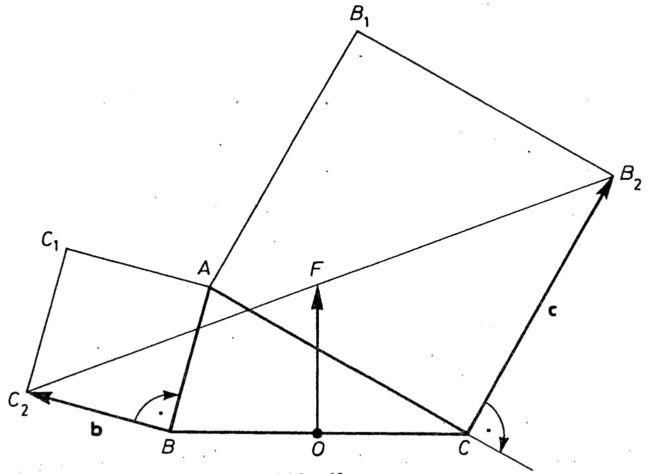
# XIII. Függelék

E könyv egyes fejezeteiben kitűzött feladatok közül néhánynak tematikus megoldását adjuk.

Az itt közölt megoldások az alkalmazott ismeretek vagy módszerek használhatóságát, hatékonyságát kísérlik meg bemutatni.

## I. fejezet 26. feladat:

Jelölje $O$ a $BC$, $F$ pedig a $B_2C_2$ szakasz felezőpontját, továbbá $\overrightarrow{BC_2}$-t $\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CB_2}$-t $\mathbf{c}$ *(113. ábra)*.




*113. ábra*

Az I.23. feladatból is tudhatjuk, hogy

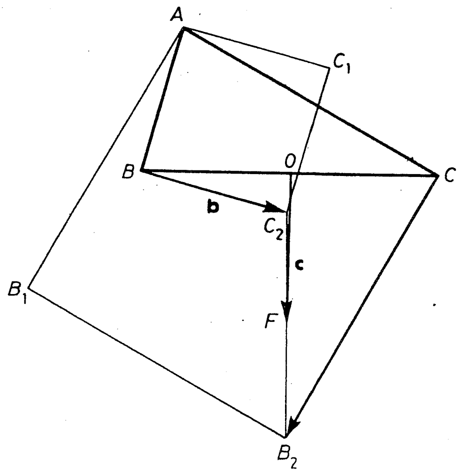
$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

Ha most a **b** és a **c** vektorokat $-90°$-kal elforgatjuk, akkor a **b** transzformáltja a $\overrightarrow{BA}$, míg a **c** elforgatottja az $\overrightarrow{AC}$-vel egyenlő vektor lesz. Ennélfogva az $\overrightarrow{OF}$ elforgatottja – összetevői transzformáltjának eredőjeként – az

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO}.$$

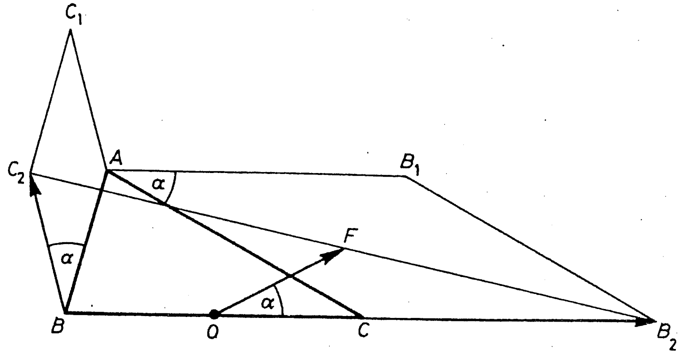
Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{OF}$ merőleges az $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BO}$ vektorokra és ezekkel egyenlő hosszú, azaz $F$ a $BC$ átmérőjű körön van, sőt a $BC$ félkört $F$ felezi is.

Ha a négyzetek mindegyikét befelé írjuk *(114. ábra)*, úgy fenti megoldásunkat csak annyiban kell módosítanunk, hogy most $+90°$-kal fogjuk a **b** és a **c** vektorokat elforgatni. Ennek következtében a $B_2C_2$ szakasz $F$ felezőpontja az előbbi $F$ ponttal körünknek egy, a $BC$-re merőleges átmérőjét adja.




*114. ábra*

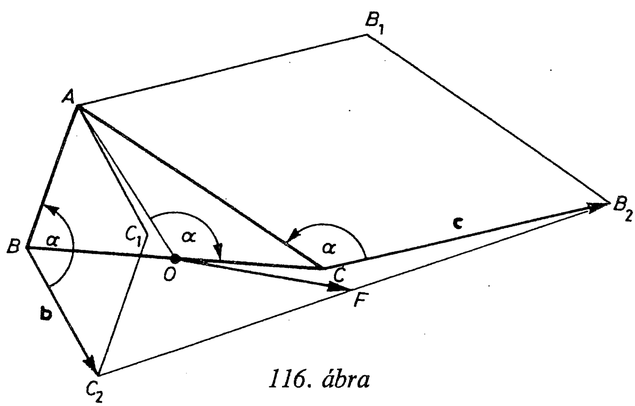
Eredeti állításunk igaz marad akkor is, ha az $AB$ és $AC$ oldalakra (kifelé vagy befelé) egymáshoz hasonló rombuszokat írunk a *115. ábra* szerint. Most természetesen $-\alpha$, illetve $+\alpha$ szöggel kell a **b** és a **c** vektorokat elforgatnunk. Ha az $\alpha$ a 0 és a $\pi$ közötti valamennyi értéket felveszi, akkor az $F$ pontok mértani helye a $BC$ átmérőjű kör, az átmérő végpontjait kivéve.




*115. ábra*

Ha a *116. ábra* szerint az $ABC_\triangle$ $AC$ oldalára kifelé, az $AB$ oldalára pedig befelé írjuk az egymáshoz hasonló rombuszokat, akkor a $B_2C_2$ szakasz $F$ felezőpontja az $O$ középű, $OA$ sugarú körön van, hiszen

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$




*116. ábra*

most is áll, és a $\overrightarrow{BC_2}$, illetve $\overrightarrow{CB_2}$ vektorokat $\alpha$ szöggel elforgatva a $\overrightarrow{BA}$, illetve a $\overrightarrow{CA}$ vektorokat nyerjük, ám ezek eredőjének a fele éppen az $\overrightarrow{OA}$.

## I. fejezet 35. feladat:

A pontok számára vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk az állítás helyességét.

Az $n=1$-re az $O$ pont legyen az $A_1$ ponttal azonos, így

$$\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{0}.$$

Tegyük fel, hogy rögzített $n$ ($\geqq 1$)-re igaz az állítás, vagyis bármely $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ $n$ elemű ponthalmazhoz található volt oly $O$ pont, amelyre

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0} \tag{1}$$

teljesül.

Tekintsük az $n+1$ elemű tetszőleges $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}\}$ ponthalmazt. Ennek $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ részhalmazához – az indukciós feltevés szerint – található oly $O$ pont, hogy az (1) fennáll, és így

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA}_{n+1} = \overrightarrow{OA}_{n+1}$$

is.

Osszuk fel az $OA_{n+1}$ szakaszt $n+1$ egyenlő részre, és jelölje $P$ az $O$ ponthoz legközelebbi osztópontot, amelyre tehát

$$OP : PA_{n+1} = 1 : n$$

*(117. ábra)*.

