C. függelék

Szabó Endre: Csoportelméleti kalandozások

Az Univerzum legérthetetlenebb tulajdonsága az, hogy képesek vagyunk megérteni.

Albert Einstein

Ebben a fejezetben megpróbáljuk elhelyezni eddigi ismereteinket a csoportelmélet egészén belül. Kiderül majd, hogy nincs egységes, általános csoportelmélet, ehelyett különböző speciális csoportosztályokat vizsgálnak (mint például a véges csoportok osztálya), és ezek között gyakran meglepő kapcsolatokat fedeznek föl. A nagy általános kérdésekre, mint például a szóprobléma vagy a Burnside-probléma, rendre negatív válaszok születtek (lásd az 4.10.20. Tételt és a 231. oldalon az apró betűs részt), szinte külön tudománnyá vált a furcsábbnál furcsább csoportok gyártása. De ezek a furcsaságok „kivételek”, a matematikában gyakran előforduló csoportok nem ilyenek. Ha egy szűkebb csoportosztályra szorítkozunk, akkor gyakran kapunk pozitív válaszokat ugyanezekre a kérdésekre. A fejezet végén a *fizikában* előforduló csoportokról lesz szó, majd egy mese keretében elutazunk az Androméda-ködbe!

Jobb, ha az Olvasó bekapcsolja a biztonsági övet: ebben a függelékben a bizonyítások sokszor vázlatosak lesznek, nagy lépésekben haladnak! Hasznos, ha az Olvasó tudja, mit jelent *lineáris algebrában* a sajátérték, karakterisztikus polinom, vektor hossza komplex euklideszi térben vagy az unitér transzformáció (lásd a [2] könyvet). Ugyancsak érdemes felfrissíteni *analízisből* a nyílt, zárt és kompakt halmazok fogalmát $\mathbb{R}^n$-ben, továbbá a hatványsorokra vonatkozó elemi ismereteket.

C.1. Exponenciális leképezés

Az általános lineáris csoport ($\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, 4.1.24. Definíció) egy nyílt részhalmaza az $n \times n$-es (komplex) mátrixok vektorterének, amit $2n^2$-dimenziós valós euklideszi térnek tekinthetünk. Ezért beszélhetünk $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-beli nyílt és zárt részhalmazokról, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-ből induló vagy oda érkező folytonos függvényekről, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-beli folytonos görbékről. (Egy folytonos görbe nem más, mint egy folytonos függvény a $[0, 1]$ intervallumról $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-be.) Megvizsgáljuk

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ zárt részcsoportjait és a köztük haladó folytonos homomorfizmusokat. Az Olvasót emlékeztetjük arra, hogy egy euklideszi tér kompakt részhalmazai pontosan a korlátos zárt halmazok.

C.1.1. Definíció. Egy $H \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ részcsoportot *zárt részcsoportnak* nevezünk, ha tartalmazza minden $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-be eső határpontját. Azt mondjuk, hogy *H kompakt részcsoport*, ha kompakt részhalmaza a mátrixok terének. Belátható, hogy egy zárt részcsoport pontosan akkor kompakt, ha a benne lévő mátrixok normája egy közös korlát alatt marad. A H részcsoportot *összefüggőnek* nevezzük, ha bármely két eleme összeköthető H-n belül haladó folytonos görbével. Végül *H diszkrét részcsoport*, ha nincsen torlódási pontja $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-ben.

Elsősorban a komplex mátrixokra koncentrálunk. Ezzel semmit sem veszítünk: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zárt részcsoportja $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-nek, tehát a komplex eset magában foglalja a valósat is. Természetesen fordítva is dolgozhatnánk, hiszen az n-dimenziós komplex vektortér tekinthető $2n$-dimenziós valós vektortérnek, és így $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ zárt részcsoportja $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$-nek, azaz a valós eset is magában foglalja a komplex esetet.

Legfontosabb eszközünk az exponenciális függvény és a logaritmusfüggvény lesz. Elevenítsük föl azt a definíciót, amit a továbbiakban a legkönnyebben tudunk majd általánosítani:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad \log(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)^n}{n} \qquad 0 < y \leq 2\,.$$

Mindkét sorról belátható, hogy konvergens a megadott értelmezési tartományon. A kapott függvények egymás inverzei: $e^{\log(y)} = y$ minden 0 és 2 közötti y értékre. A logaritmusfüggvény — más definícióval — értelmezhető minden pozitív számra, a 0-ra viszont nem terjeszthető ki folytonosan, hiszen ott végtelen a határértéke. Mi azonban megelégszünk a fenti, szűk értelmezési tartománnyal.

A matematikában gyakran van szükségünk arra, hogy egy valós számokon értelmezett függvényt kiterjesszünk komplex számokra vagy négyzetes mátrixokra. Ez nagyon egyszerű olyankor, ha az eredeti függvényt egy $H(x)$ hatványsorral adjuk meg: az x helyébe komplex számot vagy $n \times n$-es mátrixot írva kapunk egy természetes kiterjesztést. Meg kell vizsgálni, hogy milyen x-értékekre lesz a sor konvergens. Tegyük föl, hogy a $H(x)$ valós hatványsor konvergens egy I nyílt intervallum minden pontjában, és legyen K az I átmérő fölé rajzolt nyílt körlap a komplex számsíkon. Általános elv, hogy a $H(x)$ hatványsor konvergens minden K-ba eső komplex számra, és konvergens minden olyan $n \times n$-es mátrixra, amelynek sajátértékei mind K-ba esnek (mindezt nem bizonyítjuk).

C.1.2. Definíció. Mátrixok *exponenciális függvényére* kétféle jelölést is használunk. Minden $m \times m$-es mátrixra értelmezzük:

$$\exp : \mathbb{C}^{m\times m} \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})\,, \qquad A \mapsto e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\,.$$

Mielőtt belátnánk, hogy ez a definíció jogos, lássunk néhány példát: először komplex számokkal, azután mátrixokkal.

C.1.3. Példa. Exponenciális függvény komplex számokra, mátrixokra:

$$e^{2\pi i} = 1\,, \qquad e^{\pi i} = -1\,, \qquad e^{\frac{\pi}{2} i} = i\,, \qquad e^{\frac{\pi}{4} i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\,,$$

$$\exp\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}, \qquad \exp\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

A mátrixokkal való számolás könnyebb, mint első pillanatra gondolnánk. Idézzük föl a 7.6. szakaszt, különösen a 7.6.6. Tételt. Egy $m \times m$-es mátrix minimálpolinomja legfeljebb m-edfokú, ezért a mátrix minden hatványa kifejezhető a mátrix legfeljebb $m - 1$-edfokú polinomjaként. Ezért ha a mátrixot egy $H(x)$ hatványsorba helyettesítjük, akkor az eredményt szintén fölírhatjuk a mátrix legfeljebb $m - 1$-edfokú polinomjaként. Ez a polinom kiszámítható, és innen az exponenciális függvény értéke is könnyen adódik.

A részletes számítások helyett inkább azt mutatjuk be, hogyan lehet ilyen feladatokat a `Maple` segítségével megoldani.

```
exp(2*Pi*I);exp(Pi*I);exp(Pi/2*I);exp(Pi/4*I);
with(linalg):
exponential([[a,0],[0,b]]);
exponential([[0,t],[-t,0]]);
```

A program magyarázata: A `with(linalg):` parancs aktiválja a `linalg` csomagot — a `Maple` a ritkábban használt részeit ilyen csomagokban tartja, és csak szükség esetén hívja be a memóriába. A mátrixokat soronként, balról jobbra kell megadni, szögletes zárójelek között — például `[[1,0],[0,1]]` jelenti a 2×2-es egységmátrixot. Az egyváltozós `exponential` az exponenciális függvény mátrixokra — később megismerkedünk majd ugyanennek a *Maple*-függvénynek egy kétváltozós variánsával is.

Lineáris algebrában $\mathrm{tr}(A)$-val jelölik az A mátrix *nyomát*, azaz a mátrix főátlójában álló elemek összegét. Tudjuk, hogy ez egyenlő a mátrix komplex sajátértékeinek összegével (minden sajátértéket azzal a multiplicitással kell venni, amellyel a mátrix karakterisztikus polinomjában szerepel). Tudjuk azt is, hogy a mátrix determinánsa a sajátértékeinek a szorzata. Ezek segítségével az $\exp(A)$ mátrix sajátértékeit és determinánsát is könnyen kiszámíthatjuk.

C.1.4. Tétel. *Legyenek $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ sajátértékei $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ (mindegyik annyiszor fölsorolva, amennyi a multiplicitása). Ekkor az e^A mátrix sajátértékei $\{e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_m}\}$. Ezért*

$$\det(e^A) = e^{\alpha_1} e^{\alpha_2} \ldots e^{\alpha_m} = e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m} = e^{\mathrm{tr}(A)}\,.$$

Bizonyítás. Írjuk a mátrixot Jordan-normálalakba (lásd a 7.6. szakaszt)! Ez háromszögmátrix: a főátlóban lesznek a sajátértékei (lásd a 4.11.11. Definíciót). Egy háromszögmátrix hatványai is háromszög alakúak, tehát a sajátértékek egyszerűen hatványozódnak. □

Így $\exp(A)$ minden A mátrixra invertálható, hiszen a sajátértékei között nem szerepel a nulla (vagyis az exponenciális leképezés tényleg $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$-be képez). Most rátérünk annak indoklására, hogy $\exp(A)$ definíciója miért értelmes. Lineáris algebrából tudjuk, hogy a $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{C}^m$ *vektor hosszát* (a Pitagorasz-tétel mintájára) a $\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \ldots + |v_m|^2}$ képlet definiálja.

C.1.5. Definíció. Egy $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *mátrix normája* legyen

$$\|B\| = \sup\left\{\|Bw\| \;:\; w \in \mathbb{C}^m,\ \|w\| = 1\right\}.$$

Ez azt méri, hogy B maximum mekkorára nyújthat egy egységvektort.

♫ Mátrixok nagyságának mérésére sokféle normát használnak, de véges dimenzióban bármelyik norma segítségével az összes többi norma megbecsülhető, tehát mindegy, hogy melyiket választjuk.

A C.1.5. és a C.1.2. Definíciók jogosak: a $w \to \|Bw\|$ függvény folytonos, így van maximuma $\mathbb{C}^n$ egységgömbjén (hiszen az kompakt halmaz), tehát minden mátrix normája véges. Azért választottuk éppen a C.1.5. Definícióban megadott normát, mert erről azonnal látszik, hogy $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$. Ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}\,,$$

tehát az exponenciális függvény hatványsora abszolút konvergens. □

C.1.6. Definíció. A *logaritmusfüggvényt* az $m \times m$-es egységmátrix egy környezetében definiáljuk:

$$\log(A) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(E-A)^n}{n}\,, \qquad \text{ha} \quad \|E - A\| < 1\,.$$

C.1.7. Állítás. *A logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze:*

$$e^{\log(A)} = A\,, \qquad \textit{ha} \quad \|E - A\| < 1\,.$$

Ezért a logaritmusfüggvény az egységmátrix körüli 1 *sugarú gömböt bijektíven képezi az origónak egy $U \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ környezetébe, és fordítva, az exponenciális függvény bijektíven képezi U-t az előbbi gömbbe.*

A logaritmusfüggvény definíciója azért jogos, mert a hatványsora szintén abszolút konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}\,.$$

Abszolút konvergens hatványsorokkal könnyű számolni: kompozíciójuk, szorzatuk, hányadosuk is abszolút konvergens. Ha formálisan egymásba helyettesítjük az exponenciális és a logaritmusfüggvények hatványsorát, akkor minden tag kiesik, tehát a két függvény egymás inverze. Ezzel beláttuk a C.1.7. Állítást. Hatványsorok összeszorzásával pedig a következő állítást igazolhatjuk:

C.1.8. Állítás. *Ha A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ fölcserélhető mátrixok, azaz $AB = BA$, akkor*

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B\,.$$

Speciálisan e^A invertálható, és inverze e^{-A}.

Vigyázat! Az $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ összefüggést kizárólag fölcserélhető mátrixokra használhatjuk! A hatványozás szokásos azonosságai nem érvényesek mátrixokra, mert a mátrixszorzás nem kommutatív (vö. 2.2.20. Gyakorlat).

C.1.9. Definíció. Legyen A valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix. Az

$$\mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\,, \qquad t \mapsto e^{tA}$$

leképezés csoporthomomorfizmus (mert A polinomjai fölcserélhetők egymással). Az ilyen képlettel megadható homomorfizmust *egyparaméteres részcsoportnak* hívjuk, melynek A a *generátora*. Ha A valós mátrix, akkor a generált egyparaméteres részcsoport képe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-ben van. Az elnevezés arra utal, hogy itt nem csupán egy részcsoportról van szó, hanem azt „paramétereztük” is.

♫ Fizikában gyakori, hogy egy rendszer állapotának időbeli fejlődését egy egyparaméteres részcsoport írja le, erről szól a C.5. szakasz. A C.1.19. Tételben is létfontosságú szerepet kapnak az egyparaméteres részcsoportok, és ugyanott azt is belátjuk, hogy ha G zárt részcsoport $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-ben, akkor minden $\mathbb{R}^+ \to G$ folytonos homomorfizmus egyparaméteres részcsoport.

C.1.10. Példa. Számoljunk ki néhány egyparaméteres részcsoportot $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$-ben és $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$-ben, t jelöli a paramétert.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & at & \frac{1}{2}abt^2 \\ 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Amint t növekszik, az első példa exponenciális ütemben távolodik az egységmátrixtól (majdnem minden egyparaméteres részcsoport ilyen). A második periodikus, a harmadik esetben pedig a mátrix elemei polinomok. (Vajon mi lehet ennek az oka?)

Ellenőrizzük az előző példát a `Maple` segítségével:

```
with(linalg):
exponential([[a,0],[0,b]],t);
exponential([[0,1],[-1,0]],t);
exponential([[0,a,0],[0,0,b],[0,0,0]],t);
```

A program magyarázata: Most a `Maple` exponenciális függvényének kétváltozós formáját használjuk: `exponential(A,t)`. Ez az e^{tA} egyparaméteres részcsoportot számolja ki.

Egy zárt részcsoport szerkezete bonyolult lehet, az egyparaméteres részcsoportok azonban mindig nagyon egyszerűek. Ki fog derülni, hogy a zárt részcsoportok mindig sok egyparaméteres részcsoportot tartalmaznak, és ezek vizsgálatával sok mindent megtudhatunk az eredeti csoportról.

C.1.11. Példa. A C.1.10. Példák közül a második mutatja, hogy a síkbeli elforgatások csoportja egyparaméteres részcsoport. Hasonló módon látható, hogy egy adott tengely körüli elforgatások egyparaméteres részcsoportot alkotnak a térbeli forgatások csoportjában, SO(3)-ban. Lapozzon vissza az Olvasó: amikor SO(3) egyszerűségét láttuk be a 4.8.43. Feladat megoldásában, akkor kulcsszerepet kaptak ezek a részcsoportok!

Mint mondtuk, általában $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$. Mégis jó lenne valami kapcsolatot találni a mátrixszorzás és az exponenciális leképezés között! Bár pontos összefüggés is létezik, mi most megelégszünk egy becsléssel. Ehhez emlékeztetjük az Olvasót egy olyan jelölésmódra, amit az analízisben, a számelméletben és a kombinatorikában is használnak. Akkor írhatjuk, hogy $f = O(g)$ egy X halmazon, ha van olyan K konstans, hogy $|f(x)| < Kg(x)$ minden $x \in X$-re teljesül. Például $h(x) = 2x^3 + 6x^2 + 2\log(x) - 4\sqrt{x}$ helyett sokszor elegendő és kényelmesebb azt írni, hogy $h(x) = 2x^3 + O(x^2)$ (ha $x > 1$, vagy ha $x \to \infty$). Az $O(g)$-t *hibatagnak* nevezzük, és mindig az egyenlőségek jobb oldalán fogjuk használni.

C.1.12. Definíció. Négyzetes mátrixok között definiálunk egy új műveletet: a *Lie-zárójelet*. Tetszőleges A, B mátrixokra

$$[A, B] = AB - BA\,.$$

Ezt a műveletet gyakran hívják kommutátornak is — mi megmaradunk a Lie-zárójel elnevezésnél, hogy megkülönböztessük a csoportokban értelmezett kommutátortól.

C.1.13. Tétel [Hausdorff–Campbell–Baker-formula]. *Tegyük föl, hogy az A, B valós vagy komplex $n \times n$-es mátrixok elég kicsik: $\|A\|, \|B\| < 1$. Ekkor*

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[[A,B],B]-\frac{1}{12}[[A,B],A]} + O\left(\max\left(\|A\|, \|B\|\right)^4\right).$$

C.1.14. Megjegyzés. Ebben a becslésben n-et konstansnak tekintjük, ezért nem jelenik meg a nagy ordóban. A hibatag szükség esetén pontosítható:

$$\|A\| \cdot \|B\| \cdot O\left(\max\left(\|A\|, \|B\|\right)^2\right).$$

A jobb oldali harmadfokú kitevő folytatható: kiegészíthető egy végtelen sorrá. Belátható, hogy a sor minden tagja az A és B mátrixok valamilyen Lie-zárójeles kifejezése, tehát a mátrixszorzás kifejezhető a Lie-zárójel segítségével! Alkalmazáskor gyakran elegendő csak az első-, illetve másodfokú tagokat kiírni, sokszor pedig a formula logaritmusát használják:

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} + O\left(\max\left(\|A\|, \|B\|\right)^2\right),$$

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B+[A,B]/2} + O\left(\max\left(\|A\|, \|B\|\right)^3\right),$$

$$\log(e^A \cdot e^B) = \begin{cases} A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[[A, B], B] - \frac{1}{12}[[A, B], A] + \\ \qquad + O\left(\max\left(\|A\|, \|B\|\right)^4\right). \end{cases}$$

A Hausdorff–Campbell–Baker-formula bizonyítása. A becslés mindkét oldalát kétváltozós, nemkommutatív hatványsornak tekintjük. Először azt fogjuk belátni, hogy a legfeljebb harmadfokú tagok megegyeznek.

A számolást szokás szerint a `Maple`-re bízzuk:

```
e := proc (x) expand(1+x+x&*x/2+x&*x&*x/6);end:
c := proc (x,y) expand(x&*y - y&*x); end:
W := expand(e(a) &* e(b)) -
e(a+b+c(a,b)/2+c(c(a,b),b)/12-c(c(a,b),a)/12):
coeff(W,&*(a)),coeff(W,&*(b)),
coeff(W,&*(a,b)),coeff(W,&*(b,a)),
coeff(W,&*(a,a,a)),coeff(W,&*(a,a,b)),
coeff(W,&*(a,b,a)),coeff(W,&*(a,b,b)),
coeff(W,&*(b,a,a)),coeff(W,&*(b,a,b)),
coeff(W,&*(b,b,a)),coeff(W,&*(b,b,b));
```

A program magyarázata: A `Maple` számára `&*` jelöli a nemkommutatív szorzást, az `expand` parancs pedig felbontja a zárójeleket. A két `proc` két új függvényt definiál: `e(x)` az e^x függvény hatványsorának eleje, `c(x,y)` pedig az $[x, y]$ Lie-zárójelet számolja. A `W` lesz a becslés két oldalának különbsége: azt kell belátni, hogy minden tagja több, mint harmadfokú. A `coeff` függvény segítségével kiolvassuk az összes legfeljebb harmadfokú együtthatót. Próbálja ki az Olvasó: mind `0` lesz!

