

Tartalom

Előszó	7
I. rész Alapismeretek	9
1. Bevezetés	11
1.1. Jelölések	13
2. Alapfogalmak	15
2.1. Motiváció, példák	15
2.1.1. A radioaktív bomlás egy modellje	15
2.1.2. A barometrikus nyomásformula	17
2.1.3. Baktériumok szaporodásáról	18
2.1.4. Egy egyszerű kémiai reakció	19
2.1.5. Newton II. törvénye	20
2.1.6. Diffúzió, hővezetés	21
2.2. Elemi kvalitatív módszerek	21
2.2.1. A függvényvizsgálat módszereinek kiterjesztése	21
2.2.2. Iránymező	23
2.3. Elemi kvantitatív módszerek	24
2.3.1. Verifikálás	24
2.3.2. Közvetlenül integrálható egyenletek	25
2.4. Definíciók, egzisztencia- és unicitási tételek	26
2.4.1. Explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenlet	26
2.4.2. Kezdetiérték-probléma, avagy Cauchy-feladat	29
2.4.3. Egy ellenpélda	30

6	<i>Tartalom</i>	
2.5.	A Peano-féle egyenlőtlenség	42
2.5.1.	Gronwall és Bihari lemmája	42
2.5.2.	Mérési és modellhibák hatása a megoldásokra	45
2.5.3.	A karakterisztikus függvény és a variációs egyenlet	47
2.6.	A <i>Mathematica</i> alkalmazása az alapfogalmak illusztrálására	49
3.	Néhány egyszerű típus	53
3.1.	Közvetlenül integrálható egyenletek	53
3.2.	Autonóm egyenletek	55
3.3.	Szétválasztható változójú egyenletek	56
3.3.1.	Homogén egyenletek	58
3.3.2.	Homogénre visszavezethető egyenletek	60
3.4.	Elsőrendű lineáris egyenletek	60
3.5.	Egzakt egyenletek	64
3.5.1.	A megoldások inverzére vonatkozó egyenlet	68
3.5.2.	A primitív függvény meghatározása	70
3.6.	Integráló tényező	73
3.7.	Alkalmazások	74
3.7.1.	Gépkocsi fékútjának kiszámítása	74
3.7.2.	Radioaktív kormeghatározás	75
3.7.3.	Oldatok; áramlás	75
3.7.4.	Fényelnyelés, láncgörbe	76
3.8.	<i>Mathematica</i> az egyszerű típusok megoldásánál	76
II. rész	Lineáris egyenletek	79
4.	Lineáris differenciálegyenletek	81
4.1.	Alapfogalmak, alaptételek	81
4.2.	A megoldások előállítása	84
4.2.1.	Homogén egyenlet	84
4.2.2.	Inhomogén egyenlet	87
4.2.3.	Az állandó együtthatós egyenlet alaprendszere	88
4.2.4.	Mátrix exponenciális függvényének kiszámítása	92
4.2.4.1.	Hermite-interpoláció mátrixfüggvényekhez	94
4.2.4.2.	Jordan-alak mátrixfüggvényekhez	94
4.3.	Alkalmazások	97
4.3.1.	Rekeszrendszerek	97
4.3.2.	Egy tanulási modell	99
4.4.	<i>Mathematica</i> és lineáris differenciálegyenlet-rendszerek	99
5.	Magasabb rendű egyenletek	101
5.1.	Átviteli elv	101

5.2.	Általános állítások	105
5.3.	A megoldások előállítása	107
5.3.1.	Inhomogén egyenletek	113
5.3.2.	Kezdetiérték-feladatok	115
5.3.3.	Euler-egyenletek	115
5.4.	Lineáris peremérték-feladatok	116
5.4.1.	A peremérték-feladatok eredete	117
5.4.2.	A peremérték-feladatok osztályozása	117
5.4.3.	Sturm-típusú egyenletekre vonatkozó kezdetiérték-feladatok	119
5.4.4.	A homogén egyenletre vonatkozó peremérték-feladat megoldása	119
5.4.5.	Az inhomogén egyenletre vonatkozó peremérték-feladat megoldása. A Green-függvény	122
5.4.6.	A Green-függvény előállítása	123
5.4.7.	Inhomogén egyenlet inhomogén peremfeltétellel	124
5.5.	Peremértékfeladatok rendszerekre	125
5.6.	Sajátérték-feladatok	126
5.7.	Kvalitatív vizsgálat	127
5.8.	Alkalmazások	133
5.8.1.	Pontmechanika	133
5.8.2.	Kvantummechanika	134
5.9.	<i>Mathematica</i> és magasabb rendű egyenletek	134
6.	A Laplace-transzformáció	137
6.1.	Alapvető fogalmak és tulajdonságok	138
6.2.	Alkalmazások magasabb rendű lineáris egyenletekre	142
6.2.1.	Állandó együtthatós egyenletek	142
6.2.2.	Változó együtthatós egyenletek	143
6.3.	Alkalmazások lineáris egyenletrendszerekre	144
6.4.	Néhány további példa	145
6.4.1.	Bemenet-kimenet rendszerek	145
6.5.	Számítások <i>Mathematicával</i>	146
III. rész A kvalitatív elmélet elemei		149
7.	A stabilitáselmélet elemei	151
7.1.	A stabilitáselmélet alapfogalmai	151
7.2.	Lineáris rendszerek	162
7.3.	Ljapunov tételei	167
7.4.	Ljapunov-függvények szerkesztése	173