Ezzel egyenértékű az

$$n\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PA}_{n+1} \tag{2}$$

egyenlőség. Az így megválasztott $P$ pontra

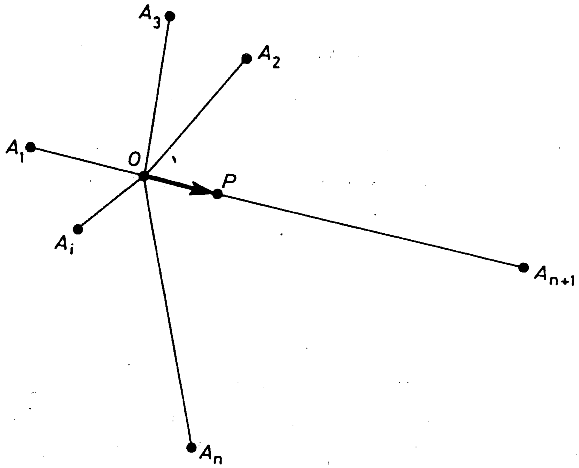
$$\overrightarrow{PA_i} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_i},$$

és emiatt

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overrightarrow{PA_i} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_i}) + \overrightarrow{PA}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PO} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{PA}_{n+1} =$$

$$= n\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PA}_{n+1} = \mathbf{0}$$

az (1) és a (2) okán.




*117. ábra*

*Megjegyzés:* A VIII. fejezet 8.2 szakaszában definiálni fogjuk egy ponthalmaz súlypontját. Eszerint előbbi feladatunk $O$ pontja az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ponthalmaz (egyetlen) súlypontja.

## II. fejezet 10. feladat:

Az $ABCDEF$ hatszög átellenes $AB$, $DE$, továbbá $BC$, $EF$ és $CD$, $FA$ oldalpárjainak felezőpontjai legyenek rendre $F_1$, $F_2$, $G_1$, $G_2$, $H_1$, $H_2$ *(118. ábra)*. Jelölje még az $\overrightarrow{AC}$-t $\mathbf{a}$, a $\overrightarrow{BD}$-t $\mathbf{b}$, így ezekkel $\overrightarrow{CE} = \alpha\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{FB} = \beta\mathbf{b}$ a párhuzamosság miatt. ($\alpha \neq -1$ és $\beta \neq -1$ a hatszög csúcsainak különbözősége miatt.)

Az I.23. feladatból is tudvalevően

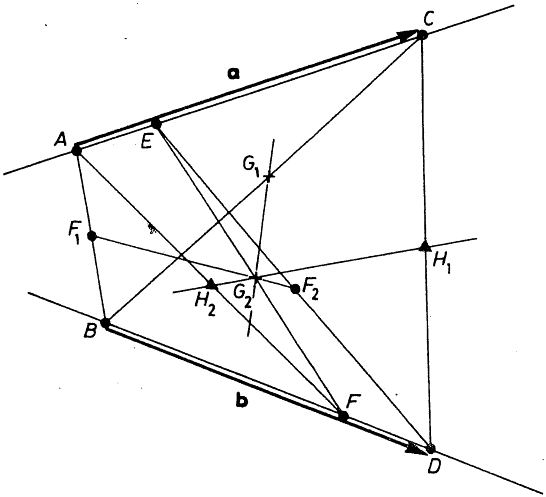
$$(1)\ \overrightarrow{F_1F_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE})+\overrightarrow{BD}] = \frac{1}{2}[(1+\alpha)\mathbf{a}+\mathbf{b}],$$

$$(2)\ \overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}) = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{a}-\beta\mathbf{b})$$

és

$$(3)\ \overrightarrow{H_1H_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DF}) = \frac{1}{2}[-\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF})] =$$

$$= \frac{1}{2}[-\mathbf{a}+(-1-\beta)\mathbf{b}] = -\frac{1}{2}[\mathbf{a}+(1+\beta)\mathbf{b}].$$




*118. ábra*

Mivel – fentiek szerint – $\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{G_1G_2}$, ezért ha ezek között van két párhuzamos, akkor a harmadik is párhuzamos ezekkel. Ez az eset pontosan akkor következik be, ha

$$\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}$$

vagy $$(1+\alpha):1 = \alpha:(-\beta),$$
azaz, ha
$$\alpha+\beta+\alpha\beta = 0$$
vagy a vele ekvivalens
$$(\alpha+1)(\beta+1) = 1$$
fennáll.

A továbbiakban feltesszük, hogy e két lehetőség egyike sem áll fenn.

Jelölje ekkor $P$ az $F_1F_2$ és $G_1G_2$ egyenesek közös pontját. Legyen $\lambda$ és $\mu$ oly valós szám, amelyekre (1) miatt

(4) $$\overrightarrow{F_1P} = \lambda\overrightarrow{F_1F_2} = \frac{\lambda}{2}[(1+\alpha)\mathbf{a}+\mathbf{b}]$$

és (2) miatt

(5) $$\overrightarrow{G_1P} = \mu\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{\mu}{2}(\alpha\mathbf{a}-\beta\mathbf{b}).$$

Ilyen $\lambda$, $\mu$ számok vannak, hiszen $\overrightarrow{F_1F_2}\,||\,\overrightarrow{F_1P}$ és $\overrightarrow{G_1G_2}\,||\,\overrightarrow{G_1P}$ továbbá sem $\overrightarrow{F_1F_2}$, sem pedig $\overrightarrow{G_1G_2}$ nem a nullvektor, különben $\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}$ lenne, feltételeinkkel ellentétben.

Ha belátjuk, hogy $\overrightarrow{H_1P}\,||\,\overrightarrow{H_1H_2}$, akkor ezzel igazoltuk a feladat állításának helyességét is.

A $\overrightarrow{H_1P}$ vektort kétféleképpen fogjuk előállítani a nem párhuzamos $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Egyrészt, alkalmazva (4)-et is

(6) $$\overrightarrow{H_1P} = \overrightarrow{H_1F_1}+\overrightarrow{F_1P} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA})+\frac{\lambda}{2}(1+\alpha)\mathbf{a}+\frac{\lambda}{2}\mathbf{b} =$$
$$= \frac{1}{2}(-\mathbf{b})+\frac{1}{2}(-\mathbf{a})+\frac{\lambda(1+\alpha)}{2}\mathbf{a}+\frac{\lambda}{2}\mathbf{b} =$$
$$= \frac{\lambda(1+\alpha)-1}{2}\mathbf{a}+\frac{\lambda-1}{2}\mathbf{b}.$$

Másrészt, felhasználva az (5)-öt is

$$\text{(7)} \qquad \overrightarrow{H_1P} = \overrightarrow{H_1G_1} + \overrightarrow{G_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{\mu}{2}(\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{\alpha\mu}{2}\mathbf{a} - \frac{\beta\mu}{2}\mathbf{b} =$$

$$= \frac{\alpha\mu}{2}\mathbf{a} + \frac{-1-\beta\mu}{2}\mathbf{b}.$$

Mivel $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, ezért az **a**-nak és a **b**-nek a (6)-beli, illetve a (7)-beli együtthatói egyenlők kell legyenek, azaz

$$\text{(8)} \qquad \lambda(1+\alpha) - 1 = \alpha\mu \quad \text{és} \quad \lambda - 1 = -1 - \beta\mu$$

egyszerre kell teljesüljön. Ezekből, az $\alpha\beta + \alpha + \beta \neq 0$ feltevést is felhasználva

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta} \quad \text{és} \quad \mu = \frac{-1}{\alpha\beta + \alpha + \beta}$$

adódik, tehát a (7) szerint

$$\overrightarrow{H_1P} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+\beta}\mathbf{a} + \left(-1 + \frac{\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta}\right)\mathbf{b}\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+\beta}\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{a} + (1+\beta)\mathbf{b})\right] = k\overrightarrow{H_1H_2},$$

a (3) miatt, és így

$$\overrightarrow{H_1P} \parallel \overrightarrow{H_1H_2},$$

vagyis $P$ rajta van a $H_1H_2$ egyenesen is.

