

Válogatott gyakorlatsmegoldások, útmutatók

2. fejezet

2.2. Az alsó sor középső mezőjébe téve jelét, a keresztet húzó játékos nyer. A karikát húzó játékos akkor nyer, ha a bal alsó sarokba teszi jelét.

2.3. Az a, b, c, d, e, g állások mind ekvivalensek egymással; másrészt ekvivalensek egymással a d, f és h állások is. Az a -ból kiindulva a c állást kapjuk, ha mindent egy sorral feljebb léptetünk; a g -t ha mindent eggyel jobbra léptetünk; a b -t ha mindent először eggyel balra, aztán eggyel lejjebb léptetünk; végül, az e -t ha a -t egy negyedfordulattal elforgatjuk. A másik csoportot tekintve, d -t egy félfordulattal elforgatva kapjuk f -et (ez a művelet egyenértékű egy lefele majd jobbra léptetéssel), végül f -et eggyel jobbra léptetve megkapjuk h -t.

2.4. A kezdő játékosnak valójában nincs választási lehetősége, hiszen minden mezőt le/fel illetve jobbra/balra léptetve elérhető, hogy bármely általa választott mező a tábla közepére kerüljön. Ellenfele erre két lépés között választhat: vagy közvetlenül mellé tesz, vagy egy átlósan lévő mezőt választ. Helyes stratégiát alkalmazva a kezdő játékos mindig nyer.

2.5. A világos huszár egy futót, a királyt és két huszárt támad, míg őt egy királynő, egy bástya, egy futó és a huszárok támadják.

2.6. A világos huszár és királynő minden sötét bábút támad.

2.8. A bal alsó sarokba. (Képzeljük úgy, hogy először felfelé, majd jobbra lép egyet.)

2.9. A szokásos sakkban bevált érvelés mutatja, hogy ez soha nem fordulhat elő: egy futó csak olyan bábút támadhat, mely vele egyező színű mezőn áll, míg huszár csak az övével ellentétes színű mezőn álló bábút tud támadni.

2.10. A falon keresztülnézve szobánk egy pontos másolatát látjuk, a szobában pedig saját magunkat; például az elülső falon át a hátunkat. A padlón keresztülnézve a fejünk búbját, a plafonon át pedig a cipőnk talpát látjuk.

2.12. Dobjuk el a labdát, majd gyorsan forduljunk meg. Ha ezt elég gyorsan meg tudjuk csinálni, egész jól ellabdázhatunk saját magunkkal.

3. fejezet

3.1. Az a és c felületek topológiája azonos. Azonos topológiájúak b és d , valamint egy harmadik csoportot alkot e, f, g és h . Első pillantásra úgy tűnhet, hogy a h felület négy személyes. Ha azonban azonos síkba forgatjuk a „fogantyúit”, akkor rögtön látható, hogy csak három személyes. A g felületet pedig (gondolatban) egy kicsit deformálnunk kell ahhoz, hogy keresztvezető részeit kibogozzuk.

3.2. Egy topológiai tulajdonságot fedezett fel, hiszen Síkföld azon tulajdonsága, hogy ilyen fonal-nyomvonalak fektethetők le rajta, változatlan marad deformálásai során.

3.3. Az a, c, d és f felületek megegyeznek egymással beágyazás szempontjából, a b felület pedig az e -vel. A legnehezebb azt észrevenni, hogy c és f azonosak a -val: húzzuk össze f -ben a két hurkot összekötő részt s az így keletkező felület most már c -re hasonlít; ha pedig c belső fogantyúját kihúzzuk a külső alól, akkor az így keletkező felület kezd hasonlítani a -ra. Sok szerencsét!

3.4. A szétvágás után csak fél csavarral ragasszuk újra össze a szalagot (szemben az eddigi teljes csavarral). Az eredményül kapott alakzatot Möbiusz szalagnak hívják.

