Utóhang: Kételkedés a kételkedésről

Két ideális matematikus *(sőt, hiperideális, hiszen amerikai) elhatározza, hogy áttöri a szűk szakmai bezárkózás korlátait, és körülnéz a való világban, amelynek talán mégiscsak része az a rezervátum is, amelyet matematikának neveznek. Kérdések sokaságát teszik föl maguknak: Mi az, amit csinálunk — a szakmabeli, a felhasználó és a kívülálló szempontjából? Mi az értéke? Megbízható ismereteket nyújt-e, és főleg miről? Hol és hogyan léteznek a matematikai objektumok, s hogyan tanulmányozhatjuk őket?*

A fölvetett kérdések egy részére megvannak a kész válaszok a XX. századi matematikafilozófia három közismert iskolájában. A kérdezők — könyvünk szerzői — nem fogadhatják el egyik iskola válaszait sem, mert ezek a válaszok dogmatikus előítéletekre épülnek, összeegyeztethetetlenek az élő matematikai gyakorlattal és a matematika kozmetikázatlan történetével. Nekilátnak hát saját felfogásuk kialakításának. Alaposan körbejárják a témát, és — meg kell adni — jószemű turistaként derítik föl az ismeretlen tájakat is, kapásból észrevéve a prospektus és a valóság eltéréseit. (Más kérdés, hogy egy ilyen turistaúton fontos részletek esetleg mégis felderítetlenül maradhatnak.)

A könyv utolsó lapjain a szerzők eljutnak saját álláspontjuk megfogalmazásához. Eszerint a matematika a popperi **harmadik világ** *egyik jelensége: az emberi kultúra azon része, amelyben elérhető a természettudományokra jellemző általános egyetértés, mert reprodukálható gondolati objektumokkal foglalkozik. Ehhez a záróképhez kívánkozik néhány megjegyzés.*

A könyv más helyein a szerzők bőségesen szólnak arról, hogy a matematika fejlődésére milyen ösztönző hatást gyakoroltak a társadalmi tevékenység különféle szférái (s nemcsak a szűkebb értelemben vett munkatevékenység). Összefoglalásukban azonban e tényezőt teljesen *figyelmen kívül hagyják. Aligha lehet kétségbe vonni, hogy a matematizálás alapvető eszméi az ember társadalmi tevékenységéből fakadtak: egyrészt az ember és a természet közötti sajátos emberi kapcsolatból (a munkatevékenységből), másrészt az ember és az ember közötti kapcsolatokból (a termelés és az elosztás megszervezése stb.). Az sem vitás, hogy az emberi tevékenység a matematizálásnak nemcsak ősforrása, hanem továbbfejlődésének is egyik ösztönzője, sőt éltető eleme.*

Ha a matematikát a kultúra olyan szféráihoz hasonlítjuk, mint az ideológia, a vallás, vagy a művészeti irányzatok (eltekintve most „tudományjellegű" vonásától), szembe kell néznünk azzal a makacs kérdéssel, hogy miért tűri, sőt tartja el a társadalom a matematikus szektát. És e kérdésre nem lehet ugyanaz a válasz, mint az egyéb kultúrszférák esetén. Világos, hogy a matematika nem elégít ki olyan tömeges kultúrigényeket, mint az irodalom, a színház, a zene, vagy akár a sport. Még azt sem lehet mondani, hogy egy vájtfülű elit kulturális igényeit szolgálja ki, hiszen a matematikai vájtfülűek általában a szektához, a szakmához tartoznak. Nincs nélkülözhetetlen szerepe az ideológiai nevelésben sem (noha felhasználható pozitív emberi tulajdonságok, magatartásformák fejlesztésére). Miért fedezi hát a társadalom a matematika költségeit? Nyilvánvalóan azért, mert egyes kutatási eredményei felhasználhatók a termelésben, a gazdaságban, a közigazgatásban vagy a hadászatban.