# III. fejezet 13. *h)* feladat:

Legyen

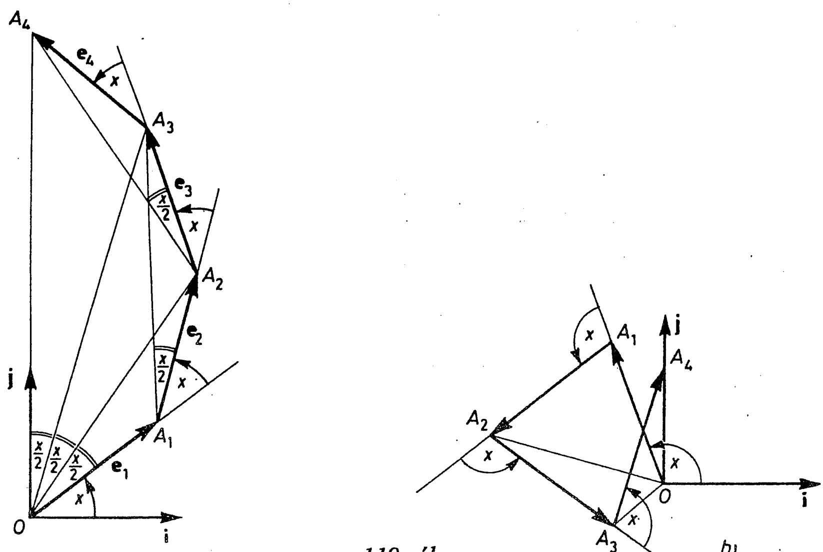
$$\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{e}_1\,(\cos x;\, \sin x),$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{e}_2\,(\cos 2x;\, \sin 2x),$$
$$\overrightarrow{A_2A_3} = \mathbf{e}_3\,(\cos 3x;\, \sin 3x),$$
$$\overrightarrow{A_3A_4} = \mathbf{e}_4\,(\cos 4x;\, \sin 4x).$$

Ezeket egymáshoz fűzve *(119. ábra)* az

(1) $$\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4 =$$

$$= \overrightarrow{OA_4}(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x;\ \sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x).$$

Az $|x| \leqq \pi$ feltehető a koszinuszfüggvény $2\pi$-ben való periódusossága miatt.
Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorokat úgy vettük fel, hogy az $\mathbf{i}$ vektort az $x$-szel elforgatva $\mathbf{e}_1$-et kapjuk. E választással az $\mathbf{i}$-nek $2x$-szel, $3x$-szel, illetve $4x$-szel való elforgatottjai rendre az $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, illetve $\mathbf{e}_4$, más




*119. ábra*

szóval az $\overrightarrow{OA_1}$-nek $x$-szel történő elforgatása az $\overrightarrow{A_1A_2}$-t, az $\overrightarrow{A_1A_2}$-nek $x$-szel való elforgatása az $\overrightarrow{A_2A_3}$ vektort, végül ennek ugyanilyen forgatottja az $\overrightarrow{A_3A_4}$-et adja.
Az (esetleg elfajuló) $OA_1A_2$, $A_1A_2A_3$ és $A_2A_3A_4$ háromszögek egyenlő szárúsága és egybevágósága miatt

$$\overrightarrow{OA_2} \quad \text{irányszöge} \quad \frac{3x}{2},$$

$$\overrightarrow{OA_3} \quad \text{irányszöge} \quad 2x$$

és

$$\overrightarrow{OA_4} \quad \text{irányszöge} \quad \frac{5x}{2},$$

ennélfogva

$$\overrightarrow{OA_4} = \left(|\overrightarrow{OA_4}| \cos\frac{5x}{2}\,;\,|\overrightarrow{OA_4}| \sin\frac{5x}{2}\right).$$

Az (1) miatt egyrészt

$$|\overrightarrow{OA_4}| \cos\frac{5x}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x,$$

másrészt feladatunk szerint

$$|\overrightarrow{OA_4}| \cos\frac{5x}{2} = 0,$$

ami akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\cos\frac{5x}{2} = 0,$$

azaz

$$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

vagyis

$$x = \frac{\pi}{5}(2k+1) \qquad (k \text{ egész}),$$

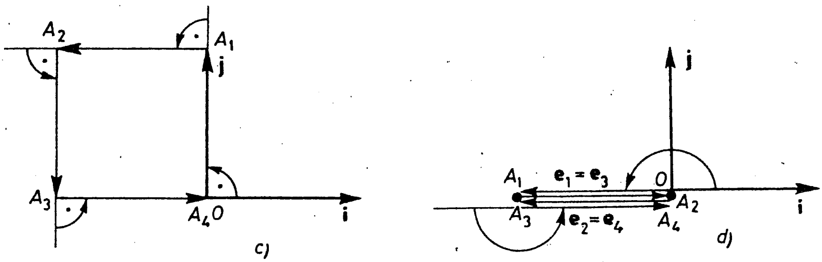
vagy ha

$$|\overrightarrow{OA_4}| = 0,$$

ami csak akkor teljesülhet, ha

$$x = \frac{\pi}{2}(2k+1) \qquad \text{vagy} \qquad x = \pi(2k+1),$$

hiszen az (esetleg szakasszá fajuló) $A_1A_2A_3A_4$ rombusz $A_1$, $A_2$ és $A_3$ csúcsoknál lévő külső szögei ezekkel egyenlők *(119. c) és d) ábrák)*.




*119. ábra*

## III. fejezet 24. feladat:

A szinusz-, illetve a koszinuszfüggvények $2\pi$ periódusúak, így nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy

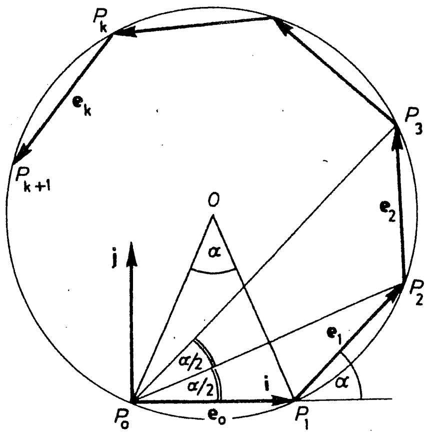
$$0 < |\alpha| < \pi.$$

Az irányított síkban tekintsük az $O$ közepű kör egymáshoz csatlakozó $P_0P_1$, $P_1P_2$, ..., $P_nP_{n+1}$ íveit, melyekhez tartozó középponti szög (előjeles mértéke) $\alpha$. Válasszuk a $P_0P_1$ húr hosszát egységnyinek, és tekintsük a

$$\overrightarrow{P_kP_{k+1}} = \mathbf{e}_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

egységvektorokat *(120. ábra)*. Ha az **i**, **j** alapvektorokat úgy választjuk meg, hogy $\mathbf{i}=\mathbf{e}_0$ legyen, akkor $\mathbf{e}_k$ irányszöge $k\alpha$ lévén,

$$\mathbf{e}_k\,(\cos k\alpha;\, \sin k\alpha),$$




*120. ábra*

tehát

$$\text{(1)}\qquad \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}_k = \overrightarrow{P_0P_{n+1}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha;\ \sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha\right).$$

A $\overrightarrow{P_0P_{n+1}}$ irányszöge $\dfrac{\alpha}{2}n$, hiszen a $P_kP_0P_{k+1}\sphericalangle$ a $P_kP_{k+1}$ ívhez tartozó kerületi szög a $P_0P_1$ ívhez tartozó $\alpha$ középponti szög fele, és $\overrightarrow{P_0P_k}$ vektort ugyanolyan irányú (abszolútértékben $\pi$-nél kisebb) forgatás viszi a $\overrightarrow{P_0P_{k+1}}$ vektorba, mint az $\mathbf{e}_k$ vektort az $\mathbf{e}_{k+1}$ vektorba. Így

$$\text{(2)}\qquad \overrightarrow{P_0P_{n+1}}\left(|\overrightarrow{P_0P_{n+1}}|\cos\frac{\alpha}{2}n;\ |\overrightarrow{P_0P_{n+1}}|\sin\frac{\alpha}{2}n\right).$$

A $P_0P_1P_{n+1}$ (esetleg elfajuló) háromszögben a szinusztétel miatt

$$\text{(3)}\qquad |\overrightarrow{P_0P_{n+1}}| : |\overrightarrow{P_0P_1}| = \sin(n+1)\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\alpha}{2},$$

mivel a $P_0P_1\ldots P_{n+1}$ ívhez $(n+1)\alpha$ mértékű középponti szög tartozik, és ezért a $P_1$ pontot nem tartalmazó $P_0P_{n+1}$ ívhez tartozó kerületi szög az előbbi felének kiegészítő szöge, aminek szinusza ugyanakkora, mint az $(n+1)\dfrac{\alpha}{2}$-nek.

