Függelékek

F.1. Teljes indukció

Sok olyan összefüggés van, mint amilyen például az

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

azonosság, amelynek bizonyításában a *teljes* (vagy *matematikai*) *indukció* axiómájára hivatkozunk.

A teljes indukción alapuló bizonyítások két lépése:

(1) ellenőrizzük, hogy a szóban forgó formula $n=1$ esetén igaz;

(2) belátjuk, hogy tetszőleges k szám esetén abból, hogy a formula $n=k$ esetén igaz, következik, hogy $n=k+1$ esetén is igaz.

Ha ez a két feltétel teljesül, akkor biztosak lehetünk abban, hogy formulánk minden n természetes számra igaz. Erről a következő gondolatmenet alapján győződhetünk meg. Az (1) lépés szerint a formula igaz 1-re. A (2) szerint teljesül, hogy ha 1-re igaz, akkor 2-re is igaz, így tehát 2-re is igaz. De az is fennáll, hogy ha 2-re igaz, akkor igaz 3-ra is, így aztán 3-ra is igaz stb. Ha az első dominó eldől, és a k-adik dominó (tetszőleges k esetén) eldönti a $k+1$-edik dominót, akkor a végeredmény: minden dominó eldől.

Hogy a dolgot más szempontból is megvilágítsuk, tekintsük az $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ állítássorozatot. Tegyük fel, hogy mindegyik állítás igazsága maga után vonja a sorban utána következő állítás igazságát. Ekkor ha S_1 igaz, akkor vele együtt igaz az összes utána következő állítás is.

1. PÉLDA

Igazoljuk, hogy bármely n természetes számra:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Megoldás. A fenti, kétlépéses stratégiát követjük.

(1) Az állítás $n=1$ esetén igaz, elvégre

$$1=\frac{1(1+1)}{2}.$$

(2) Az indukciós lépésben azt kell igazolnunk, hogy ha az állítás valamely $n=k$ szám esetén igaz, akkor $n=k+1$ esetén is igaz. Ha

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

akkor

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.\end{aligned}$$

Az egyenlőségsorozat utolsó tagja éppen $n(n+1)/2$, amennyiben $n=k+1$.

Az indukciós axióma alapján így leszögezhetjük: az állítás minden n természetes számra igaz. □

Az 5.2. alfejezet 4. példájában az első n természetes szám összegére vonatkozó állítást másféleképpen is belátjuk, az indukciós bizonyítás azonban alapvetőbb, ráadásul ennek alapján az első n négyzetszám, illetve köbszám összegére vonatkozó formulákat is könnyen igazolhatjuk (l. a 9. és 10. feladatot). Lássunk még egy példát.

2. PÉLDA

Igazoljuk, hogy minden n természetes számra

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Megoldás. Újra a kétlépéses stratégiát követjük.

(1) Az állítás $n=1$ esetén igaz, elvégre

$$\frac{1}{2^1}=1-\frac{1}{2^1}.$$

Ha pedig fennáll

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k},$$

akkor

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=$$
$$=1-\frac{2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}.$$

Ha tehát a formula k-ra igaz, akkor igaz $k+1$-re is, tetszőleges k esetén.

Az indukció két lépése így biztosítja, hogy az állítás minden n természetes számra igaz. □

Más kezdőértékek

Bizonyos esetekben az indukciós bizonyítások első lépésében nem $n=1$, hanem valamely más természetes szám esetén kell ellenőriznünk, hogy igaz-e a bizonyítandó állítás. Ilyenkor a két lépés a következőképpen módosul:

(1) ellenőrizzük, hogy a szóban forgó formula $n=n_1$ esetén igaz; ahol n_1 természetes szám (most ez az indukció „alapja”);

(2) belátjuk, hogy tetszőleges $k\ge n_1$ szám esetén abból, hogy a formula $n=k$ esetén igaz, következik, hogy $n=k+1$ esetén is igaz.

Ha (1)-et és (2)-t igazoltuk, akkor az indukció axiómája garantálja, hogy a szóban forgó állítás minden $n\ge n_1$ természetes szám esetén igaz.

3. PÉLDA

Igazoljuk, hogy ha n elég nagy, akkor $n!>3^n$.

Megoldás. Milyen nagy az „elég nagy”? A következő táblázatból a válasz is kiderül:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

A sejtésünk az, hogy minden $n\ge 7$ esetén $n!>3^n$. A sejtés bizonyítására használjunk indukciót. Az első lépésben legyen $n_1=7$ (látjuk, hogy $n=7$-re az állítás igaz).

Tegyük fel tehát, hogy valamely $k\ge 7$ számra $k!>3^k$. Ekkor

$$(k+1)!=(k+1)k!>(k+1)k^3>7\cdot 3^k>3^{k+1}.$$

Ezzel a bizonyítás teljessé vált: ha $n\ge 7$, akkor $n!>3^n$. □

F.1. Feladatok

1. A két valós számra vonatkozó $|a+b| \leq |a|+|b|$ háromszög-egyenlőtlenség alapján igazoljuk, hogy tetszőleges n-re és $x_1,\ldots,x_n$ számra

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leq |x_1+|x_2|+\ldots+|x_n|.$$

2. Igazoljuk, hogy ha $r \neq 1$, akkor tetszőleges n természetes szám esetén

$$1+r+r^2+\ldots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

3. A szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$ szabály, valamint a $\frac{d}{dx}(x) = 1$ összefüggés alapján igazoljuk, hogy bármely n természetes szám esetén $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

4. Tegyük fel, hogy az f függvényre az $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ összefüggés tetszőleges x_1 és x_2 valós számok esetén teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor

$$f(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n) = f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n),$$

tetszőleges n természetes szám és $x_1,\ldots,x_n$ valós számok esetén.

5. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra teljesül a

$$\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^n} = 1-\frac{1}{3^n}$$

egyenlőség.

6. Igazoljuk, hogy ha n elég nagy, akkor $n! > n^3$.

7. Igazoljuk, hogy ha n elég nagy, akkor $2^n > n^2$.

8. Igazoljuk, hogy ha $n \geq -3$, akkor $2^n \geq 1/8$.

9. **Négyzetszámok összege.** Igazoljuk, hogy az első n pozitív egész szám négyzetének összege:

$$\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

10. **Harmadik hatványok összege.** Igazoljuk, hogy az első n pozitív egész szám köbének összege:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

11. **Véges összegek.** Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes szám, illetve $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ számok esetén

(a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$;

(b) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$;

(c) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k$, tetszőleges c-re;

(d) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n\cdot c$, amennyiben minden k-ra $a_k = c$.

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós szám és n természetes szám esetén $|x^n| = |x|^n$.

F.2. A határértékre vonatkozó tételek bizonyítása

Ebben a pontban belátjuk a 2.2. alfejezetbeli 1. Tétel 2–5. állításait, valamint a 4. Tételt.

1. TÉTEL Határértékszabályok.
Legyenek L, M, c és k valós számok; tegyük fel, hogy

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{és} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M.$$

Ekkor fennállnak a következők.

1. ÖSSZEG: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$
2. KÜLÖNBSÉG: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$
3. SZORZAT: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$
4. SZORZÁS KONSTANSSAL: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$
5. HÁNYADOS: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, ha $M \neq 0$
6. RACIONÁLIS HATVÁNY: Ha r és s relatív prím egész számok, és $s \neq 0$, akkor $\lim_{x\to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor azt is feltesszük, hogy $L > 0$).

Az összegre vonatkozó szabályt a 2.2. alfejezetben már beláttuk, a racionális kitevőjű hatványfüggvényekkel való kompozícióra vonatkozó 6. szabály bizonyítását a felsőbb analíziskönyvekre hagyjuk. A különbségre vonatkozó 2. szabályt az összegszabály speciális eseteként kaphatjuk meg, g helyében a $-g$ függvénnyel, M helyében pedig a $-M$ számmal. A konstanssal való szorzásra vonatkozó 4. szabály a szorzatszabály azon speciális esete, amikor $g(x) = k$ minden x-re. Marad tehát a szorzat- és a hányadosszabály – a következőkben ezeket bizonyítjuk be.

