Bevezetés

Te jól tudod, a költő sose lódít:
az igazat mondd, ne csak a valódit.

József Attila: *Thomas Mann üdvözlése*

Mi az algebra? Az algebra abból az igényből fejlődött ki, hogy a számításokat hatékonyan tudjuk elvégezni. Nem csak klasszikus egyenletek és egyenletrendszerek megoldásáról van szó: geometriai és fizikai problémák megoldásakor másféle mennyiségekkel, például komplex számokkal, vektorokkal, mátrixokkal, transzformációkkal, tenzorokkal, kvaterniókkal is végzünk *műveleteket,* amelyek közös tulajdonságait az *algebrai struktúrák* írják le. Ezek önálló vizsgálata számos váratlan alkalmazással szolgált a kombinatorikában, az algoritmuselméletben, sőt a kódelméletben is, ami például a mai megbízható elektronikus kommunikációt teszi lehetővé. A *csoportok* rendező elvet adnak a geometriai vizsgálatokhoz. Azt mondhatjuk, hogy az algebrai struktúrák a matematika több ágában is az alapvető nyelvezet részét alkotják. Az Olvasónak azt tanácsoljuk, hogy lapozzon bele most, és a könyv későbbi tanulmányozása során is többször a rövid 10. fejezetbe, ahol megkíséreltük leírni minél közérthetőbben, de mégis valódi példákra támaszkodva azt, hogy véleményünk szerint mi is az algebra. Ezek a példák és a mögöttük húzódó elvek remélhetőleg egyre világosabbá válnak majd az anyag elsajátítása során.

Kiknek szól ez a könyv? A magyar felsőoktatásban a kreditrendszer bevezetésével, a bolognai folyamat előrehaladtával a hallgatók szabadsága nagy mértékben megnövekedett. Ki-ki igényei szerinti mélységben hallgathat kurzusokat, ahol az anyag mennyisége, felépítése, és így az előadás tempója, részletessége is különböző lehet. Az egységes BSc matematika szak képzése során igen különböző képességű és felkészültségű hallgatók igényeit kell egyidejűleg kielégíteni. Előtérbe került az önálló, otthoni tanulás, továbbképzés lehetősége is. Ezért szükségét éreztük egy olyan tankönyv megalkotásának, amely ezekhez az igényekhez alkalmazkodik, mind a diák, mind a tanára számára.

A tankönyv mindenkinek szól, aki középiskolai tanulmányai befejeztével be akar tekinteni az algebrába. Elsősorban a leendő matematikatanárok, matematikusok, a matematikát alkalmazó szakemberek igényeit tartottuk szem előtt, ideértve például a fizika, a kémia, a mérnöki tudományok, az informatika, vagy akár a közgazdaságtan iránt érdeklődőket is, de haszonnal forgathatják a könyvet az algebra alapjai (komplex számok, polinomok) iránt érdeklődő tehetséges középiskolás diákok, továbbá már végzett tanárok, szakemberek is.

Mennyire nehéz elsajátítani az anyagot? Eukleidész óta tudjuk, hogy a matematikához nem vezet királyi út. Ennek ellenére az elsődleges célunk az volt, hogy e könyv maximálisan *érthető* legyen minél több érdeklődő számára. Felhasználtuk az Eötvös Loránd Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszékének sok évtizedes oktatási tapasztalatait: azt, hogy milyen kérdések hangzanak el a konzultációkon, milyen feladatok bizonyultak a legeredményesebbnek a gyakorlatokon. Az egyszerűbb anyagrészeket is magyarázatokkal láttuk el, bevettük azokat a háttérszámolásokat, részleteztük azokat a meggondolnivalókat, amelyek néha csak házi feladatként szerepelnek az előadásokon. Komolyan reménykedünk abban, hogy a gyengébb háttérrel induló hallgatók is képesek lesznek e könyv segítségével felzárkózni, túljutni a kezdeti nehézségeken.