Meg kell vizsgáljuk azt az esetet is, amikor előbbi háromszögünk elfajuló. Ez csak a $P_{n+1}$ és a $P_0$ pontok egybeesése, azaz $(n+1)\alpha = 2\pi k$ fennforgásával lehetséges, de a (3) így is helyes aránypárt ad.

Ezzel $|\overrightarrow{P_0P_1}| = 1$ miatt $|\overrightarrow{P_0P_{n+1}}| = \dfrac{\sin (n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, tehát (2)-ből

$$\text{(4)}\qquad \overrightarrow{P_0P_{n+1}}\left(\frac{\sin (n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cos n\frac{\alpha}{2};\ \frac{\sin (n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\sin n\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ám a $\overrightarrow{P_0P_{n+1}}$ vektor egyértelműen határozza meg az **i**, **j** bázisban koordinátáit, ezért az (1) és a (4) egybevetésével

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin (n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}n,$$

és $\sin 0 = 0$ miatt

$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha = \sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha = \frac{\sin (n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\sin n\frac{\alpha}{2}.$$

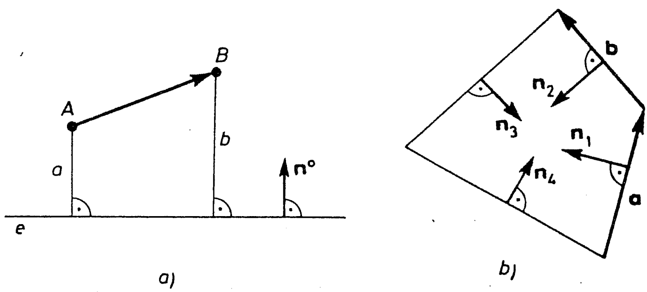
# IV. fejezet 4. feladat:

Nyilvánvaló, hogy beszélhetünk a csúcsoknak mind a négy oldalegyenestől mért távolságösszegéről, hiszen a csúcs távolsága a rá illeszkedő oldalegyenestől nulla.

Felhasználjuk, hogy az $\overrightarrow{AB}$ kezdő- és végpontjának egy egyenestől mért (előjeles) távolságainak $b-a$ különbsége *(121. a) ábra)*

(1) $$\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}^0,$$

ahol $\mathbf{n}^0$ az egyenesre merőleges egységvektor. Az (1) nem más, mint az $\overrightarrow{AB}$-nak a $\mathbf{n}^0$ vektorral párhuzamos összetevőjének (előjeles) hossza.




*121. ábra*

Legyenek $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ és $\mathbf{n}_4$ a feladatbeli négyszög oldalaira merőleges, a négyszög belseje felé mutató egységvektorok *(121. b) ábra)*, továbbá $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a négyszög két egymáshoz csatlakozó oldalvektora. Mivel az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ mindkét végpontjára – feltételünk szerint – a távolságösszeg ugyanakkora, e két-két összeg különbsége 0, azaz

$$\mathbf{a}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4) = 0$$

és

$$\mathbf{b}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4) = 0,$$

tehát a nem párhuzamos $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ mindegyike merőleges az $\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4$ vektorra, és ez csak úgy lehetséges, ha

(2) $$\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4 = \mathbf{0}.$$

Mivel e vektorok egyenlő hosszúak, így egymáshoz fűzve (2) miatt zárt négyszöget, mégpedig rombuszt kapunk. A rombusz szemköztes oldalai párhuzamosak, így az eredeti négyszög rájuk merőleges, szemköztes oldalai is párhuzamosak, tehát a négyszög csak paralelogramma lehet.

Az ilyen négyszögeknek pedig nyilvánvalóan megvan a feladatbeli tulajdonsága.

A fenti megoldás mintájára azt is beláthatjuk, hogy ha egy konvex $n$-szög három csúcsának az oldalegyenesektől való távolságösszege ugyanakkora, akkor minden csúcsra ugyanakkora, sőt az $n$-szög minden pontjára is. Azt is beláthatjuk, hogy egy ilyen $n$-szög oldalai egy egyenlő oldalú konvex $n$-szög oldalaira rendre merőlegesek.

## IV. fejezet 15. feladat:

*a)* Tekintsük az $\mathbf{a}(x;\, 1)$ és $\mathbf{b}(\sqrt{1-x};\, \sqrt{3+x})$ vektorokat. Ezek skaláris szorzata e művelet definíciója miatt

(1) $$\mathbf{ab} = x\sqrt{1-x}+\sqrt{3+x} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) =$$

$$= \sqrt{x^2+1}\sqrt{(\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{3+x})^2}\cos(\mathbf{a};\mathbf{b}) =$$

$$= 2\sqrt{x^2+1}\cos(\mathbf{a};\mathbf{b}).$$

Ha fenti egyenlőségünket az adott egyenlettel egybevetjük, úgy

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$$

következik, vagyis az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyező irányúak. Mivel $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, ezért van oly $\lambda$ pozitív valós szám, hogy

(2) $$\sqrt{1-x} = \lambda x$$

és

(3) $$\sqrt{3+x} = \lambda$$

teljesül.

Egyenletünkben szereplő kifejezések értelmezési tartománya

$$-3 \leqq x \leqq 1,$$

a (2) miatt még

$$0 \leqq x$$

is fenn kell álljon. Így a (2) és a (3) egyenletekből nyert

$$\sqrt{1-x} = x\sqrt{3+x} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

egyenletekkel ekvivalens a négyzetre emeléssel nyert

$$1-x = x^2(3+x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

egyenlet.

Ebből rendezéssel az

$$x^3+3x^2+x-1 = 0$$

egyenlet adódik, aminek bal oldala szorzattá bontható ($x=-1$ kielégíti ezt az egyenletet):

$$(x+1)(x^2+2x-1) = 0.$$

Ennek gyökei:

$$x_1=-1, \quad x_2 = -\sqrt{2}-1 \quad \text{és} \quad x_3 = \sqrt{2}-1.$$

Ezek közül a $0 \leqq x \leqq 1$ feltételnek csak az $x_3$ tesz eleget, ami valóban megoldása egyenletünknek.

*b)* Legyenek

$$\mathbf{e}\,(\cos x; \sin x),$$

$$\mathbf{a}\,(\sin 7x; \cos 5x).$$

Ezek skaláris szorzatára:

$$(4) \quad \cos x \sin 7x+\cos 5x \sin x = \sqrt{\sin^2 7x+\cos^2 5x}\cos(\mathbf{e}, \mathbf{a}) = \sqrt{2}$$

áll fenn a skaláris szorzat definíciója és egyenletünk feltétele miatt.