A szorzatszabály bizonyítása. Belátjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy az f és g értelmezési tartományai D metszetének minden x elemére

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - LM| < \varepsilon.$$

Rögzítsünk tehát egy pozitív ε számot; írjuk fel az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényt a következő alakban:

$$f(x) = L + (f(x) - L), \quad g(x) = M + (g(x) - M).$$

Szorozzuk össze a két egyenlőséget, a szorzatból pedig vonjunk ki LM-et:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) - LM &= [L + (f(x)-L)][M + (g(x)-M)] = \\ &= LM + L(g(x)-M) + M(f(x)-L) + (f(x)-L)(g(x)-M) - LM = \\ &= L(g(x)-M) + M(f(x)-L) + (f(x)-L)(g(x)-M). \qquad (1) \end{aligned}$$

Mivel f és g határértéke, amint $x \to c$, rendre L és M, vannak olyan $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ számok, amelyekre teljesül, hogy a D halmaz minden x elemére:

$$\begin{aligned} &0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \sqrt{\varepsilon/3} \\ &0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \sqrt{\varepsilon/3} \\ &0 < |x-c| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/3(1+|M|) \\ &0 < |x-c| < \delta_4 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/3(1+|L|). \qquad (2) \end{aligned}$$

Legyen δ a $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ számok legkisebbike; ekkor a (2)-beli implikációk utótagjai mind fennállnak, ha $0 < |x-c| < \delta$ teljesül. Így ha $0 < |x-c| < \delta$, akkor minden $x \in D$ esetén

$$\begin{aligned} &|f(x)g(x) - LM| \le \\ &\quad \le |L|\cdot|g(x)-M| + |M|\cdot|f(x)-L| + |f(x)-K|\cdot|g(x)-M| \le \\ &\quad \le (1+|L|)\cdot|g(x)-M| + (1+|M|)\cdot|f(x)-L| + |f(x)-K|\cdot|g(x)-M| < \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

A hányadosszabály bizonyítása.

Belátjuk, hogy $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$. Ebből ugyanis a szorzatszabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}.$$

Rögzítsünk tehát egy pozitív ε számot. Meg kell mutatnunk, hogy létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy tetszőleges x esetén

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon.$$

Mivel a feltevésünk szerint $|M| > 0$, azért létezik olyan δ_1 pozitív szám, hogy minden x-re

$$0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}. \qquad (3)$$

Tetszőleges A és B számokra teljesül az $|A|-|B| \leq |A-B|$, a $|B|-|A| \leq |A-B|$, ezek következtében pedig az $||A|-|B|| \leq |A-B|$ egyenlőtlenség. Az utóbbiból az $A = g(x)$, $B = M$ helyettesítéssel a

$$||g(x)|-|M|| \leq |g(x)-M|$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből a (3) implikáció utótagját is figyelembe véve

$$||g(x)|-|M|| < \frac{|M|}{2}$$

következik. Eszerint

$$\begin{aligned} -\frac{|M|}{2} &< |g(x)|-|M| < \frac{|M|}{2}, \\ \frac{|M|}{2} &< |g(x)| < \frac{3|M|}{2}, \\ |M| &< 2|g(x)| < 3|M|, \end{aligned}$$

amiből

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|}. \tag{4}$$

Ha tehát $0 < |x-c| < \delta_1$, akkor

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{M \cdot g(x)}\right| \leq \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M-g(x)| < \\ < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M-g(x)|. \end{aligned} \tag{5}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk a (4) egyenlőtlenséget.

Mivel $(1/2)|M|^2\varepsilon > 0$, azért van olyan $\delta_2 > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |M-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}|M|^2. \tag{6}$$

Ha tehát δ-nak a δ_1 és $\delta_2\}$ közül a kisebbet választjuk, akkor (5) és (6) egyaránt teljesül minden $0 < |x-c| < \delta$ esetén, így azt kapjuk, hogy minden x-re:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon,$$

ez pedig éppen a bizonyítandó állítás. □

4. TÉTEL Szendvicstétel.

Tegyük fel, hogy valamely, a c pontot tartalmazó nyílt intervallum minden (de legalábbis c kivételével minden) x elemére teljesül $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Ha ezen felül

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

akkor fennáll $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ is.

Bizonyítás.

Jobb oldali határérték. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = \lim\limits_{x\to c^+} h(x) = L$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (c, c+\delta)$ esetén

$$L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon \quad \text{és} \quad L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ egyenlőtlenséget is felhasználva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} L-\varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L+\varepsilon, \\ L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon, \\ -\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát tetszőleges x-re: ha $c < x < c + \delta$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bal oldali határérték. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (c - \delta, c)$ esetén

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \quad \text{és} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Az előbbi gondolatmenetet követve most azt kapjuk, hogy tetszőleges x-re: ha $c - \delta < x < c$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$.

„Kétoldali" határérték. Ha $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, akkor $g(x)$ és $h(x)$ jobb és bal oldali határértéke is létezik, amint $x \to c^+$, illetve $x \to c^-$. Az előzőek szerint ekkor $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$ is fennáll, így $\lim_{x\to c} f(x)$ is létezik és egyenlő L-lel. $\square$

F.2. Feladatok

1. Tegyük fel, hogy az $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ függvények határértéke az $x = c$ helyen rendre L_1, L_2 és L_3. Igazoljuk, hogy ekkor $\lim_{x\to c}(f_1 + f_2 + f_3)(x) = L_1 + L_2 + L_3$. Indukcióval igazoljuk az állítás általánosítását is.

2. A szorzatfüggvény határértékére vonatkozó szabályt felhasználva teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha az $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ függvények határértéke az $x = c$ helyen rendre $L_1, L_2, \ldots, L_n$, akkor

$$\lim_{x\to c}(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n.$$

3. A $\lim_{x\to c} x = c$ összefüggés és a 2. feladat alapján igazojuk, hogy tetszőleges $n > 1$ egész szám esetén $\lim_{x\to c} x^n = c^n$.

4. Polinomfüggvény határértéke. A $\lim_{x\to c}(k) = k$ összefüggés, valamint az 1. és a 3. feladat eredménye alapján igazoljuk, hogy tetszőleges

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

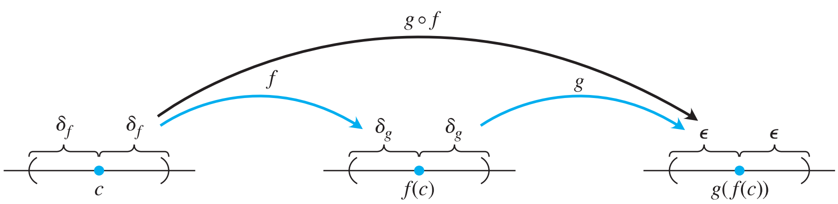
polinomfüggvény esetén $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

5. Racionális törtfüggvény határértéke. Az 1. Tétel és a 4. feladat eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f(x)$ és $g(x)$ polinomfüggvényekre teljesül, hogy ha $g(c) \neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

6. Folytonos függvények kompozíciója. Az F.1. ábra annak a tételnek a bizonyítását illusztrálja, amely szerint két folytonos függvény kompozíciója is folytonos függvény, pontosabban: ha az f függvény a c helyen, g pedig az $f(c)$ helyen folytonos, akkor $g \circ f$ folytonos a c helyen. Rekonstruáljuk a bizonyítást az ábra alapján.

Tegyük fel, hogy c az f függvény, $f(c)$ pedig a g függvény értelmezési tartományának belső pontja; ekkor valamennyi határértéket kétoldalinak tekinthetjük. (A jobb, illetve bal oldali határértékekre a bizonyítás hasonlóan megy.)



F.1. ÁBRA: Két folytonos függvény kompozíciója is folytonos.

F.3. A valós számok elmélete

Az analízis a valós számok elméletén alapul. A határértékekre, deriváltakra és integrálokra vonatkozó tételeink jelentős része a racionális számok halmazán értelmezett függvényekre nem is igaz. Ebben a függelékben a valós számok elméletének alapfogalmait mutatjuk be, de utalunk azokra az eredményekre is, amelyekkel bővebben csak a magasabb szintű tanulmányainkban ismerkedünk majd meg.

A valós számok tulajdonságait három csoportra osztjuk: **algebrai** és **rendezési** tulajdonságok, valamint a **teljesség**. Az algebrai tulajdonságok az összeadásra, szorzásra, kivonásra és osztásra vonatkoznak. Ezek a racionális számokra éppúgy érvényesek, mint a következő függelékben tárgyalandó komplex számokra.