8	<i>Tartalom</i>	
7.5.	Alkalmazások	178
7.5.1.	Mechanika	178
7.5.2.	Populációdinamika és kémiai kinetika	181
7.5.3.	Részletesen kiegyensúlyozott reakciók	184
7.6.	<i>Mathematica</i> és stabilitáselmélet	187
8.	Autonóm egyenletek, dinamikai rendszerek	191
8.1.	Alapfogalmak	191
8.1.1.	Az autonóm egyenlet fogalma és tulajdonságai	192
8.1.2.	Dinamikai rendszerek	197
8.1.3.	Autonóm egyenletek és dinamikai rendszerek kapcsolata	202
8.2.	Lineáris rendszerek	205
8.2.1.	Kétdimenziós rendszerek	206
8.2.1.1.	Jordan-féle normálalak	206
8.2.1.2.	Valós sajátértékek, kétdimenziós sajátaltér	206
8.2.1.3.	Kétszeres valós sajátérték, egydimenziós sajátaltér	208
8.2.1.4.	Konjugált komplex sajátértékek	208
8.2.1.5.	Szinguláris együtthatómátrix esete	209
8.2.1.6.	Visszatranszformálás	210
8.2.2.	Magasabb dimenziós rendszerek	213
8.3.	Nemlineáris rendszerek	218
8.3.1.	Globális vizsgálat az egyenesen	220
8.3.2.	Lokális vizsgálat az egyensúlyi pontok körül	221
8.3.2.1.	Általános állítások	222
8.3.2.2.	Kétdimenziós rendszerek	225
8.3.3.	Periodikus megoldások	227
8.3.3.1.	Periodikus pálya stabilitásának vizsgálata	230
8.3.3.2.	Kétdimenziós rendszerek	234
8.3.4.	Globális vizsgálat a síkon	239
8.3.5.	Egy kaotikus modell	245
8.4.	Diszkrét dinamikai rendszerek	248
8.5.	Alkalmazások	251
8.5.1.	Dinamika	251
8.5.1.1.	Ingamozgás	251
8.5.1.2.	Bolygómozgás	252
8.5.2.	Reakciókinetika	254
8.5.3.	Populációdinamika	256
8.5.3.1.	Egydimenziós folytonos idejű modellek	256
8.5.3.2.	Egydimenziós diszkrét idejű modell	257
8.5.3.3.	Kétdimenziós modellek	257
8.6.	<i>Mathematica</i> és autonóm egyenletek	259

IV. rész Kiegészítő fejezetek	261
9. Parciális differenciálegyenletek	263
9.1. Bevezetés	263
9.1.1. Fontos parciális differenciálegyenletek a fizikában és a kémiában	264
9.1.2. Verifikálás	266
9.1.3. Egyszerű megoldási módszerek	267
9.1.4. Parciális differenciálegyenletek osztályozása	270
9.2. Elsőrendű egyenletek	270
9.3. Másodrendű lineáris egyenletek	274
9.3.1. A főrészükből lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletek osztályozása	274
9.3.2. A Laplace-egyenlet és a Poisson-egyenlet	275
9.3.2.1. Megoldás a teljes téren	276
9.3.2.2. Megoldás korlátos tartományon	277
9.3.3. A hővezetési vagy diffúziós egyenlet	279
9.3.3.1. Megoldás a teljes téren	279
9.3.3.2. Megoldás korlátos tartományon	281
9.3.4. A hullámeqyenlet	284
9.3.4.1. Megoldás a teljes téren	284
9.3.4.2. Megoldás korlátos tartományon	286
9.4. A Laplace-transzformáció alkalmazása	288
9.5. <i>Mathematica</i> és parciális differenciálegyenletek	289
10. A variációszámítás elemei	293
10.1. Bevezetés: optimalizálási feladatokról	293
10.2. A variációszámítás alapfeladata	294
10.3. Euler–Lagrange-egyenletek	298
10.3.1. A minimális forgásfelület	303
10.3.2. A brachisztrochron-probléma	305
10.4. Elégséges feltétel	307
10.5. Alkalmazások	310
10.5.1. Dinamika	311
10.5.2. Optika	311
10.5.2.1. Az állandó törésmutató esete	312
10.5.2.2. Fénytörés	312
10.5.2.3. Tükröződés a talajon	313
10.5.2.4. Optikai szál	314
10.5.3. Egy közgazdasági példa	316
10.5.4. Egy geometriai feladat	317
10.5.5. Kitekintés és filozófiai megjegyzések	319
10.6. <i>Mathematica</i> és variációszámítás	319

10 *Tartalom*

11. A feladatok megoldása	321
11.1. A megoldások elé	321
11.2. A 2. fejezet feladatainak megoldása	321
11.3. A 3. fejezet feladatainak megoldása	327
11.4. A 4. fejezet feladatainak megoldása	335
11.5. A 5. fejezet feladatainak megoldása	337
11.6. A 6. fejezet feladatainak megoldása	344
11.7. A 7. fejezet feladatainak megoldása	345
11.8. A 8. fejezet feladatainak megoldása	352
11.9. A 9. fejezet feladatainak megoldása	360
11.10A 10. fejezet feladatainak megoldása	367
Hivatkozások és bibliográfia	373
Tárgy- és névmutató	383