Mivel

$$(5) \qquad 0 \leqq \sin^2 7x \leqq 1,$$

(6) $$0 \leqq \cos^2 5x \leqq 1$$

és

(7) $$\cos(\mathbf{e}, \mathbf{a}) \leqq 1,$$

ezért

(8) $$\sqrt{\sin^2 7x + \cos^2 5x} \cos(\mathbf{e}, \mathbf{a}) \leqq \sqrt{2},$$

így a (4) csak úgy állhat fenn, ha (5), (6) és (7) mindegyikében az egyenlőség áll, ha tehát

(9) $$\sin^2 7x = 1,$$

(10) $$\cos^2 5x = 1,$$

továbbá

$$\mathbf{e} \uparrow\uparrow \mathbf{a},$$

azaz van oly pozitív $\lambda$ valós szám, hogy

(11) $$\lambda \cos x = \sin 7x$$

és

(12) $$\lambda \sin x = \cos 5x$$

is teljesül.

A (9) és a (10) csak akkor áll, ha

$$7x = \frac{\pi}{2}(2k+1), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

és

$$5x = \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

egyszerre teljesül, azaz ha

$$\frac{5\pi}{2}(2k+1) = 7\pi n,$$

ami a

$$10k+5 = 14n$$

egyenlettel ekvivalens. Ennek nincs $k$ és $n$ egészre megoldása, hiszen a bal oldalon páratlan, a jobb oldalon páros szám áll.

Egyenletünknek tehát nincs megoldása.

## V. fejezet 12. feladat:

Elég azt igazolnunk a *122. ábra* jelöléseivel élve, hogy $\overrightarrow{OF} \| \overrightarrow{OG}$, azaz $\overrightarrow{OF} \times \overrightarrow{OG} = \mathbf{0}$.

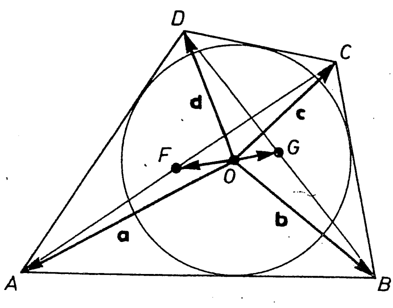
A négyszög csúcsainak betűzését válasszuk meg úgy, hogy az $O$ pontból nézve az $ABCD$ körüljárás pozitív legyen. Az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$ vektorok bevezetésével az

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}, \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2},$$

vagyis az

$$(1) \qquad \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} \times \frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

teljesülését elég igazolnunk.




*122. ábra*

Az
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{d} = \mathbf{t}_1$$
összegben az $AOB$ és a $COD$ háromszögek kétszeres területvektorait találjuk, míg az
$$\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{c}\times\mathbf{b} = \mathbf{t}_2$$
eredőben az összetevők az $AOD$ és a $COB$ háromszögek kétszeres területvektorai.

A
$$|\mathbf{t}_1| = |\mathbf{t}_2|,$$
hiszen az érintőnégyszög szemköztes oldalainak összege egyenlő, ugyanakkor a $\mathbf{t}_1$ és a $\mathbf{t}_2$ ellentétes irányúak, mivel az $ABCD$ körüljárás megválasztásával az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ egyező irányú vektorokkal ellentétes irányúak az $\mathbf{a}\times\mathbf{d}$ és a $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$, mivel az $\mathbf{a}$-t a $\mathbf{b}$-be és $\mathbf{c}$-t a $\mathbf{d}$-be vivő 180°-nál kisebb forgatás az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, illetve a $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ irányából nézve látszik pozitívnak, míg $\mathbf{a}$-t a $\mathbf{d}$-be és a $\mathbf{c}$-t a $\mathbf{b}$-be vivő 180°-nál kisebb forgatás az előbbi irányokból nézve negatívnak látszik. Ezzel
$$\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2 = \mathbf{0},$$
vagyis (1) fennáll, igaz tehát a feladat állítása.

## V. fejezet 20. feladat:

Tekintsük az
$$\mathbf{u}(a;\, b;\, c)$$
és a
$$\mathbf{v}(x;\, y;\, z)$$
vektorokat. Mivel
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}(bz-cy;\, cx-az;\, ay-bx),$$
ezért egyenletünk az

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u}$$

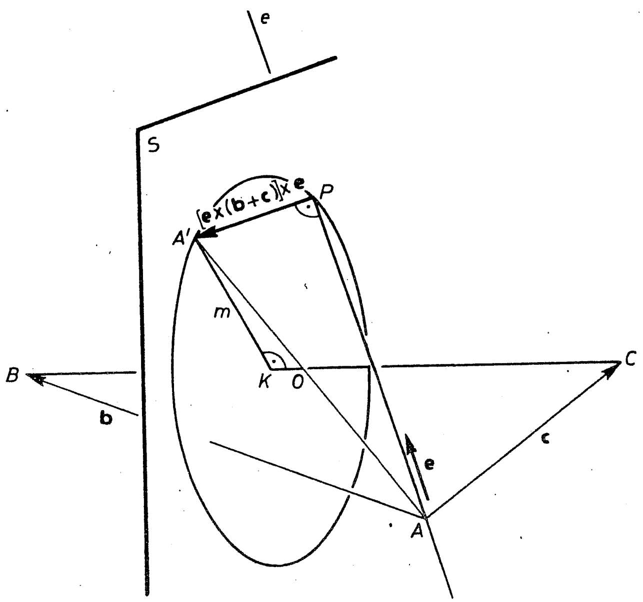
egyenlettel azonos. Mivel a vektoriális szorzat merőleges a tényezőire, ezért $\mathbf{u} \perp \mathbf{u}$, ami csak $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, azaz

$$a = b = c = 0$$

mellett teljesül.

## VI. fejezet 7. feladat:

Az $ABC$ háromszög $A$ csúcsára illeszkedő $e$ egyenessel párhuzamos egységvektor legyen az $\mathbf{e}$, legyen továbbá $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ *(123. ábra)*.




*123. ábra*

Az $e$ egyenes a $B$ és $C$ csúcsoktól akkor és csak akkor van egyenlő távolságra, ha a $\mathbf{b}$, illetve a $\mathbf{c}$ vektornak az egyenesre merőleges összetevője egyenlő hosszú, ha tehát

$$|\mathbf{e}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{e}\times\mathbf{c}|.$$

E két nemnegatív szám akkor és csak akkor egyenlő, ha négyzetük is egyenlő, vagyis ha

$$(\mathbf{e}\times\mathbf{b})^2 = (\mathbf{e}\times\mathbf{c})^2,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha mind a skaláris, mind a vektoriális szorzat disztributivitását is felhasználva

$$\mathbf{0} = (\mathbf{e}\times\mathbf{b})^2-(\mathbf{e}\times\mathbf{c})^2 = (\mathbf{e}\times\mathbf{b}+\mathbf{e}\times\mathbf{c})(\mathbf{e}\times\mathbf{b}-\mathbf{e}\times\mathbf{c}) =$$
$$= [\mathbf{e}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})][\mathbf{e}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})].$$

Ez a felcserélési-tétel miatt akkor és csak akkor áll, ha

$$\mathbf{0} = \{[\mathbf{e}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\times\mathbf{e}\}(\mathbf{b}-\mathbf{c}).$$

Ennek azonban szükséges és elégséges feltétele az, hogy

$$[\mathbf{e}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\times\mathbf{e}\perp\mathbf{b}-\mathbf{c}$$

legyen, azaz a $\mathbf{b}+\mathbf{c} = \overrightarrow{AA'}$ vektornak az $e$ egyenesre merőleges $\overrightarrow{PA'} = [\mathbf{e}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\times\mathbf{e}$ összetevője az $A'$ pontra illeszkedő és a $BC$ egyenesre merőleges $S$ síkban van.

A $\overrightarrow{PA'}$ $P$ kezdőpontja *Thalesz* tétele szerint az $AA'$ átmérőjű gömbön is rajta kell legyen, az egyenesen levő $P$ pont tehát a gömb és a sík közös részén, körön van.