Az összeadásra és a szorzásra vonatkozó tulajdonságok („axiómák”):

A1 $a+(b+c)=(a+b)+c$ tetszőleges a,b,c esetén.

A2 $a+b=b+a$, tetszőleges a,b esetén.

A3 Van egy 0-val jelölt szám, amelyre teljesül, hogy minden a-ra $a+0=a$.

A4 Minden $a \neq 0$-hoz van olyan b, amelyre $a+b=0$.

M1 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ tetszőleges a,b,c esetén.

M2 $a\cdot b=b\cdot a$, tetszőleges a,b esetén.

M3 Van egy 1-gyel jelölt, amelyre teljesül, hogy minden a-ra $a\cdot 1=a$.

M4 Minden 0-tól különböző a-hoz van olyan b, amelyre $a\cdot b=1$.

D $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ tetszőleges a,b,c esetén.

A1 és M1 az összeadás és a szorzás **asszociativitását**, A2 és M2 a két művelet **kommutativitását**, D pedig a szorzásnak az összeadásra való **disztributivitását** mondja ki. Ha egy halmaz a rajta értelmezett $+$ és $\cdot$ műveletekkel rendelkezik a felsorolt tulajdonságokkal, akkor **testnek** nevezzük. A testek és más, hasonló struktúrák általános jellemzőivel az absztrakt algebra foglalkozik.

A **rendezési** tulajdonságok a $\leq$ reláció jellemzőit rögzítik.

O1 Tetszőleges a,b esetén vagy $a\leq b$, vagy $b\leq a$, vagy mindkettő.

O2 Ha $a\leq b$ és $b\leq a$, akkor $a=b$.

O3 Ha $a\leq b$ és $b\leq c$, akkor $a\leq c$.

O4 Ha $a\leq b$, akkor $a+c\leq b+c$.

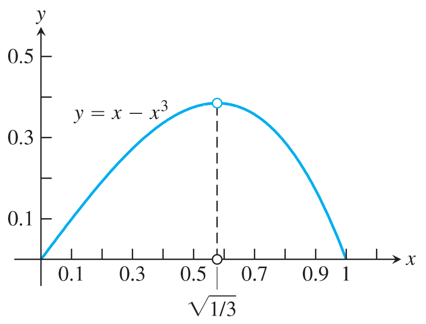
O5 Ha $a\leq b$ és $0\leq c$, akkor $ac\leq bc$.

O3 szerint a $\leq$ reláció **tranzitív**; O4 és O5 a rendezés és az összeadás, illetve a szorzás viszonyáról szól.

A valós, a racionális és az egész számokon értelmezhetjük az O1–O5 tulajdonságokkal rendelkező $\leq$ relációt, a komplex számok azonban nem rendezhetők ilyen módon. Nem tudjuk megállapítani például, hogy $\sqrt{-1}=i$ nagyobb vagy kisebb-e, mint 0. Az olyan testet, amelynek elemein adott egy, az O1–O5 tulajdonságoknak eleget tevő $\leq$ reláció, **rendezett testnek** nevezzük. Rendezett testre példa – többek között – a racionális és a valós számok teste.

Ha a valós számokra mint a számegyenes pontjaira gondolunk, a teljességi tulajdonság azt mondja ki, hogy a számegyenes minden pontjának megfeleltethető egy valós szám. A valós számegyenesen nincsenek „rések”. A racionális számok halmaza nem ilyen: a számegyenes $\sqrt{2}$ vagy π pontjához nem található megfelelő racionális szám; az egész számok között pedig még az 1/2-nek sincs helye.

De mit értünk azon, hogy a valós számegyenesen nincsenek „rések”? A válaszhoz pontosítanunk kell a teljesség meghatározását. Az M számot egy valós számokból álló halmaz **felső korlátjának** nevezzük, ha M a szóban forgó halmaz egyetlen eleménél sem kisebb; a halmaz felső korlátai közül a legkisebbet a halmaz legkisebb felső korlátjának (vagy **szuprémumának**) nevezzük. Az $M=2$ szám például a negatív számok egy felső korlátja; mivel az 1 szám szintén felső korlát, a 2 nem a legkisebb. A negatív számok legkisebb felső korlátja a 0. Azt mondjuk, hogy egy rendezett test **teljes** (vagy **teljesen rendezett**), ha minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik legkisebb felső korlátja.



F.2. ÁBRA: Az $y = x - x^3$ függvény $[0,1]$ intervallumbeli maximumhelye az $x = \sqrt{1/3}$ pont.

A $\sqrt{2}$-nél kisebb racionális számok halmazának viszont nem létezik legkisebb felső korlátja, elvégre a halmaz tetszőleges felső korlátjához találhatunk egy nála valamivel kisebbet, amely mindazonáltal még mindig nagyobb, mint $\sqrt{2}$. A racionális számok rendezése tehát nem teljes. A valós számokkal más a helyzet: ebben a halmazban minden nemüres, felülről korlátos részhalmaznak van legkisebb felső korlátja.

Az analízis több tételének bizonyítása a valós számok teljességi tulajdonságán alapul. Ilyenek a zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények szélsőértékével kapcsolatos tételek, amelyekről a 4.1. alfejezetben volt szó. Az $y = x - x^3$ függvénynek például van maximuma a $[0,1]$ intervallumon, méghozzá az $1 - 3x^2 = 0$ egyenlet – ebbe az intervallumba eső – megoldása: $x = \sqrt{1/3}$ (l. az F.2. ábrát). Ha csupán a racionális számok körében vizsgálódnánk, arra a következtetésre kellene jutnunk, hogy a függvénynek nincs maximuma, elvégre $\sqrt{1/3}$ irracionális szám. A zárt intervallumon értelmezett folytonos függvényekre vonatkozó szélsőértéktétel a racionális számok halmazán értelmezett függvényekre nem igaz.

Hasonló a helyzet azzal a Bolzano-tétellel is, amely szerint tetszőleges, az $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos f függvény esetén, amennyiben $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor van olyan $x \in [a,b]$, amelynél $f(x) = 0$. A racionális számokon értelmezett folytonos függvényekre ez a tétel sem igaz: az $f(x) = 3x^2 - 1$ függvény esetében például $f(0) = -1$ és $f(1) = 2$, a függvénynek mégsincs racionális zérushelye a $[0,1]$ intervallumban. (A függvény értéke csak az $x = \sqrt{1/3}$ helyen lenne nulla, ez azonban irracionális.)

Azonosítottuk tehát a valós számoknak a tételeink bizonyításához szükséges tulajdonságát, ez azonban még nem minden. A pitagoreusok annak idején egy másik tulajdonsággal próbálkoztak, jelesül azzal, hogy a számegyenes minden pontja két egész szám hányadosának feleltethető meg. A kísérlet kudarcot vallott, amikor kiderült, hogy – például – a $\sqrt{2}$ szám nem racionális. Honnan tudjuk, hogy a teljességi tulajdonsággal nem ez a helyzet? Talán a teljességi tulajdonság is olyan, mint az Escher képein látható, mindvégig fölfelé kanyargó, de a kezdőpontba visszatérő lépcső: a mérnök hamar rájön, hogy nincs olyan struktúra, amely megfelelne a „szemléletes” képnek. Mi biztosítja, hogy a valós számok elméletében nincs valamiféle rejtett ellentmondás?

Ahhoz, hogy a kérdésre megnyugtató választ adhassunk, meg kell konstruálnunk a valós számokat, és igazolni, hogy modellünkben a teljesség mellett az algebrai és a rendezési tulajdonságok is teljesülnek. Az egyik lehetséges konstrukció az, amelyben a valós számokat

$$a, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$$

végtelen tizedes törtekkel reprezentáljuk, ahol a egész szám, a d_i-k pedig 0 és 9 közötti számjegyek. Az ilyen sorozatok között vannak, amelyekben bizonyos jegy után már csupa 0 áll, másokban egy adott szakasz ismétlődik végtelen sokszor, de olyanok is akadnak, amelyek mindenféle szabályszerűséget nélkülöznek. A $2{,}00$, a $0{,}333\ldots$ és a $3{,}1415926535898\ldots$ szimbólumok például jól ismert valós számokat reprezentálnak. A bennük szereplő $\ldots$ mibenlétének precíz meghatározásához a végtelen sorozatok és sorok elméletére van szükségünk. A témával részletesen a 11. fejezetben foglalkozunk; ehelyütt annyit szögezünk le, hogy az $a, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$ végtelen tizedes tört „valójában” az

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \ldots$$

végtelen sor.