Bármilyen büszke legyen is egy Hardy-típusú matematikus arra, hogy életében semmi hasznosat nem csinált, mégis az a tény, hogy a kívülállók, a nem-matematikusok számára a matematika értékét alapvetően a **hasznossága** *jellemzi. Ha tévedés és torzítás a matematikát pusztán ezzel jellemezni, jóval nagyobb tévedés és torzítás a matematika ezen vonását kihagyni* **alapvető** *jellemzői közül, egy olyan hasonlattal, hogy a Parthenont is hasznosították a velenceiek (lőporraktárként — fel is robbant!), de ez egyáltalán nem jellemző a Parthenon „megértéséhez". Nos, a matematika nem robban fel* attól, hogy hasznosítják, ellenkezőleg, az alkalmazási igények gyakran serkentik „önmagában vett" fejlődését is. (Természetesen vakság lenne nem látni, hogy ennek egyéb fontos ösztönzői is léteznek.) A társadalmi köztudat ebben a kérdésben világosabban lát, mint a matematika egyes művelői és filozófusai.*

A társadalom — különösen napjainkban — „szelíd erőszakkal" igyekszik biztosítani az alkalmazások szempontjából fontos és aktuális — és néha eléggé költséges — matematikai kutatások fejlesztését, az anyagi

* A matematikának is vannak az emberi haladás szempontjából káros alkalmazásai, de ezzel nem kell külön foglalkoznunk, mert ez a sors ma már szinte minden tudományt elért. — A Parthenon-hasonlat nem a könyvből származik; nincs felhatalmazásom arra, hogy szerzőjét megnevezzem.

eszközök alkalmasnak látszó elosztása révén. Ez nem jelenti a „tiszta" — a közvetlen hasznosítás szempontjából érdektelen — kutatási témák betiltását vagy elsorvasztását; egyrészt azért nem, mert itt a kutatási költségek minimálisak (nem nagyobbak, mint mondjuk a filozófiai kutatásban), másrészt azért sem, mert az itt működő kutatók hasznos szerepet tölthetnek be az oktatásban, a szakmai utánpótlás nevelésében. Ez azonban inkább a kívülállóknak szóló és némileg leegyszerűsített magyarázat. A teljes igazság az, hogy a kutatásokat finanszírozó szervek világszerte belátták — ösztönösen vagy tudatosan —, hogy a matematika fája csak akkor terem hasznosítható gyümölcsöket, ha szabadon hagyják burjánzani ágait, leveleit, virágait is, amelyek legföljebb csak a „szemet" gyönyörködtetik. Hogy eközben vadhajtások is keletkeznek? Úgy tűnik, ez a kultúra és a tudomány minden területén fellépő jelenség; lenyesegetésük a társadalmi és a szakmai kontroll dolga. Kétségtelenül izgalmas téma a tiszta matematika és alkalmazásainak kapcsolata a történeti tények fényében, de e kommentár szűk keretei között ezzel nem foglalkozhatunk.

Az alkalmazások szempontjából is fontos, hogy a matematika kölcsönözte eszközök, eljárások **megbízhatóak** *legyenek, ám a megbízhatóság, a bizonyítottság a matematikai szakmán belül is alapvető normává lett már az antikvitásban. Mi biztosítja a matematika tételeinek abszolút megbízhatóságát? Könyvünk szerzői elutasítják a század elejének filozófiai programját a matematika végső biztos alapjainak keresésére, és Lakatos Imrével együtt azt vallják, hogy a matematika tévedéseken keresztül, bizonyítások és cáfolások harcában fejlődik. Nincs abszolút végleges matematikai igazság, bár vannak „sziklaszilárd", a matematikai gyakorlat által sokszorosan megerősített tételeink.*

Azt, hogy a matematika is **esendő** *tudomány, egy egészen más nézőpontból már a harmincas évek nagy matematikai (bizonyításelméleti) eredményeiből, mindenekelőtt Kurt Gödeltől tudjuk. Arról van szó, hogy bizonyos fontos matematikai axiómarendszerek ellentmondástalansága nem bizonyítható be olyan metarendszerben, amelynek megbízhatósága (ellentmondástalansága) eleve biztosított. Így a matematika egészének megbízhatóságára valóban csak a gyakorlat, a történelmi tapasztalatok nyújtanak garanciát, s ez nem végleges, nem zárja ki a jövőbeni korrekciót.*