Hogyan olvassuk a könyvet? A matematikát *alaposan meg kell érteni,* és csak azután lehet megtanulni. Ezt úgy tehetjük a legeredményesebben, ha minél több bizonyítást *önállóan* magunk találunk ki, és ha menet közben elgondolkozunk a dolgokon, mielőtt továbbhaladnánk. Sok olyan könnyű állítás van, amelynek a bizonyítását akkor lehet jól megérteni, ha az Olvasó maga végzi el a részletek aprólékos végiggondolását, „végigszámolását”. Ilyen például új definíciók egyszerű következményeinek ellenőrzése, vagy példák, ellenpéldák megemésztése.

Ezért a könyv formája szokatlan: egyes részletek, meggondolnivalók Kérdés, Gyakorlat, vagy akár Feladat formájában szerepelnek az „elméleti” szövegen belül is. Ha valaki nem boldogul egy ilyen Gyakorlattal, vagy ha ellenőrizni akarja magát, akkor érdemes a megoldást elolvasnia, mielőtt tovább haladna. A Kérdésekre mindig a szövegben következik a válasz. A Gyakorlatok általában könnyebbek, a Feladatok nehezebbek. A szokásosnál nehezebb feladatokat a * szimbólum jelöli. A Feladatokhoz útmutatást adunk a könyv végén, az U. Függelékben. Mindegyik Gyakorlathoz és Feladathoz részletes megoldást készítettünk, amely (képernyőn olvasható és kinyomtatható `pdf` formátumban) az internetről letölthető (a cím az M. fejezetben, a 665. oldalon olvasható). Így a könyvben csaknem teljes egészében, megoldásokkal együtt megtalálható az egyetemi gyakorlatokon általában szereplő törzsanyag.

Vigyázzunk: a megoldások elolvasása nem helyettesíti az önálló gondolkodást. Ezen kívül a megértés és a begyakorlás két különböző dolog! A könyvben szereplő Gyakorlatok és Feladatok elsősorban az anyag megértését segítik. Ha nem elegendőek a begyakorlásra, akkor a Fagyejev–Szominszkij [7] és a Czédli–Szendrei–Szendrei [8] feladatgyűjteményekből érdemes további feladatokat megoldani, egyéni szükségletek szerint.

Milyen a könyv stílusa? Nagy hangsúlyt fektettünk arra, hogy elmagyarázzuk a „miért”-eket: azt, hogy az egyes fogalmak miért fontosak, miért így és nem máshogy definiáltuk őket, hogy a bizonyításokban miért éppen a leírt lépéseket tesszük, hogyan lehetne másmerre haladni.

Elsősorban az apró betűs részekben szerepelnek mélyebb, előremutató vagy filozófiai jellegű megjegyzések is. Noha hangsúlyozottan elméleti anyagot tárgyalunk, megpróbáltunk itt-ott (a teljesség igénye nélkül) kitekinteni a mélyebb matematikai elméletek és néhány alkalmazás irányába is, a fizikától a hibajavító kódolás bemutatásáig. Úgy gondoljuk, mindez nemcsak az anyag alkalmazásához ad segítséget, hanem az *önálló problémamegoldás* elsajátításához is.

Aki a matematikát alkalmazza, azaz modelleket készít, annak a fogalomalkotás technikáját is meg kell ismernie. A fogalmak mögött meghúzódó filozófiát, az algebrai fogalomalkotási módokat, szemléletet egy matematikatanárnak sokszor fontosabb ismernie, mint a konkrét eredményeket. A tanár feladata az is, hogy hidat jelentsen a tudomány és a mindennapok között, és ezért fontos, hogy amennyire lehetséges, áttekintést szerezzen az ismeretek mindenkori állásáról.

♫ Ha valaki matematikával foglalkozik, akár tanárként, akár kutatóként, akár alkalmazóként, mindig el kell döntenie, hogy a precízségnek mely szintje az, amely a maximális érthetőséget eredményezi saját maga és a környezete számára. Ha nem vagyunk elég precízek, akkor összemoshatunk különböző dolgokat, kimaradhatnak fontos feltételek, ami hibához, érthetetlenséghez vezet. Ha viszont túl precízek vagyunk, akkor a formalizmus mögött elsikkad a lényeg, az idő a kódolással/dekódolással, és nem az emberi gondolkozással telik. Az áttekinthetőség, és az ehhez kapcsolódó jó jelölés megtalálása minden matematikusnak elsőrendűen fontos feladata minden egyes problémában, mert hatékonyabbá teszi a gondolkodást és a kommunikációt.