3.5. Egy papírlapból csavarható kúp, de egy kosárlabdára már nem simíthatjuk anélkül, hogy meggyűrnénk. Aki nem hiszi, járjon utána! Ha nincs kéznél kosárlabda, használhatjuk valaki fejét is. Eszerint a papírlap, a henger és a kúp geometriája azonos (ha a kúp csúcspontját figyelmen kívül hagyjuk), míg a kosárlabdáé különbözik a fentiekétől.

3.6. Képzeljük ezt a világot egy szobának, melynek szemközti falait páronként azonosítottuk. Ha például mi az egyik fal mellett lakunk, barátaink a szoba közepén, a felfedező út pedig a szemközti falhoz vezetett, akkor az út végeztével csupán át kell lépünk a mellettünk lévő falon és máris otthon vagyunk.

3.7. Az első felfedezés lokális, míg a második és harmadik globálisak.

3.8. Egy egysokaság (azaz egydimenziós sokaság) olyan tér, melynek lokális topológiája az egyenes lokális topológiájával egyezik meg. A körvonal például egy egysokaság. (Sőt, ez az egyetlen „zárt” egysokaság.)

3.9. A henger és a sík lokális geometriája megegyezik. Globális topológiájuk különböző, míg lokális topológiájuk (mint minden felületé) azonos. Csupán a 2. számú felfedezés segítségével tudnának a síkföldiek egy hengert a síktól megkülönböztetni, de ez is csak akkor sikerülhet nekik, ha a helyes irányba indulnak.

3.10. Lokális topológiájuk (mint minden háromsokaságé) azonos, ugyanígy lokális geometriájuk is (mely ugyanolyan mint a közösleges euklideszi téré). Globális topológiájuk is egyforma – mindegyik szoba könnyen deformálható (azaz itt: nyújtható/összenyomható) annyira, hogy a másikkal azonos méretű legyen. Az azonban, hogy a szobák eredeti méretei különböznek azt eredményezi, hogy a kapott háromsokaságok globális geometriái különböznek.

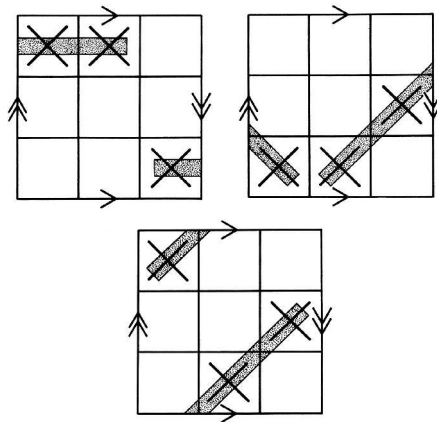
3.11. Igen; lokális geometriája minden pontban megegyezik a közösleges euklideszi tér lokális geometriájával.

3.12. 1., 3., 4., 7. és 9. zártak, míg 2., 5., 6. és 8. nyíltak.

3.13. Saját magába ütközne.

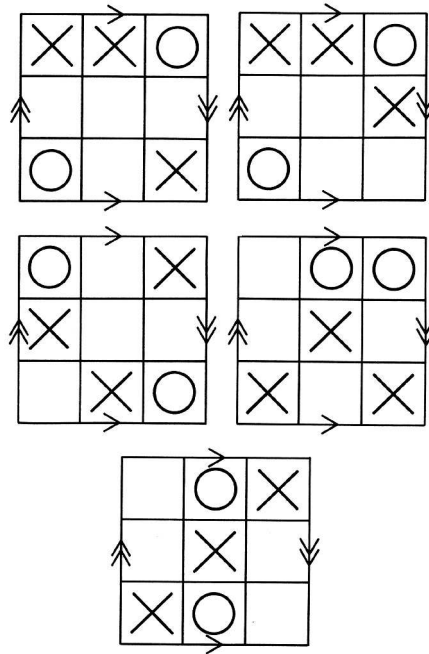
4. fejezet

4.2. Minden állás nyerő!



4.3. A világos huszár egy futót, egy huszárt és egy bástyát támad. Ugyanaz a futó, huszár és bástya támadja őt.

4.4. A keresztet húzó játékos azonnal nyer minden állásban a mellékelt ábrán látható lépésekkel. (Ugyanakkor az első négy tábla mindegyikén veszít, ha ezeket elmulasztja és helyette arra koncentrál, hogy megakadályozza a kártyát húzó játékos nyilvánvalóan nyerő lépéseit, mivel az utóbbi kétféleképpen is nyerhet ezeken a táblákon.)