Lakatos, Davis és Hersh egészen más szempontból vonják kétségbe a matematika abszolút megbízhatóságát. Nem az axiómarendszerek konzisztenciájának bizonytalanságával érvelnek, hanem a matematikai bizonyítás ingatagságával. Lakatos matematikatörténeti példákkal támasztja alá álláspontját. E példákhoz meg lehetne jegyezni, hogy az elbeszélt vitákat részben a fogalmak tisztázatlansága váltotta ki (a poli-

éder, ill. a függvény fogalma körüli bizonytalanság), bár kétségtelen, hogy felületes és hibás bizonyításokkal is találkozunk. Egészében: a XVIII—XIX. században a definíciók és a bizonyítások szabatosságának követelményei jóval lazábbak voltak, mint napjainkban. Davis és Hersh ezt a különbséget nemigen méltatják figyelemre. Szerintük a matematikai gondolkodásmódnak van egy társadalmilag szentesített kánonja (itt „társadalmon" a matematikus társadalmat értik), amely lehetővé teszi a különböző fejekben kialakuló gondolati képek egyeztetését; és eljut az interszubjektív egybevágóságig. A kölcsönös egyeztetés folyamata azonban sohasem jut el a teljes befejezettségig. Tehát egy bebizonyított tétel elvben bármikor ki van téve a megtámadás, a cáfolás lehetőségének. A matematikai bizonyítás szabatosságának nincs objektív kritériuma. A diák azon kérdésére, hogy ki dönti el, jó-e a bizonyítás, az ideális matematikus jogosan válaszolja: „Ki más, mint én?"

Szerzőink nem fogadják el azt, hogy a XX. században a matematikai logika megadta a bizonyítás (és a definíció) szabatosságának objektív kritériumait (az ún. elsőrendű logika keretében). Azt mondják, ez csupán egy elméleti modell, a valóságban sohasem e szerint bizonyítunk. A matematikai könyvekben és folyóiratokban megjelent bizonyításokat nem lehet alávetni számítógépes ellenőrzésnek.

Az igaz, hogy Frege **(Die Grundgesetze der Arithmetik)** *és Russell—Whitehead* **(Principia Mathematica)** *munkáin kívül ritkaság az olyan matematikai bizonyítás, amely abszolút formalizált (a természetes nyelv teljes mellőzésével írott). Kevésbé ritka a félig-meddig formalizált bizonyítás; ilyeneket főleg kényes, kulcsfontosságú tételek esetén alkalmaznak; ezek teljes formalizálása (és számítógépbe programozása) könnyen elérhető, bár persze az olvasmányosság rovására menne. A leggyakoribb bizonyításfajta kétségtelenül az, amelyben a logikai kötőelemeket a természetes nyelv szavaival fejezik ki. De egy ilyen bizonyítás is lehet teljesen szabatos, azzal a megszorítással, hogy a benne felhasznált (korábban, esetleg mások által bizonyított) tételeket premisszáknak tekintjük. Azt is figyelembe kell vennünk, hogy a formalizált bizonyítási technikában explicite csupán kevés számú (esetleg csak egy) levezetési lépésszabály szerepel, a logikatankönyvekben azonban kidolgoznak számos, gyakran alkalmazott bonyolultabb következtetési sémát is, amely esetleg 15...20 primitív levezetési lépést sűrít egybe. Ilyen következtetéseket gyakran használnak a matematikai bizonyításokban, s ez gátja lehet ugyan a közvetlen gépi programozásnak, de szemernyi kétséget sem ébreszthet a szabatosság iránt.*