A hibatagot a háromnál magasabb fokú tagok becslésével kapjuk. Ez rutinfeladat: hasonló becsléseket végeztünk, amikor beláttuk, hogy az exponenciális és a logaritmusfüggvények hatványsora abszolút konvergens. A hibatag pontosításához azt kell észrevenni, hogy ha az egyenlet mindkét oldalán elvégezzük a kijelölt műveleteket, a kapott hatványsorokból azok a tagok, amelyek csupán A-hatványt vagy B-hatványt tartalmaznak, kiejtik egymást — tehát a megmaradó tagok mindegyike „osztható” $A \cdot B$-vel. Végül a logaritmusfüggvény hatványsorából következik a $\log(X + Y) = \log(X) + O(\|Y\|)$ becslés (feltéve, hogy X egy korlátos halmazban mozog és $\|Y\|$ kicsi). Legyen X a Hausdorff–Campbell–Baker-formula jobb oldalán álló exponenciális tag, Y pedig a hibatag: éppen a C.1.14. Megjegyzés logaritmusos formulájának jobb oldalát kapjuk. $\square$

Sophus Lie kezdett el először komolyan foglalkozni transzformációcsoportokkal és azok részfélcsoportjaival. Ő „folytonos transzformációcsoportoknak” hívta őket, de valójában geometriai alakzatok differenciálható transzformációival foglalkozott — a pontos definíciót most mellőzzük. Manapság ezeket a csoportokat *Lie-csoportoknak* hívják. Noha a Lie-csoport fogalma sokkal általánosabbnak tűnik, mégis nagyon közel áll az általunk vizsgált csoportok osztályához: minden összefüggő Lie-csoportnak van olyan „kis” normálosztója, amely szerint vett faktorcsoport folytonosan izomorf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ egy zárt részcsoportjával. (A „kis” jelző azt jelenti, hogy az egységmátrix egy alkalmas környezetében csak egyetlen eleme van a normálosztónak.) Ezért minden, amit ebben a szakaszban tanulunk, könnyedén általánosítható tetszőleges Lie-csoportokra. Lie fedezte föl, hogy érdemes a folyamatos mozgatások helyett a pillanatnyi elmozdulásokra koncentrálni. Ezeket ő „infinitezimális transzformációknak”, az összességüket pedig „infinitezimális csoportnak” nevezte. A C.5. szakaszban látjuk majd, mit jelent ez a szemléletmód a gyakorlatban. Az infinitezimális csoportot ma Lie-algebrának mondjuk, róla szól a következő két definíció.

C.1.15. Definíció. Egy T test fölötti *Lie-algebra* egy T fölötti V vektortérből és egy rajta értelmezett, szögletes zárójellel jelölt, kétváltozós műveletből áll, amelyik mindkét változójában lineáris, és kielégíti a következő azonosságokat:

$$[x, x] = 0\,, \qquad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0\,.$$

C.1.16. Definíció. Az összes $n \times n$-es valós (illetve komplex) mátrixok tere a Lie-zárójel művelettel egy n^2-dimenziós (illetve $2n^2$-dimenziós) valós Lie-algebrát alkot. Ezt a Lie-algebrát $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$-rel (illetve $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$-vel) jelöljük.

Természetesen $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tekinthető komplex Lie-algebrának is, de ebben a könyvben csak valós Lie-algebrákkal foglalkozunk. A $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ és $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ jelölésekkel azt hangsúlyozzuk, hogy a mátrixok terére kifejezetten Lie-algebraként gondolunk — ha pusztán vektortérnek tekintjük, akkor továbbra is a $\mathbb{C}^{n\times n}$

és $\mathbb{R}^{n\times n}$ jelöléseket használjuk. A szorgalmas Olvasó könnyen ellenőrizheti $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$-ben a Lie-algebra azonosságokat. Érdemes megemlíteni Ado tételét: minden véges dimenziós valós Lie-algebra izomorf valamilyen n-re $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ egy részalgebrájával.

C.1.17. Definíció. A $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ részalgebrát a $G \leq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ zárt részcsoport *Lie-algebrájának* mondjuk, ha van a nullmátrixnak olyan környezete $\mathfrak{g}$-ben, és az egységmátrixnak olyan környezete G-ben, amelyek között az exponenciális leképezés bijekció.

A C.1.7. Állítás éppen arról szólt, hogy a teljes $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ Lie-algebrája nem más, mint a teljes $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, a valós mátrixok csoportjáé, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-é pedig a valós mátrixok részalgebrája, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Lássunk még egy triviális, de fontos példát:

C.1.18. Példa. Legyen G a 2×2-es unitrianguláris mátrixok csoportja (lásd 4.11.11. Definíció), $\mathfrak{g}$ pedig az olyan 2×2-es mátrixok tere, amelyeknek csak a jobb felső sarkában állhat nullától különböző szám. Mivel a $\mathfrak{g}$-beli mátrixok legalább második hatványai mind nullák, ezért az exponenciális leképezés ebben az esetben $\exp : \mathfrak{g} \to G$, ahol $\exp(A) = E + A$. Ez egy bijekció, tehát G Lie-algebrája éppen $\mathfrak{g}$. A G csoport izomorf $\mathbb{R}^+$-szal, $\mathfrak{g}$ pedig az egyetlen egydimenziós Lie-algebra: $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$, minden Lie-zárójel nulla. Ezért $\mathbb{R}^+$ Lie-algebrája $\mathbb{R}$, és az exponenciális leképezés az identitás.

A C.1.17. Definíció nem túl szemléletes, ezért a további példák előtt kimondunk egy tételt, amit alternatív definícióként is lehet használni.

C.1.19. Tétel. *Egy $G \leq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ zárt részcsoportnak a Lie-algebrája pontosan azokból az $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ elemekből áll, melyek által generált egyparaméteres részcsoport benne van G-ben. Tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van G Lie-algebrájának elemei, a G-ben lévő egyparaméteres részcsoportok, és a folytonos $\mathbb{R}^+ \to G$ homomorfizmusok közt.*

♫ Egy zárt részcsoport Lie-algebráját „kívülről” definiáltuk. Ez azt jelenti, hogy nemcsak a G csoportot használtuk föl, hanem a $G \leq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tartalmazást is. Az $\mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ folytonos homomorfizmusokból kiindulva azonban eljuthatunk egy olyan definícióhoz, amely már csak a G csoportot használja, és nem függ a $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ beágyazástól. Sőt, ez a definíció kiterjeszthető olyan Lie-csoportokra is, amelyek nem is részcsoportjai egyetlen lineáris csoportnak sem. A nehézséget a Lie-algebra műveletek definiálása okozza.

A C.1.19. Tétel bizonyítását későbbre halasztjuk, most lássunk példákat. Ehhez szükségünk lesz néhány definícióra, amelyek ismerősek lineáris algebrából.

C.1.20. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A (komplex elemű) mátrix *szimmetrikus*, illetve *antiszimmetrikus*, ha megegyezik a transzponáltjával, illetve annak ellentettjével: $A = A^T$, illetve $A = -A^T$.

Az A mátrix transzponáltjának konjugáltját A *adjungáltjának* nevezzük, és A^*-gal jelöljük. Az A mátrixot *önadjungáltnak*, illetve *antiönadjungáltnak* mondjuk, ha megegyezik az adjungáltjával, illetve annak ellentettjével: $A = A^*$, illetve $A = -A^*$. Az A mátrix *unitér*, ha $A^* = A^{-1}$ (vö. 4.1.26. Definíció). Végezetül az A mátrix *pozitív definit*, ha minden sajátértéke pozitív valós szám.

♫ A „pozitív definit” jelzőt lineáris algebrában kvadratikus alakokra alkalmaztuk. Könnyű belátni, hogy egy A önadjungált mátrix akkor és csak akkor pozitív definit a fenti értelemben, ha az $\langle Au, u\rangle$ kvadratikus alak pozitív definit, azaz minden nem nulla u vektorra pozitív értéket vesz föl.

C.1.21. Példa. Néhány korábbi ismerősünk Lie-algebrája:

(1) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, illetve $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$: az összes $n \times n$-es valós, illetve komplex mátrix tere.
(2) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, illetve $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$: a nulla nyomú valós, illetve komplex mátrixok tere.
(3) $\mathrm{O}(n)$, illetve $\mathrm{SO}(n)$: az antiszimmetrikus valós mátrixok tere.
(4) $\mathrm{U}(n)$: az antiönadjungált komplex mátrixok tere.
(5) $\mathrm{SU}(n)$: a nulla nyomú, antiönadjungált komplex mátrixok tere.

Bizonyítás. A $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ és a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ csoportok Lie-algebráját már kiszámoltuk. A C.1.4. Tétel miatt egy nullához közeli A mátrixra pontosan akkor lesz $\det(e^A) = 1$, ha $\mathrm{tr}(A) = 0$. Tekintsük az inverzre, konjugáltra és a transzponáltra vonatkozó elemi azonosságokat:

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}, \qquad \overline{e^A} = e^{\overline{A}}, \qquad \left(e^A\right)^T = e^{A^T}.$$

Ezekből azonnal adódik, hogy egy nullához közeli A mátrixra e^A pontosan akkor ortogonális vagy unitér, ha A antiszimmetrikus vagy antiönadjungált. □

A Lie-algebra kiszámítása általában is könnyű. A jelentősége az, hogy a Lie-algebrában sokkal könnyebb számolni, mint az eredeti csoportban, és ezért a Lie-algebra elemzésével sokat megtudhatunk a csoport szerkezetéről.

C.1.22. Példa. Legyen $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ egy összefüggő zárt részcsoport, melynek $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája. Az alábbi lista mutatja, hogy G nagyon sok tulajdonsága leolvasható $\mathfrak{g}$-ből. Az állításokat nem bizonyítjuk.

- A G csoport minden összefüggő zárt részcsoportjának Lie-algebrája egy részalgebra $\mathfrak{g}$-ben, és ez a részalgebra egyértelműen meghatározza a részcsoportot.
- Egy $I \leq \mathfrak{g}$ részalgebrát ideálnak hívunk, ha minden $i \in I$, $g \in \mathfrak{g}$ elempárra $[i, g] \in I$. Egy összefüggő zárt részcsoport pontosan akkor normálosztó G-ben, ha a Lie-algebrája ideál $\mathfrak{g}$-ben.
- Egy Lie-algebra centruma azokból az elemekből áll, amelyeknek bármely elemmel vett Lie-zárójele nulla. A G csoport centrumának Lie-algebrája megegyezik $\mathfrak{g}$ centrumával.

- Egy Lie-algebrát kommutatívnak mondunk, ha bármely két elemének Lie-zárójele nulla. A G csoport pontosan akkor Abel-csoport, ha $\mathfrak{g}$ kommutatív.
- A csoportok mintájára definiálhatók a feloldható és a nilpotens Lie-algebrák. A G csoport pontosan akkor feloldható, illetve nilpotens, ha $\mathfrak{g}$ az.
- Egy Lie-algebrát egyszerűnek hívunk, ha nem kommutatív és nincs valódi ideálja. A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra pontosan akkor egyszerű, ha G centruma diszkrét részcsoport, és minden normálosztó benne van a centrumban.

C.1.23. Tétel [Cartan]. *Minden $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ zárt részcsoportnak van (egyetlen) $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ Lie-algebrája (C.1.17. Definíció). Ha G és $\mathfrak{g}$ közül az egyik csupa valós mátrixból áll, akkor a másik is csupa valós mátrixból áll. Ha G összefüggő, akkor a $\mathfrak{g}$ részalgebra egyértelműen meghatározza a G csoportot.*

Bizonyítás. A C.1.7. Állítás szerint az exponenciális függvény az egységmátrix egy kis környezetében bijekció. Tehát a $\mathfrak{g}$ részalgebra pontosan akkor lesz Lie-algebrája a G részcsoportnak, ha az egységelemnek van olyan U környezete, ahol

$$e^{\mathfrak{g}} \cap U = G \cap U\,. \tag{C.1}$$

Tegyük föl egy pillanatra, hogy van ilyen $\mathfrak{g}$ részalgebra, és próbáljuk megtalálni az elemeit! Legyen ε egy kis pozitív szám, és tekintsük az origó ε sugarú környezetében azokat a mátrixokat, amelyeket az exponenciális függvény G-be visz. Elég kis ε-ra (C.1) miatt ezek éppen $\mathfrak{g}$-nek az ε-nál rövidebb elemei, tehát $\mathfrak{g}$ éppen az ő többszöröseikből áll. Csak az a problémánk, hogy nem tudjuk előre, milyen kicsire kell választanunk ε-t. Sebaj, minden ε-hoz legyártjuk azt a $\mathfrak{g}_\varepsilon$ halmazt, amelyről azt reméljük, hogy maga $\mathfrak{g}$ lesz, vagyis azon ε-nál nem hosszabb A mátrixok összes többszöröseinek halmazát, melyekre $e^A \in G$. Ha létezik $\mathfrak{g}$, akkor az csak a $\mathfrak{g}_\varepsilon$ halmazok közül a legkisebb lehet. Tehát a $\mathfrak{g}_\varepsilon$ halmazok metszete jó jelölt $\mathfrak{g}$-re, csak be kell bizonyítani, hogy valóban részalgebra, és kielégíti az (C.1) egyenletet.

A tétel bizonyításához tehát definiáljuk $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ következő részhalmazait:

$$\mathfrak{g}_\varepsilon = \left\{\lambda A \,:\, \lambda \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \|A\| \leq \varepsilon,\ e^A \in G\right\}, \qquad \mathfrak{g} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{g}_\varepsilon\,.$$

Mivel G zárt halmaz, ezért $\mathfrak{g}_\varepsilon$ zárt halmazok egy fogyó rendszere, tehát $\mathfrak{g}$ is zárt, sőt: ha $A_\varepsilon \in \mathfrak{g}_\varepsilon$ olyan mátrixok, melyekre $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon$ létezik, akkor ez a határérték is $\mathfrak{g}$-ben van. Ezzel a módszerrel fogunk majd elemeket keresni $\mathfrak{g}$-ben! Ha $e^A \in G$, akkor minden ℓ egészre $e^{\ell A} \in G$, tehát $\mathfrak{g}_\varepsilon$ minden elemétől legfeljebb ε távolságra találunk ilyen ℓA mátrixot, azaz $\mathfrak{g}$ minden eleme tetszőleges pontossággal megközelíthető velük. A zártság miatt tehát $e^{\mathfrak{g}} \subseteq G$. Az világos, hogy $\mathfrak{g}$ zárt valós számmal szorzásra; belátjuk, hogy összeadásra is az. Legyenek hát $A, B \in \mathfrak{g}$ tetszőleges elemek. A következő határértéket a Hausdorff–Campbell–Baker-formula segítségével számítjuk ki, ehhez most elég az elsőrendű tagokat kiírni:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon A + \varepsilon B + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = A + B\,. \tag{C.2}$$

Mivel $e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B} \in G$, azért $\log(e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B})/\varepsilon \in \mathfrak{g}_\delta$, ahol

$$\delta \;=\; \|\log(e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B}\| \le \varepsilon\|A\| + \varepsilon\|B\| + O(\varepsilon^2)$$

tart nullához, amint $\varepsilon \to 0$. Tehát a határérték: $A + B \in \bigcap_\delta \mathfrak{g}_\delta = \mathfrak{g}$. Ehhez hasonlóan a következő határérték mutatja, hogy $\mathfrak{g}$ zárt a Lie-zárójel műveletre is. Ehhez már a másodrendű tagok is kellenek, és háromszor is kell használni a Hausdorff–Campbell–Baker-formulát:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log\left(e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B} e^{-\varepsilon A} e^{-\varepsilon B}\right)}{\varepsilon^2} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log\left(e^{\varepsilon A + \varepsilon B + \frac12 \varepsilon^2 [A,B]} e^{-\varepsilon A - \varepsilon B - \frac12 \varepsilon^2 [A,B]} + O(\varepsilon^3)\right)}{\varepsilon^2} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon(A + B - A - B) + \varepsilon^2 [A, B] + O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2} = [A, B] \in \mathfrak{g}\,.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Hátra van még a (C.1) egyenlet bizonyítása. Azt már láttuk, hogy $e^{\mathfrak{g}} \subseteq G$, tehát $e^{\mathfrak{g}} \cap U \subseteq G \cap U$ akármilyen U halmazra. Tegyük föl, hogy mégsem egyenlők: tehát választhatunk olyan $A_n \notin \mathfrak{g}$ mátrixsorozatot, amely 0-hoz tart, és mégis $e^{A_n} \in G$. Legyen $B_n \in \mathfrak{g}$ az A_n-hez legközelebbi elem $\mathfrak{g}$-ben (ilyen létezik, mert $\mathfrak{g}$ zárt), és legyen $C_n = A_n - B_n$, továbbá $D_n = C_n/\|C_n\|$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $\|C_n\| \le \|A_n\|$ és $\|B_n\| \le 2\|A_n\|$. Mivel $\|D_n\| = 1$ korlátos sorozat, ezért kiválasztható egy konvergens részsorozata, legyen ennek a határértéke D. Mivel minden D_n egységnyi távolságra van $\mathfrak{g}$-től, azért $D \notin \mathfrak{g}$. Ebből fogunk ellentmondásra jutni. Bevezetjük a $C'_n = \log(e^{A_n} e^{-B_n})$, $D'_n = C'_n/\|C_n\|$ és $\varepsilon(n) = \|C'_n\|$ jelöléseket. Mivel $e^{A_n} e^{-B_n} \in G$, azért $C'_n \in \mathfrak{g}_{\varepsilon(n)}$ és $D'_n \in \mathfrak{g}_{\varepsilon(n)}$. A Hausdorff–Campbell–Baker-formulából következik:

$$\begin{aligned}
e^{B_n} e^{C_n} &= e^{B_n + C_n} + O\left(\|B_n\| \cdot \|C_n\|\right) = e^{A_n} + O\left(\|A_n\| \cdot \|C_n\|\right), \\
e^{C_n} &= e^{A_n} e^{-B_n} + O\left(\|A_n\| \cdot \|C_n\|\right), \\
C_n &= \log\left(e^{A_n} e^{-B_n}\right) + O\left(\|A_n\| \cdot \|C_n\|\right) = C'_n + O\left(\|A_n\| \cdot \|C_n\|\right).
\end{aligned}$$

Tehát C_n és C'_n távolsága $O\left(\|C_n\| \cdot \|A_n\|\right)$. Ezért D_n és D'_n távolsága $O\left(\|A_n\|\right)$, ami nullához tart, és $\varepsilon(n) \le \|C_n\| + O\left(\|C_n\| \cdot \|A_n\|\right)$ is nullához tart. Tehát a D'_n sorozatból is kiválasztható olyan részsorozat, amelyik a D mátrixhoz tart. Ebből azonban $D \in \mathfrak{g}$ következne, ami ellentmondás — tehát a (C.1) egyenlet igaz. Ezzel beláttuk, hogy a kívánt $\mathfrak{g}$ tényleg létezik.

