

Előszó

Babits Mihály *Bolyai* című szonettjében olvashatjuk:

Isten elménket bezárta a térbe.
Szegény elménk e térben rab maradt:
a kapzsi villámölyv, a gondolat,
gyémántkorlátját még csak el sem érte.

Ezen az i.e. 300 körül Euklidész (kb. i.e. 330–275) által rendszerbe foglalt „gyémántkorlátot” nyitott kaput Bolyai János (1802–1860), aki 1823. november 3-án Temesváron édesapjának, Bolyai Farkasnak (1775–1856) írja levelében Marosvásárhelyre:

„Semmiből egy új, más világot teremtettem.”

Ezt az időpontot, a Bolyai-féle hiperbolikus geometria megszületését tekinthetjük a nemeuklideszi geometriák születésnapjának.

A másik, klasszikusnak számító nemeuklideszi geometria, az elliptikus geometria Bernhard Riemann (1826–1866) nevéhez kapcsolódik, aki koraszakos jelentőségű munkáját

„A geometria alapjául szolgáló hipotézisekről” címmel 1854. június 10-én olvasta fel a göttingai egyetemen. Ez a munka már az ún. Riemann-terek alapjait fektette le, amelyek egyebek mellett az általános relativitáselmélet kidolgozásában is alapvető szerepet játszottak.

Az utóbbi száz évben a természettudományokban hihetetlen nagy fejlődés következett be. Ezen belül a különböző geometriai terek vizsgálatai mindig kulcsszerepet töltek be, számos új nemeuklideszi geometriát írtak le, de a két klasszikus, állandó, nem nulla görbületű geometria (a hiperbolikus és az elliptikus) a legmodernebb kutatásokban sem kerülhető ki.

A hiperbolikus és az elliptikus geometria szokásostól eltérő szemlélete sokszor nehézséget okoz a gimnáziumi tanulóknak, de az egyetemi hallgatóknak is. Ezeknek a problémáknak a megoldására kínál alternatívát könyvünk, azáltal, hogy a geometriák különböző modelljeit tanulmányozva vezetjük be az olvasót a hiperbolikus és az elliptikus sík titkaiba, és konkrét számolási apparátusokat is ismertettünk. Könyvünk szerkezetét a téma oktatásában tapasztaltak alapján építettük fel.

Az első, „Hiperbolikus geometria modelljei” című fejezet megadja a geometria legsűrűbben használatos modelljeit, és utal a legfontosabb hiperbolikus geometriai jelenségekre.

A második fejezetünk az elliptikus sík bevezetése után tárgyalja annak legszemléletesebb modelljét, a szférikus geometriát, a legfontosabb tételeken keresztül összehasonlítva azt a hiperbolikus síkkal. (A háromszög-terület kapcsolatát is vizsgálva.) Bevezetjük a valós projektív síkot, mint az elliptikus sík másik kézenfekvő modelljét, és ismertetjük a legfontosabb projektív tételek elemi bizonyítását.

A harmadik fejezet a projektív geometria analitikus tárgyalását tartalmazza. A cél a projektív kollineációk analitikus alakjának megadása projektív koordináta-rendszer használatával.

A negyedik fejezetben a modellek analitikus leírásával konkrét számolási apparátus alapjait dolgozzuk ki a hiperbolikus, illetve az elliptikus geometriában.

Az ötödik fejezetben az euklideszi sík Hilbert-féle és a projektív tér Bieberbach-féle axiómarendszerét ismertetjük.

A szerzők hálás szívvel gondolnak geometriai szemléletmódjuk egyik nagy formálójára, **Reiman Istvánra**, matematikus generációk kiváló tanárára, akinek 78. születésnapjára ajánlják ezt a munkát.

2004. január 28.

G. Horváth Ákos, Szirmai Jenő