Mondhatjuk: a matematikai bizonyítás (és fogalomalkotás) szabatosságának ma már van objektív kritériuma, függetlenül attól, hogy a matematikusok ténylegesen alkalmazzák-e vagy sem. De tény az, hogy *néha* **explicite** *is fölhasználják a matematikai logika apparátusát. És megkockáztatom azt a kijelentést, hogy közel 25 évszázada minden alkotó matematikus* **implicite** *használja mai logikánkat, vagy legalább törekvése és meggyőződése volt logikailag szigorú bizonyításokat produkálni. Tény, hogy a matematikai bizonyításokhoz szükséges logikát Frege előtt nem kanonizálták (Arisztotelész szillogisztikája, még a sztoikus logikával kiegészítve is, túl sovány volt a matematika céljaira), de azért a matematikusok (kezdve Eukleidésztől) tudtak szabatosan bizonyítani. A matematikai logika megalkotása megváltoztatta a matematikai szabatosság normáit. Anélkül hogy feltételeznénk: elértük a legfelső fokot, bízvást mondhatjuk, hogy itt minőségi változás történt. Nem egy alkotó matematikus unalmasnak találhatja a matematikai logikát (mint matematikai diszciplínát, s ezen nincs mit csodálkozni: egy topológus is unalmasnak találhatja a kategóriaelméletet), de eredményeitől nem függetlenítheti magát. A mai szakfolyóiratok egyszerűen nem fogadnak el olyan cikkeket, amelyek negligálják a szabatosság mai követelményeit. A homályos fogalomalkotás és a hiányos bizonyítás olyan történeti példái, mint az infinitezimálisokkal, a Fourier-sorokkal, vagy az Euler-tétellel kapcsolatosak, napjainkban nem ismétlődhetnek meg. Bizonyítási tévedések persze ma is előfordulnak; a folyóiratokban gyakran találunk helyesbítéseket is, és a legjobb szerzők tankönyveibe is becsúszhatnak tévedések. De most nem arról van szó, hogy* **a kölcsönös egyeztetés folyamata működik a hibafeltárásban** *(ami igaz lehetett a történeti példák esetén). Nem viták eredményeként jutnak konszenzushoz, hanem egy objektív kritérium alapján.*

A Lakatos-féle kép helytálló lehet a matematika történetére, és biztosan hasznos a tanításban. Talán alkalmazható lesz a jelenre és a jövőre is: alapos újramagyarázás árán. Hiszen az nyilvánvaló, hogy a matematikai problémák megoldásának útja ezentúl is részproblémák megoldásán keresztül vezet; de semmiképp sem szükségszerű, hogy ezt az utat homályos definíciók, gorombán elnagyolt bizonyítások és a hozzájuk csatlakozó cáfolások kísérjék.

A szerzők helyesen látják, hogy a matematika emberi alkotás, amelynek megvannak a maga objektív törvényei. Matematikai rendszereket **alkotunk,** *majd igyekszünk* **felfedezni** *e rendszerek objektív, immár tőlünk független sajátságait. Hogyan lehetséges ez? Úgy, hogy a rendszer* **megalkotása** *nem más, mint alapfogalmainak lerakása és a rájuk vonatkozó alaptörvények (axiómák) megfogalmazása, a* **felfedezés** *pedig a rendszer olyan további törvényeinek feltárása, amelyek a logika erejénél fogva következnek az alaptörvényekből. Mivel ehhez nincs univerzális mechanikus módszer, a törvények feltárása valóban felfedező munka, amelyhez tapasztalat, jártasság, jó érzék és néha jó szerencse is szüksé-*

ges. De nem elég, hogy a matematikus önmagát meggyőzze a fölfedezett összefüggésről: be is kell bizonyítania, hogy a szóban forgó összefüggés logikailag következik az axiómákból. Ez teszi fölfedezését önmaga számára is teljesen megbízhatóvá, és mások számára is elfogadhatóvá.