A végtelen tizedes törtek elméletében persze nem minden ilyen egyszerű. Igaz ugyan, hogy a rendezési és a teljességi tulajdonságok fennállása könnyen igazolható, a műveletekre vonatkozó azonosságok ellenőrzése azonban meglehetősen nehézkes. Gondoljuk meg: két végtelen sor összeadása vagy szorzása már önmagában végtelen sok művelet elvégzését követeli meg, az osztás értelmezésekor pedig különösen körültekintően kell eljárnunk.

Az első precíz valósszám-konstrukciót (1872-ben) megadó Richard Dedekind (1831–1916) másfajta utat követett. Világos, hogy tetszőleges x valós szám két részre osztja a racionális számokat: az x-nél nem nagyobbak, és az x-nél nagyobbak halmazára. Ezt a megfigyelést zseniálisan megfordítva Dedekind a következő javaslattal állt elő: tekintsük a racionális számok efféle „felszeleteléseit" a valós számoknak. Ez elsőre különösnek tűnhet, a matematikában mindazonáltal gyakoriak az efféle konstrukciók.

Több más megközelítés is létezik, és valamennyi rendelkezik a megkövetelt tulajdonságokkal. Ezután már csupán egyetlen probléma merül fel: ellenőrizni kell, hogy a különböző konstrukciók „lényegében" ugyanazok. Ha ugyanis nem így van, akkor választanunk kellene közülük. Szerencsére nem ez a helyzet: belátható, hogy „lényegében" egyetlen valósszám-struktúra létezik.

A valós számok és a határértékek természetével kapcsolatos zűrzavar az analízis történetének kezdetén meglehetősen sok vitát kavart. Newton, Leibniz és követőik a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

differenciahányados határértéke helyett két „végtelen kicsi" mennyiség hányadosáról beszéltek. Az ilyen – „infinitezimálisnak" nevezett – számokra úgy tekintettek, mint amelyek bármely „normális" számnál kisebbek ugyan, 0-nál azonban mégis nagyobbak. Hasonlóan: az integrálokat

$$f(x) \cdot dx$$

alakú infinitezimális mennyiségek végtelen összegének tekintették. Magát a $\Delta y/\Delta x$ differenciahányadost lényegében úgy értelmezték, ahogy mi, a megfelelő deriváltat azonban nem határértékekként, hanem infinitezimálisok hányadosaként adták meg. A „végtelen kicsi" mennyiségekkel való számolás azonban logikai buktatókat rejt. Ezeket a modern analízis úgy kerüli el, hogy a deriváltat a differenciahányadosok *határértékeként definiálja,* az infinitezimálisokra így nincs is szüksége.

F.4. Komplex számok

A komplex számok $a+ib$ alakú kifejezések, amelyekben a és b valós számok, az i szimbólum pedig $\sqrt{-1}$-et jelöli. A ‘valós’ és ‘képzetes’ szavakhoz fűződő képzettársítások okolhatók azért, hogy $\sqrt{-1}$ némileg hátrányosabb megítélés alá esik, mint – mondjuk – $\sqrt{2}$. Már a valós számok elméletének felépítéséhez is komoly képzelőerőre volt szükség; ebben a fejezetben ennek az útnak a fontosabb állomásait is áttekintjük. A valós számok után következő lépés a komplex számok bevezetése.

Valós számok lépésről lépésre

A számfogalom kialakulásának első lépése az $1, 2, 3, \ldots$ **természetes számok** (pozitív egész számok) használata. Bizonyos aritmetikai műveletek ebben a számkörben is elvégezhetők úgy, hogy az eredményük is természetes szám. A pozitív egész számok köréből sem az összeadás, sem a szorzás nem vezet ki: ha tehát m és n pozitív egész számok, akkor

$$m+n=p \quad \text{és} \quad m \cdot n = q \tag{1}$$

szintén pozitív egészek. Alkalmanként ennél több is igaz: bizonyos m és p számokhoz találhatunk olyan n számot, amelyre $m+n=p$. A $3+n=7$ egyenlet például a természetes számok körében is megoldható. A $7+n=3$ egyenlettel azonban nem ez a helyzet, a megoldáshoz bővítenünk kell a számkört.

Ha a nulla és a negatív számok is rendelkezésünkre állnak, akkor a $7+n=3$ egyenlet is megoldható. A

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

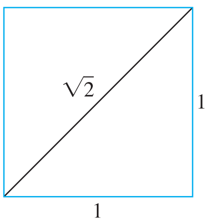
egész számokat használó kultúrákban minden művelt ember meg tudja oldani az $m+n=p$ alakú egyenleteket, akármelyik betűt tekintjük is ismeretlennek.

De hiába ismeri emberünk az egész számok körében az összeadás és a szorzás műveletét, hamar felismeri, hogy az $m \cdot n = p$ alakú egyenleteket néha meg tudja oldani, néha pedig nem. A számok körét az m/n alakú törtekkel kibővítve ezen a nehézségen felül tud kerekedni. A 0 tulajdonságai persze okozhatnak kisebb problémákat, de végül is elegendő, ha csak olyan törtekkel foglalkozik, amelyeknek a nevezője nem nulla. Az így kapott számok – a **racionális számok** – körében már mind a négy alapművelet elvégezhető:

1. (a) összeadás, (b) kivonás,

2. (a) szorzás, (b) osztás.

Egyetlen kivétel: *nullával nem lehet osztani,* a nullával való osztás értelmetlen.



F.3. ÁBRA: Körzővel és vonalzóval könnyen szerkeszthetünk irracionális hosszú szakaszt.

Egységnyi oldalú négyzet könnyen szerkeszthető, a négyzet átlójának hossza Pitagorasz tétele szerint $\sqrt{2}$. Eszerint tehát az

$$x^2 = 2$$

egyenlet szerkesztéssel (F.3. ábra) „megoldható” ugyan, a racionális számok körében azonban nem.

Nincs olyan racionális szám, amelynek négyzete 2. Ha ugyanis lenne ilyen racionális szám, akkor léteznének olyan p és q relatív prím egész számok, amelyekre teljesül

$$p^2 = 2q^2. \tag{3}$$

Mivel p és q egész számok, p-nek párosnak kell lennie (ha p páratlan, akkor a négyzete is az, így nem lehet egyenlő a $2q^2$ páros számmal). Eszerint tehát van olyan p_1, hogy $p = 2p_1$. Ezt a (3) egyenletbe behelyettesítve és 2-vel egyszerűsítve a $2p_1^2 = q^2$ egyenletet kapjuk, ami csak úgy állhat fenn, ha q páros. Ez azonban azt jelenti, hogy p és q egyaránt osztható 2-vel, így nem lehetnek relatív prímek. Az ellentmondás azt mutatja, hogy $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként.

Az $x^2 = 2$ egyenletet ugyan nem tudjuk megoldani a valós számok körében, képezhetünk azonban olyan racionális számokból álló sorozatot, amelyre teljesül, hogy a tagok négyzeteiből alkotott sorozat határértéke 2. Ilyen például az

$$\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \ldots \tag{4}$$

sorozat. A tagok négyzetei:

$$\frac{1}{1}, \frac{49}{25}, \frac{1681}{841}, \frac{57\,121}{28\,561}, \ldots \tag{5}$$

Innen már csupán egyetlen – bár évszázadokig tartó – lépés arra rájönni, hogy a racionális számkör megfelelő bővítéséhez a határérték fogalmára van szükség. Ha elfogadjuk azt a tényt, hogy minden – a (4)-hez hasonlóan – felülről korlátos, monoton növekvő sorozat konvergens (erről részletesen a 11. fejezetben lesz szó), akkor arra kell következtetnünk, hogy van olyan L szám, amely a (4) sorozat határértéke. Mivel azonban a sorozat tagjainak négyzeteiből álló sorozat (5) szerint 2-höz tart, arra jutunk, hogy a (4) sorozat határértéke nem racionális szám. Ha a racionális számok körét kibővítjük a racionális számokból álló, felülről korlátos, monoton növekvő sorozatok határértékeivel, akkor megkapjuk a „valós” számokat: a jelzőt azért tettük idézőjelbe, mert ezek az objektumok semmivel sem inkább és semmivel sem kevésbé „reálisak”, mint bármely más matematikai rendszer elemei.

