogy ebbe a műbe a lapban már megjelent cikkemből részeket illesszek bele. Köszönetemet fejezem ki Gerald Alexanderson, Santa Clara (Kalifornia) és Alfred Aeppli, Zürich, professzoroknak a korrektúrák javításában nyújtott hatékony segítségükért. Zürich, Svájc, 1961. december hó.

PÓLYA GYÖRGY