4.7. A bal *felső* sarokban találja magát.

4.8. A 2.6-os ábra táblájának jobb oldalán lévő minden mező vele *azonos színű* mezővel lesz szomszédos, miután Klein palackot ragasztunk a táblából. Ily módon, amikor a futó a tábla egyik szélén átlép, a másik oldalon ellentétes színű mezőre kerül. Ez a jelenség nem lép fel, ha a 4.8.-as ábra szerinti táblából készítjük a Klein palackot; itt ugyanis minden szomszédos mező ellentétes színű lesz. Egy huszár és egy bástya azonban továbbra is tudja ütni egymást: tegyük a bástyát a középpont feletti sorba, a huszárt pedig eggyel jobbra és kettővel lejjebb.

4.9. A hátsó (illetve elülső) falon kinézve a szoba tükörképét látjuk. A többi falon keresztül a szoba rendes mása látszik, hasonlóan a háromtóruszban tapasztaltakhoz.

4.11. A projektív sík nem irányítható: az a síkföldi, aki „átlépi a peremet”, saját maga tükörképéként tér vissza.

4.12. Abban a pillanatban van a legmesszebb, amikor éppen átlépi a peremet; ezután ismét közeledni kezd otthonához.

4.13. A két tűzoltóállomást „ 90° -os szögben” kell elhelyezni. Lehet például mind a kettő a peremen⁴, 90° -os szögben, vagy az egyik tehető a peremre, a másik pedig a „déli sarkra”. Három tűzoltóállomást úgy kell elhelyezni, hogy páronként 90° -os szöget zárjanak be. Ez elérhető például úgy, hogy kettőt (90° -os szögben) a peremre teszünk, a harmadikat pedig a déli sarkra.

4.14. Sétáljon addig egy egyenes vonal mentén⁵, míg vissza nem ér. Egy projektív síkon saját maga tükörképeként tér vissza, míg egy gömbfelületen eredeti valójában. Ez az egyszerű módszer nem segít a második síkföldinek: neki meg kell mérnie egy háromszög belső szögeinek összegét és megnézni, vajon az eredmény 180 fokkal egyenlő-e.

4.15. Gömbfelület: görbült és irányítható. Tórusz: lapos és irányítható. Klein palack: lapos és nem irányítható. Projektív sík: görbült és nem irányítható.

4.16. A projektív tér irányítható. A tömör gömb peremét átlépve ugyan 180 fokkal elforgatottnak találjuk magunkat, de megmarad eredeti valónk, nem válunk a saját tükörképünké. Részletesebb magyarázatért lásd a 14.8-as ábrát és a 14. fejezet ezen ábrához kapcsolódó részeit.

4.17. Az irányíthatóság globális tulajdonság, mert a sokaságról mint egységes egészeről mond valamit. Könnyen láthatóan topológikus tulajdonság, hiszen semmilyen deformálás nem változtat rajta.

