

Előszó

Kis terjedelme ellenére is nehezen készült el e kettős rendeltetésű könyv, amely egyrészt tankönyv a speciális matematikai osztályok számára, másrészt szakköri füzet. Ezek a körülmények már többé-kevésbé meghatározták a tárgyalásra kerülő anyagot és a feldolgozás módját. Várható, hogy sokan túlzottan részletezőnek találják a bizonyításokat, de az volt a cél, hogy kevesebb előismeret vagy kisebb rutin lehetőleg ne akadályozza az előrehaladást. Az ingyencet is számos komolyabb erőfeszítést igénylő probléma várja, sok zárójelben szereplő megjegyzés, valamint a **Függelék** nagy része egyenesen nekik szól. Érdemes kihasználni a számelméletnek azt a lehetőségét, hogy kevés eszköz birtokában is szinte egyszerre lehet találkozni könnyebb, nehezebb, illetve máig is megoldatlan problémákkal. E lehetőséget már a legkönnyebbnek tekinthető **1. Fejezetben** is igyekeztünk érzékeltetni.

Az **1. Fejezet** témája: **Osztathósági alapfogalmak. A számelmélet alaptétele és következményei.** A számelmélet alaptételére két bizonyítást ismertetünk, mégpedig olyan *szokatlan* sorrendben, hogy akkor is el lehessen jutni az alaptétel bizonyításához, ha kevés idő áll rendelkezésre. Itt kell bevallani, hogy e törekvésnek – a teljes indukció elkerülése révén – áldozatul esett a szóban forgó közvetlen bizonyítás eredeti szerkezete. Előfordul még, hogy a teljes indukciót olyan megfogalmazás rejti el, amely természetes azok számára is, akik már ismerik. (Mivel a teljes indukció a speciális matematikai osztályok I. osztályos tankönyvében szerepel, a haladók által tanulmányozandó későbbi nehezebb témákban nyugodtan használjuk.) Az **1. Fejezet** témakörei nagyjából azonos nehézségűek. Remélhető-

en az olvasók többségének nem fog gondot okozni még az 1.5. pont sem, ahol a prímszámokra vonatkozó egyszerűbb észrevételek után olyan népszerű témák szerepelnek, mint a *Fermat-számok*, *tökéletes számok*, *Mersenne-számok*, *pitagoraszi számhármások* és *Fermat sejtése*.

Az 1.1–1.5. pontokban szereplő 30 feladat fontos részét képezi a tárgyalásnak, a továbbhaladást azon feladatok megoldása is segíti, amelyek eredményére közvetlenül nincs szükség. Az 1.6. pontban olyan változatos nehézségű gyakorlófeladatokat közlünk, amelyek többsége *Arany Dániel Versenyen* szerepelt.

A 2. *Fejezet* témája: **Kongruenciák**. Itt is öt pont tárgyalja feladatokkal kiegészítve az 1. *Fejezethez* természetesen kapcsolódó témákat; a 2.6. pontban gyakorlófeladatok szerepelnek, köztük már igen nehezek is. Lényeges különbség az 1. *Fejezethez* képest, hogy a 2.1–2.5. pontok könnyű indítás után fokozódó nehézségűek, a 2.4. és a 2.5. pont már a haladóktól is erőfeszítést igényelhet.

A 3. *Fejezet* címe: **Prímszámok**. A 3.1. pontban a 2. *Fejezet* néhány eredményének titkosírással kapcsolatos alkalmazását tárgyaljuk. A 3.2. pont a prímszámok eloszlásáról szól, nagyságrendileg pontos becsléseket igazolunk az x -et meg nem haladó pozitív prímszámok számára; bizonyítással szerepel többek között az a nevezetes tétel, hogy n és $2n$ között van prím, s találkozunk még egy valószínűség-számítási gondolatmenettel is a primosztók számának eloszlásával kapcsolatban.

A 4. *Fejezet* óvatосkodó címe: **Függelék**. Itt ugyanis már a 4.1. pont tanulmányozása sem könnyű, de az igazi nehézséget a 4.2. pont jelentheti, amely – az inyencek számára – a számtani sorozatokban előforduló prímszámokra vonatkozó *Dirichlet-tétel* bizonyítását tárgyalja. A 4.2. pont megírását az motiválta, hogy a *Dirichlet-tétel* teljes bizonyítása tudomásom szerint magyar nyelven nem található meg, csupán speciális eseteké.

Köszönettel tartozom *dr. Surányi János* professzor úrnak – e könyv lektorának – értékes megjegyzéseiért és feladatjavaslataiért (39. és 41. *Feladat*, valamint számos szövegekzi kérdés).

Budapest, 1989. december

a szerző