A keresett mértani hely tehát az $AP$ egyenesek halmaza, feltéve, hogy $A$ és $P$ nem azonosak.

Az $A$ és a $P$ pontosan akkor azonosak, ha az $A'$ pontra illeszkedő, a $BC$-re merőleges $S$ sík az $A$ pontra is illeszkedik, vagyis ha az $AA'$ felezőmerőlegese a $BC$ szakasznak, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $AB = AC$. Ez esetben $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{AA'}$, vagyis

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})_m = \mathbf{b}+\mathbf{c},$$

aminek szükséges és elégséges feltétele az

$$\mathbf{e} \perp \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

fennállása.

*Összefoglalva:* Ha $AB = AC$, akkor a keresett mértani hely két egymásra merőleges sík, melyek közül az egyik a $BC$ szakasz felezőmerőleges síkja, a másik pedig az $A$ csúcsra illeszkedő, a háromszög szimmetriatengelyére merőleges sík;

ha $AB \neq AC$, akkor a feladatbeli egyenesek mértani helye egy $A$ csúcsú végtelen kúpfelület. Ha a $BC$ szakasz felezőpontját $O$, az $A$ csúcshoz tartozó $m$ magasság talppontjának $O$-ra vonatkozó tükörképét $K$ jelöli, akkor az $S$ síkbeli $K$ közepű, $m$ sugarú kör az előbbi kúpnak körmetszete.

## VII. fejezet 1. feladat:

*a)* Az $ABC_\triangle$ $t$ területe: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

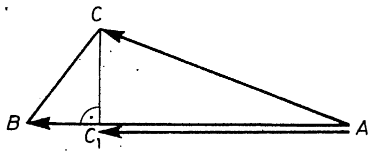
$$\overrightarrow{AB}(-4;\ -12;\ -6),$$
$$\overrightarrow{AC}(-2;\ -6;\ -9).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 12 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} = (72;\ -24;\ 0) = 24(3;\ -1;\ 0),$$

$t = 12\sqrt{10}$.

*b)* $m_c = \dfrac{2t}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{24\sqrt{10}}{\sqrt{16+144+36}} = \dfrac{24\sqrt{10}}{14} = \dfrac{12\sqrt{10}}{7}$.

*c)* Ha a talppontot $C_1$ jelöli, úgy $\overrightarrow{AC_1}$ az $\overrightarrow{AC}$-nek az $\overrightarrow{AB}$-vel párhuzamos összetevője *(124. ábra)*, azaz




124. ábra

$$\overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}^2}\overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{8+72+54}{196}(-4;\ -12;\ -6) = \left(-\frac{134}{49};\ -\frac{402}{49};\ -\frac{201}{49}\right).$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC_1} = \left(5-\frac{134}{49};\ 13-\frac{402}{49};\ -\frac{201}{49}\right) =$$

$$= \left(\frac{111}{49};\ \frac{235}{49};\ -\frac{201}{49}\right).$$

*d)* A kör $R$ sugara a három oldal szorzatának és a terület négyszeresének hányadosa:

$$R = \frac{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|}{48\sqrt{10}} = \frac{14 \cdot 11 \cdot 7}{48\sqrt{10}} = \frac{539}{24\sqrt{10}}.$$

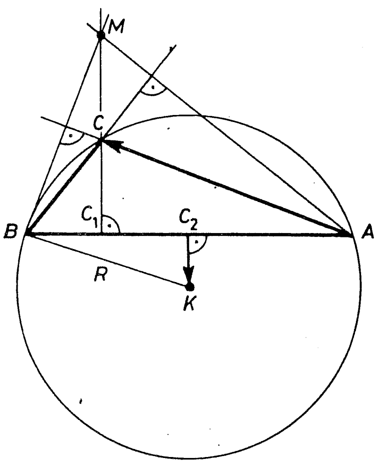
*e)* A terület és a félkerület hányadosaként nyerjük a beírt kör $r$ sugarát:

$$r = \frac{12\sqrt{10}}{\frac{14+11+7}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

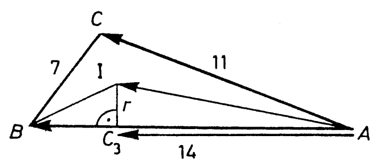
*f)* Ha $C_2$ jelöli az $AB$ oldal felezőpontját, akkor a körülírt kör $K$ középpontjába vezető $\overrightarrow{C_2K}$ párhuzamos az $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}$ vektorral (*125. ábra*). A háromszög tompaszögű, mivel $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -13 < 0$, és így a $C$ csúcsnál lévő szög koszinusza negatív, ennélfogva

$$\overrightarrow{C_2K} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \frac{12}{49}(-3;\ -9;\ 20).$$

A
$$\overrightarrow{C_2K} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2} = \frac{91}{24\sqrt{10}}$$
miatt tehát
$$\overrightarrow{C_2K} = \frac{91}{24\sqrt{10}}(\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC})^0 = \frac{91}{24\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{7\sqrt{10}}(-3;\ -9;\ 20) =$$
$$= \left(-\frac{13}{80};\ -\frac{39}{80};\ \frac{13}{12}\right),$$
vagyis $\overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{C_2K}$ adja a $K$-nak $\overrightarrow{OK}$ helyvektorát, azaz
$$K\left(3 - \frac{13}{80};\ 7 - \frac{39}{80};\ -3 + \frac{13}{12}\right) = \left(\frac{227}{80};\ \frac{521}{80};\ -\frac{23}{12}\right).$$



*125. ábra*



*126. ábra*

Ha $I$ jelöli a beírt kör középpontját, $C_3$ e körnek a $AB$ oldalon levő érintési pontját, akkor az $AIC_3$ derékszögű háromszögben *(126. ábra)* $AC_3 = s - a = 9$, $IC_3 = r = \frac{3\sqrt{10}}{4}$, tehát
$$AI = \frac{3}{4}\sqrt{154}.$$



Az $\overrightarrow{AI}$ egyező irányú az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ vektorral, így

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\sqrt{154}\,\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|} =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{154}\left(-\frac{3}{\sqrt{154}};-\frac{9}{\sqrt{154}};-\frac{8}{\sqrt{154}}\right) = \left(-\frac{9}{4};-\frac{27}{4};-\frac{24}{4}\right),$$

tehát

$$I\left(\frac{11}{4};\frac{25}{4};-6\right).$$

*g)* Ismert, hogy az $ABC_\triangle$ $M$ magasságpontjára *(125. ábra)*

$$CM = 2\cdot C_2K,$$

tehát *f)* alapján

$$\overrightarrow{CM} = 2\cdot\overrightarrow{KC_2} = \left(\frac{13}{40};\frac{39}{40};-\frac{13}{6}\right),$$

vagyis

$$M\left(\frac{133}{40};\frac{319}{40};-\frac{67}{6}\right).$$

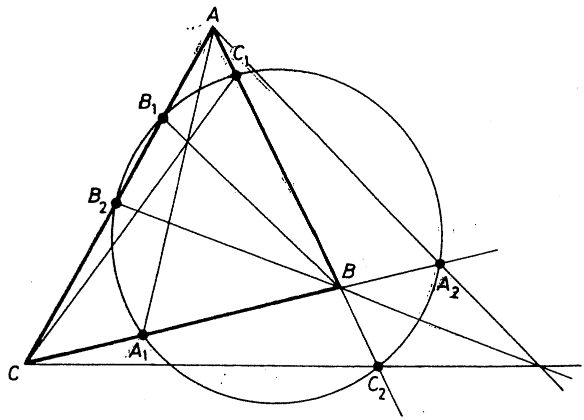
## VIII. fejezet 10. feladat:

Pontnak körre vonatkozó hatványa alapján *(127. ábra)*

$$AC_1\cdot AC_2 = AB_1\cdot AB_2,$$

$$BA_1\cdot BA_2 = BC_1\cdot BC_2,$$

$$CB_1\cdot CB_2 = CA_1\cdot CA_2,$$




127. ábra

és emiatt előjeles szakaszokra is helyesen

$$\frac{AC_1}{B_1A} = \frac{AB_2}{C_2A},$$

$$\frac{BA_1}{C_1B} = \frac{BC_2}{A_2B},$$

$$\frac{CB_1}{A_1C} = \frac{CA_2}{B_2C}.$$

Ezek szorzatában a tényezőket megfelelően rendezve

$$(*) \qquad (ACB_2)(CBA_2)(BAC_2) = (ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)$$

adódik. A feltétel szerint a $CC_1$, $BB_1$ és $AA_1$ egyenesek egy ponton mennek át, tehát (*) jobb oldalán az 1 áll, és így *Ceva* tétele miatt az $AA_2$, $BB_2$ és $CC_2$ egyenesek is vagy párhuzamosak, vagy egy ponton mennek át.