Végül Cartan tételének utolsó állítását igazoljuk. A (C.1) egyenlet szerint a Lie-algebra meghatározza a $G \cap U$ részhalmazt, így az általa generált részcsoportot is. Könnyen látható, hogy ez nyílt részcsoport G-ben, tehát összefüggő G esetén $G \cap U$ generálja G-t. □

C.1.24. Tétel. *Legyenek $G \le \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ és $H \le \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ zárt részcsoportok, $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a Lie-algebrájuk. Minden $\varphi : G \to H$ folytonos homomorfizmushoz hozzárendelünk egy $\varphi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ leképezést, amit a nullmátrix környezetében a*

$$\varphi'(A) = \log\left(\varphi(e^A)\right)$$

képlet definiál. Ez lineáris, tehát lineárisan kiterjeszthető az egész $\mathfrak{g}$ altérre, és megtartja a Lie-zárójel műveletet. Így φ' Lie-algebra homomorfizmus. Ha G összefüggő, akkor φ'-ből rekonstruálhatjuk φ-t.

Bizonyítás. A képlet megad egy φ' függvényt a nullmátrix egy környezetében. A definícióból közvetlenül látható, hogy $\varphi'(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \varphi'(A)$. A (C.2) egyenlet mutatja, hogy φ' összegtartó, a (C.3) egyenlet szerint pedig megtartja a Lie-zárójel műveletet. Mivel φ' lineáris, ezért lineárisan kiterjed az egész $\mathfrak{g}$-re. Megfordítva:

$$\varphi(g) = e^{\varphi'(\log(g))}$$

az egységmátrix egy U környezetében, és korábban már láttuk, hogy ha G összefüggő, akkor $G \cap U$ generálja az egész G-t. Tehát ilyenkor φ' meghatározza φ-t. Ezzel beláttuk a tételt. □

A C.1.19. Tétel bizonyítása. Legyen $G \le \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tetszőleges zárt részcsoport. A C.1.23. Tétel miatt G-nek van egy $\mathfrak{g}$ Lie-algebrája. Az C.1.18. Példa miatt $\mathbb{R}^+$ Lie-algebrája $\mathbb{R}$. Legyen $\alpha : \mathbb{R}^+ \to G$ egy folytonos homomorfizmus. A C.1.24. Tétel ad egy $\varphi : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ homomorfizmust, és könnyen látható, hogy a $\varphi(1) \in \mathfrak{g}$ mátrix által generált egyparaméteres részcsoport éppen α. Ezzel beláttuk, hogy minden ilyen α egy egyparaméteres részcsoport, és a generátora benne van $\mathfrak{g}$-ben. Fordítva: ha $A \in \mathfrak{g}$, akkor az A által generált egyparaméteres részcsoport olyan folytonos homomorfizmus, amelyik az origó egy környezetét G-be képezi. De $\mathbb{R}^+$-ban minden környezet generátorrendszer, tehát az egész egyparaméteres részcsoport képe G-ben van. □

Végezetül bizonyítás nélkül kimondjuk Cartan tételét.

C.1.25. Tétel. *Minden véges dimenziós $\mathfrak{g}$ Lie-algebrához található olyan Lie-csoport, amelynek Lie-algebrája izomorf $\mathfrak{g}$-vel. Sőt, az ilyen Lie-csoportok között van egy legnagyobb, amelynek az összes többi faktorcsoportja.*

C.2. Az általános lineáris csoport

Ebben a szakaszban az általános lineáris csoportra, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-re koncentrálunk. Olyan részcsoportokat keresünk benne, amelyek segítségével jobban megérthetjük a szerkezetét. Ugyanez a módszer használható az általános Lie-csoportok vizsgálatára is.

Az $\mathrm{U}(n)$ unitér csoport elemei távolságtartó transzformációk, ezért minden elem normája 1. Ezzel beláttuk a következő tétel felét — a bizonyítást hamarosan folytatjuk.

C.2.1. Tétel. *Az* $\mathrm{U}(n) \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *részcsoport kompakt, és minden kompakt részcsoport konjugált az* $U(n)$ *egy részcsoportjával.*

C.2.2. Definíció. Az $U(n)$ részcsoportot és konjugáltjait a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *maximális kompakt részcsoportjainak* nevezzük.

C.2.3. Definíció. A síkbeli forgatások csoportja, $\mathrm{SO}(2)$ „kör alakú". Ezért az $\mathrm{SO}(2)$ csoport m példányának direkt szorzatát és az ezzel folytonosan izomorf csoportokat m-dimenziós *tórusznak* nevezzük, és T^m-mel jelöljük.

A C.2.1. Tétel bizonyítása. Legyen először $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ egy véges részcsoport. Szokás szerint $*$-gal jelöljük G hatását a vektorokon, azaz ha $g = A \in G$ egy mátrix és $v \in \mathbb{C}^n$, akkor $g*v = Av$. Legyen $\langle v, w\rangle$ a vektorok szokásos *skaláris szorzata* $\mathbb{C}^n$-ben, azaz $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ és $w = (w_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ esetén $\langle v, w\rangle = \overline{v_1}w_1 + \ldots + \overline{v_n}w_n$ (ezt csak a szövegkörnyezet különbözteti meg a generált altér és részcsoport hasonló jelölésétől). A skaláris szorzatra úgy tekintünk, mint egy kétváltozós függvényre, és kiátlagoljuk a transzformáltjait:

$$(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle^* = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \langle g * v, g * w\rangle\,.$$

Ez a kiátlagolt függvény egy új skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$-en, amelyre nézve euklideszi teret kapunk. Az új skaláris szorzat ráadásul G-invariáns:

$$\begin{aligned}\langle g * v, g * w\rangle^* &= \frac{1}{|G|} \sum_{h\in G} \langle hg * v, hg * w\rangle^* &&= \{t = hg \text{ helyettesítéssel}\}\\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{t\in G} \langle t * v, t * w\rangle^* &&= \langle v, w\rangle^*\,.\end{aligned}$$

Más szóval minden $g \in G$ unitér transzformáció lett. Az új skaláris szorzáshoz is lehet ortonormált bázist választani — tehát a két skaláris szorzás egy bázistranszformációval egymásba vihető. Ezzel beláttuk, hogy a G részcsoport átkonjugálható az $U(n)$ egy részcsoportjába. Ezt szeretnénk általánosítani tetszőleges kompakt részcsoportra! Az átlagolás analogonja az integrálás — ezért csak a bizonyítás elveit vázoljuk.

Először tóruszokra általánosítunk. Az SO(2) elemei forgatások, $[0, 2\pi)$-beli számokkal adhatjuk meg őket. Ezért T^m elemei $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ vektorok, ahol $0 \leq s_i < 2\pi$. Legyen $\varphi : T^m \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ egy folytonos homomorfizmus. Bevezetjük az új skaláris szorzást:

$$\langle v, w\rangle^* = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\langle \varphi(s) * v, \varphi(s) * w\rangle ds_1 ds_2 \ldots ds_m\,.$$

Mint korábban, most is mindegyik $\varphi(s)$ unitér transzformáció lett, azaz a $\varphi(T^m)$ részcsoport alkalmas konjugálással az $U(n)$ egy részcsoportjába vihető.

Térjünk rá az általános esetre. Belátható, hogy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ minden zárt részcsoportján van egy olyan mérték, amelyre tetszőleges $X \subseteq G$ nyílt halmaz mértéke megegyezik mindegyik gX mértékével minden $g \in G$-re. Ezt *Haar-mértéknek* hívják. Minden folytonos függvényt lehet integrálni a Haar-mérték szerint, és ha a részcsoport kompakt, akkor az integrál mindig véges lesz. Tehát a fenti bizonyítás elmondható minden kompakt részcsoportra. Ebből következik a C.2.1. Tétel. □

Ha $A \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ kompakt Abel-féle részcsoport, akkor a C.2.1. Tétel szerint konjugálással elérhetjük, hogy A csupa unitér mátrixból álljon, azaz feltehető, hogy $A \leq U(n)$. Ezt szeretnénk még egyszerűbb alakra hozni: dimenzió szerinti indukcióval keresünk olyan ortonormált bázist $\mathbb{C}^n$-ben, amelyben A minden eleme (egyszerre) diagonális alakú. Legyen hát $\alpha \in A$ olyan mátrix, amelyik még nem diagonális. Ekkor α-nak van olyan $V < \mathbb{C}^n$ sajátaltere, amelyik nem az egész tér. Mivel α unitér, a $V^{\perp}$ merőleges kiegészítő is α-invariáns altér. Mivel A elemei mind unitérek és fölcserélhetők α-val, azért V és $V^{\perp}$ invariánsak A minden elemére. Az indukciós feltétel szerint van V-ben és $V^{\perp}$-ben olyan ortonormált bázis, amelyben A minden eleme diagonális — ezek együttvéve épp megfelelő bázist alkotnak az egész $\mathbb{C}^n$-ben. Ezzel beláttuk:

C.2.4. Tétel. *Legyen $T_{\max} \leq U(n)$ a diagonális mátrixok részcsoportja. Ez n-dimenziós tórusz, és minden $A \leq U(n)$ Abel-féle részcsoport $T_{\max}$-ba konjugálható. A $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ csoport minden kompakt, összefüggő Abel-féle részcsoportja legfeljebb n-dimenziós tórusz, és benne van $T_{\max}$ egy konjugáltjában. Ezért a $T_{\max}$ konjugáltjait* maximális tóruszoknak *hívjuk.*

Ezeknek a módszereknek számtalan alkalmazása van. Lássunk ízelítőül egy véges csoportokról szóló állítást.

C.2.5. Tétel [Jordan]. *Létezik egy, csak az n-től függő N_n korlát a következő tulajdonsággal: minden $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ véges részcsoportnak van legfeljebb N_n-indexű Abel-féle normálosztója.*

Bizonyítás. A 4.12.48. Feladatban megmutattuk, hogy ha a G csoportban van N-indexű részcsoport, akkor ez tartalmazza G-nek egy legfeljebb $N!$-indexű normálosztóját. Így az állítást elég normálosztó helyett részcsoportra belátni.

Az n dimenzió szerinti indukcióval bizonyítunk. Mivel $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ Abel-csoport, ezért $N_1 = 1$ megfelelő. Tegyük föl, hogy n-nél kisebb dimenzióban igaz a tétel. Jelölje H azon 1-determinánsú mátrixok halmazát, melyek egy G-beli mátrix skalárszorosai — ez a H véges részcsoport $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$-ben. Tekintsük azt a $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ homomorfizmust, melynél $(\alpha, A) \mapsto \alpha A$. Mivel G benne van a $\mathbb{C}^\times \times H$ részcsoport képében, azért elég H-ban N_n-indexű Abel-féle részcsoportot találni. A C.2.1. Tétel szerint feltehető, hogy $H \le \mathrm{SU}(n)$.

Minden $\delta < 1$ számra jelölje $H_\delta \le H$ az egységmátrixtól legfeljebb δ távolságra lévő H-beli elemek által generált részcsoportot. Tegyük föl, hogy $H_\delta \neq \{E\}$, legyen $\alpha \in H_\delta$ az E-hez legközelebbi, E-től különböző elem, $\beta \in H_\delta$ pedig az E-hez legközelebbi α-val nem fölcserélhető elem, ha van ilyen. Ha $A = E - \alpha$ és $B = E - \beta$, akkor világos, hogy $0 < \|A\|, \|B\| < \delta$. Az alábbi számolásban kiesnek a lineáris tagok, továbbá a csak A-hatványt vagy csak B-hatványt tartalmazó tagok:

$$\begin{aligned}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} &= (E + A)(E + B)(E - A + A^2 - \ldots)(E - B + B^2 - \ldots) = \\ &= E + AB \cdot (\text{valami}) + BA \cdot (\text{valami})\,,\end{aligned}$$

tehát az $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ kommutátor még közelebb van E-hez, mint α, így csak E lehet. Ez ellentmondás, β nem létezik — tehát α benne van H_δ centrumában. Az $\mathrm{SU}(n)$ csoportban csak n darab λE alakú mátrix van, és ha δ kisebb bármely kettő távolságánál, akkor α nem ilyen alakú mátrix, tehát van legalább két sajátaltere. A H_δ elemei megőrzik α sajátaltereit, ezért H_δ részcsoportja legfeljebb n darab $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ direkt szorzatának (ahol $m < n$). Az indukciós feltétel miatt van legfeljebb N_{n-1}^n-indexű Abel-féle részcsoport H_δ-ban.

Beláttuk tehát, hogy van olyan csak n-től függő δ, hogy H_δ-nak már van egy „kis” indexű Abel-féle részcsoportja. Így elegendő H_δ indexét megbecsülni H-ban. A Haar-mérték segítségével lehet térfogatot mérni $\mathrm{SU}(n)$-ben. Egy H_δ szerinti bal oldali reprezentánsrendszer (4.4.19. Definíció) minden eleme köré $\delta/2$ sugarú gömböt rajzolunk $\mathrm{SU}(n)$-be. Ezek páronként diszjunktak, tehát az össztérfogatuk legfeljebb akkora, mint az $\mathrm{SU}(n)$ teljes térfogata. Ez δ-tól és n-től függő felső becslést ad a $[H : H_\delta]$ indexre. □

C.2.6. Állítás. *Legyen* $B \le \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *a felső háromszögmátrixok részcsoportja (4.11.11. Definíció). Ekkor a következők teljesülnek.*

(1) *B összefüggő, feloldható (4.13.25. Feladat) és maximális az ilyen tulajdonságú részcsoportok között.*

(2) *Aki már tanult topológiát, az beláthatja, hogy a* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/B$ *faktortér kompakt, és B minimális az ilyen tulajdonságú részcsoportok között.*

(3) *A maximális összefüggő és feloldható részcsoportok ugyanazok, mint azok a minimális részcsoportok, amelyek szerinti faktortér kompakt. Az ilyen tulajdonságú részcsoportokat* Borel-részcsoportoknak *hívjuk.*

(4) *Minden Borel-részcsoport konjugált B-vel. Más szóval: minden Borel-részcsoporthoz találhatunk egy olyan bázistranszformációt, hogy az új bázisban ez a részcsoport megegyezik a felső háromszögmátrixok csoportjával.*

♫ A Jordan-normálalak létezése mutatja, hogy minden csoportelem benne van egy Borel-részcsoportban, vagy másképp fogalmazva, a Borel-részcsoportok uniója az egész $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Nagyon gyakori, hogy egy csoportelméleti állítást két lépésben bizonyítanak: geometriai módszerekkel vizsgálják a csoport hatását a $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/B$ faktortéren, és visszavezetik a problémát egy B-re vonatkozó állításra, ez utóbbit pedig csoportelméleti módszerekkel belátják. Amíg $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-ben alig vannak normálosztók, addig B feloldható, és feloldható csoportokra könnyű indukciós bizonyításokat csinálni.

Emlékeztetjük az Olvasót, hogy egy önadjungált mátrix mindig diagonalizálható, továbbá a sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátalterek egyértelműen meghatározzák az önadjungált mátrixot. Ha az A mátrix önadjungált, akkor A^2 és e^A is az — hiszen egy hatványsort tagonként lehet konjugálni és transzponálni. Egy olyan bázisban, ahol A diagonális, A^2 és e^A is az, sőt, mindhárom mátrixnak ugyanazok a sajátalterei is. Tehát a mátrixok kölcsönösen meghatározzák egymást. Ezzel beláttuk:

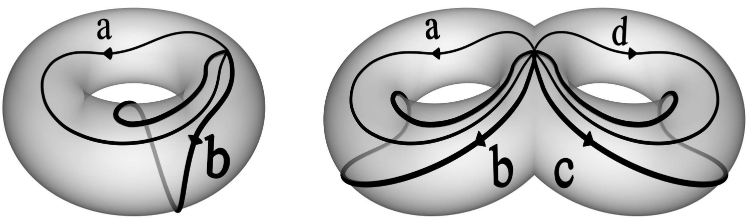
C.2.7. Tétel. *Az exponenciális függvény bijekció az összes önadjungált mátrix teréből a pozitív definit önadjungált mátrixok terébe (lásd a C.1.20. Definíciót). Ezért minden pozitív definit önadjungált mátrixnak van egyetlen önadjungált logaritmusa. Hasonlóan: minden pozitív definit önadjungált mátrixnak van egyértelműen meghatározott pozitív definit önadjungált négyzetgyöke.*

C.3. Végesen generált, végesen prezentált csoportok

Elevenítsük föl a 4.10. szakasz legfontosabb fogalmait, állításait. A 4.10.2. Tétel a szabad csoportokról szól, a 4.10.13. Tétel pedig arról, hogyan adhatunk meg más csoportokat generátorok és definiáló relációk segítségével.

C.3.1. Definíció. Egy csoport nyilván akkor *végesen generált* (azaz akkor van véges generátorrendszere), ha megadható véges számú generátor és akármennyi reláció segítségével. Ha még a relációkból is elég véges sok, akkor *végesen prezentált* csoportról beszélünk.

A geometriában sokféle csoporttal találkozunk. Már megismerkedtünk a transzformációcsoportokkal. A geometria másik — talán a legfontosabb — csoportkonstrukciója a *fundamentális csoport*. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges részhalmaz. Kijelölünk egy $P \in X$ bázispontot. Ezek után olyan folytonos útvonalakat vizsgálunk, amelyek a bázispontból indulnak, ugyanoda érkeznek vissza, és egész úton végig az X halmazban maradnak. Két útvonalat ekvivalensnek tartunk, ha folytonos deformációval az X halmazon belül egymásba alakíthatók. (A topológiában ezeket *homotópoknak* nevezik.) Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\pi_1(X, P)$-vel jelöljük, ez az X fundamentális csoportja. Illetve most még csak halmaz, de csoportot csinálunk belőle: két útvonal szorzata az az útvonal lesz, amelyik először végighalad az egyik úton, utána pedig a másikon; egy útvonal inverze pedig ugyanazt az útvonalat járja be, csak fordított irányban. Az egységelem a *konstans út*: a bázispontból indul, de azután ott is marad, „helyben jár". A szükséges bizonyításokat a topológiakönyvekre hagyjuk. Ugyanez a definíció elmondható minden olyan szituációban, ahol beszélhetünk folytonos útvonalakról és folytonos deformációkról, tehát X tetszőleges topologikus tér lehet, nem csak $\mathbb{R}^n$ részhalmaza. Lássunk néhány példát!



C.1. ábra. A tórusz és a kettő nemű felület fundamentális csoportja.