A komplex számok

A valós számrendszer felépítése során a képzelet háromszor is nagy szerepet kapott; a természetes számok bevezetett rendszerének bővítéséhez háromszor is „fel kellett találni” egy-egy struktúrát.

1. Az egész számok halmazát a természetes számokból;

2. a racionális számok halmazát az egész számokból;

3. a valós számok halmazát pedig a racionális számokból konstruáltuk meg.

A számstruktúrák hierarchiába rendeződnek, a hierarchia magasabb szintjei bizonyos értelemben „magukba foglalják” az alacsonyabb szinteket. Mindegyik rendszer bővebb az előzőnél abban az értelemben, hogy általánosan elvégezhető benne olyan művelet, amely „korábban” csupán megszorításokkal volt értelmezhető.

1. Az egész számok halmazán minden

$$x+a=0 \tag{6}$$

alakú egyenlet megoldható, ahol a tetszőleges egész szám lehet.

2. A racionális számok halmazán minden

$$ax+b=0 \tag{7}$$

alakú egyenlet megoldható, ahol a és b tetszőleges racionális számok lehetnek; az egyetlen kikötés, hogy $a \neq 0$.

3. A valós számok halmazán a (6) és (7) alakú egyenleteken kívül az

$$ax^2+bx+c=0 \tag{8}$$

alakú másodfokú egyenletek is megoldhatók; itt $a \neq 0$, és feltesszük, hogy $b^2-4ac \geq 0$.

Feltehetően az Olvasó is jól ismeri a (8) alakú egyenletek megoldásait megadó

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{9}$$

képletet. Valószínűleg azzal is tisztában van, hogy ha a b^2-4ac diszkrimináns negatív, úgy a (9) képlet nem ad *valós* megoldásokat. Az igen egyszerű

$$x^2+1=0$$

egyenlet megoldásainak nincs helyük a felsorolt három „teremtett” számrendszer egyikében sem.

Szükség van tehát egy *negyedik* számkörre is: ennek elemei az $a+bi$ alakú **komplex számok**. Az i szimbólumra valójában nincs szükségünk, használata kiküszöbölhető, amennyiben a komplex számokat valós számokból alkotott rendezett pároknak tekintjük. Az ilyen számpárok halmazán értelmezünk egy egyenlőségrelációt, összeadást és szorzást a következők szerint. Az $a+bi$ és az (a,b) jelölést egyaránt használni fogjuk, a jelöli az (a,b) komplex szám **valós**, b pedig a **képzetes részét**.

Definícióink a következők:

EGYENLŐSÉG:	$a+ib=c+id$ pontosan akkor, ha $a=c$ és $b=d$.	Az (a,b) és a (c,d) komplex szám egyenlő, ha $a=c$ és $b=d$.
ÖSSZEADÁS:	$(a+ib)+(c+id)=$ $=(a+c)+i(b+d)$.	Az (a,b) és (c,d) komplex számok összege az $(a+c,b+d)$ komplex szám.
SZORZÁS:	$(a+ib)\cdot(c+id)=$ $=(ac-bd)+i(ad+bc)$.	Az (a,b) és (c,d) komplex számok szorzata az $(ac-bd,ad+bc)$ komplex szám.
	$c(a+ib)=ac+i(bc)$.	Az (a,b) komplex számnak a c valós számmal vett szorzata az (ac,bc) komplex szám.

Azok az (a,b) komplex számok, amelyekben $b=0$, minden olyan tulajdonsággal rendelkeznek, amellyel a valós számok is. Az ilyen alakú számok összegét és szorzatát például a következőképpen adhatjuk meg:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),$$
$$(a,0)\cdot(b,0)=(ac,0).$$

A műveletek eredménye tehát újfent olyan szám, amelynek a képzetes része 0. A (c,d) komplex számot az $(a,0)$ ‚valós számmal” megszorozva azt kapjuk, hogy:

$$(a,0)\cdot(c,d)=(ac,ad)=a\cdot(c,d).$$

A $(0,0)$ szám a komplex számok körében ugyanazt a szerepet játssza, mint a 0 *zéruselem* a valós számok között, az $(1,0)$ komplex szám pedig éppen azt tudja, amit az 1 *egység* tud a valós számkörben.

A $(0,1)$ komplex szám figyelemre méltó tulajdonsága, hogy négyzetre emelve olyan komplex számot kapunk, amelynek képzetes része 0, valós része pedig -1:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0).$$

A komplex számok körében tehát van olyan szám ($x=(0,1)$), amelynek négyzetéhez az egységet adva a zéruselemet kapjuk:

$$(0,1)^2+(1,0)=(0,0),$$

az új számkörben tehát az

$$x^2+1=0$$

egyenlet is megoldható.

Az Olvasó feltehetően az $a+ib$ jelölést jobban megszokta, mint a rendezett párokra hivatkozó szimbolizmust. A műveletek algebrai tulajdonságai alapján azonban

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)=a(1,0)+b(0,1)$$

mindig teljesül, az $(1,0)$ komplex szám az egység, a $(0,1)$ komplex szám pedig az egység ellentettjének négyzetgyöke, így $a+ib$ helyébe (a,b)-t is írhatunk, a komplex számok két különböző felírása között tehát mindig szabad az átjárás. A definícióink ráadásul semmiféle előjogokat nem biztosítanak az $(1,0)$ számnak a $(0,1)$ számmal szemben, így egyiket sem kell a másiknál „valóságosabbnak” vagy „kevésbé valóságosnak” tekintenünk. A komplex számokon végzett algebrai műveletek eredménye mindig egyetlen komplex számmal fejezhető ki, elvégre a számításokban megjelenő i^2 helyett mindenütt -1-et írhatunk. Egy régi tilalom továbbra is érvényben marad: a $(0,0)=0+i0$ komplex számmal nem lehet osztani. Ha azonban $a+ib\neq 0$, akkor az osztás már elvégezhető:

$$\frac{c+id}{a+ib}=\frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2}.$$

A hányados tehát egy $x+iy$ komplex szám, amelyben:

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2},$$

és itt $a^2+b^2\neq 0$, elvégre $a+ib=(a,b)\neq(0,0)$.

Az $a-ib$ számot – amely az osztás során segítségünkre volt a nevező „i-telenítésében” – az $a+ib$ komplex szám (**komplex**) **konjugáltjának** nevezzük. A z komplex szám konjugáltját általában $\overline{z}$ jelöli, eszerint tehát ha $z=a+ib$, akkor $\overline{z}=a-ib$.

Amikor tehát a $(c+id)/(a+ib)$ tört számlálóját és nevezőjét is megszorozzuk a nevező komplex konjugáltjával, akkor a nevező képzetes része nullává válik.

1. PÉLDA **Műveletek komplex számokkal.**

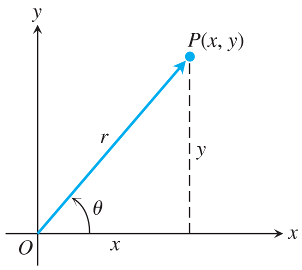
(a) $(2+3i)+(6-2i) = (2+6)+(3-2)i = 8+i$

(b) $(2+3i)-(6-2i) = (2-6)+(3-(-2))i = -4+5i$

(c) $(2+3i)(6-2i) = 2\cdot 6 + 2\cdot(-2i) + 3i\cdot 6 + 3i\cdot(-2i) =$
$= 12-4i+18i-6i^2 = 12+14i+6 = 18+14i$

(d) $\dfrac{2+3i}{6-2i} = \dfrac{2+3i}{6-2i}\cdot\dfrac{6+2i}{6+2i} =$
$= \dfrac{12+4i+18i+6i^2}{36+12i-12i-4i^2} = \dfrac{6+22i}{40} = \dfrac{3}{20}+\dfrac{11}{20}i$ □

Argand-diagramok



F.4. ÁBRA: A $z = x+iy$ komplex szám Argand-diagramja z-nek a $P(x,y)$ pontot vagy az $\overrightarrow{OP}$ vektort felelteti meg.