A modern matematikának sajátossága, hogy még az elméleti munkához is egyre inkább használ számítógépes szoftvereket. A célunk nem egy program ismertetése, hanem a kedvcsinálás volt. Elsősorban a `Maple`, illetve a csoportelméleti részben a `GAP` program felhasználásából adtunk ízelítőt. A matematikai programokról részletesebb információ található a P. Függelékben.

Milyen előismereteket tételezünk föl? A könyv kiindulásképpen csak a középiskolai anyagra támaszkodik. Ahogy azonban haladunk előre, szükség lesz más, elsősorban számelméleti, kombinatorikai, és később lineáris algebrai ismeretekre is. Ezek elsajátításában segíthetnek az irodalomjegyzékben szereplő művek, elsősorban Freud Róbert és Gyarmati Edit: *Számelmélet* [1], illetve Freud Róbert: *Lineáris algebra* [2] című könyve. A szövegben természetesen mindig megemlítjük a szükséges előismereteket. A Függelékben külön összefoglaltunk több olyan tételt is, amelyre a szövegben hivatkozunk. Azt ajánljuk, hogy az Olvasó mihamarább fusson végig a halmazelméleti és logikai alapfogalmakat tartalmazó E.1. szakaszon. A tárgyalási módot úgy választottuk, hogy kezdettől fogva a lehető legjobban előkészítse a legfontosabb absztrakt algebrai fogalmak bevezetését. Ezért a könyv első fejezeteibe annak is érdemes belepillantania, aki már ismeri például a komplex számokat vagy a polinomokat.

Milyen anyagot ölel föl ez a könyv? A könyv a lineáris algebra kivételével tartalmazza a tudományegyetemek matematika szakjain tanított algebra tananyagot. Kivételt csak az elméleti matematikusnak készülő, az algebra iránt különösen érdeklődő diákok jelentenek, de őket is megpróbáljuk előkészíteni a szakirodalom önálló tanulmányozására.

Ennek megfelelően először a komplex számokkal, majd a polinomok alapvető tulajdonságaival ismerkedünk meg, beleértve az irreducibilis polinomok vizsgálatát is. A geometriai transzformációk kapcsán bevezetjük a csoportok fogalmát. Ebben a fejezetben jutunk a legmélyebbre, a véges Abel-csoportok alaptételéről, a véges p-csoportok elméletének alapjairól, Sylow tételeiről, permutációcsoportokról, szabad csoportokról egyaránt szót ejtünk, sőt mesélünk a véges egyszerű csoportok klasszifikációjáról is. A Szabó Endre[1] által írt C. Függelék további csoportelméleti témákra és ezek fizikai alkalmazásaira tekint ki.

A gyűrűelmélet tárgyalásakor elsősorban a számelmélet alaptételének mélyebb megértésére és a számfogalom felépítésére szorítkozunk, beleértve Frobenius tételét is a számfogalom lezárásáról, de szó esik röviden a kommutatív és nemkommutatív gyűrűk elméletének alapjairól, továbbá az alkalmazásokban fontos Gröbner-bázisokról is. Eszközeinket felhasználjuk testek vizsgálatára is a Galois-elmélet keretében. Alkalmazásként belátjuk, hogy nevezetes geometriai szerkesztések (körnégyszögesítés, szögharmadolás) nem végezhetők el körzővel és vonalzóval, és megvizsgáljuk az egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának kérdéskörét is. A véges testek konstrukciója módot ad arra, hogy a hibajavító kódok elméletének alapjaiba is belekóstoljunk.

A könyv tartalmát annak rendeltük alá, hogy az Olvasót *bevezessük az algebrai gondolkodásmódba.* Ehhez nyújt példaanyagot a csoportelmélet viszonylag mély tárgyalása, vagy például a főideálgyűrű fölötti végesen generált modulusok alaptételének bizonyítása, és ennek alkalmazása a mátrixok Jordan-féle normálalakjának kiszámítására. Ez a szemlélet indokolja azt is, hogy a könyvben szerepel egy általános algebrákról szóló fejezet, amely segít a már megtanult anyagot összefoglalni, egy szinttel mélyebben áttekinteni.