# IX. fejezet 5. feladat:

Jelölje $G$ az $F+F'$ összeget.

**1.** A $G$ középpontosan szimmetrikus (mégpedig a $K$ pontra) konvex síkidom, mert a konvexitást a 9.11 TÉTEL, a centrálszimmetriát pedig az igazolja, hogy ha az $A$ pont az $F$-nek, $B'$ az $F'$-nek egy-egy tetszőlegesen választott pontja, akkor a

$$\overrightarrow{KA} = \mathbf{a};\ \overrightarrow{KB'} = -\mathbf{b}$$

jelöléssel *(128. ábra)* a

$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB'} = \overrightarrow{KC} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b})$$

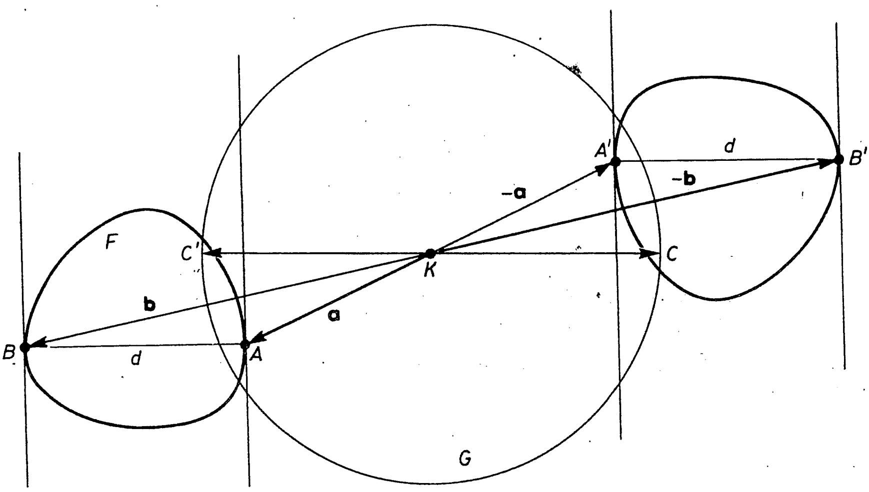
adta $C$ pontnak $K$-ra vonatkozó tükörképe, $C'$ is pontja $G$-nek, hiszen a

$$\overrightarrow{KC'} = -\overrightarrow{KC} = -\mathbf{a}+\mathbf{b}$$

eredő a

$$\overrightarrow{KA'}+\overrightarrow{KB}$$

eredővel azonos, ahol $A'$ az $A$-nak, $B$ pedig a $B'$-nek képe.




*128. ábra*

**2.** Ha $F$ állandó szélességű alakzat, akkor $F'$ is az, tehát az $F$-nek bármely irányú $d$ szélessége egyenlő az $F'$-nek ugyanilyen irányú szélességével, következésképpen a $G$-nek ilyen irányú szélessége kétszer akkora, mint az $F$ $d$ szélessége. (Ha az $F$ alakzat $A$ és $B$ pontját úgy választottuk meg, hogy $|\overrightarrow{AB}| = d$ legyen, úgy az ilyen pontokban az őket összekötő szakaszra merőleges egyenesek az állandó szélességű alakzat támaszegyenesei.)

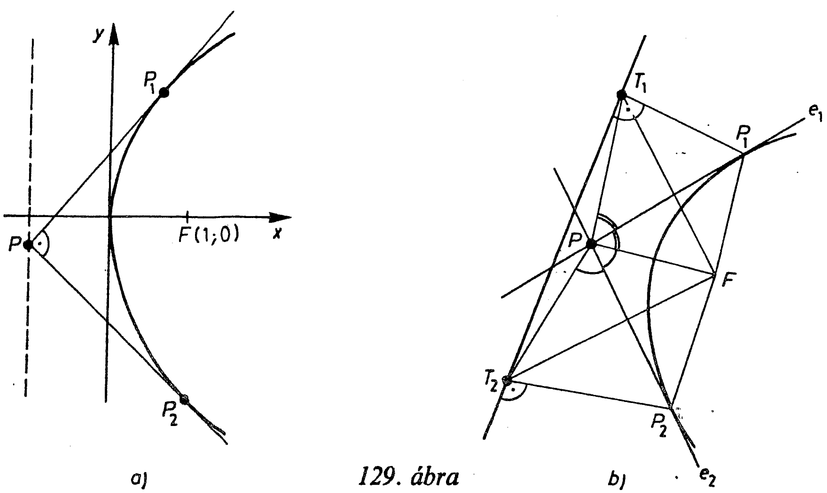
A $\qquad \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BA}$ és $|\overrightarrow{BA}| = d$ miatt tehát $|\overrightarrow{CC'}| = 2d.$

Az **1.** és **2.** szerint $G$ középpontosan szimmetrikus és állandó szélességű konvex síkidom, ez pedig – mint könnyen belátható – azt jelenti, hogy a $G$ kör.

## X. fejezet 19. feladat:

Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy parabolánk kanonikus helyzetű legyen *(129. a) ábra)*. Mivel bármely két parabola hasonló, ezért feltehetjük – az általánosság megszorítása nélkül –, hogy a parabola egyenlete

$$y^2 = 4x.$$




*129. ábra*

A parabola $P_1\left(\frac{y_1^2}{4}; y_1\right)$ és $P_2\left(\frac{y_2^2}{4}; y_2\right)$ pontjában húzott $e_1$, illetve $e_2$ érintők egyenlete

(1) $$e_1\colon\ yy_1 = 2\left(x+\frac{y_1^2}{4}\right),$$

(2) $$e_2\colon\ yy_2 = 2\left(x+\frac{y_2^2}{4}\right).$$

Ezek merőlegesek, ha $\mathbf{n}_1(2; -y_1)$, $\mathbf{n}_2(2; -y_2)$ normálvektoraik skaláris szorzata 0, azaz ha

(3) $$4+y_1y_2 = 0$$

teljesül. Az $e_1$ és $e_2$ érintők közös pontjának koordinátáit az (1) és (2) különbségéből nyert

$$y(y_1-y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2-y_2^2)$$

egyenlet adja. Mivel $y_1-y_2 \neq 0$, hiszen a parabolának nincs tengelyállású húrja, ezért előbbi egyenletünkből

(4) $$y = \frac{1}{2}(y_1+y_2),$$

és így (1)-ből kivonva a (4)-nek $y_2$-szeresét

(5) $$0 = 2x+\frac{y_1^2}{2}-\frac{1}{2}(y_1^2+y_1y_2),$$

azaz

(6) $$x = \frac{y_1y_2}{4},$$

ami (3) miatt az érintők közös pontjának első koordinátájára az

(7) $$x = -1$$

egyenletet adja, ami a parabola vezéregyenesének egyenlete.