A $z = x+iy$ komplex számnak két geometriai reprezentációja is van:

1. az xy-sík $P(x,y)$ pontja, valamint
2. az origóból a P pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ vektor.

Az x-tengelyt mindkét esetben **valós**, az y-tengelyt pedig **képzetes tengelynek** nevezzük. A komplex számok geometriai reprezentációit gyakran **Argand-diagram** néven emlegetjük (F.4. ábra).

Az x-et és az y-t az ábrán megadott θ szöggel és az r szakasszal (tehát polárkoordinátákkal) is kifejezhetjük:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

így tehát

$$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{10}$$

Az r számot az $x+iy$ komplex szám **abszolút értékének** nevezzük; r tehát az origóból a $P(x,y)$ pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ vektor hossza. Az abszolút értéket a komplex számok körében is a megszokott függőleges vonalakkal jelöljük; világos, hogy

$$r = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

A z szám „polárkoordinátás” megadásában szereplő θ szöget z **argumentumának** nevezzük, jelölése $\theta = \arg z$. Az argumentum nyilván nem adható meg egyértelműen: ha θ megfelel, akkor megfelel $\theta + k\cdot 2\pi$ is, tetszőleges k egész szám esetén.

A z komplex szám konjugáltja és abszolútértéke között fennáll a következő, gyakran használt összefüggés:

$$z\cdot\overline{z} = |z|^2.$$

Az Euler-formula

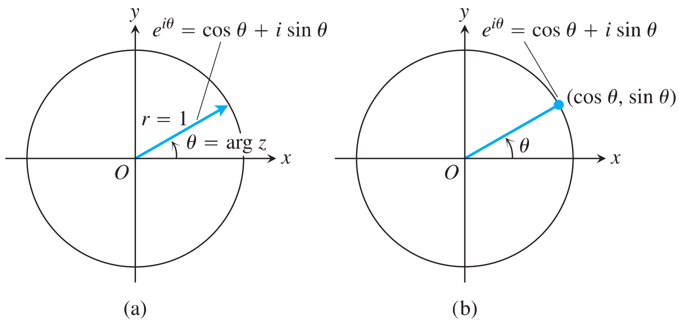
Euler-formulának nevezzük az

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

azonosságot, amelynek alapján a (10) egyenletet

$$z = re^{i\theta}$$

alakba írhatjuk. Az utolsó összefüggésnek a komplex számok szorzatának, hányadosának, hatványainak és gyökeinek kiszámításakor vesszük hasznát. A (10) egyenlet alapján az $e^{i\theta}$ szám Argand-diagramja az x-tengely pozitív irányával θ szöget bezáró egységvektor, amint az F.5. ábrán is látható.



F.5. ÁBRA: Az $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ komplex szám Argand-diagramjai: a számot az ábra (a) részén egy vektor, az ábra (b) részén egy pont reprezentálja.

Szorzás

Két komplex szám szorzásakor az abszolútértékeket összeszorozzuk, az argumentumokat pedig összeadjuk: ha tehát a

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \tag{11}$$

számokra

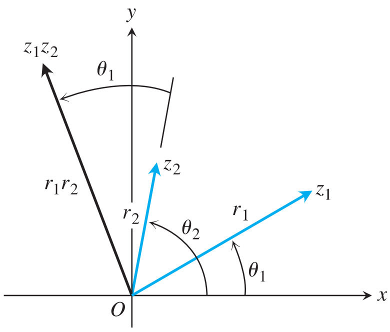
$$|z_1| = r_1, \ \arg z_1 = \theta_1, \ |z_2| = r_2, \ \arg z_1 = \theta_2,$$

akkor

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Vagyis valóban:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned} \tag{12}$$



F.6. ÁBRA: Ha az z_1 és z_2 komplex számok szorzata olyan szám, amelyre: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ és $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Két komplex szám szorzata tehát olyan vektorral reprezentálható, amelynek hossza a számokat reprezentáló vektorok hosszának szorzata, irányszöge pedig a vektorok irányszögeinek összege (l. az F.6. ábrát). A (12) egyenlet szerint az $e^{i\theta}$ számmal való szorzás geometriai szempontból egy origó középpontú, θ szögű, az óramutató járásával ellentétes irányú elforgatásnak felel meg: i-vel szorozva minden vektor 90°-kal, -1-gyel szorozva 180°-kal, $-i$-vel szorozva 270°-kal fordul el stb.

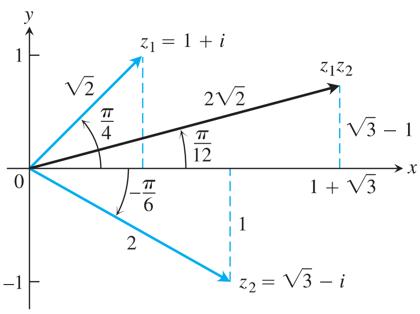
2. PÉLDA Két komplex szám szorzatának meghatározása.
Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = \sqrt{3} - i$. A két szám Argand-diagramjáról (F.7. ábra) kiolvasható, hogy

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/6}.$$

Ekkor:

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{12}\right) =$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \approx 2,73 + 0,73i.$$

Itt $\exp A$ természetesen e^A-t jelöli. □



F.7. ÁBRA: Két komplex számot szorzásakor az abszolútértékeket összeszorozzuk, az argumentumokat pedig összeadjuk.

Osztás

Ha (11)-ben $r_2 \neq 0$, akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Eszerint tehát

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{és} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Komplex számok osztásakor tehát az abszolútértékeket osztjuk, az argumentumokat pedig kivonjuk.

3. PÉLDA

Legyen megint $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = \sqrt{3} - i$ (mint a 2. példában). Ekkor:

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0,707\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \approx$$
$$\approx 0,183 + 0,683i. \qquad \square$$

Hatványozás

Tetszőleges n pozitív egész szám esetén a

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ darab tényező}}$$

szorzat kiszámítására a (12) formulát használjuk. Ha $z = re^{i\theta}$, akkor

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i\overbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}^{n \text{ darab tag}}} = r^n e^{in\theta}, \qquad (13)$$

hatványozáskor tehát az abszolútértéket hatványozzuk, az argumentumot pedig szorozzuk.

A (13) egyenletben r helyébe 1-et írva De Moivre tételét kapjuk:

De Moivre tétele

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (14)$$

Ha a tétel bal oldalán álló hatványt a binomiális tétel szerint kiszámítjuk, akkor az egyenlőség két oldalának valós és képzetes részét egyenlővé téve $\sin n\theta$-t és $\cos n\theta$-t egyaránt felírhatjuk $\sin\theta$ és $\cos\theta$ polinomkifejezéseként.

4. PÉLDA

Ha a (14) egyenletben $n = 3$, akkor

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

Az egyenlet bal oldalán a hatványozást elvégezve a

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

kifejezést kapjuk, amelynek valós része $\cos 3\theta$-val, képzetes része pedig $\sin 3\theta$-val egyenlő:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta. \qquad \square$$

Gyökvonás

Tetszőleges $z = r^{i\theta} \neq 0$ komplex és n pozitív egész szám esetén pontosan n darab $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ olyan komplex szám létezik, amelyek n-edik hatványa éppen z. Valóban, ha $w = \rho e^{i\alpha}$ a $z = re^{i\theta}$ komplex szám n-edik gyöke, akkor

$$w^n = z,$$

másképpen:

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}.$$

Eszerint

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

az r szám közönséges (pozitív) n-edik gyöke. Az argumentumokról mindössze annyit állíthatunk, hogy különbségük a 2π egész számú többszöröse:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Ebből:

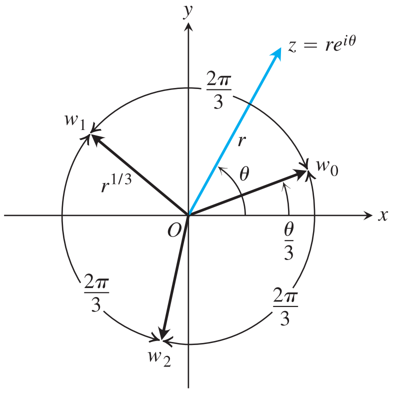
$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n},$$

az $z = re^{i\theta}$ komplex szám n-edik gyökei tehát:

$$\boxed{\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\exp i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \qquad (15)}$$

Az a benyomásunk támadhat, hogy – mivel k lehetséges értékeinek száma végtelen – végtelen sok n-edik gyök létezik. A (15) egyenletben azonban tetszőleges k esetén a k és a $k+n$ egész számoknak ugyanaz a megoldás felel meg, így k helyébe n darab egymás után következő egész számot írva az összes különböző megoldást megkapjuk. A legcélszerűbb általában a következő választás:

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$



F.8. ÁBRA: A $z = re^{i\theta}$ komplex szám három harmadik gyöke.