C.3.2. Példa. Egyszerű alakzatok fundamentális csoportja:

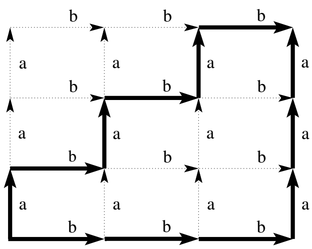
(1) Pont, egyenes, az egész sík és egy körlap fundamentális csoportja az egyelemű csoport.
(2) Körvonal fundamentális csoportja $\mathbb{Z}^+$.
(3) Gömbfelület fundamentális csoportja az egyelemű csoport.
(4) A bal oldali rajzon látható áttetsző tóruszfelület fundamentális csoportját a berajzolt két útvonal generálja, közöttük egyetlen reláció van: $aba^{-1}b^{-1} = 1$. Tehát a csoport éppen $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.
(5) A jobb oldali rajzon látható áttetsző felületet 2 *nemű* vagy 2 *génuszú* felületnek hívják. A fundamentális csoportját a berajzolt négy útvonal generálja, egy relációval:

$$\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1 \rangle .$$

Könnyű bizonyítások. Az első és a harmadik példában azt kell látni, hogy minden útvonal folytonosan deformálható a „konstans út"-ba. A körvonalon haladó útvonalakra definiálható a *körüljárási szám*: irányítjuk a kört, és előjelesen mérjük a megtett utat — amikor ismét a kezdőpontba érkezünk, a megtett út a kör kerületének egész számszorosa, ez az egész szám a körüljárási szám. Könnyű belátni, hogy két útvonal pontosan akkor homotóp egymással, ha megegyezik a körüljárási számuk. □

A C.3.2. Példa (4) *állításának bizonyítása.* Ha a tóruszt felvágjuk az a és b útvonalak mentén, akkor egy téglalapszerű alakzatot kapunk. Az a útvonalból lesz a „téglalap” két „vízszintes” oldala, b-ből pedig a két „függőleges” oldal. Fordítva, a téglalapból is eljuthatunk a tóruszhoz: először két szemközti oldalt összeragasztunk, így egy „csövet” kapunk. Utána ezt a csövet karikába hajtjuk, és a két végét összeragasztjuk, így jutunk a tóruszhoz. A téglalap oldalaiból lesznek ragasztás után az a és b útvonalak, ezért a téglalap oldalvektorait szintén a-val és b-vel jelöljük. Minden tóruszon haladó útvonalat berajzolhatunk a téglalapra is: csak arra kell figyelni, hogy ha az út az egyik oldalon kimegy a téglalapból, akkor a szemközti oldalon jön vissza. Az is világos, hogy az utak — folytonos deformációval — „kifújhatók” a téglalap belsejéből a határára. Tehát minden útvonal homotóp egy olyannal, ami csak az a, b utakat és inverzüket (azaz a megfordításukat) ismételgeti néhányszor. Ezért a és b generálják a fundamentális csoportot. Például, ha körbesétálunk a téglalap határán, éppen az $aba^{-1}b^{-1}$ utat járjuk be. De ez a körséta a téglalap belsejében összehúzható, tehát homotóp a konstans sétával. Ezzel beláttuk az $aba^{-1}b^{-1} = 1$ relációt.

Miért nem kell több relációt keresnünk? Ehhez a ragasztást megismételjük egy kicsit elegánsabban is: először a téglalap eltolt példányaival kicsempézzük a síkot. Az ábránk szimmetrikus az a és a b vektorokkal való eltolásra. Ha azonosítjuk a síknak a $\Gamma = a\,\mathbb{Z}^+ + b\,\mathbb{Z}^+ \leq \mathbb{R}^2$ részcsoport szerint egy mellékosztályba eső pontjait, akkor megint a tóruszhoz jutunk. Úgy érdemes erre a képre gondolni, hogy ha a tóruszt „kitekerjük mindkét irányban”, akkor a csempézett síkot kapjuk. A tóruszon haladó útvonalainkat a csempézett síkban is le tudjuk rajzolni, sőt, itt folytonosak lesznek. De nem feltétlenül érkeznek vissza a kiindulópontba: csak azt tudjuk, hogy a kezdőpont mellékosztályába kerülünk.



Ebből látható, hogy a tórusz fundamentális csoportja $\Gamma = a\,\mathbb{Z}^+ + b\,\mathbb{Z}^+$. □

C.3.3. Megjegyzés. Az ábrán vastag vonallal berajzoltuk az $s = abababa^{-3}b^{-3}$ útvonalat. Az útvonal körbeér, tehát a fundamentális csoportban $s = 1$. *Max Dehn* vette észre, hogy a rajzról több is leolvasható: az útvonal olyan tartományt határol, melyben hat eltolt példánya van a téglalapunknak. Dehn minden téglalapot megfeleltetett az $aba^{-1}b^{-1}$ reláció egy konjugáltjának, és előállította az s útvonalat e hat konjugált reláció szorzataként — a képletben helyhiány miatt az $A = a^{-1}$ és $B = b^{-1}$ jelölést, továbbá a $g^h = hgh^{-1}$ rövidítést használjuk:

$$(abAB)(abAB)^{ba}(abAB)^{baba}(abAB)^{bab}(abAB)^{b}(abAB)^{b^2}$$

(érdemes követni a rajzon). Dehn megmutatta, hogy ez a módszer általánosítható minden végesen prezentált csoportra.

A C.3.2. (5) *állításának bizonyítása.* Tekintsük a kettő nemű felületet (lásd a jobb oldali rajzot a C.1. ábrán). Indítsunk el egy hangyát a bázispont mellől, az a görbe mellett a nyíl irányában úgy, hogy a görbe a hangya bal oldalán legyen. A hangya szorosan a görbe mellett haladjon, és amikor visszajut a bázispont mellé, forduljon be (jobbra), és kövesse tovább a következő görbét. Ezt folytassa, mindig a bal lábai felől kövesse az újabb és újabb görbéket (amilyen sorrendben felbukkannak), a bázispontnál mindig forduljon, és soha ne lépjen rá egyetlen berajzolt görbére sem. Ellenőrizze az Olvasó, hogy a hangya rendre az a, b, a^{-1}, b^{-1}, c, d, c^{-1} és d^{-1} görbék mentén halad, míg végül visszajut a kiindulópontba. Ezért ha a kettő nemű felületet a megadott görbék mentén felvágjuk, egy nyolcszöghöz jutunk, melynek pereme éppen a hangya által bejárt útvonal. Ugyanúgy, mint a tórusz esetében, most is látjuk, hogy a négy útvonal generálja a fundamentális csoportot, és a nyolcszög peremén körbe leolvasva a betűket éppen a C.3.2. (5)-ben megadott relációt kapjuk. A sík csempézése azonban egy kicsit trükkösebb: ragasztás után a nyolcszög minden csúcsa egy pontban találkozik, tehát olyan nyolcszöget keresünk, amelyben a szögek összege éppen 360 fok, és megfelelő oldalai egyenlő hosszúak. Euklideszi geometriában ilyen nincs, de szerencsére a Bolyai-geometriában megrajzolható. A (4) pont bizonyításában téglalapunk volt, annak eltoltjaival csempéztük ki a síkot, és észrevettük, hogy az összes felhasznált eltolás egy $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$-szal izomorf csoportot alkot. Most egy nyolcszöget találtunk, az ő eltoltjai is csempézik a Bolyai-síkot, jelöljük most is Γ-val az ehhez szükséges eltolások részcsoportját. A (4)-gyel ellentétben ez a Γ nem kommutatív, első pillantásra nem látszik, hogy milyen csoportot kaptunk. Az viszont most is igaz, hogy ha az egy Γ-pályára eső pontokat azonosítjuk egymással, akkor visszakapjuk a kettő nemű felületet. Követve a korábbi gondolatmenetünket, a felületen haladó utakat most a Bolyai-síkra rajzoljuk. Ez a trükk most is azonosítja a fundamentális csoportot Γ-val, és az is kiderül, hogy a megadott prezentáció helyes, nincs extra reláció a generátorok közt. □

♫ Az előző bizonyításban kiderült, hogyan lehet megadni a Γ csoportot négy generátorral és egy relációval. Mégsem nyilvánvaló, hogy mi ez a csoport. Később a C.3.19. Tételben látni fogjuk, hogy megoldható benne a szóprobléma. Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy a Γ csoport nagyon sok tulajdonsága hasonlít a szabad csoportokéhoz. Például minden végtelen indexű részcsoportja szabad.

C.3.4. Megjegyzés. A C.3.2. (4) és (5) bizonyításában használt, útvonalakról szóló érvelésünk sokkal általánosabban is működik! Legyen X egy topologikus tér (ez felel meg korábbi euklideszi-, illetve Bolyai-síknak) és Γ az X folytonos transzformációinak egy csoportja (az idézett bizonyításokban ezt szintén Γ-val jelöltük). Tegyük föl, hogy a Γ pályáinak nincs torlódási pontja, és az egységelemen kívül mindegyik transzformáció fixpontmentes. (Mindkét példa ilyen, hiszen egy csempézésben az egy pályán lévő pontok távolsága nem lehet kisebb, mint a csempe legkisebb oldala.) Azonosítsuk az egy pályára eső pontokat, az így kapott teret X/Γ-val szokták jelölni. (Korábban ez volt a tóruszfelület, illetve a kettő nemű felület.) Rögtön fölmerül a kérdés: „hogy néz ki”, „milyen alakú” ez az X/Γ tér? Az X/Γ-beli útvonalakat most is rajzolhatjuk X-be, megint azt vizsgáljuk, bezárulnak-e vagy sem. Ez alapján X és X/Γ kapcsolatát így szemléltethetjük: X-et a Γ-beli szimmetriák mentén „felcsavarva” kapjuk X/Γ-t, vagy fordítva, a X/Γ-beli hurkok egy részét „kitekerve” kapjuk X-et. Ezt precízen is kimondjuk: Az X fundamentális csoportja azonosítható egy normálosztóval X/Γ fundamentális csoportjában, a faktorcsoport pedig izomorf Γ-val. Speciálisan, ha X fundamentális csoportja az egyelemű csoport, akkor X/Γ fundamentális csoportja izomorf Γ-val.

C.3.5. Példa. A bekezdés végére látni fogjuk, hogy az előző példákban szereplő Γ csoportok diszkrét részcsoportok, előtte azonban keressünk egyszerűbb példákat. Nyilván $(\mathbb{Z}^+)^n$ diszkrét részcsoport az $\mathbb{R}^n$ additív csoportjában. Könnyen megmutatható, hogy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ kompakt részcsoportjaiban (például $\mathrm{O}(n)$-ben és $U(n)$-ben) minden diszkrét részcsoport véges. Fizikában, kémiában nagyon fontosak a kristályok szimmetriacsoportjai, ezek nem mások, mint az $\mathrm{AGL}(3,\mathbb{R})$ diszkrét részcsoportjai. A C.2.5. Tétel bizonyításának mintájára ezeket viszonylag könnyű meghatározni. A $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ csoport, vagyis az invertálható egész elemű mátrixok részcsoportja diszkrét, ez legkönnyebben úgy látható, ha a mátrixok nagyságát most másképpen mérjük: az elemek abszolút értékének maximumával. Így két különböző egész elemű mátrix távolsága legalább 1 lesz. A Bolyai-sík egybevágóságainak csoportja is beágyazható zárt részcsoportként $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$-be, tehát van értelme ott is diszkrét részcsoportokról beszélni. Belátható, hogy a C.3.2. (5) bizonyításában talált Γ részcsoport tényleg diszkrét.

C.3.6. Példa. Legyen $G \leq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ egy zárt részcsoport, $\Gamma \leq G$ pedig egy diszkrét részcsoport. Elismételjük a C.3.4. Megjegyzésben látott konstrukciót $X = G$-vel. Most a G/Γ faktortérnek algebrai jelentése is van: Γ mellékosztályainak a tere, de G/Γ általában csak topologikus tér, nem csoport! Ha G izomorf a síkbeli vektorok additív csoportjával, akkor Γ lehet egyelemű, izomorf $\mathbb{Z}^+$-szal, vagy $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$-szal. (Gondolkodjon el az Olvasó, miért nincs másféle diszkrét részcsoport.) A G/Γ faktortér ezekben az esetekben rendre a sík, egy henger, illetve egy tóruszfelület.

Ezen a példán jól látszik, hogy a diszkrét részcsoportok között vannak „soványak” és „kövérek”. Minél „kövérebb” a részcsoport, annál „kisebb” lesz a faktortér. Később fontosak lesznek a „nagyon kövér” részcsoportok, ezekről szól a következő definíció:

C.3.7. Definíció. Legyen $G \leq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ egy zárt részcsoport, $\Gamma \leq G$ pedig egy diszkrét részcsoport. A G csoport Haar-mértéke (lásd a C.2.1 bizonyításában) ad egy mértéket a G/Γ téren is. Azt mondjuk, hogy Γ *rács* G-ben, ha a G/Γ faktortér mértéke véges. Ilyenkor minden rajta értelmezett folytonos függvény integrálja véges. Fontos speciális eset: ha G/Γ kompakt, akkor Γ egy rács.

C.3.8. Példa. Legyen $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ és $\Gamma = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ az egész elemű, 1 determinánsú mátrixok csoportja. Ez is diszkrét részcsoport, de most sokkal nehezebb elképzelni az $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ faktorteret. Ezért minden geometriai információ, pl. a fundamentális csoport is, sokat segít a tér vizsgálatában. Belátható, hogy ha $n > 2$, akkor $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ fundamentális csoportja az egyelemű csoport, tehát a faktortér fundamentális csoportja éppen $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. Fontos észrevétel, hogy $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ „nagy” részcsoport, az egész $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-ben „mindenütt ott van”, azaz a G-beli mátrixok Γ-tól mért távolsága korlátos. Ezért a faktortér kompakt, tehát $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ egy rács.

A következő állítás is elemi módon bizonyítható.

C.3.9. Tétel. *Minden $X \subset \mathbb{R}^n$ korlátos zárt halmaz fundamentális csoportja végesen prezentált. Fordítva: minden végesen prezentált csoport előáll, mint egy ilyen X fundamentális csoportja.*

Legyen X egy gráf, tehát néhány csúcs és az őket összekötő élek. Most úgy mérjük a távolságot, hogy minden él hosszát egységnyinek vesszük. Minden folytonos útvonal könnyen átalakítható olyanná, amelyik egyenletesen egységnyi sebességgel halad, és élek belsejében soha nem fordul vissza. Egy ilyen átalakított útvonalat úgy adhatunk meg, hogy felsoroljuk a menet közben használt éleket. (Segít, ha először elnevezzük és irányítjuk az éleket.) Az utak tehát az élekből és inverzükből alkotott szavak — a 4.10.2. Tétel bizonyításában éppen ilyen szavakból állt a szabad csoport. Tehát a gráf fundamentális csoportja (akárhová választhatjuk a bázispontot) részcsoportja lesz az élek által generált szabad csoportnak. A 4.10.6. Tétel szerint minden részcsoport szabad csoport. Most azonban nem akarunk a Nielsen–Schreier-tételre hivatkozni, mert azt éppen a gráfok fundamentális csoportja segítségével fogjuk bizonyítani (C.3.16. Példa). Ezért nekiállunk egyszerűsíteni a gráfot. Először is elhagyjuk azokat a komponenseket, amelyek nem tartalmazzák a bázispontot. Ezután választunk egy feszítő fát, azaz egy maximális körmentes részgráfot. A részgráfot összehúzzuk egyetlen pontba — könnyű látni, hogy ettől nem változik meg a fundamentális csoport. Végül olyan gráfhoz jutottunk, amelynek egyetlen csúcsa van (ahová összehúztuk a részgráfot), és abból indul ki néhány hurokél. Mivel csak egy csúcs van, az éleket akármilyen sorrendben lehet kombinálni — tehát most már a fundamentális csoport nem csupán részcsoport, hanem az élek által generált teljes szabad csoport. Ezt az utolsó lépést meg is fordíthatjuk: minden szabad csoportból gyárthatunk egy olyan gráfot, amelynek egyetlen csúcsa van, és éppen annyi éle, mint amennyi a generátorok száma. Tehát:

C.3.10. Tétel. *Egy gráf fundamentális csoportja szabad csoport. Minden szabad csoport izomorf egy gráf fundamentális csoportjával. Véges összefüggő gráfra:*

$$(\textit{fundamentális csoport rangja}) = (\textit{élek száma}) - (\textit{csúcsok száma}) + 1\,.$$

C.3.11. Tétel. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$*-nek van* 2 *rangú szabad részcsoportja.*

Bizonyítás. Képzeljük el, hogy a számegyenest körbe hajlítjuk, és a két végét a ∞ pont segítségével összeragasztjuk — így egy körvonalat kapunk. A 4.14.4. Gyakorlatban (és a 245. oldalon, az apró betűs elmélkedésben) kiderült: a $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ csoport nem más, mint a törtlineáris leképezések csoportja, és ezek éppen a mi körvonalunkon hatnak. Tekintsük a következő törtlineáris leképezéseket:

$$\alpha(x) = 100x\,, \qquad \varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}\,, \qquad \beta = \varphi^{-1}\alpha\varphi\,.$$

Az α leképezésnek két fixpontja van: 0 „taszító”, ∞ pedig „vonzó”, azaz minden más pont 0-tól távolodik és ∞-hez közeledik. Legyen A^- a legfeljebb $1/10$ abszolút értékű számok halmaza, A^+ pedig a legalább 10 abszolút értékű számok halmaza. Látjuk, hogy α az A^- komplementumát teljes egészében az A^+ belsejébe képezi, és fordítva, α^{-1} az A^+ komplementumát mindenestül az A^--ba viszi. A β leképezés konjugáltja az α-nak, nem meglepő tehát, hogy nagyon hasonlóan viselkedik. Mivel $\varphi(1) = 0$ és $\varphi(-1) = \infty$, ezért β-nak 1 a taszító és -1 a vonzó fixpontja. Legyen $B^+ = \varphi^{-1}(A^+)$ és $B^- = \varphi^{-1}(A^-)$, ezek diszjunktak A^+-tól és A^--tól, és a konjugáltság miatt ezekre is teljesül: β teljes egészében B^+-ba viszi a B^- komplementumát, β^{-1} pedig B^--ba viszi B^+ komplementumát. A következő lemma miatt α és β szabad csoportot generál. □

C.3.12. Lemma [Pingpong-lemma]. *Legyen G permutációcsoport az X halmazon. Ha találunk az $\alpha, \beta \in G$ elemekhez olyan $A^-, A^+, B^-, B^+ \subseteq X$ páronként diszjunkt részhalmazokat, amelyekre*

$$\begin{aligned} &\alpha(A^+ \cup B^- \cup B^+) \subseteq A^+\,, && \alpha^{-1}(A^- \cup B^- \cup B^+) \subseteq A^-\,,\\ &\beta(B^+ \cup A^- \cup A^+) \subseteq B^+\,, && \beta^{-1}(B^- \cup A^- \cup A^+) \subseteq B^- \end{aligned}$$

teljesül, akkor α és β szabad részcsoportot generál.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy egy egyszerűsíthetetlen szó soha nem lesz egyenlő 1-gyel. Tekintsük például a $w = \alpha^{-1}\beta^{20}\alpha$ egyszerűsíthetetlen szót. Az utolsó α tényező a négy kiválasztott halmazunkból hármat az A^+-ba képez. A β^{20} faktor első β-ja ezt az A^+ halmazt mindenestül B^+-ba viszi, majd a többi tizenkilenc β tényező is B^+-ban tartja az eredményt. Végül az utolsónak alkalmazott α^{-1} faktor az egész B^+ halmazt szőröstül-bőröstül A^--ba képezi. Tehát w három halmazunkat is A^--ba viszi, nem lehet az identitás. Ugyanez a tulajdonsága megvan mindegyik egyszerűsíthetetlen szónak: az első lépésben három halmazunk képe ugyanoda kerül, és a további lépésekben sem válnak el egymástól. Ez pedig bizonyítja a lemmát. □

A Pingpong-lemmának számtalan variánsa van. Az egyik legnevezetesebb alkalmazása a Tits-alternatíva. A bizonyítás elég bonyolult, de a csattanó ugyanaz, mint a C.3.11. Tételben: vonzó és taszító fixpontokat keresünk, majd ezek környezeteivel pingpongozunk. Íme, a tétel.