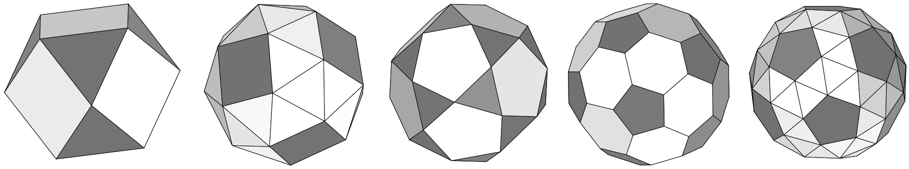
Ugyanakkor nem akartunk belekapni olyan, különben fontos témákba, melyeket amúgy sem tárgyalhattunk volna kielégítő mélységben. Ezért nem esik szó például projektív, injektív modulusokról, és a homológiaelmélet esetében is megelégedtünk kommutatív gyűrű fölött a Hom-csoportok és a tenzorszorzat bevezetésével. Könyvünk elolvasása remélhetőleg elegendő alapot nyújt ezeknek a témáknak haladóbb tankönyvekből való önálló elsajátításához.

[1] Szabó Endre honlapja: `http://www.renyi.hu/~endre`

Ha az Olvasót a most elmondottaknál több részlet érdekli, akkor azt tanácsoljuk, hogy a könyv elején található tartalomjegyzékben fussa át az egyes fejezetek címeit. Mindegyiknek az elején rövid bevezető olvasható. Külön felhívjuk a figyelmet a fejezetek végén található *összefoglalókra,* amelyek a legfontosabb eredményekre való hivatkozásokat is tartalmazzák, és elmondják, hová jutottunk el. Ezek a vizsgára készülésben is hasznosak lehetnek. Így egyes tételeket is visszakereshetünk (ebben a tárgymutató is segíthet).

Köszönetnyilvánítás. A rengeteg szakmai segítségért, hasznos tanácsokért, a sajtóhibák megtalálásáért, a könyv olvashatóbbá tételéért hálámat szeretném kifejezni kollégáimnak: Ágoston Istvánnak, Fried Ervinnek, Hermann Péternek, Keith Kearnes-nek, Lakos Gyulának, Mayer Gyulának, Márki Lászlónak, Moussong Gábornak, Pálfy Péter Pálnak, Pelikán Józsefnek, Prőhle Péternek, Pyber Lászlónak, Simányi Nándornak, Simonovits Miklósnak, Szabó Csabának, Szabó Endrének, Tóth Imre Péternek, továbbá tanítványaimnak (a teljesség igénye nélkül: Bérczi Kristóf, Boros Balázs, Csóka Endre, Finta Viktória, Gyenis Zalán, Haász Sándor, Kmecs Viktória, Salát Máté, Strenner Balázs, Szabó Máté, Vicze Zsolt), valamint családom tagjainak: Vantsó Katalinnak és Kiss Melinda Flórának. Külön ki szeretném emelni Freud Róbert rendkívül gondos lektori munkáját, aki a matematikai és nyelvi javítások mellett számos megoldási ötletet adott az egyes feladatokhoz, és a koncepciók kialakításában is érdemi részt vállalt. A könyv mindannyiunk közös munkája, a „királyi többest” ez indokolja.

Végezetül hadd hangsúlyozzam, hogy a matematikával való foglalkozás a hasznossága mellett szórakoztató, és a gondolkodást fejlesztő időtöltés is. A feladatmegoldást ugyanúgy élvezhetjük, mintha sakkoznánk: ♖♘♗♕♔♗♘♖, bridzseznénk: ♣♢♡♠, vagy zenét hallgatnánk. Abban reménykedve, hogy az Olvasónak is sikerül rátalálnia a matematika szépségére, sikeres és kellemes munkát kívánok néhány arkhimédészi test rajzával, melyek szimmetriáiról a csoportelméletben lesz majd szó.



Budapesten, 2007 tavaszán

Kiss Emil
http://www.cs.elte.hu/~ewkiss