Ha csak az itt kiemelt két mozzanatra (alapozás és bizonyítás) vagyunk tekintettel, megkapjuk a matematika **formalista** *szemléletét, amely szerint a matematika a formalizált rendszerek tudománya, amelyben, axiómákból kiindulva, tételeket bizonyítunk. A szerzők elutasítják ezt a felfogást mint a matematikáról alkotott egyoldalú, torz szemléletet. Ebben igazuk is van, de megfeledkezni látszanak arról, hogy ez is a matematika* **egyik** *arca, amely éppen egyik lényeges sajátságát fejezi ki. A szélsőséges intuicionisták kivételével alighanem minden mai matematikus elismeri, hogy a modern matematika egyik alapvető vonása az axiomatikus módszer használata; s ez éppen a formalista szemlélet objektív magja.*

A formalisták általában tagadják, hogy a matematikának van tárgya, s ez a nagy többség számára eleve ellenszenvessé teszi nézetüket. Davis és Hersh ezzel szemben hangsúlyozzák, hogy a matematikának igenis van tárgya, s állításai értelmesek. Értelmük azonban nem a külső világban, hanem az emberi közérthetőség, azaz az interszubjektivitás szférájában található. Ezen lényegében azt értik, hogy a matematika jelentése hasonló a „felépítmény" címszó alá sorolt társadalmi jelenségekéhez.

Egy axiomatizált matematikai elmélet állításai annyiban biztosan értelmesek, hogy egy elgondolható struktúráról szólnak. (Ha axiómarendszerünk ellentmondástalan, akkor e struktúra logikailag lehetséges.) Ha az elmélet fogalmai eléggé általános emberi tevékenységek és tapasztalatok idealizációi, s ennek nyomát az elméletben használt terminusok is őrzik, akkor az egyszerűbb tételek széles körben értelmeseknek tűnnek, kiváltképp azok, amelyek felhasználásra is kerülnek. Persze, itt néha arról van szó, hogy a matematikai elméletet fölcserélik egy részleges és durva, de az érzékelés és a szemlélet számára jobban hozzáférhető értelmezéssel (pl. az euklideszi geometriát a fizikai tér leírásának vélik). Az ideális objektumok, tulajdonságok és relációk további idealizációi révén nyert matematikai elméletek tételei azonban egyre kevesebb ember számára tűnnek értelmeseknek. Ha nem szorítkozunk a matematikus társadalomra, aligha mondhatjuk, hogy a matematikai állítások hasonló módon értelmesek, mint a művészet vagy az ideológia termékei.

Nem segít itt a mechanikus materialista kiút: a matematika az anyagi világból jött, tehát ott kell a jelentését is keresni. Ennek sikertelensége magától értetődő az olyan rendszerek esetében, amelyeknek nincs állandó alkalmazási területük. De a standard vagy őseredeti alkalmazási szférával bíró matematikai elmélet (mint a geometria) is alkalmazható lehet *más szférákban (és ez a lehetőség számos esetben már realizálódott is). A matematikai elmélet tárgya maga az absztrakt struktúra, nem annak egyik vagy másik realizálódása, alkalmazási területe. De ennyi elegendő is ahhoz, hogy az elméletet objektíve tartalmasnak, értelmesnek minősítsük.*

Meg kell tehát különböztetni a matematikai értelmesség pszichológiai-pedagógiai, és ismeretelméleti aspektusát. Könyvünk szerzői sok szépet és hasznosat mondanak az elsőről, de a második, úgy tűnik, kicsúszott a kezük közül.

A matematika legkülönbözőbb területeit egyetlen dolog foglalja egységbe: az axiomatikus módszer, amelynek segítségével a külső és belső inspirációk hatására létrejött struktúrákat tanulmányozza. Ez az* **igaz mozzanat** *a formalizmus egyébként torz álláspontjában.*

„Nem lehet felfogni, hogy mi a kocka, ha mindig csak szemből látjuk." Igaz. De azért a homloknézeti látvány is hozzátartozik a helyes felfogás kialakításához. Erről néha megfeledkezni látszanak szerzőink, amikor a megalapozó iskolák eszméit elutasítva, a kudarcok hasznosítható tapasztalatait nem építik bele a matematikáról kialakított összképükbe. De azért könyvük — remélem, az olvasónak is ez a véleménye — friss, dogmamentes, élvezetes és tanulságos olvasmány volt.

Ruzsa Imre

* Itt a „struktúra" terminust liberálisan használom, semmiképp sem korlátozva pusztán az algebrai struktúrákra.