5. fejezet

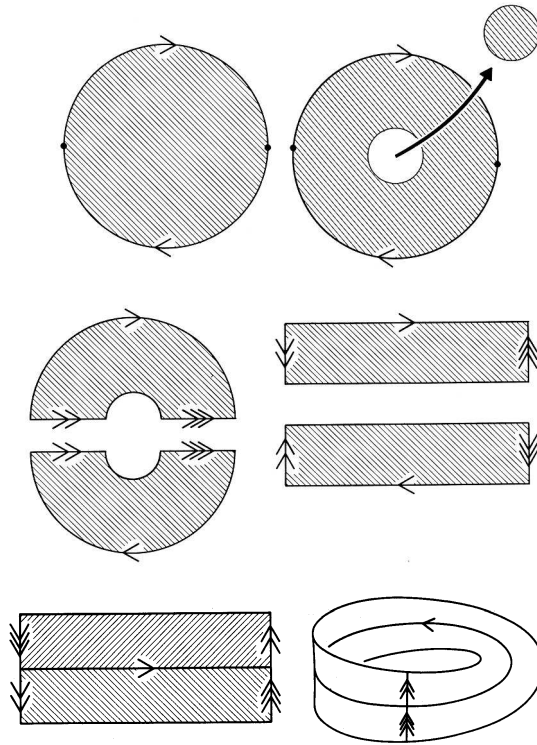
5.1. Egy kétszemélyes és egy egyszemélyes úszógumi-felület összefüggő összege egy háromszemélyes úszógumi-felület. (Győződjünk meg erről egy, az 5.4-eshez hasonló rajz készítésével.) Hasonlóan, egy hat- és egy tizenegyszemélyes felület összefüggő összege egy tizenhét-személyes úszógumi-felület.

5.2. A gömbfelület és egy tetszőleges felület összefüggő összege egyszerűen az eredeti felület. Ennek az az oka, hogy a gömbfelületből egy körlapot elhagyva (topológiailag) ismét egy körlapot kapunk, vagyis az összefüggő összeg vételekor felületünkéből először elhagyunk egy körlapot, majd visszarakasztunk egy másikat.

⁴ Emlékezzünk, hogy nem a projektív sík pereméről van szó – az ugyanis nincs –, hanem ama félgömb határoló körvonaláról, melynek átellenes pontjait összeragasztva kaptuk meg a projektív síkot – (a lektor).

⁵ Az olvasót talán zavarja az a körülmény, hogy például egy gömbfelületen nincs egyenes vonal. Ez igaz. Azonban itt a szerző „egyes vonalon” geodetikust ért, azaz olyan görbét, melynek bármely két (elegendően közeli) pontja közötti íve rövidebb bármely másik a felületen futó, a két pontot összekötő görbe ívéénél – (a lektor).

5.3. Amikor a projektív síkból kivágunk egy körlapot, Möbiusz szalagot kapunk.



5.4. Két projektív sík összefüggő összege egy Klein palack. Vegyünk két projektív síkot és hagyjunk ki belőlük egy-egy körlapot. A keletkezett Möbiusz szalagokat (lásd az 5.3. gyakorlatot) a peremük mentén összeragasztva egy Klein palackot kapunk (lásd az 5.6-os rajzot).

5.5. A történet alapján Síkföld egy tórusz és egy projektív sík összefüggő összege. A biztonságos részek egy olyan tóruszt alkotnak, melyből hiányzik egy körlap, míg a Tükröző Zóna nem más, mint egy Möbiusz szalag, ami pedig egy olyan projektív sík, melyből szintén hiányzik egy körlap.

5.6. $(T^2 \# T^2) \# S^2 = T^2 \# T^2$, $K^2 \# S^2 = K^2$ és $P^2 \# S^2 = P^2$. (Az $X \# S^2 = X$ minden X felületre teljesül.)

5.7. (a) $K^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$, (b) $K^2 \# T^2 = P^2 \# P^2 \# T^2$, és (c) $K^2 \# K^2 = P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$.

5.9. Az 5.8-as gyakorlat szerint $T^2 \# P^2 = K^2 \# P^2$, az 5.4-es gyakorlat pedig mutatja, hogy $K^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$.