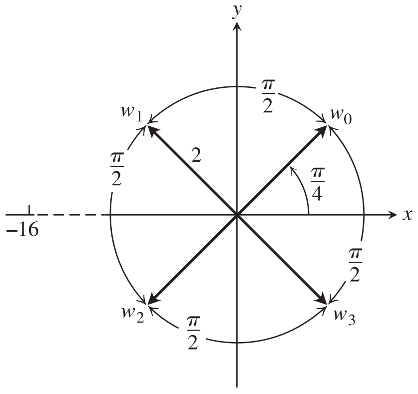
Az $re^{i\theta}$ komplex szám n-edik gyökei tehát mind egy origó középpontú körvonalon helyezkednek el, a kör sugara $\sqrt[n]{r}$, az r szám n-edik (pozitív) valós gyöke. Az egyik n-edik gyök argumentuma $\alpha = \theta/n$; a gyökök egyenletesen oszlanak el e körvonalon, a szomszédosak egy-egy $2\pi/n$ nagyságú középponti szöget határoznak meg. Az F.8. ábrán a $z = re^{i\theta}$ komplex szám, valamint z három darab harmadik gyökének Argand-diagramja látható.

5. PÉLDA Negyedik gyökök.

Adjuk meg a -16 négy negyedik gyökét.

Megoldás. Az F.9. ábra a -16 Argand-diagramját mutatja. A -16 „poláris felbontásában” $r = 16$ és $\theta = \pi$. A $16e^{i\pi}$ szám egyik negyedik gyöke $2e^{i\pi/4}$. A többit úgy kapjuk meg, hogy az első argumentumához egyszer, kétszer, illetve háromszor $2\pi/4 = \pi/2$-t adunk. Végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[4]{16\exp i\pi} = 2\exp i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right),$$



F.9. ÁBRA: A -16 négy negyedik gyöke.

azaz

$$w_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1+i),$$

$$w_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1+i),$$

$$w_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1-i),$$

$$w_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1-i).$$

Az algebra alaptétele

Mit mondhatnánk annak, aki így érvel: szép és jó, most már tudjuk, hogy van $\sqrt{-1}$ is – de hol ér véget a számkör bővítésének folyamata? Vajon új szimbólumot kell majd bevezetnünk a $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$ stb. számokra is? A válasz: nem. Mindkét szám kifejezhető $a+bi$ alakú komplex számokkal. Mi több, az *algebra alaptétele* szerint a komplex számok körében minden polinom-egyenlet megoldható, és minden polinom lineáris faktorok szorzatára bontható.

> 5. TÉTEL **Az algebra alaptétele.**
> A komplex számok körében minden n-ed fokú ($n \geq 1$),
> $$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$
> alakú egyenletnek (amelynek $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ együtthatói komplex számok és $a_n \neq 0$) pontosan n darab gyöke van, amennyiben az m-szeres gyököket m-szer számoljuk.

A tétel bizonyítását bármely, komplex analízissel foglalkozó tankönyvben megtalálhatjuk.

F.3. Feladatok

Műveletek komplex számokkal

1. Szorzás. Határozzuk meg az $(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad+bc)$ számot.

(a) $(2,3)\cdot(4,-2)$

(b) $(2,-1)\cdot(-2,3)$

(c) $(-1,-2)\cdot(2,1)$

[A számítógépek így szoroznak össze komplex számokat.]

2. Oldjuk meg az egyenleteket (x és y valós számok).

(a) $(3+4i)^2 - 2(x-iy) = x+iy$

(b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dfrac{1}{(x+iy)} = 1+i$

(c) $(3-2i)(x+iy) = 2(x-2i)+2i-1$

A komplex számok geometriai ábrázolása

3. Hogyan kaphatjuk meg geometriailag a $z = x+iy$ számból a következő számokat? Illusztráljuk válaszunkat egy ábrával.

(a) $\bar{z}$ **(b)** $\overline{(-z)}$ **(c)** $-z$ **(d)** $1/z$

4. Igazoljuk, hogy a komplex számsíkon a z_1 és z_2 pontok távolsága $|z_1 - z_2|$.

Az 5–10. feladatokban ábrázoljuk a megadott feltételnek megfelelő $z = x+iy$ pontokat.

5. **(a)** $|z| = 2$; **(b)** $|z| < 2$; **(c)** $|z| > 2$

6. $|z-1| = 2$

7. $|z+1| = 1$

8. $|z+1| = |z-1|$

9. $|z+i| = |z-1|$

10. $|z+1| \geq |z|$

A 11–14. feladatokban írjuk fel a megadott komplex számokat $re^{i\theta}$ alakban, ahol $r \geq 0$ és $-\pi < \theta \leq \pi$. Rajzoljunk Argand-diagramot is.

11. $(1+\sqrt{-3})^2$

12. $\dfrac{1+i}{1-i}$

13. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

14. $(2+3i)((1-2i)$

Hatványok és gyökök

De Moivre tétele alapján írjuk fel a megadott trigonometrikus kifejezést $\sin\theta$ és $\cos\theta$ segítségével.

15. $\cos 4\theta$

16. $\sin 4\theta$

17. Határozzuk meg 1 köbgyökeit (három van).

18. Határozzuk meg i négyzetgyökeit (kettő van).

19. Határozzuk meg $-8i$ három köbgyökét.

20. Írjuk fel 64 mind a hat hatodik gyökét.

21. Oldjuk meg a $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ egyenletet (4 megoldása van).

22. Oldjuk meg a $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ egyenletet (6 megoldása van).

23. Oldjuk meg az $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$ egyenletet.

24. Oldjuk meg az $x^4 + 1 = 0$ egyenletet.

További példák és feladatok

25. Komplex számok és síkbeli vektorok. Mutassuk meg, hogy a komplex számsíkon két szám a paralelogrammaszabállyal analóg módon adható össze.

26. Konjugáltak és algebrai műveletek. Igazoljuk, hogy a z_1 és z_2 komplex számok konjugáltjainak összege, szorzata, illetve hányadosa rendre az összegük, szorzatuk, illetve hányadosuk konjugáltjával egyenlő.

27. Konjugáltak és polinomok.

(a) Az előző feladatot általánosítva igazoljuk, hogy tetszőleges valós $a_0, \ldots, a_n$ együtthatójú

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

polinomfüggvény és z komplex szám esetén $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

(b) Igazoljuk, hogy az (a) részben szereplő polinomfüggvényre $f(z) = 0$ valamely z komplex szám esetén, akkor fennáll $f(\bar{z}) = 0$ is. [*Útmutatás:* Legyen $f(z) = u + iv = 0$, ekkor u-nak és v-nek egyaránt nullának kell lennie. Ezután használjuk ki, hogy $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$.]

28. Konjugálás és abszolútérték. Igazoljuk, hogy tetszőleges z komplex szám esetén $|z| = |\bar{z}|$.

29. Hol helyezkedik el a z szám a komplex számsíkon, ha $z = \bar{z}$?

30. Valós és képzetes rész. Jelölje $\operatorname{Re} z$, illetve $\operatorname{Im} z$ a z komplex szám valós, illetve képzetes részét. Igazoljuk, hogy az alábbi összefüggések tetszőleges z, z_1 és z_2 komplex számok esetén fennállnak.

