V. Rövid történeti áttekintés

Könyvünk címe differenciál- és integrálszámítás is lehetett volna. Ennek a témának a gyökerei a görög matematikáig nyúlnak vissza. A legnevezetesebbek Arkhimedész eredményei, aki az i. e. III. században már meghatározta – többek között – a gömb és a henger térfogatát, és a parabolaszelet területét.

Arkhimedész vizsgálatai mindig egy-egy geometriai alakzathoz kapcsolódtak. Egy kitűnő könyvben, *B. L. van der Waerden Egy tudomány ébredése, egyiptomi, babiloni és görög matematika* című művében, amely nemrégen magyar nyelven is megjelent, sok érdekeset olvashatunk a matematika kezdeteiről, az első eredményekről.

Az analízis igazi fejlődése a XVII. században vett nagyobb lendületet. A technika fejlődése, a gazdasági élet problémái számos feladatot állítottak a tudomány elé. A mechanikában a különböző mozgások – többek között az égitestek mozgásának – vizsgálata, továbbá a területmérés, az ívhossz, a felszín- és a térfogatszámítás kérdései, az érintőszerkesztés, a szélsőérték-feladatok vezettek elsősorban a differenciál- és integrálszámítás kialakulásához.

A XVII. századnak és a XVIII. század elejének néhány, az analízissel foglalkozó matematikusa (ők még a matematika mellett általában más tudománnyal is foglalkoztak): *Galileo Galilei* (1564–1642); *Pierre Fermat* (1601–1663); *René Descartes* (1596–1650); *Blaise Pascal* (1623–1662); *Brook Taylor* (1685–1731); *Jakob Bernoulli* (1654–1705); *Johann Bernoulli* (1667–1748), valamint a két legjelentősebb: *Isaac Newton* (1643–1727) és *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716).

Galilei a pisai és a páduai egyetemen tanított. Felfedezte a szabadesés törvényét, foglalkozott a hang terjedésével, csillagászati problémákkal stb. Azt tanította: *ahhoz, hogy a fizikában helyes alapelvekhez jussunk, a természet megfigyeléséből, a tapasztalatból kell kiindulnunk.* A mozgás tulajdonságainak a vizsgálata megtörténhet anélkül, hogy azt kutatnánk, mi okozza a mozgást. A század többi matematikusához hasonlóan, ő is meg volt győződve arról, hogy a természet jelenségei matematikailag leírhatók.

Ebben az időszakban nagy szenzáció volt, amikor kiderült, hogy a logaritmusfüggvény hatványsorba fejthető, mert ez a számok logaritmusának a kiszámítására, nagy pontosságú táblázatok készítésére ad lehetőséget. Megtalálták az exponenciális és a trigonometriai függvények hatványsorát is. Ezzel látszatra egészen különböző függvények között sikerült kapcsolatot találni. Persze, például a cosinusfüggvény hatványsorának a felfedezése egészen más módon történt, mint ahogyan azt ebben a könyvben tettük. Bár a végeredmény helyes volt, mégis azt az *igazolást* ma nem tekintjük bizonyításnak. De ez is csak azt mutatja, hogy a matematikai szigorúság is változik, és nem precíz okoskodással is lehet helyes eredményeket megsejteni.

Fermat és *Descartes* nevéhez fűződik az analitikus geometria megalkotása. Ennek segítségével geometriai fogalmakat lehetett algebrailag megfogalmazni, számolni lehetett velük. Algebrai állításokat geometriailag sikerült szemléltetni, ami egyben új eredmények megsejtését is lehetővé tette.

A XVII. és a XVIII. században függvényen képlettel leírható, illetve grafikonjával adott függvényt értettek. A képlettel adott függvényekben egy-egy művelet akárhányszor (végtelen sokszor is) előfordulhatott.