Ezzel igazoltuk, hogy a feladatbeli pontok a vezéregyenesen vannak. Be kell még látnunk, hogy a vezéregyenes minden pontjából a parabolához merőleges érintők húzhatók.

Legyen az $x = -1$ vezéregyenes egy pontja a $P_0(-1; y_0)$. Mivel a vezéregyenes nem érintője a parabolának, ezért a $P_0$-ra illeszkedő, a parabolát érintő egyenesnek létezik $m$ iránytangense, ezért az ilyennek egyenlete

(8) $$y = m(x+1)+y_0.$$

Ez az egyenes érinti az $y^2 = 4x$ egyenletű parabolát, ha a (8)-nak e parabolával csak egy közös pontja van, és a (8) nem párhuzamos a parabola tengelyével, azaz $m \neq 0$, mert csak az érintőnek és a tengelylyel egyállású húrnak van a parabolával egyetlen közös pontja.

Az

$$[m(x+1)+y_0]^2 = 4x$$

egyenletnek egyetlen gyöke pontosan akkor van, ha az $x$-ben másodfokú egyenlet diszkriminánsa eltűnik, azaz

(9) $$[2m(m+y_0)-4]^2-4m^2(m+y_0)^2 = 0.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

(10) $$m^2+my_0-1 = 0,$$

ha tehát (10) két valós gyökének, $m_1$ és $m_2$-nek a szorzata $-1$, ami a (8) alatti egyenesek merőlegességének szükséges és elégséges feltétele.

*Megjegyzés:* Bebizonyítható, hogy a parabola fókuszának az érintőkre vonatkozó tükörképeinek mértani helye a vezéregyenes.

Ennek ismeretében, ha a parabola $F$ fókuszának a $P$ pontbeli $e_i$ érintőre való tükörképét $T_i$ jelöli ($i = 1, 2, \ldots$) *(129. b) ábra)*, akkor ha $P$ jelöli a két érintő közös pontját, úgy $P_1PP_{2\ast}$ akkor és csak akkor derékszög, ha $T_1PT_{2\ast}$ egyenesszög, ha tehát $P$ a vezéregyenes pontja.

## X. fejezet 23. *d)* feladat:

Az $A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9$ miatt görbénk hiperbolikus és

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 3 \\ -6 & -13 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ -2 & -13 & -5 \end{vmatrix} = 9(-3(-5+2)) = 81$$

miatt közönséges, vagyis hiperbola.

A *10.24 TÉTEL* (10.40) egyenlete szerint, ha a koordináta-rendszer kezdőpontja azonos a hiperbola centrumával, akkor a hiperbola egyenlete az $\dfrac{A}{A_{33}} = -9$ miatt

$$6xy + 8y^2 - 9 = 0. \tag{1}$$

A (10.42) formula adta

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{0-8}{6} = -\frac{4}{3} \tag{2}$$

alapján, felhasználva a III. fejezet 3.4 szakaszának (16) képletét, a

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi + \frac{8}{3} \operatorname{ctg} \varphi - 1 = 0$$

egyenlet $-3$ és $\dfrac{1}{3}$ gyökeinek egyikét választva, a

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

azonosságból a $\sin \varphi = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \varphi = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ választás (2)-t kielégíti, és ezzel a $\varphi$ szöggel elforgatva új koordináta-rendszerünket, a koordinátatranszformációt a VII. fejezet 7.3 szakaszának (9′) képlete írja le. Eszerint az

$$x = \frac{-3\sqrt{10}}{10}\xi - \frac{\sqrt{10}}{10}\eta,$$

$$y = \frac{\sqrt{10}}{10}\xi - \frac{3\sqrt{10}}{10}\eta$$

helyettesítés az (1) egyenletet kanonikus alakra hozza.

Valóban

$$6xy = \frac{6}{10}(-3\xi-\eta)(\xi-3\eta) = \frac{6}{10}(-3\xi^2+8\xi\eta+3\eta^2),$$

$$8y^2 = \frac{8}{10}(\xi^2-6\xi\eta+9\eta^2),$$

és ebből

$$6xy+8y^2-9 = -\xi^2+9\eta^2-9 = 0,$$

amit a koordináta-rendszer 90°-os elforgatásával a megszokott

$$\frac{\xi^2}{9}-\eta^2 = 1$$

alakra hozhatunk.

## XI. fejezet 19. feladat:

Legyen adott az

$$e_1\colon \frac{1-x}{2} = 3-z, \qquad y=2$$

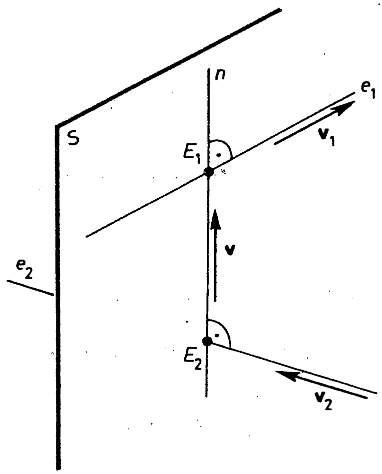
és az

$$e_2\colon \frac{x+1}{3} = 2-y = z.$$

Az $e_1$ és $e_2$ egyeneseket összekötő, mindkettőre merőleges egyenes *(130. ábra)*, az $n$ normáltranszverzális $\mathbf{v}$ irányvektora merőleges az $e_1$ egyenes $\mathbf{v}_1$ és az $e_2$ egyenes $\mathbf{v}_2$ irányvektorára, ezért párhuzamos a

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1; -1; 2)$$

vektorral. Legyen tehát $\mathbf{v}(1; 1; -2)$.




*130. ábra*

A normáltranszverzális egy pontját például az $e_1$ és a normáltranszverzális $S$ síkjának az $e_2$ egyenessel közös pontja adja. Az $S$ sík normálvektora merőleges $\mathbf{v}_1$-re is, $\mathbf{v}$-re is, így párhuzamos a

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1; -5; -2)$$

vektorral. Az $e_1$ egyenes $E_1(1; 2; 3)$ pontja az $S$ síknak is pontja, tehát az $S$ sík egyenlete:

$$(x-1)-5(y-2)-2(z-3) = 0,$$

vagyis

$$x-5y-2z+15=0.$$

Ha az $S$ sík és az $e_2$ egyenes $E_2$ döféspontjához tartozó paramétert $t$ jelöli, akkor az $E_2$ koordinátái:

(1)
$$x=3t-1,\quad y=2-t,\quad z=t.$$

Az $E_2$ benne van az $S$ síkban is, kielégíti tehát annak egyenletét, vagyis

$$3t-1-5(2-t)-2(t-3)=0,$$

amiből

$$6t=5,$$

tehát

$$t=\frac{5}{6},$$

amivel az (1) miatt $E_2\left(\frac{3}{2};\frac{7}{6};\frac{5}{6}\right)$, ennélfogva a normáltranszverzális egyenletrendszere

$$x-\frac{3}{2}=y-\frac{7}{6}=\frac{-z+\frac{5}{6}}{2}.$$

## XI. fejezet 28. *a)* feladat:

Vegyük észre, hogy az $x+2y+3z$ kifejezés négyzete adja egyenletünk első hat tagját, és ugyanennek a kifejezésnek $(-4)$-szerese a következő három tag. Így egyenletünk bal oldala az $(x+2y+3z)$-ben másodfokú kifejezéssé válik, s ezt – ismert módon – szorzattá alakíthatjuk:

$$(x+2y+3z)^2-4(x+2y+3z)+3 = (x+2y+3z-1)(x+2y+3z-3).$$

Egyenletünk tehát az

$$x+2y+3z-1 = 0$$

és az

$$x+2y+3z-3 = 0$$

egyenletű párhuzamos síkok egyesítésének egyenlete. A koordinátarendszer alkalmas transzformációjával a

$$\xi^2 = a^2 \quad (a>0)$$

kanonikus alakra jutunk.