(a) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ **(b)** $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$

(a) $|\operatorname{Re} z| \le |z|$

(b) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$

(c) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

F.5. Algebrai, geometriai és trigonometriai összefüggések

Algebra

Alapműveletek:

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Előjelszabály:

$$-(-a) = a, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Nulla:

A nullával való osztást nem értelmezzük.

$$\text{Ha } a \ne 0, \text{ akkor } \frac{0}{a} = 0,\ \ a^0 = 1,\ \ 0^a = 0.$$

$$\text{Tetszőleges } a \text{ szám esetén: } a\cdot 0 = 0\cdot a = 0.$$

Hatványozás:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (ab)^m = a^m b^m, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Amennyiben pedig $a \ne 0$, úgy

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Binomiális tétel:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Speciális esetek:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Azonos kitevőjű hatványok különbsége:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Speciális esetek:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b),\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2),\\
a^4 - b^4 &= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).
\end{aligned}$$

Teljes négyzetté alakítás:

Ha $a \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=\\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=\\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+a\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=\\
&= a\cdot\underbrace{\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=u^2}+\underbrace{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}_{v}=\\
&= au^2+v.
\end{aligned}$$

Másodfokú egyenlet megoldóképlete:

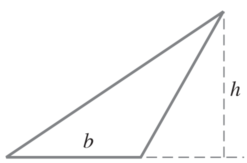
Ha $ax^2+bx+c=0$ (és $a \neq 0$), akkor

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Geometria

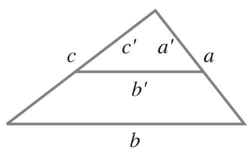
A területet A, a térfogatot V, az alap területét B, a kerületet C, a palást területét, illetve a felszínt S jelöli.

Háromszög:



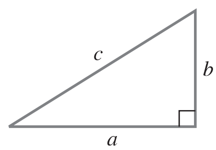
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Hasonló háromszögek:



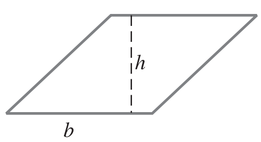
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Pitagorasz tétele:



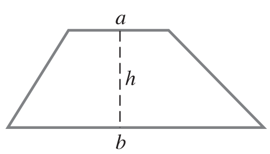
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Paralelogramma:



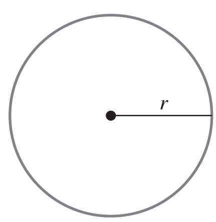
$$A = bh$$

Trapéz:



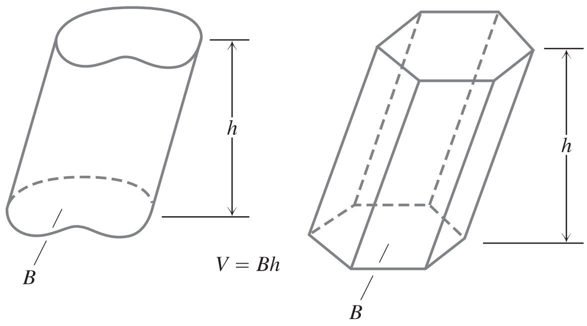
$$A = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Kör:



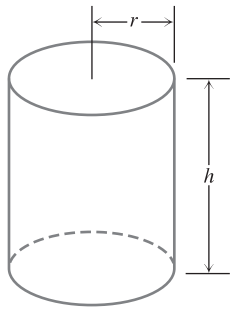
$$A = \pi r^2,\quad C = 2\pi r$$

Ferde hasáb és henger:



$V = Bh$

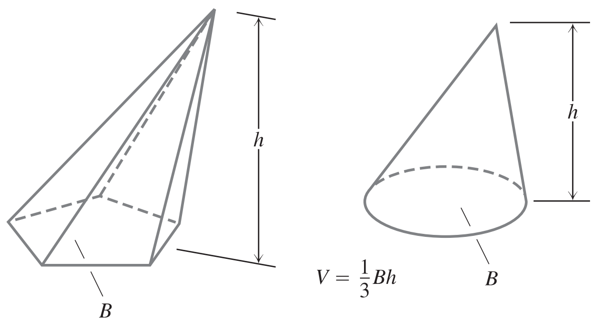
Egyenes körhenger:



$V = \pi r^2 h$

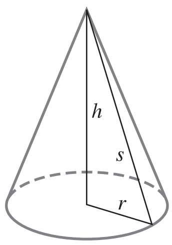
$S = 2\pi rh =$ Area of side

Ferde kúp és gúla:



$V = \frac{1}{3}Bh$

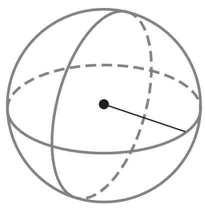
Egyenes körkúp:



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S = \pi rs =$ a palást területe

Gömb:



$V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ S = 4\pi r^2$

Trigonometria

Definíciók és alapvető azonosságok:

szinusz: $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\csc\theta}$

koszinusz: $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sec\theta}$

tangens: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\theta}$

Azonosságok:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^\theta = 1$$

$$\sec^2\theta = 1 + \mathrm{tg}^2\theta$$

$$\csc^2\theta = 1 + \mathrm{ctg}^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\mathrm{tg}\,(A+B) = \frac{\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B}{1 - \mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B}$$

$$\mathrm{tg}\,(A-B) = \frac{\mathrm{tg}\,A - \mathrm{tg}\,B}{1 + \mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B}$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A$$

$$\cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A$$

$$\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A-B) + \frac{1}{2}\sin(A+B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

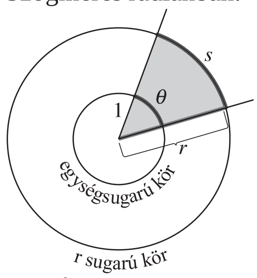
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

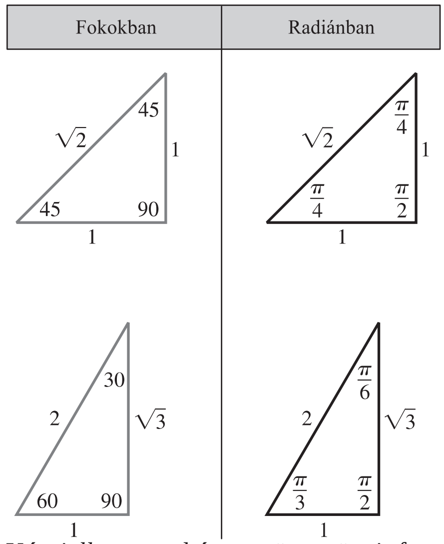
Trigonometrikus függvények:

Szögmérés radiánban:

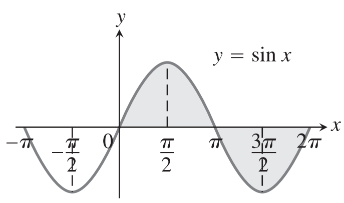


$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \text{ vagy } \theta = \frac{s}{r}.$$

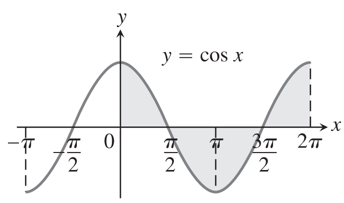
Átszámítás: 180° = π radián.



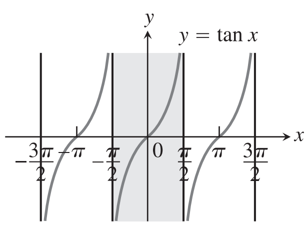
Két *jellegzetes* háromszög szögei fokokban és radiánban.



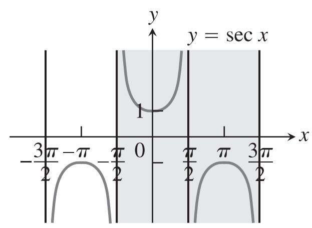
Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$
Értékkészlet: $[-1, 1]$



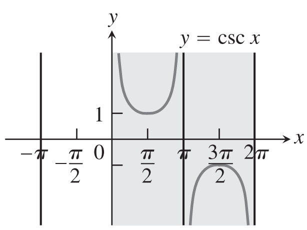
Értelmezési tartomány: $(-\infty, \infty)$
Értékkészlet: $[-1, 1]$



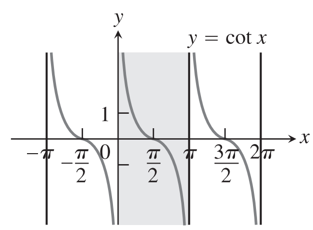
Értelmezési tartomány: Minden valós szám, kivéve $\pi/2$ páratlan számú többszörösei
Értékkészlet: $(-\infty, \infty)$



Értelmezési tartomány: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Értékkészlet: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Értelmezési tartomány: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Értékkészlet: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Értelmezési tartomány: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Értékkészlet: $(-\infty, \infty)$