5.10. Ha egy összefüggő összegben tóruszok és projektív síkok egyaránt szerepelnek, akkor az ennek megfelelő felület felírható pusztán projektív síkok összefüggő összegeként is, hiszen – a felület topológiájának megváltoztatása nélkül – a tóruszok Klein palackokra cserélhetők (lásd az 5.8-as gyakorlatot), majd a Klein palackokat projektív síkokkal helyettesíthetjük (az 5.4-es gyakorlat eredménye alapján). Vegyük azonban észre, hogy ha egy összefüggő összeg csak tóruszokat tartalmaz, akkor az nem lehet egyenlő egy, csak projektív síkokat tartalmazó összeggel, hiszen az 5.8-as gyakorlat feltételezi legalább egy projektív sík jelenlétét. (Mellékesen, tóruszok összefüggő összege irányítható, míg projektív síkoké nem, így ezek soha nem lehetnek egyenlők.) Ez alapján $T^2\#P^2 = K^2\#P^2 = P^2\#P^2\#P^2$, $T^2\#K^2 = T^2\#P^2\#P^2 = K^2\#P^2\#P^2 = P^2\#P^2\#P^2\#P^2$, $P^2\#S^2 = P^2$ és $S^2\#S^2 = S^2$. Összefoglalva: a gömbfelület és tóruszok összefüggő összegei irányíthatóak, míg projektív síkok összefüggő összegei nem.

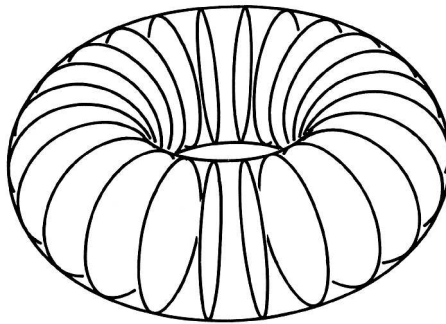
5.11. $T^2\#S^2 = T^2$, $K^2 = P^2\#P^2$, $S^2\#S^2\#S^2 = S^2\#S^2$, $P^2\#T^2 = K^2\#P^2$ és $K^2\#T^2\#P^2 = P^2\#P^2\#P^2\#K^2$.

6. fejezet

6.1. 1. négyzet; 2. sík; 3. (végtelen) henger; 4. (végtelen) szalag.

6.2. Nem, mivel ugyan szakaszok köre, de nem állítható elő körök szakaszaként. (A 17. fejezetben részletesebben fogunk evvel a kérdéssel foglalkozni.)

6.3. A $D^2 \times S^1$ szorzat topológiailag egy tömör úszógumi. Az ábra mutatja, hogy előáll körlapok körvonalaként. Előáll körvonalak körlapjaként is, de azt egy kicsit nehezebb lerajzolni.

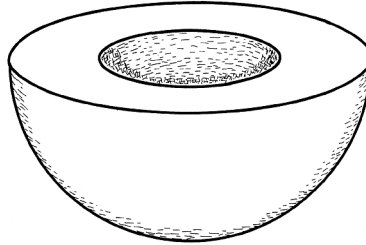


6.4. Az első példában a körök, az utolsóban pedig a szakaszok nem egyforma méretűek. A középső példában a körök nem merőlegesek a szakaszokra.

6.5. Egy szabályos négyzet geometriai szorzat lesz, minden más négyszög (deformált négyzet) már csak topológiai.

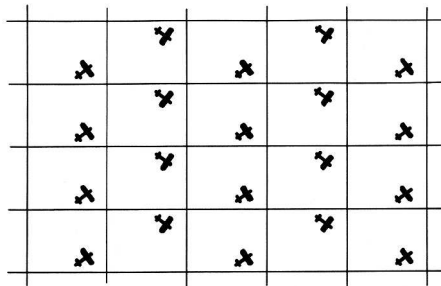
6.6. A kapott háromsokaság egy Klein palack és egy körvonal szorzata ($K^2 \times S^1$). (A 6.5-ös ábra vízszintes szeletei Klein palackokká válnak a megfelelő ragasztás után.) Az eredmény geometriai szorzat lesz, mert mind a vízszintes Klein palackok, mind a függőleges szakaszok azonos méretűek egymással, és a szakaszok merőlegesek a Klein palackokra.