C.3.13. Tétel [Tits-alternatíva]. *Tetszőleges $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ végesen generált részcsoport vagy tartalmaz véges indexű feloldható normálosztót, vagy pedig van 2 rangú szabad részcsoportja. (A $\mathbb{C}$ helyett bármilyen testet is írhatunk.)*

C.3.14. Definíció. Legyen G végesen generált csoport, $X \subseteq G$ pedig egy véges generátorrendszer. A csoport *Cayley-gráfjának* a csúcsai a csoport elemei. Minden $g \in G$ elemhez és $x \in X$ generátorhoz egy irányított él tartozik: a g csúcsot köti össze a gx csúccsal, és az élre ráragasztunk egy x címkét. Két csúcs *távolsága* az őket összekötő legrövidebb élsorozat hossza — szabad az irányítással szemben haladni.

A Cayley-gráf közeli rokona a Cayley-reprezentációnak (4.5.24. Tétel). Minden $h \in G$ elemnek megfelel a gráf egy transzformációja: a csúcsokat a $g \mapsto hg$ szabály szerint permutálja (ez éppen a Cayley-reprezentáció), és a (g, gx) élet a (hg, hgx) élbe transzformálja. A gráf függ a generátorrendszer választásától, viszont sok-sok geometriai tulajdonsága csak a csoporton múlik.

C.3.15. Példa. A 4.5.34. Feladat útmutatójában megkonstruáltunk egy Cayley-gráfot, ott a generátorrendszer az egész csoport volt. A C.3.2. Példa (4) és (5) pontjait úgy bizonyítottuk, hogy menet közben megrajzoltuk a fundamentális csoport Cayley-gráfját: a csempézés csúcsait, éleit, és a rájuk írt címkéket.

C.3.16. Példa. Legyen $F = \langle a, b \rangle$ a két elem által generált szabad csoport, jelölje $\mathcal{G}$ a Cayley-gráfját. Ez egy olyan szerteágazó fa, amelyben minden csúcsból négy él indul ki, a, b, a^{-1}, b^{-1} címkékkel. (A gráfban azért nem lehet kör, mert az egy relációt adna a csoportban.) Legyen $H \leq F$ egy tetszőleges részcsoport! Láttuk, hogy H permutálja $\mathcal{G}$ csúcsait és éleit. Azonosítsuk egymással az egy H-pályán lévő csúcsokat és az egy H-pályán lévő éleket, az így kapott $\mathcal{G}/H$ faktorgráf fundamentális csoportja — a C.3.4. Megjegyzés szerint — izomorf H-val. A C.3.10. Tétel miatt H szabad csoport. Ezzel beláttuk a Nielsen–Schreier-tételt (4.10.6. Tétel).

C.3.17. Példa. Vizsgáljuk tovább az $F = \langle a, b \rangle$ szabad csoport Cayley-gráfját. A gráf csúcsai, amint a 4.10.2. Tétel bizonyításában láttuk, az a, b, a^{-1}, b^{-1} betűkből készített egyszerűsíthetetlen szavak. Ha kihagyjuk belőle az 1 csúcsot (azaz az üres szót), akkor négy darabra esik szét: azok a szavak kerülnek egy helyre, amelyek ugyanazzal a betűvel kezdődnek. Ha viszont az 1 négy szomszédját is eltávolítjuk, akkor tizenkét darabra esik a gráf, az első két betű alapján. Mind a tizenkét darabot azonosíthatjuk az előző négy valamelyikével: például az ab-vel kezdődő szavak halmazát az a^{-1} csoportelem éppen a b-vel kezdődőek halmazába transzformálja. Tehát felvágtuk az F Cayley-gráfját 12 darabra (és még öt kimaradt elemre), majd a darabokat addig mozgattuk a csoport elemeivel, míg a Cayley-gráfot háromszorosan lefedtük (még marad is két fölösleges elemünk). Neumann János *amenábilis csoportoknak* nevezte el azokat a csoportokat, amelyekben nem lehet ilyen átdarabolást végezni. Egy meglepő következmény:

C.3.18. Tétel [Banach–Tarski-paradoxon]. *Egy tömör gömb feldarabolható véges sok részhalmazra úgy, hogy a darabokból három, az eredetivel egybevágó gömb állítható össze.*

Bizonyítás. A tömör gömb szimmetriacsoportja SO(3). A 4.8.43. Feladat miatt ez egyszerű csoport, tehát nincs nagy feloldható normálosztója. Ezért a Tits-alternatíva szerint SO(3)-ban van egy 2 rangú szabad F részcsoport. (A kíváncsi Olvasó megpróbálhatja ezt Tits tétele nélkül belátni!) Az F csoportot két elem generálja, tehát megszámlálható. Minden forgatásnak egy átmérőn vannak a fixpontjai, így az F elemeinek összes fixpontja megszámlálható sok átmérő uniója. Ennek a komplementumában F minden pályája izomorf — mint permutációreprezentáció — a Cayley-reprezentációval. Ezért minden egyes pályára működik a fenti átdarabolásos trükk. A bizonyítás többi része már csak vacakolás a kimaradt pontokkal. □

A 231. oldalon, az apró betűs részben láttuk, hogy a szóprobléma csoportokban általában nem eldönthető — bizonyos csoportokban azonban igen. A kérdéskört először Max Dehn vizsgálta 1911-ben, és belátta:

C.3.19. Tétel [Max Dehn]. *Ha G egy zárt felület fundamentális csoportja, akkor megoldható benne a szóprobléma.*

Bizonyítás. A C.3.2. Példában három zárt felülettel is találkoztunk: a gömbbel, a tórusszal és a kettő nemű felülettel. Az egyelemű csoportban és $(\mathbb{Z}^+)^2$-ben könnyen eldönthető a szóprobléma, ezért a kettő nemű felületre koncentrálunk, a fundamentális csoportját G-vel jelöljük. A C.3.2. Példa bizonyításában egy nyolcszög eltoltjaival csempéztük ki a Bolyai-síkot, G éppen az ehhez szükséges eltolások csoportja volt. A C.3.15. Példában láttuk, hogy G Cayley-gráfja nem más, mint a csempézés csúcsai és élei. Legyen w egy generátorokból és inverzeikből álló szorzat. Amint a C.3.3. Megjegyzésben tettük, most is elkészítjük a w-nek megfelelő sétát a Cayley-gráfon: választunk egy kiinduló csúcsot, majd sorban olvassuk a w-ben szereplő generátorokat, és minden esetben a megfelelő címkéjű élen lépünk tovább. Ha pedig egy generátor inverzét olvassuk, akkor az ugyanilyen címkéjű, de fordított irányú élen haladunk. Pontosan akkor lesz $w = 1$, ha a séta visszaérkezik a kiindulópontba. Dehn megmutatta: van egy L hosszúság a következő jó tulajdonsággal: minden L-nél hosszabb körsétának van olyan legfeljebb L hosszúságú szakasza, ami lerövidíthető. (Ez könnyű, ha valaki ismeri a Bolyai geometriát.) A szakasz és a rövidítésének inverze egy $2L$-nél rövidebb körsétát alkot. Most már sejthető az algoritmus: csinálunk egy listát a $2L$-nél rövidebb körsétákról. A lista segítségével addig rövidítjük a szorzatunkat, ameddig csak lehet. Ha teljesen elfogy, akkor egyenlő 1-gyel, ha nem fogy el, akkor nem egyenlő vele. Ugyanez a módszer működik az összes többi zárt felületre is. □

C.3.20. Megjegyzés. Misha Gromov *hiperbolikus csoportoknak* nevezte el azokat a csoportokat, amelyek Cayley-gráfjához található ilyen L hosszúság. Tehát a szóprobléma hiperbolikus csoportokban is megoldható. Gromov azt sejtette, hogy „majdnem minden végesen prezentált csoport” hiperbolikus. Ezt később Olsanszkij precízen definiálta, és be is bizonyította.

Nilpotens csoportokkal a 4.13. szakaszban találkoztunk. Többek között a 4.13.25. Feladatban kiderült, hogy az unitrianguláris mátrixok (4.11.11. Definíció) nilpotens csoportot alkotnak. Malcev bebizonyította, hogy ez a csoport bizonyos értelemben univerzális:

C.3.21. Tétel [Malcev]. *Tetszőleges végesen generált nilpotens csoport végesen prezentált, és izomorf az unitrianguláris mátrixok csoportjának egy diszkrét részcsoportjával (C.1.1. Definíció). Ebből az is következik, hogy végesen generált nilpotens csoportban a szóprobléma megoldható (mátrixszorzással).*

Egy G Lie-csoportban könnyű kiszámítani (egy integrállal) az r sugarú gömb térfogatát. Az eredmény nilpotens csoportokra polinom nagyságrendű, minden más esetben a sugár exponenciális függvénye. Nagy meglepetést okozott, amikor Gromovnak sikerült ezt a geometriai karakterizációt végesen generált csoportokra átvinnie:

C.3.22. Tétel [Gromov]. *Legyen G végesen generált csoport. Jelölje $\gamma(n)$ a Cayley-gráf azon csúcsainak számát, amelyeknek az egységelemtől mért távolsága legfeljebb n. A G csoportnak pontosan akkor van véges indexű nilpotens részcsoportja, ha a γ függvény felülről becsülhető egy P polinommal: $\gamma(n) < P(n)$ minden n-re.*

A tétel egyik fele könnyű: Malcev C.3.21. Tétele miatt egy végesen generált nilpotens csoport beágyazható az unitrianguláris mátrixok csoportjába, és ott a $\gamma(n)$ függvény fölülről becsülhető az n sugarú gömb térfogatával (vesse össze az Olvasó a C.2.5. Tétel bizonyításával). A bizonyítás másik fele viszont megdöbbentő! Induljunk ki egy olyan csoportból, amelyben $\gamma(n) < P(n)$. Gromov elkezdte változtatni a Cayley-gráfon definiált távolságot: az m-edik lépésben a szokásos távolság m-edrészét vette. Így metrikus terek egy sorozatát kapta. Definiált egy határérték-fogalmat ilyen sorozatokra, és belátta, hogy ennek a bizonyos tér-sorozatnak van határértéke (ehhez is szükség van a $\gamma(n) < P(n)$ becslésre!), mégpedig — meglepő módon — egy összefüggő Lie-csoport! Erről a Lie-csoportról könnyű látni, hogy egy n sugarú gömb térfogata körülbelül $\gamma(n)$, tehát kevesebb $P(n)$-nél. Ezért ez a Lie-csoport nilpotens. Ebből lehet visszakövetkeztetni az eredeti csoport tulajdonságaira.

C.4. Reziduálisan véges csoportok

C.4.1. Definíció. Egy G csoport *reziduálisan véges*, ha minden $g \neq 1$ elemhez van G-nek olyan véges faktorcsoportja, amelyben g képe nem az egységelem.

Átfogalmazhatjuk a definíciót: egy csoport reziduálisan véges, ha a véges indexű normálosztók metszete $\{1\}$. Másik átfogalmazás: egy csoport reziduálisan véges, ha izomorf véges csoportok direkt szorzatának egy részcsoportjával. Reziduálisan véges csoportokban a szóprobléma megoldható: keresünk olyan véges faktorcsoportot, amelyikben a kérdéses szó nem 1-et ad, és ezzel párhuzamosan keresünk olyan átalakítást, ami bizonyítja, hogy a szó mégis 1-et ad. A két keresés közül valamelyik előbb-utóbb célhoz ér.

Könnyű mutatni nem reziduálisan véges csoportot: minden végtelen egyszerű csoport ilyen (például SO(3), lásd a 4.8.43. Feladatot), és ilyen minden nem egyelemű osztható Abel-csoport is (7.7.13. Definíció), például a $\mathbb{Q}^+$, a $\mathbb{Q}^+ / \mathbb{Z}^+$ faktorcsoport, vagy a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ kváziciklikus csoport (7.7.16. Definíció, lásd a 7.7.19. Feladatot és a 7.7.20. Tételt is).

Végesen generált példát nehezebb készíteni. Eddig két ilyennel találkoztunk: a Tarski-monstrum (4.10.20. Tétel) nem reziduálisan véges, és az a csoport sem az, amelyikben a szóprobléma nem oldható meg (231. oldal, apró betűs rész). Némi munkával a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ faktorcsoport is beágyazható egy végesen generált csoportba. Bizonyítás nélkül megemlítjük *Graham Higman* híres példáját:

C.4.2. Példa [Graham Higman]. Legyen G az alábbi csoport:

$$G = \langle x, y, z, t \mid yxy^{-1} = x^2,\ zyz^{-1} = y^2,\ tzt^{-1} = z^2,\ xtx^{-1} = t^2 \rangle .$$

Ez a csoport végtelen, és nincs véges faktorcsoportja (tehát nem reziduálisan véges). A G csoportnak van egyszerű faktora — így létezik végesen generált, végtelen egyszerű csoport.

C.4.3. Probléma. Máig megoldatlan kérdés, hogy van-e olyan hiperbolikus csoport (C.3.20), amelyik nem reziduálisan véges. Az sem ismert, hogy van-e végesen prezentált Tarski-monstrum (4.10.20. Tétel).

C.4.4. Tétel. *A* GL$(n, \mathbb{C})$ *végesen generált részcsoportjai reziduálisan végesek. Minden végesen generált nilpotens csoport és minden végesen generált szabad csoport reziduálisan véges.*

Az első két állítást Malcev bizonyította, a harmadikat Neumann János és Wigner Jenő.

Bizonyítás. Legyen $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tetszőleges végesen generált részcsoport. A generátorrendszer véges sok mátrixból áll, ezeknek összesen véges sok eleme van, amelyek egy $R \subseteq \mathbb{C}$ részgyűrűt generálnak. Világos, hogy $G \leq \mathrm{GL}(n, R)$. Könnyű belátni, hogy R reziduálisan véges gyűrű (ennek definíciója analóg a csoportokéval), ezért az $R^{n\times n}$ mátrixgyűrű is reziduálisan véges, tehát minden részcsoportja — köztük G — is reziduálisan véges. A C.3.21. Tétel szerint minden végesen generált nilpotens csoport mátrixcsoport, tehát reziduálisan véges. A C.3.11. Tétel miatt a két elem által generált szabad csoport is reziduálisan véges. Így a 4.10.8. Feladat miatt a végesen generált szabad csoportok is reziduálisan végesek. $\square$

Érdemes felidézni Magnus bizonyítását is. Legyen R az x, y változókból alkotott, nemkommutatív hatványsorok gyűrűje, és jelölje $M = (x, y) \triangleleft R$ a maximális ideált. Az M^i ideál olyan hatványsorokból áll, amelyekben minden tag legalább i-edfokú, ezért $\cap_{i=1}^{\infty} M^i = \{0\}$. Az $(1-x)$ és $(1-y)$ elemek invertálhatók, például $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$. Magnus belátta, hogy az általuk generált $G = \langle 1-x, 1-y \rangle$ részcsoport (a szorzásra nézve) szabad. Tekintsük az alsó centrális láncot (4.13.21. Definíció):

$$G^{(1)} = [G, G], \quad G^{(2)} = [G, G^{(1)}], \quad G^{(3)} = [G, G^{(2)}], \ldots .$$

Világos, hogy G az $1 + M$ mellékosztályban van. Ebből azonnal következik, hogy $G^{(i)} \subseteq 1 + M^i$ minden i-re (lásd a 4.13.25. Feladat megoldását), tehát $\cap_{i=i}^{\infty} G^{(i)} = \{1\}$. Így elég belátnunk, hogy minden $G/G^{(i)}$ faktorcsoport reziduálisan véges. Ezek a faktorok nilpotens csoportok (ez könnyű), Malcev tétele miatt tehát reziduálisan végesek. Érdemes megjegyezni, hogy a $G/G^{(i)}$ faktorcsoportokat hívják *szabad nilpotens csoportoknak*.

Térjünk vissza a *Burnside*-problémához (lásd 4.10.17. Definíció). Burnside azt kérdezte, hogy véges-e minden olyan végesen generált csoport, amelyben az elemek rendje legfeljebb N. A 231. oldalon már láttuk, hogy nem: sok N-re lehet a csoport végtelen. A modern algebra egyik legmélyebb tétele arról szól, hogy a reziduálisan véges csoportok körében más a helyzet.

C.4.5. Tétel [Zelmanov]. *Ha egy végesen generált, reziduálisan véges csoportban minden elem rendje kisebb egy N korlátnál, akkor az a csoport véges.*

Ezért az eredményéért Zelmanov 1994-ben Fields-érmet kapott. Valójában ő véges p-csoportok elemszámára adott felső korlátot a generátorok számának és az elemek maximális rendjének függvényében. Ebből következik a fenti tétel, a véges egyszerű csoportok klasszifikációjának felhasználásával.

Térjünk vissza most a C.3.8. Példához, ott az $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ rácsot vizsgáltuk. Ez végesen generált mátrixcsoport, tehát reziduálisan véges. Sok számelméleti és csoportelméleti kérdés kapcsán fölmerül, hogy jó lenne pontosan meghatározni az összes véges indexű részcsoportját. Könnyen készíthetünk ilyeneket: minden k-ra tekintsük az $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}_k)$ homomorfizmusokat. Ezek képe véges, a magjukat *kongruencia-részcsoportoknak* nevezzük.

C.4.6. Tétel. *Ha* $n > 2$, *akkor* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ *minden véges indexű részcsoportja tartalmaz kongruencia-részcsoportot.*

A tételt Bass, Lazard és Serre, valamit tőlük függetlenül Mennicke bizonyította. Azt már Klein is tudta, hogy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-ben sok olyan véges indexű részcsoport létezik, amely nem tartalmaz kongruencia-részcsoportot. Láttuk, hogy $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ rács, ezért azt reméljük, hogy „sok mindenre emlékszik” $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ geometriájából. Például, $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ egyszerű (4.14.5. Tétel), ezért reméljük, hogy $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$-nek csak kevés normálosztója van.

C.4.7. Tétel. *Legyen* $n > 2$. *Ekkor* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ *minden végtelen indexű normálosztója benne van a centrumában, azaz minden eleme* $\pm E$.

C.4.8. Tétel [Margulis merevségi tétele]. *Tegyük föl, hogy* $n > 2$. *Ekkor minden* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ *homomorfizmus, melynek végtelen a képe, kiterjeszthető egy folytonos* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ *homomorfizmussá. Fontos speciális eset:* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ *minden diszkrét,* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$*-vel izomorf részcsoportja az* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ *konjugáltja.*

Mindkét tételt Margulis bizonyította, sokkal általánosabb rácsokra. A rácsokkal kapcsolatos munkáit 1978-ban Fields-éremmel, 2005-ben pedig Wolf-díjjal jutalmazták. Matematikában a „merevség” azt jelenti, hogy valami nem „deformálható”. Mi a rács elemeit próbáljuk folytonosan mozgatni, vigyázva arra, hogy menet közben részcsoport maradjon: a tétel szerint csak konjugálással mozgathatjuk, ami „nem számít”. A két tétel általánosításaiban az $n > 2$ kikötés helyett azt kell megkövetelni, hogy a maximális tórusz (C.2.4. Tétel) legalább kétdimenziós. Ez lényeges feltétel, ehhez kapcsolódó példával már találkoztunk: legyen Γ a kettő nemű felület fundamentális csoportja. A C.3.2. (5) Példa bizonyításában láttuk, hogy Γ egy rács a Bolyai-sík mozgásainak csoportjában, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-ben (lásd a C.6.9. Állítást). A konstrukció nem egyértelmű, a kiinduló nyolcszöget mi választhatjuk, folytonosan deformálhatjuk. Különböző nyolcszögek Γ más és más beágyazásaihoz vezetnek, amelyek általában nem konjugáltak.