Newton és *Leibniz* tekinthetők a differenciál- és integrálszámítás megalapozóinak. Módszerükkel számos fizikai és geometriai probléma tárgyalható. Newton munkáiban – tekintve, hogy ő a fizikában is a legnagyobbak közé tartozik – elsősorban a sebesség, a változás mértéke a központi kérdés, ezért a differenciálszámítás került előtérbe. Leibniz elsősorban az összegezési problémákat vizsgálta, amelyekhez integrálszámítás kell. Nagy súlyt helyezett a jó jelölésre. Ő vezette be a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ és az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ jelöléseket. Newton – ő általában az idő szerint differenciált – az $\dot{x}$ és $\ddot{x}$ jelöléseket használta az x függvény t szerinti első, illetve második deriváltjára; ezt a jelölést a mechanikakönyvek ma is alkalmazzák.

Az első matematika tárgyú folyóirat a XVII. század közepén jelent meg. Az új eredmények addig – de részben azután is – levelezés, szóbeli közlés útján terjedtek. Egyes felfedezések prioritásáról sok vita folyt. Az egyik ilyen legnevezetesebb prioritási vita éppen Newton és Leibniz között robbant ki; ezt követőik még az ő haláluk után is folytatták egy darabig. Ma mindkettőjüket az analízis megalapozóinak tekintik.

A XVIII. század matematikájának a svájci születésű *Leonard Euler* (1707–1783) a legnevesebbje. Ő az eddig élt legtermékenyebb matematikus. Közel 900 könyvet és dolgozatot írt. s a matematika szinte minden ágával foglalkozott. Hatása még ma is igen jelentős, dolgozatai ma is rendkívül gondolatébresztők. A rezgő húr problémájával kapcsolatos vita arra késztette, hogy a függvény fogalmával is alaposabban foglalkozzon. Ebben az időben a határérték fogalmának még nem volt meg a ma használatos definíciója. Végtelen sorokkal nagyon sokat számoltak, többnyire formálisan. Azt szokták mondani, hogy az igazán nagyok általában ösztönösen jól használták ezeket a fogalmakat, utánzóik munkáiban azonban ellentmondások adódtak.

A XVIII. században igen sok különféle problémára alkalmazták a differenciál- és integrálszámítást. Nagyon komplikált kifejezéseket tudtak differenciálni, integrálni. Számos mozgást, fizikai jelenséget differenciálegyenlettel írtak le. Bizonyos típusú differenciálegyenletek megoldásáról Euler könyvet is írt.

A felmerülő egyre több ellentmondás arra késztette az analízis művelőit, hogy a tárgy alapjainak precíz meghatározásával foglalkozzanak.

A középiskolában ma használatos függvényfogalom *L. Dirichlet* (1805–1859) munkásságából származik.

Az analízis precíz megalapozása terén *A. Cauchy* (1789–1857); *Bolzano* (1781–1848) és *C. Weierstrass* (1815–1897) tették a legtöbbet. Tőlük származik a határérték, a folytonosság, a differenciálhatóság (ebben a tankönyvben is használt) értelmezése és legalapvetőbb tulajdonságainak a vizsgálata. Cauchy foglalkozott a végtelen sorokkal kapcsolatos műveletekkel is; vizsgálta, hogy hogyan szorozhatunk össze végtelen sorokat. Weierstrass találta az első mindenütt folytonos és sehol sem differenciálható függvényt. Cauchy az integrálra is adott definíciót, ez azonban csak folytonos függvényekre vonatkozott. Az ebben a könyvben használt integrál definícióját *B. Riemann* és *G. Darboux* alkották meg.

A XX. században az analízis számos, további új ággal gyarapodott; továbbra is igen élénk a kutatás a valós és a komplex függvénytan, a sorelmélet, a funkcionálanalízis, a differenciálegyenletek terén.

Rendkívüli módon kiszélesedett a matematika, ezen belül az analízis alkalmazásának a köre. Ma már nemcsak a fizikában, hanem a biológiában, a közgazdaságtudományban stb. számos gyakorlati feladat megoldása elképzelhetetlen matematikai eszközök nélkül; ehhez azonban mélyebb fogalmakat is meg kell ismernünk.

A XX. század első felének két világhírű, analízissel foglalkozó magyar matematikusa *Riesz Frigyes* (1880–1956) és *Fejér Lipót* (1880–1959) volt. Riesz elsősorban a függvénytan és a funkcionálanalízis, Fejér pedig a trigonometriai sorok elméletében ért el ma is ható, ezekkel a témákkal foglalkozó könyvekben mindig tárgyalt eredményeket.