C.5. Mozgásegyenletek a fizikában

Először egy egydimenziós mozgást vizsgálunk, egy rugó végén lógó test függőleges mozgását. A mozgás leírásához a következő fizikai mennyiségeket használjuk: t, x, v és a jelöli rendre az óraindítás óta eltelt időt, a test helyzetét (milyen magasan van), sebességét és gyorsulását. Ezek mindegyike előjeles szám, például pozitív sebesség fölfelé haladó mozgást jelent, negatív sebesség lefelé haladó mozgást, nulla sebesség pedig egy pillanatnyi megállást. Szokás szerint a t időt tekintjük változónak, $x(t)$, $v(t)$ és $a(t)$ pedig függvények: ahogy telik az idő, változhatnak a test adatai. A mozgás leírásához elegendő az $x(t)$ függvényt megadni, de kiderül, hogy egyszerűbb az $x(t)$, $v(t)$ párt egyszerre tekinteni. Ezekhez hozzáveszünk még egy 1-est (ez csak egy trükk, ami a számolást egyszerűsíti), tehát az $(x, v, 1)$ háromdimenziós vektorral (és annak időbeli változásával) fogunk számolni. A vektor időbeli változásának ütemét (azaz a deriváltját) a $(v, a, 0)$ vektor adja meg. Szemléletesen: ha megadjuk az $(x, v, 1)$ kiindulópontot, és minden pillanatban megadjuk a $(v, a, 0)$ pillanatnyi változást, akkor a változásokat „összegezve” meg kell kapnunk a mozgás teljes leírását.

F jelöli majd a testre ható erőt, és az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a test tömege $m = 1$. Lássuk, milyen erőhatások érik ezt a testet!

- A rugó húzóereje. A nyugalmi helyzet közelében ez $-kx$, ahol k a rugóállandó.
- A légellenállás. Nagyon lassú mozgás esetén ez jó közelítéssel $-\chi v$, ahol χ az arányossági tényező, a hétköznapi életben előforduló mozgásoknál azonban inkább egy v^2-tel arányos becslést használnak.
- Gravitációs erő. Ez $-mg = -g$, ahol g a nehézségi gyorsulás.

Gondolja meg az Olvasó, hogy mit jelentenek a negatív előjelek! Feltételezzük, hogy a mozgás nagyon lassú, és a kísérlet során minden más hatás elhanyagolható. Látható, hogy a testre ható erőt nem az idő, hanem a helyzet és a sebesség függvényeként tudjuk kényelmesen megadni:

$$F(x, v) = -kx - \chi v - g\,.$$

Tipikus feladat, hogy adott az $(x_0, v_0, 1)$ kiindulópont és az $F(x, v)$ függvény, határozzuk meg a test pontos mozgását. Newton törvénye szerint $F = ma$, azaz most $a = F(x, v) = -kx - \chi v - g$. Ez az egyenlet jelenik meg az alábbi mátrixegyenlet középső sorában, a másik két sor nem túl izgalmas: $v = v$ és $0 = 0$.

$$\begin{bmatrix} v \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \text{„változásának üteme”} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k & -\chi & -g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \tag{C.4}$$

Nehezítsük a feladatot: ne csak egyetlen $(x_0, v_0, 1)$ kiindulópontot vizsgáljunk, hanem egyszerre az összes lehetséges $(x, v, 1)$ állapotot. Ezek a háromdimenziós tér egy síkján helyezkednek el, amit *állapottérnek* nevezünk, és S-sel jelölünk. Azt vizsgáljuk, hogy egy t időponttól kezdve τ idő alatt hová fejlődnek a különböző $(x, v, 1) \in S$ állapotok. Így egy $G(\tau) : S \to S$ folytonos transzformációt kapunk. Gondolja meg az olvasó: $G(\tau)$ nem függ a t időponttól! Világos, hogy ha először τ ideig várunk, utána rögtön tovább várunk még σ ideig, akkor pontosan ugyanazt a változást tapasztaljuk, mintha egyben vártuk volna végig a $\sigma + \tau$ időt. Ez képlettel:

$$G(\sigma)G(\tau) = G(\sigma + \tau)\,. \tag{C.5}$$

Tehát a $\tau \mapsto G(\tau)$ leképezés egy csoporthomomorfizmus az S sík folytonos transzformációinak csoportjába. Ez a csoport sokkal nagyobb, mint az eddig vizsgált csoportjaink. Hátha szerencsénk van: a megoldást először egy icipici részcsoportban, $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$-ben keressük. Legyen hát $G : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ egyparaméteres részcsoport, $A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ a generátora. Írjuk föl a Hausdorff–Campbell–Baker formulát (lásd C.1.13.), most csak az elsőrendű tagokra lesz szükségünk:

$$G(\tau)\begin{bmatrix} x \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \exp(\tau A)\begin{bmatrix} x \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ 1 \end{bmatrix} + \Big(\tau A + O(\tau^2\|A\|^2)\Big)\begin{bmatrix} x \\ v \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nagyon kis τ értékre a hibatag elhanyagolható, tehát a „pillanatnyi változást” a τA mátrix írja le, a „változás ütemét” pedig az A mátrix adja meg. Ha ezt összevetjük a (C.4) egyenlettel, akkor kiderül, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k & -\chi & -g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G(\tau) = \exp(\tau A)$$

egyparaméteres részcsoport megoldja a problémánkat. A végeredmény elég bonyolult, inkább három speciális esetet nézzünk. A testet mindvégig az origóból indítjuk, egységnyi sebességgel felfelé.

$$\begin{aligned} \chi = 0, k = 0 \quad &\Rightarrow \quad x(t) = t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \chi = 0, g = 0 \quad &\Rightarrow \quad x(t) = \frac{\sin(\sqrt{k}t)}{\sqrt{k}} \\ k = 0, g = 0 \quad &\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1 - e^{-\chi t}}{\chi} \end{aligned}$$

Az első egy egyenletesen gyorsuló mozgás, a második egy periodikus rezgőmozgás, mindkettőt tanultuk a középiskolában. A harmadik pedig egy egyre lassabban emelkedő, határértékben az $1/\chi$ magassághoz tartó mozgás.

Ellenőrizzük a `Maple` segítségével:

```
with(linalg): assume(k,positive): assume(c,positive):
x := evalm(exponential([[0,1,0],[-k,-c,-g],[0,0,0]],t)
        &* vector([0,1,1])) [1]:
simplify(limit(subs(c=0,x),k=0));
simplify(subs(c=0,g=0, x));
simplify(subs(k=0,g=0, x));
```

A program magyarázata: A programban χ helyett c betűt használtunk. A két `assume` parancs tudatja a `Maple`-lel, hogy c és k pozitív, ez segítség neki a képletek egyszerűsítésénél. Az `&*` jel jelöli a mátrixszorzást, az `evalm` függvény azért kell, hogy a kijelölt műveleteket (itt a szorzást) tényleg elvégezze. A szorzás eredménye az $(x, v, 1)$ vektor, az `[1]` a sor végén kiválasztja az első koordinátáját, a keresett $x(t)$ függvényt. A `subs` parancs a behelyettesítést végzi, a `limit` pedig határértéket számol. Azért számítunk határértéket a $k = 0$ behelyettesítés helyett, mert az általános képlet nevezőjében k szerepel. Végül a `simplify` parancs megpróbálja egyszerűbb alakra hozni az eredményt. Próbálja ki az Olvasó ugyanezt `simplify` nélkül is.

Tehát sikerült megoldanunk a problémát, a megoldás azonban csak szűk keretek között érvényes. Általában nem várhatjuk el az $F(x, v)$ függvénytől, hogy lineáris legyen, tehát a $G(\tau)$ transzformációk sem lesznek lineárisak. Nagyon sok esetben mégis létezik (és egyértelmű) a folytonos transzformációkból álló $G(\tau)$ egyparaméteres részcsoport.

Az *energiamegmaradás törvénye* azt mondja ki, hogy egy V térbeli tartományban lévő összes energia két időpont között pontosan annyival változik meg, mint az időközben a V határán keresztül V-be bejutó, és az onnan eltávozó energiák különbsége. E törvény segítségével gyakran elkerülhetjük, vagy legalább leegyszerűsíthetjük a mozgásegyenletek megoldását. Hasonló megmaradási törvények vonatkoznak a lendületre, az elektromos töltésre, és még sok más fizikai mennyiségre.

C.5.1. Példa. Bolygók, űrhajók mozgását a mozgásegyenletek megoldásával is meghatározhatjuk, de ennél sokkal egyszerűbb Kepler törvényeit használni:

(1) Minden bolygó pályája ellipszis alakú, amelynek egyik fókuszpontja a Nap középpontja.
(2) A nap középpontját a bolygóval összekötő szakasz egyenlő idők alatt egyforma nagyságú területet súrol, azaz a *területi sebességük* állandó.
(3) Különböző bolygók keringési idejének négyzete arányos a nagytengelyük hosszának harmadik hatványával.

A második törvényben szereplő területi sebesség nem más, mint a bolygó *perdületének* nagysága, a pálya síkja pedig a perdület irányát határozza meg. Tehát az első két törvényből következik, hogy egy bolygó perdülete nem változik a mozgás során. Kis számolással azt is beláthatjuk, hogy Kepler első két törvénye együttvéve ekvivalens a bolygó energiájának és perdületének megmaradásával.

C.5.2. Példa. A nap középpontja, a bolygó középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg. A kiindulóállapot tehát tükörszimmetrikus erre a síkra — így az egész mozgás is tükörszimmetrikus, azaz a bolygó mindvégig benne marad ebben a síkban.

C.5.3. Példa. Vizsgáljunk egy pontszerű részecskékből álló rendszert. Newton harmadik törvénye szerint bármely két részecske egyforma nagyságú, ellentétes irányú erővel hat egymásra. Válasszunk ki két részecskét, tekintsük az őket összekötő egyenes körüli forgatásokat. Tegyük föl, hogy a kölcsönhatásukat leíró alaptörvények forgásszimmetrikusak. A szimmetria miatt a két részecske közt ható erők csak az összekötő irányába mutathatnak. Ebből már nem nehéz belátni, hogy a két részecske egyforma mértékben, de pont ellenkező irányban módosítja egymás perdületét. Ez bármely részecskepárra fennáll, tehát a részecskék összes perdülete megmarad.

♫ A C.5.2. Példában az egész fizikai rendszer szimmetrikus volt, és ez a szimmetria segített a mozgás megértésében. A C.5.3. Példa gyökeresen más: a részecskék helyzete, mozgása semmiféle szimmetriát nem mutat, viszont a mozgást leíró alaptörvények szimmetrikusak. Ebből a „rejtett” szimmetriából következik a perdületmegmaradás. A C.5.4. Tételben látni fogjuk, hogy az ehhez hasonló „rejtett” szimmetriák mennyire fontosak.

Az energiamegmaradás törvényének fenti megfogalmazásában szerepel az „összes energia” kifejezés, tehát hasonló törvények csak olyan mennyiségekről szólhatnak, amelyeket értelmes összeadogatni. Ilyen a tömeg, az energia, a töltés, de nem ilyen például a hőmérséklet és a nyomás. Az összeadódó mennyiségeket a fizikában *extenzív mennyiségnek* nevezik.

Legyen E egy extenzív mennyiség. Ha egy tetszőleges V tartományban az E mennyiségeket összeadjuk, akkor bármely két időpont között pontosan annyival változik az összeg, mint az időközben V belsejében keletkező, eltűnő, valamint a határon keresztül V-be befolyó, és onnan távozó összes E mennyiség egyenlege. (Ezt hívják a fizikusok mérlegegyenletnek.) Azt mondjuk, hogy az E *megmaradó mennyiség*, ha nem keletkezik és nem is tűnik el, tehát csak a befolyó és az eltávozó E felel az összegzett E változásáért.

Világos, hogy megmaradó mennyiségek lineáris kombinációja szintén megmaradó. Az előbb felsorolt extenzív mennyiségek mind megmaradók. (De nem marad meg például az entrópia, bár egy másik fizikai törvény miatt soha nem csökken.) Emmy Noether vizsgálta a mozgásegyenletek szimmetriáit, és egy nagyon általános, alapvető összefüggést fedezett föl a szimmetriák és a megmaradó mennyiségek között.

C.5.4. Tétel. *Egy fizikai rendszer mozgását leíró alaptörvények szimmetriacsoportjának minden egyparaméteres részcsoportjához hozzárendelhető egy megmaradó mennyiség. Ez a hozzárendelés egy injektív lineáris leképezés a szimmetriacsoport Lie-algebrájából a megmaradó mennyiségek vektorterébe.*

A fizikakönyvekre hagyjuk annak a precíz megfogalmazását, hogy mit nevezünk „fizikai rendszernek” és „alaptörvénynek”. Lássunk néhány példát. Tekintsünk egy olyan fizikai rendszert, amelyben a kölcsönhatásokat leíró alaptörvények szimmetriái megegyeznek a téridő szimmetriáival (ezeket a szimmetriákat a következő szakaszban vizsgáljuk részletesen). Mivel a szimmetriacsoport Lie-algebrája 10 dimenziós (lásd a C.6.8. Példát), ezért tíz független megmaradó mennyiség tartozik hozzá:

- A térbeli eltolásokhoz rendelt megmaradó mennyiség a lendület (ez háromdimenziós).
- Az időeltoláshoz (lásd C.6.2. Példa) az energia tartozik.
- Az elforgatásokhoz a perdületet rendeljük (ez is háromdimenziós).
- Végül a gyorsítások (lásd C.6.1) következménye, hogy egy környezetétől elzárt fizikai rendszer súlypontja mindig egyenes vonalon egyenletesen mozog (ez is megfogalmazható háromdimenziós megmaradó mennyiségként).

♫ Nagyon fontos elv a fizikában, hogy a fenti mennyiségek az alapvető kölcsönhatásokban megmaradnak. Ha egy olyan rendszerre bukkanunk, ahol látszólag sérül valamelyik megmaradási törvény (és a neki megfelelő szimmetria), akkor arra gyanakszunk, hogy van még olyan része a rendszernek, amelyet nem vettünk figyelembe Például a mágneses tulajdonságú részecskék között ható mágneses erő nem forgásszimmetrikus: a perdületmegmaradás csak akkor érvényes, ha számításba vesszük a részecskék saját perdületét (spinjét) is. Sok elemi részecskét (például a neutrínót) úgy fedeztek föl, hogy egy ütközésben látszólag elveszett az energia és a lendület egy része. Vannak olyan szimmetriák is, amelyek csak bizonyos kölcsönhatásoknak szimmetriái, más kölcsönhatások viszont megsértik ezeket a szimmetriákat. Híres példa a térbeli tükrözés (lásd a C.6.7. Példát): a hétköznapi életben majdnem minden folyamat tükörszimmetrikus (pontosabban: az elektromágneses kölcsönhatás az), de a radioaktív bomlás megsérti ezt a szimmetriát.

C.6. A téridő szimmetriái

A fizikában nagyon fontos szerepe van a tér szimmetriáinak. A homogenitási elv azt mondja ki, hogy a fizikai törvények a tér minden pontjában egyformák, vagyis az eltolások nemcsak a térnek, hanem az összes fizikai törvénynek is szimmetriái. Az is mindegy, hogy melyik irányba nézünk: az elforgatások, sőt az összes térbeli egybevágóság is szimmetriája a fizikai törvényeknek. Hamarosan meglátjuk, hogy mindez csak a jéghegy csúcsa: a fizika telis-tele van szimmetriával!

Galilei sokat foglalkozott a mozgástannal. Ő ismerte föl a *Galilei-féle relativitási elvet*: egy test térbeli helyzetéről, mozgásáról csak relatívan, más testekhez viszonyítva beszélhetünk. Nincs a térben (és az időben) kitüntetett pont, nincs kitüntetett irány, és azt sem lehet eldönteni, hogy két egymáshoz képest egyenletesen mozgó test közül melyik „áll egy helyben” , és melyik az, amelyik „tényleg mozog”. Jó hír viszont, hogy a gyorsulás és a forgás „abszolút”, azaz megfigyelőtől függetlenül értelmezhető, hogy egy test gyorsul-e, forog-e. Például egy test akkor mozog egyenletesen, ha a rá ható erők kiegyenlítik egymást. Az ilyen mozgást hívják inercia- vagy tehetetlenségi mozgásnak.

Ha az egy helyben állás minden szempontból egyenértékű az egyenes vonalú egyenletes mozgással, akkor kell lennie olyan szimmetriának, amelyik az egyiket a másikba transzformálja — vagy még általánosabban: a különböző sebességű egyenletes mozgásokat egymásba transzformálja. Egy ilyen szimmetria azonban a mozgásról szól, tehát a térbeli helyzeten kívül az időt is figyelembe kell vennie. Ezért nem a tér pontjait, hanem a (helyzet, időpont) párokat, azaz a világ *eseményeit* transzformálja. A lehetséges (helyzet, időpont) párok összességét *téridőnek* nevezzük.

C.6.1. Példa. Válasszunk egy x, y, z, t koordinátarendszert (t az idő), és legyen $(v_1\,,\ v_2\,,\ v_3)$ egy sebességvektor. A téridő most következő szimmetriáját *gyorsításnak* hívjuk:

$$(x\,,\ y\,,\ z\,,\ t) \mapsto (x + v_1 t\,,\ y + v_2 t\,,\ z + v_3 t\,,\ t)\,.$$

C.6.2. Példa. 1582. október 4-én éjjel bevezették a Gergely-naptárat. Többek között tíz nappal elcsúsztatták az időkoordinátát, másnap október 15-e lett. Tehát alkalmazták a világra a Galilei-csoport egy elemét:

$$(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z, t + 10)\,.$$

Egy vektortér nem eltolásszimmetrikus, mert van egy kitüntetett eleme, az origó. Definiáljunk a vektortér alaphalmazán egy új algebrai struktúrát: a műveletek az összes $(x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$ alakú függvények legyenek, ahol $\lambda + \mu = 1$. Ezt az algebrai struktúrát *affin térnek* nevezzük. Világos, hogy a részalgebrák pontosan a lineáris alterek eltoltjai lesznek, az automorfizmuscsoport pedig az affin csoport (4.1.25. Definíció). Fontos észrevétel, hogy ha egy legalább kétdimenziós valós affin térnek megadjuk az alaphalmazát, és megadjuk, hogy mely részhalmazok az egyenesek, akkor ez az információ már egyértelműen meghatározza az affin struktúrát.

♫ Úgy érdemes a téridőre gondolni, mint egy (hatalmas) út–idő-grafikonra, ami nincs bekoordinátázva. Képzeljünk el egy pontszerű lényt, és jelöljük meg a grafikonon az összes olyan eseményt, amelynél a lényünk jelen van. A megjelölt események egy vonalat adnak a grafikonon, amely leírja a lény mozgását, életútját. Ezt nevezzük a lény *világvonalának*. Az a tény, hogy a téridő nincs bekoordinátázva, nem csak kötözködés: komoly gyakorlati következményei vannak. Már a középkori hajózásnál roppant fontos volt, hogy bekoordinátázzák a Föld felszínét, és érdekes módon már akkor a pontos időmérés vált a helymeghatározás alapjává. Manapság a GPS-rendszer definiálása, kiépítése jelenti a téridőkoordinátázás csúcsteljesítményét, és most is az időmérés határozza meg a rendszer pontosságát. A mai pontosság mellett már komoly gondok vannak a definícióval is, hiszen egymástól távol levő, egymáshoz képest össze-vissza mozgó műholdak óráit kellene összehangolni, és a rádiójeleknek néhány tizedmásodpercre van szükségük ahhoz, hogy az egyiktől a másikig érjenek. Ilyenkor közvetlenül megtapasztaljuk, hogy egy koordinátarendszer felállítása micsoda elméleti és technikai nehézségeket okoz.

Azonban nagyon előresiettünk. Maradjunk még kis ideig Galilei téridejénél, vizsgáljuk meg, milyen fizikailag értelmes struktúrája van. Egy mozgás pontosan akkor egyenes vonalú egyenletes mozgás, ha az út–idő-grafikonja egyenes — tehát a téridő egyenesei fizikailag mérhetők, például apró próbatestek szabadon eresztésével. Ezért a téridő egy négydimenziós affin tér. (Nem vektortér, mert nincs kitüntetett origó!) Ezen az affin téren a távolság- és időmérés még további struktúrát ad: Galilei mozgástanában beszélhetünk két esemény időkülönbségéről és egyidejű események térbeli távolságáról. Fontos: a téridőnek más belső struktúrája nincs! Például nem egyidejű események térbeli távolsága sem értelmezhető. (Vajon miért nem?)

C.6.3. Definíció. Galilei mozgástanában a téridő egy négydimenziós affin tér, ellátva két függvénnyel: a p és q események közti időkülönbség $T(p,q)$, és ha egyidejűek, azaz $T(p,q)=0$, akkor a térbeli távolságuk $D(p,q)$. Ezektől a függvényektől egy tulajdonságot várunk el: van *inerciarendszer*, azaz olyan (x,y,z,t) koordinátarendszer, amelyben

$$T\big(p,q\big) = t_q - t_p\,,$$
$$D\big(p,q\big) = \sqrt{(x_q-x_p)^2+(y_q-y_p)^2+(z_q-z_p)^2}\,, \qquad \text{ha } t_p = t_q\,.$$

C.6.4. Definíció. A Galilei-féle téridő szimmetriacsoportját *Galilei-csoportnak* hívjuk. Azokból a φ affin transzformációkból áll, amelyek megtartják a $T(p,q)$ és $D(p,q)$ függvényeket: $T(\varphi(p),\varphi(q)) = T(p,q)$, és ha p,q egyidejűek, akkor $D(\varphi(p),\varphi(q)) = D(p,q)$.

Ebben a függelékben úgy gondolunk a szimmetriákra, mint a téridő transzformációira, tehát az eseményeket permutáljuk. De ugyanezt másképpen is el lehet képzelni: az eseményeket nem bántjuk, hanem a saját nézőpontunkat változtatjuk. Ilyenkor a szimmetriából koordináta-transzformáció lesz. A két felfogás teljesen egyenértékű. Az eltolások, a forgatások, a C.6.1. Példában leírt gyorsítás mind elemei a Galilei-csoportnak. Ez utóbbi fejezi ki azt a fizikai feltevést, hogy az egymáshoz képest egyenletesen mozgó megfigyelők számára a fizikai törvények ugyanazok.

1905-ben Einstein megalkotta a relativitáselméletet. Mint az elnevezés mutatja, továbbra is Galilei relativitási elve a legfontosabb alapelv — viszont már sem az események időkülönbsége, sem pedig az egyidejű események térbeli távolsága nem abszolút, sőt az egyidejűség fogalma sem értelmes. Akárhogyan próbálnánk ezeket definiálni, az eredmény függene a koordinátarendszertől, vagyis hogy melyik megfigyelő végzi a méréseket. A C.7. szakaszban látni fogjuk, milyen érdekesen viselkedik a tér és az idő. Ugyanakkor viszont a „fénysebesség abszolút”. Ezt matematikailag a Minkowski-távolság bevezetésével fogalmazhatjuk meg. A relativitáselméletben csak olyan mennyiségekről érdemes beszélni, amelyek a Minkowski-távolság (vagy annak négyzete) segítségével definiálhatók.

C.6.5. Definíció. Jelölje c a fénysebességet. A relativitáselmélet téridejét *Minkowski-téridőnek* hívjuk. Ez egy négydimenziós affin tér, ellátva egy kétváltozós függvénnyel: a p és q események *Minkowski-távolságának négyzetét* $s^2(p,q)$ jelöli. Az s^2 függvénytől egy tulajdonságot várunk el: választható *inerciarendszer*, azaz olyan (x, y, z, t) koordinátarendszer, amelyben

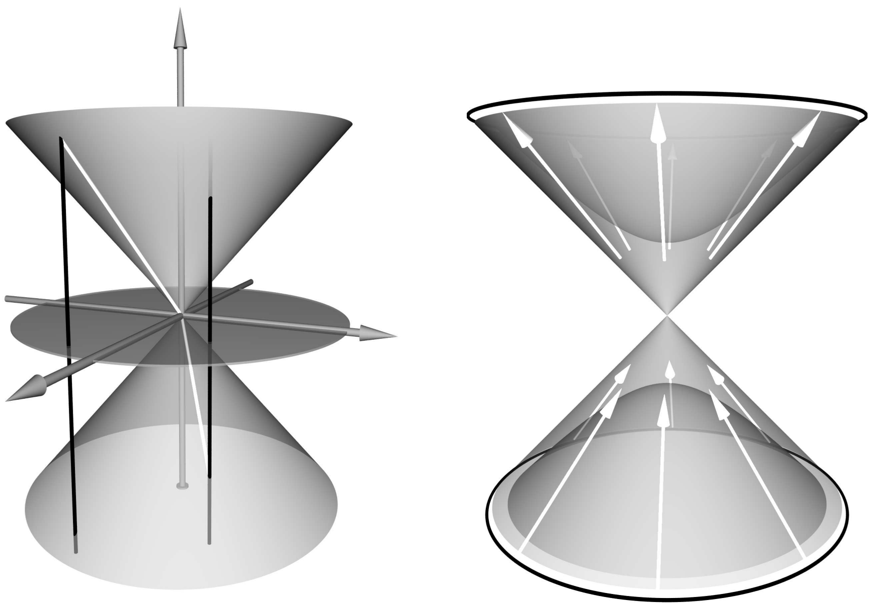
$$s^2\big(p,q\big) = c^2(t_q - t_p)^2 - (x_q - x_p)^2 - (y_q - y_p)^2 - (z_q - z_p)^2 .$$

Vigyázat! Ez a képlet a Minkowski-távolság négyzetét adja meg, amit minden eseménypárra definiálunk. A Minkowski-távolságot azonban csak akkor értelmezzük, ha a négyzete nem negatív! Látható, hogy két esemény Minkowski-távolsága pontosan akkor nulla, ha az egyiktől egyenes vonalban, fénysebességgel utazva éppen elérhetünk a másikhoz. Ez jelenti azt, hogy a „fénysebesség abszolút” (azaz, hogy két esemény Minkowski-távolságát minden megfigyelő ugyanakkorának méri). A Minkowski-távolság akkor lesz pozitív, ha fénysebességnél lassabban haladva eljuthatunk az egyik eseménytől a másikhoz. Ha pedig csak fénysebességnél gyorsabb utazással lehetne odaérni (azaz a valóságban egyáltalán nem), akkor a két esemény Minkowski-távolságát nem definiáltuk (mert a négyzete negatív).

A Minkowski-geometriában a háromszög-egyenlőtlenség *fordítva* érvényes: ha egy háromszög két oldalának van Minkowski-hossza, akkor a harmadiknak is van, és az legalább olyan hosszú, mint az első kettő összege. A 4.1. szakaszban fizikai jelentést is adtunk a Minkowski-távolságnak: $s(p,q)/c$ az a *sajátidő*, amennyi a p eseménytől egyenletes sebességgel a q eseményhez utazó lények számára menet közben eltelik. A világban izgő-mozgó pontszerű lények világvonala a téridőben folytonos görbe. De nem akármilyen görbe: a lény soha nem haladhat fénysebességnél gyorsabban, ami geometriai szemmel azt jelenti, hogy a világvonal bármely két pontjának van Minkowski-távolsága. Az ilyen görbéknek van ívhossza. Az ívhossz fizikai jelentése a lény számára eltelt sajátidő c-szerese. A háromszög-egyenlőtlenségből azonnal következik: ha két eseménynek van Minkowski-távolsága, akkor a lehető leghosszabb út közöttük az egyenes, más szóval az öregszik a legtöbbet, aki egyenesen, egyenletes sebességgel halad a két esemény között. Ezt a jelenséget a fizikusok *ikerparadoxonnak* hívják. Jó példa erre a C.7. szakasz, ahol hatvan év alatt ötmillió évvel sikerül leköröznünk az itthon maradottakat.

Ha jókedvünk van, és felnézünk az égre, egy szép kék gömbfelületet látunk belülről. A gömbfelület minden pontja egy szemünkbe hulló kék fénysugár.

Úgy is képzelhetjük, hogy tőlünk végtelen távolságra van egy *mennyei szféra*, és azt látjuk. Kevésbé romantikusan fogalmazva: egy p eseménybe érkező fénysugarak egy gömbfelülettel paraméterezhetők. A fénysugarak világvonalai pedig összeállnak egy háromdimenziós kúppá, melynek csúcsa p, alapja pedig a mennyei szféra. Ezt a kúpot *fénykúpnak* nevezzük. A fénykúpon pontosan azok az események élnek, amelyek p-től mért Minkowski-távolsága nulla. A fénykúp háromfelé vágja a téridőt: a p múltjára, jövőjére, és a p-ből elérhetetlen régióra (az itteni eseményeknek nincs Minkowski-távolsága p-től).



C.2. ábra. A háromdimenziós téridő.

Mivel négydimenziós rajzot nehéz készíteni, ezért higgyük azt egy pillanatra, hogy kétdimenziós lények vagyunk, és a végtelen Alföldön, Kecskeméten élünk. Ezt a háromdimenziós téridőt láthatjuk a C.2. ábra bal felén. Az origóhoz tartozó esemény a $(0, 0, 0)$, a mi jelenlegi helyzetünk (azaz $(x, y) = (0, 0)$), a jelen pillanatban ($t = 0$). A hozzánk képest nyugalomban lévő lények világvonala függőleges egyenes, tehát a mi saját világvonalunk éppen egybeesik a t-tengellyel. Az ábra bal oldalán még két függőleges világvonal látszik: egy szegedi, és egy debreceni barátunk életútja. Fehér színnel berajzoltuk azt a fényjelet is, amelyet a szegedi (tehát a hozzánk közelebbi) barátunk küldött nekünk, és éppen ebben a pillanatban érkezik meg hozzánk. És rajzoltunk egy másik fényjelet, amit mi küldünk, ebben a pillanatban, debreceni barátunknak. Ezek a fénysugarak a berajzolt (kettős) fénykúp alkotói (pontosabban azok egy szakasza). A ábra jobb felén ezt a fénykúpot rajzoltuk le. Az alsó ágán látható azon fénysugarak múltja, amelyek a jelen pillanatban érkeznek a szemünkbe, a fölső ág alkotói pedig olyan fénysugarak jövőbeni útja, amelyek éppen most indulnak el tőlünk valamerre. A kúp alatt láthatunk egy kört: a messziről érkező fénysugarakat úgy érzékeljük, mintha innen jönnének, tehát ez a horizontunk. Fölötte is van egy kör: a tőlünk induló fénysugarak oda futnak be. Korábban az alsó kört hívtuk mennyei szférának — de ha az Olvasó szeretné, nyugodtan gondolhat a fölsőre is, egyenértékűek. Valójában „lenn” és „fönn” helyett azt kellene mondanunk, hogy „múlt”, illetve „jövő”.

Az alsó kúp belsejében van a múltunk: azok az események, amelyekről már ebben a pillanatban tudomásunk lehet. A fölső kúp belseje pedig a jövőnk: azok az események, amelyeket még módunkban áll befolyásolni. A kúp külseje a számunkra elérhetetlen tartomány: az itt történő eseményekről most még nem értesülhettünk, arról pedig már lekéstünk, hogy befolyásolhassuk őket. Emlékezzünk: a Galilei-téridőben nincs sebességkorlátozás, csak az origóval „egyidejű” események elérhetetlenek. — kontrasztként berajzoltuk a bal oldali rajzra a $t = 0$ síkot. A relativitáselméletben ez a sík „kinyílt”, a téridő hatalmas része elérhetetlenné vált. Ráadásul a $t = 0$ sík csak ezen a rajzon vízszintes, más inerciarendszerekben ferdén áll. A téridő „nem tudja”, merre van a vízszintes meg a függőleges, csak a fénykúp tartozik hozzá a szerkezetéhez.

Galilei mozgástanában az egységnyi idő múlva bekövetkező események egy háromdimenziós affin alteret alkotnak. Mi ennek a megfelelője a Minkowski-téridőben? Az „egységnyi idő múlva” kifejezés a relativitáselméletben értelmetlen, először át kell fogalmaznunk a kérdést. Megkérdezhetjük, hogy ha egy adott p eseményből elindulva egyenletes sebességgel utazunk, mely eseménybe érkezhetünk egységnyi sajátidő alatt? Azokhoz, amelyeknek p-től mért Minkowski-távolsága pontosan egységnyi, tehát a Minkowski-téridő „egységgömbjére”. Válasszunk egy inerciarendszert. Mérjük továbbá az időt évben, a távolságot fényévben, mert akkor $c = 1$, és a képleteink egyszerűbbek lesznek.

Az origótól egységnyi Minkowski-távolságra lévő pontok egy háromdimenziós forgási hiperboloidot alkotnak a négydimenziós térben. A C.2. ábra jobb oldalán berajzoltuk ennek kétdimenziós megfelelőjét. Ez a hiperboloid két ágra szakad: az egyik a jövőnkben, a másik a múltunkban van. Legyen B az egyik ág. Kiderül: a B metrikus térré tehető úgy, hogy bármely két pont távolsága csak a Minkowski-távolságuk négyzetétől függjön. (Ez az új metrika egy konstans szorzó erejéig egyértelmű.) A pontos képlet most nem fontos, az azonban igen, hogy az így kapott B tér izomorf a háromdimenziós Bolyai-geometriával! A Bolyai-geometria síkjait, egyeneseit úgy kaphatjuk meg, hogy B-t elmetsszük három-, illetve kétdimenziós alterekkel. A hiperboloid „a végtelenben érinti” a fénykúpot, amint az a rajzunkon is látható, tehát érdemes azt képzelnünk, hogy a Bolyai-tér „határa” éppen a mennyei szféra. A síkok főkörökben „érkeznek ki” a határra, az egyenesek pedig átellenes pontpárban.

C.6.6. Definíció. A Minkowski-téridő szimmetriacsoportját *Poincaré-csoportnak* hívjuk. Azokból az affin transzformációkból áll, amelyek a Minkowski-távolság négyzetét megtartják: $s^2(\varphi(p), \varphi(q)) = s^2(p, q)$ minden p, q eseménypárra. Egy esemény stabilizátorát pedig *Lorentz-csoportnak* hívjuk.

♫ Korábban, a 4.1. szakaszban is volt már szó relativitáselméletről. Ott a Poincaré-csoport elemeit nem a téridő transzformációiként, hanem koordinátatranszformációkként kezeltük.

C.6.7. Példa. Válasszunk egy inerciarendszert. Az $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z, -t)$ transzformációt időtükrözésnek, az $(x, y, z, t) \mapsto (-x, -y, -z, t)$ transzformációt tértükrözésnek hívjuk. Ezek elemei a Lorentz-csoportnak is, a Galilei-csoportnak is, és egy $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$-szal izomorf részcsoportot generálnak.

C.6.8. Példa. Összehasonlítjuk a Galilei-csoportot a Poincaré-csoporttal. Válasszunk egy inerciarendszert. Mindkét csoportban megtalálhatók a következő részhalmazok.

(1) Az origó körüli térbeli forgatások részcsoportja (izomorf SO(3)-mal). Ez mindkét csoportban maximális kompakt részcsoport.
(2) A térbeli eltolások részcsoportja (izomorf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-szal). Ez a Galilei-csoportban normálosztó, a Poincaré-csoportban azonban nem.
(3) Az időbeli eltolások részcsoportja ($(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z, t + t_0)$, lásd C.6.2. Példa, izomorf $\mathbb{R}^+$-szal). Ez a Galilei-csoportban normálosztó, a Poincaré-csoportban nem. A térbeli eltolásokkal vett direkt szorzata azonban mindkét csoportban normálosztó.
(4) A gyorsítások részhalmaza: lásd a C.6.1. Példát, a neki megfelelő relativisztikus gyorsításokat a 4.1. szakaszban számítottuk ki. A Galilei-csoportban ezek egy $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-szal izomorf részcsoportot alkotnak. A Poincaré-csoport gyorsításait szintén $\mathbb{R}^3$-nel paramétereztük, de ezek nem alkotnak részcsoportot.
(5) A tér- és időtükrözések részcsoportja (C.6.7. Példa, láttuk, hogy ez $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$-vel izomorf).

Mindkét csoport elemei egyértelműen írhatók föl egy térbeli elforgatás, egy térbeli eltolás, egy időbeli eltolás, egy gyorsítás, és egy $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$-beli elem kompozíciójaként (a megadott sorrendben).

♫ A Poincaré-csoport Lie-algebrájának létezik egy háromdimenziós lineáris altere, amelyiket az exponenciális leképezés bijektíven képez a gyorsítások részhalmazára. Ez a jelenség analóg a C.2.7. Tétellel. Ezért az (1), (2), (3), (4) részhalmazok adnak négy alteret a csoport Lie-algebrájában, és a Lie-algebra éppen ezen alterek direkt összege. Ennek segítségével könnyen leírható a Lie-algebra. Korábban, a C.5. szakaszban már láttuk, hogy a Lie-algebra elemei a mozgásegyenletekben „pillanatnyi hatásokat” fejeznek ki. A különböző hatások eredőjének a

Lie-algebrában az összeadás felel meg. Ez az additivitás teszi lehetővé, hogy a mozgásegyenletekben a „hatásokat” felbontsuk (1), (2), (3) és (4) típusú komponensre, és ezeket egymástól függetlenül kezeljük.

A Lorentz-csoport önmagába képezi a fénykúpot, ezért természetes módon hat a mennyei szférán is. Azonosítsuk a mennyei szférát a Riemann-féle számgömbbel (ami nem más, mint a komplex számsík kibővítve egy végtelen távoli ponttal, ∞-nel). Nem nehéz belátni, hogy a Lorentz-csoport éppen úgy hat ezen a gömbön, mint a komplex törtlineáris leképezések csoportja az 4.14.4. Gyakorlatban, és a 245. oldalon, az apró betűs részben. Így a Lorentz-csoport egységelemet tartalmazó komponensét azonosíthatjuk a törtlineáris leképezések csoportjával, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$-vel. Mivel a ∞-nel kibővített valós számegyenes egy főkör a számgömbön, ezért egy rögzített főkört önmagába képező transzformációk részcsoportja mindig a $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ konjugáltja.

C.6.9. Állítás. *A Lorentz-csoport izomorf* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$*-nek és a C.6.7. Példában szereplő* $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ *részcsoportnak a szemidirekt szorzatával. A háromdimenziós Bolyai-geometria mozgásainak csoportja izomorf* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$*-vel, a Bolyai-sík mozgásainak csoportja pedig izomorf* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$*-rel. Végül a Poincaré-csoport izomorf a Lorentz-csoportnak és a téridőbeli eltolások csoportjának szemidirekt szorzatával.*

♫ Az égen a távoli csillagok nagyjából egyenletesen oszlanak el. Ha űrhajóba szállunk, akkor ez a gyorsítás egy törtlineáris leképezéssel hat a mennyei szférán, vagyis az égbolton. Ez hasonlít a C.3.11. Tétel bizonyításában szereplő α és β transzformációkhoz: az égbolt űrhajóval szemközti pontja taszító fixpont, a háta mögötti pont pedig vonzó fixpont. Közönséges űrhajóknál ez a hatás nagyon kicsi, de például a C.7. szakaszbeli utazáson érdekes dolgokat fogunk látni.

Képzeljünk el egy izgő-mozgó merev testet, amelynek egy kijelölt pontjában egy pontszerű lény ücsörög. Legyen G vagy a Galilei-csoport, vagy a Poincaré-csoport, attól függően, hogy a lényünk Galilei-téridőben, vagy Minkowski-téridőben él. A test pillanatnyi állapotát a következő adatokkal jellemezzük: a lény téridőbeli helyzete, pillanatnyi sebessége és a test térbeli állása. Ahogy telik az idő (a lény sajátideje), a test állapota folyamatosan változik. Egy időtartam alatt bekövetkezett változást megadhatunk például úgy, hogy megadjuk a lény téridőbeli elmozdulását, sebességének változását és a test térbeli elfordulását és a test sebességének változását — tehát a G csoport egy elemét. Rendeljük hozzá minden τ sajátidőhöz (amit a lény órájáról olvasunk le) azt a $\gamma(\tau) \in G$ transzformációt, amelyik a 0 sajátidőhöz tartozó kiinduló állapotot a τ pillanatbeli állapotba transzformálja. Így egy G-be rajzolt folytonos görbéhez jutunk. A test mozgását akkor mondjuk egyenletesen változónak, ha egyforma hosszú sajátidőszakaszokon ugyanakkora állapotváltozás történik — tehát a lény minden pillanatban ugyanakkora hatásnak van kitéve. Képlettel kiírva:

$$\gamma(\tau)^{-1}\gamma(\tau + \sigma) = \gamma(\rho)^{-1}\gamma(\rho + \sigma)$$

minden τ, ρ, σ valós számra. Az egyenletből $\rho = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy az egyenletesen változó mozgások a G-beli egyparaméteres részcsoportoknak felelnek meg. Hasonlítsuk ezt össze a (C.5). egyenletben (619. oldal) kapott egyparaméteres részcsoporttal. Az egyparaméteres részcsoportok a generátorukkal, G Lie-algebrájának elemeivel adhatók meg. Érdemes erre úgy gondolni, hogy a Lie-algebra elemei fejezik ki az egyenletesen változó mozgás „pillanatnyi változását”, azaz a mozgó lényt érő „hatást”. Nagyon fontos észrevétel, hogy a testet érő különböző hatások, mint Lie-algebra elemek, egyszerűen összeadódnak.

C.6.10. Példa. Legyen G vagy a Galilei-csoport, vagy a Poincaré-csoport. Válasszunk egy inerciarendszert és egy L térbeli egyenest. Ha a test L irányban egyenletesen gyorsul, nem forog, és a lény folyamatosan előre néz, akkor a következő hatások érik: gyorsítás előre, és az idő múlása. De mit jelent az „idő múlása”? Most olyan transzformációkat építünk, amelyek az origót végiglökdösik a lény világvonalán. A pillanatnyi változást mindig a lény szemszögéből nézzük: ez az, ami az eddigi összes transzformáció után még hátra van. Márpedig a lény a saját szemszögéből nézve nyugalomban van, viszont telik a sajátideje, tehát a saját külön bejáratú koordinátarendszerében éppen a t tengely irányában mozdul el. Ezt a „hatást” neveztük az „idő múlásának”. Ha fölírjuk az ehhez tartozó egyparaméteres részcsoportot G-ben, akkor megkapjuk az egyenletes gyorsulás mozgásegyenletét.

C.6.11. Példa. Legyen G a Galilei-csoport. Válasszunk egy inerciarendszert és egy K térbeli kört. Tegyük föl, hogy a lényünk a K körön egyenletes körmozgást végez, miközben folyamatosan előre néz. Ekkor a következő hatások érik: gyorsítás balra, a haladásra merőlegesen, forgatás bal felé, és az idő múlása. Ha fölírjuk az ehhez tartozó egyparaméteres részcsoportot G-ben, akkor megkapjuk az egyenletes körmozgás mozgásegyenletét.

C.6.12. Példa. Legyen G a Poincaré-csoport. Alkalmazzuk a testre ugyanazokat a hatásokat, mint az előző példában. Bármily meglepő, most a test nem körpályán mozog! Ennek az az oka, hogy a kör síkjával párhuzamos gyorsítások a Poincaré-csoportban nem alkotnak részcsoportot. Ha a testet érő hatások közül az elforgatást éppen megfelelően módosítjuk, akkor elérhetjük a körmozgást. Ennek egyik fontos következménye: ha egy pörgettyű (giroszkóp) egy körpályán egyenletesen körbehalad, akkor a forgástengelye elfordul! Ezt a jelenséget a fizikusok Thomas-precessziónak nevezik.

Folytassuk a mozgó lényről való elmélkedésünket. Tekintsünk most egy tetszőleges mozgást egy τ pillanatban. Képzeljünk el egy olyan egyenletesen változó mozgást, melynek során a τ pillanatban pontosan ugyanabban az állapotban van a test, mint az eredeti mozgásnál, és más σ sajátidőkre $O(|\tau - \sigma|^2)$ pontossággal közelíti meg az eredeti mozgás állapotát. Amennyiben van ilyen, az ad egy egyparaméteres részcsoportot G-ben, tehát egy A elemet G Lie-algebrájában. Ez az A fejezi ki a testet érő pillanatnyi hatást. Ha jobban belegondolunk, akkor azonosíthatjuk az A elemet a γ görbe $\gamma(\tau)$-beli érintőjével. *Nagyon fontos:* ha ismerjük ezeket a pillanatnyi hatásokat minden τ pillanatban, akkor azokból az egész mozgás rekonstruálható.

C.7. Utazás az Androméda-ködbe

Kedves Olvasónk!

Ezt a mesét szeretett Tanárunknak, Thiry Gabi néninek ajánljuk, a sok szép együtt töltött óra emlékére! A mese rólunk szól: a könyv szerzőiről. Ifjúkorunk óta jó barátok vagyunk, sok-sok beszélgetés, kirándulás során kristályosodott ki bennünk a nagy terv. Kalandos utazásra készülünk, kérünk, hogy tarts Velünk!

Kiss Emil és Szabó Endre

Mindkettőnket régóta foglalkoztat a sebességkorlátozás. Miért nem mehetünk gyorsabban a fénynél? Ez igazságtalanság, méltánytalannak éreztük. Bezzeg, ha mehetnénk, meg sem állnánk az Androméda-ködig! Nagyon csábító gondolat, de tényleg olyan egyszerű volna? Egyszer utánaszámoltunk. Ha a sebességet nem is, a gyorsulást mindenképpen korlátoznunk kell. A túl nagy gyorsulás hosszú távon megterhelő, sőt, akár halálos is lehet! Hosszú utazáson a kényelem nagyon fontos: nem akarunk a földi nehézségi gyorsulásnál nagyobb terhelést. Ez azt jelentené, hogy az űrhajóban pontosan úgy éreznénk magunkat, mintha a Földön élnénk.

Ekkora kiránduláson érdemes az időt években mérni, a távolságot pedig stílszerűen fényévekben. Gondold meg, Olvasónk: a fénysebesség pontosan

$$1\,\frac{\text{fényév}}{\text{év}}\,.$$

Nagyon praktikus, nem kell a fénysebességgel bajlódnunk! Ezért nem szerepel a fénysebesség az alábbi (C.6) egyenletben sem. Tehát a tervezett gyorsulásunk

$$g \approx 9{,}81 m/s^2 \approx 1{,}03\frac{\text{fényév}}{\text{év}^2}\,.$$

Ugye, milyen meglepő? Évente nagyjából fénysebességnyivel gyorsulunk. Mivel gondolatban föloldottuk a sebességkorlátozást, száz év alatt elérjük a fénysebesség százszorosát. No de milyen messzire jutunk el ezalatt? Íme:

$$\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}03\frac{\text{fényév}}{\text{év}^2}\cdot(100\ \text{év})^2 = 5150\ \text{fényév.}$$

Fantasztikus tempó! Több, mint ötezer fényévet átszelünk. Gyorsan föllapozzuk a térképet[1]: az Androméda-köd távolsága[2] nagyjából 2,5 millió fényév. Rossz hír, még a közelébe se juthatunk! Ennyi idő alatt még a Tejútrendszer szomszédos karját is alig érjük el. Sovány vigasz, hogy még ebben a szűk tartományban is mintegy hatszázmillió csillag közül választhatunk úti célt. Márpedig száz évnél többet semmiképp nem áldozhatunk erre a kalandra! Már-már azt hittük, végleg le kell mondanunk róla. De amikor a relativitáselmélettel kezdtünk komolyabban foglalkozni, és a C.6.10. Példát számolgattuk, újra felcsillant a remény. Kiderült, hogy g nagyságú egyenletes gyorsulással τ sajátidő alatt eljutunk az

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{e^{g\tau} + e^{-g\tau} - 2}{2g}, 0, 0, \frac{e^{g\tau} - e^{-g\tau}}{2g} \right) \tag{C.6}$$

koordinátájú eseménybe. Látható, hogy exponenciális ütemben távolodunk! Ez nagyszerű, próbáljuk ki, mondjuk $\tau = 15$ évvel. Eredményül a

$$(2{,}49 \text{ millió fényév},\ 0,\ 0,\ 2{,}49 \text{ millió év})$$

eseményt kapjuk, tehát 2,49 millió fényévnyire jutunk. Győzelem! Röpke tizenöt év alatt eljutunk az Androméda-galaxis közvetlen közelébe[3], és két héttel később már ott is leszünk. Az is könnyen kiszámolható, hogy az út első feléhez tizennégy év és négy hónapra van szükség, a második felét viszont nyolc és fél hónap alatt letudjuk[4]! Fantasztikus élmény lesz, ezt nem lehet kihagyni! Kedves Olvasó, ha van merszed, csomagolj, hamarosan indulunk! Legelőször természetesen a mérnökünkkel kell beszélni: milyen rakétát építsünk, mennyi üzemanyag kell, milyen felszerelés? Vajon mennyibe kerül az utazás? A mérnök úr erre kapásból tudja a választ. Rögtön bele is fog a mondókába:

♫ Jelölje m az űrhajó pillanatnyi tömegét, ez folyamatosan fogy az elhasznált üzemanyag miatt. Ezért az út során a rakéta teljesítményét is fokozatosan kell csökkenteni. Az F hajtóerő arányos a tömeg-vesztés ütemével, amit $\dot{m}$ jelöl[5], és a kiáramló hajtóanyag sebességével, v-vel. Tehát az elért gyorsulás:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-\dot{m}v}{m}.$$

Érdekes, hogy ugyanez az egyenlet érvényes a relativitáselméletben is![6] Manapság a legnagyobb v-értéket ionhajtóművekkel érik el: a Deep Space One esetében

[1] Íme, egy jó térkép, mindenkinek ajánljuk: `http://www.atlasoftheuniverse.com/`

[2] Vajon ez mit jelent? Hogyan mérik le? Mennyire pontos?

[3] Tizenöt év alatt több millió fényévet bejárunk? Túlléptük a fénysebességet? Mit is jelent ez valójában?

[4] Hogyan lehetséges, hogy az út első fele hússzor annyi ideig tart, mint a második fele?

[5] Fizikusok gyakran jelölik ponttal az idő szerinti deriváltat.

[6] Az űrhajós a gyorsulást önmagához viszonyítva érzi, az üzemanyag is vele együtt mozog, tehát relatív sebességük nulla!

ez nagyjából $v = 35\,000\,\mathrm{km/s}$ volt, tehát a fénysebesség 11,7 százaléka. Summa summarum, az egyenlet megoldása M kezdeti tömeg esetén, $a = g$ gyorsulással:

$$m(\tau) = M \cdot e^{-\frac{g}{v}\tau} = M \cdot e^{-8{,}80\tau} .$$

Roppant fontos, hogy az utazás végén kapott $m(\tau)$ tömeg ne legyen kevesebb, mint az utasok össztömege! Ebből lehet visszaszámolni a kiinduló M-et.

Ez világos beszéd! Legegyszerűbb, ha azt számoljuk ki, mennyibe kerül a fuvar kilogrammonként. Benyomjuk a számítógépbe a képletet, behelyettesítünk $m(\tau) = 1$ kg-ot és $\tau = 16$ évet (hogy legyen egy kis tartalékunk), és már látjuk is az eredményt: az egy kilogramm hasznos teher elszállításához szükséges üzemanyag $1{,}41 \cdot 10^{61}$ kg. Tehát kilogrammonként ennyi xenont kell rendelnünk. Fel is hívjuk... Egy pillanat! Ez nagyon sok. Lássuk csak a lexikont!

- A Föld tömege $5{,}98 \cdot 10^{23}$ kg,
- a Nap tömege $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg,
- a Tejútrendszer tömegét $6 \cdot 10^{11}$-szeres naptömegnek becsülik.

Nekünk ez mind nem elég, sok milliárd galaxist kellene eltüzelnünk! Ajjaj, dolgozni kell a hajtóműveken! A mérnök úr azt ígéri, hogy megpróbálnak fotonhajtóművet szerkeszteni. Ez eddig még senkinek sem sikerült, de mi bízunk benne, hogy ő majd legyűri a nehézségeket. Az új hajtóműben a kiáramlási sebesség $v = 1$, a fénysebesség, ezért kilogrammonként mindössze 14,3 tonna üzemanyagra van szükségünk[7]. Ez már igazán baráti ár!

No és mikorra fogunk odaérkezni — kérdezik a kollégák. De a mérnök úr elmagyarázza: ennek a kérdésnek semmi értelme, úgysem tudjuk összehasonlítani az itteni órákat az ottaniakkal[8]. Igaz, igaz, mondják, és mikorra érkezünk vissza? Tessék, erről el is felejtkeztünk! Jó volna a kaland végén hazajönni! A mérnök úr figyelmeztet, hogy ha vissza is akarunk jönni, akkor sokkal drágább lesz az út. Nem a duplája? De nem ám! Meg is kell állni, és az bizony drága mulatság. Emlékezzünk csak vissza: tizennégy év négy hónap alatt tettük meg a fele utat, onnantól kezdve már fékezni kell! Még egyszer ugyanennyi idő elteltével éppen az Androméda-ködnél fogunk leállni. Mindenki elkezd zúgolódni: hatvan év múlva[9] érünk csak vissza? Az nagyon sok idő! És akkor hatvan évi üzemanyag kell, ami annyit tesz, mint $6{,}90 \cdot 10^{26}$ kilogramm. A fél Jupitert magunkkal kellene vinnünk!

De a mérnök úr mosolyogva rázza a fejét. Nem, nem, nem kell annyi üzemanyag: hisz az Androméda-ködben úgyis megállunk nézelődni, majd ott újra feltankolunk. Harminc évre pedig mindössze 26,3 milliárd tonnára van szükség

[7] Az üzemanyag nem lehet akármi, hiszen teljes egészében fotonokká szeretnénk alakítani. De ezzel a technikai problémával most nem foglalkozunk.

[8] Az (C.6) egyenletben megadtuk a megérkezés t-koordinátáját is, de ez csak koordináta, nem érdemes „eltelt időként” értelmezni.

[9] Pár hónapos nézelődést is beleszámítottunk.

kilogrammonként! Hát ez tényleg drága, de nem megvalósíthatatlan. A 26,3 milliárd tonna körülbelül a Kékes tömegével egyenlő, de nagy kár volna a Kékesért! Viszont egy 30 kilométer sugarú kisbolygó elegendő üzemanyag lesz a 10 tonnás űrhajóhoz.

És hogy mikorra érkezünk vissza? Úgy ötmillió év múlva[10]. Hiszen egész úton közel fénysebességgel repesztünk, és kétszer tesszük meg a 2,5 millió fényéves utat. Akkor hát mindenben megegyeztünk, indulhat a visszaszámlálás! Mindenki dőljön hátra kényelmesen, csatoljuk be a biztonsági öveket! Így ni!

Az út legeleje még megterhelő, hiszen dolgoznak a segédrakétáink, el kell hagynunk a Föld gravitációs terét, de nagyon hamar visszaáll a természetes állapot. Mindenki újra a saját súlyát érzi. Az első néhány napon még nagy a tolongás az ablak előtt, majd amint a Naprendszer kezd elmaradozni, és belevész a csillagok tengerébe, már ritkábban nézünk hátra. De ahogy telnek a hónapok, új érdekességek tűnnek föl. Az égbolt képe kezd körülöttünk lassan hátrafelé kúszni az égen[11]. Egyre feltűnőbb a jelenség, végül már a csillagok zöme a hátunk mögé zsúfolódik egy foltba, míg az Androméda-köd, és a mögötte látható csillagok képe szétterül, és betölti az eget, majd ők is fokozatosan kúsznak hátrafelé. A hátul lévő csillagok a vöröseltolódás miatt egyre halványabbnak és vörösebbnek látszanak, az elöl lévők viszont kékebbek és fényesebbek lesznek. A színjáték, a csillagvándorlás egészen félútig tart. Az út második felében pedig, amikor fékezünk, a csillagok szépen lassan kúsznak visszafelé, és fokozatosan visszanyerik eredeti színüket. Az utunk végén, mire minden csillag megtalálja a helyét, vadonatúj csillagképeket látunk. Hiszen az ismerős otthoni csillagok szinte mind a Tejútrendszer halvány foltjában rejtőzködnek mögöttünk, míg az eget most az Androméda-köd hozzánk közeli csillagai népesítik be. Megérkeztünk!

[10] És ehhez mindössze hatvan évig kell utaznunk? Hogyan lehetséges?

[11] Ezzel a jelenséggel a C.6.9. Állítás utáni apró betűs részben találkoztunk.