6.7. $P^2 \times S^1$, amit legjobban megvastagított félgömbként képzelhetünk el (lásd a mellékelt rajzot). A belső félgömböt a külsővel kézenfekvő módon azonosítjuk, a „peremfelület” pontjait pedig úgy ragasztjuk össze, hogy minden félgömbfelület-réteg egy-egy projektív síkká váljon. A kapott sokaság lokálisan $S^2 \times S^1$ -gyel egyezik meg, globális topológiája azonban különbözni fog. Találjunk $P^2 \times S^1$ -ben irányításfordító utat!

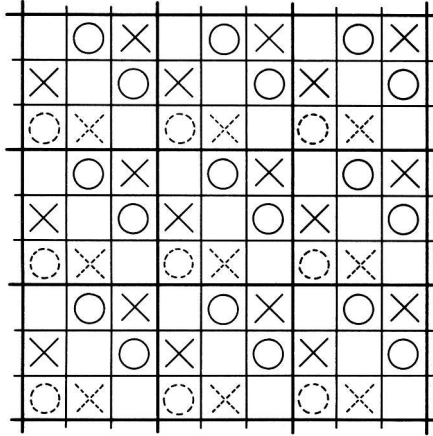


7. fejezet

7.1.



7.2.



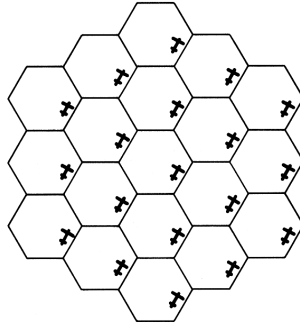
7.3. A „negyedfordulatos sokaságban” kockák egy végtelen hálóját láthatjuk: egy adott szinten a kockák színezése azonos; egy szinttel feljebb a kockák negyedfordulattal elfordultak; még egy szinttel feljebb egy újabb negyedfordulattal, és így tovább. Hasonló a látvány a fél- illetve háromnegyedfordulatos sokaságokban is. A negyed- és háromnegyedfordulatos sokaságok egymás tükörképei, így csupán belső tulajdonságaik alapján nem is tudjuk őket megkülönböztetni. Ennek oka az, hogy nincs olyan módszer, mellyel az óramutató járásával megegyező vagy ellenkező irányt azonosítani tudnánk: az órák mutatóinak megfigyelése sem segít, hiszen nem tudjuk, éppen „normális” vagy „tükrözött” énünk kezén nézzük az órát. A filozófiai kérdések iránt fogékonyabb olvasók tovább meditálhatnak ezen a kérdésen: a probléma lényege az, hogy a „jobb-bal” illetve „az óramutató járásával egyező-ellenkező” kifejezéseket a mindennapi életben abszolút értelemben használjuk, habár ezek valójában csak relatív fogalmak, és csupán azonos térben lévő tárgyak összehasonlítására alkalmasak.

7.4. A 7.10-es ábrához: a kocka elülső oldalát úgy ragasszuk a hátsóhoz, hogy előtte tükrözzük a függőleges oldalfelező merőlegesére; a tetejét az aljához úgy, hogy előtte tükrözzük a szemünk síkjára merőleges oldalfelezőjére; a jobb és bal oldalait pedig a kézenfekvő módon. A 7.11-es ábrához: az elülső oldalt ismét úgy ragasszuk a hátsó oldalhoz, hogy előtte tükrözzük a függőleges oldalfelező merőlegesére; a tetejét az aljához azonban most a szemünk síkjával *párhuzamos* oldalfelezőjére tükrözzük mielőtt az aljához ragasztjuk. A jobb és bal oldalakat továbbra is a kézenfekvő módon ragasszuk. Végül a 7.12-es ábrát kapjuk, ha az eredeti kocka elülső oldalát

először a függőleges oldalfelező merőlegesére tükrözzük, s csak aztán ragasztjuk a hátsóhoz; a tetejét az aljához egy félfordulattal, és a jobb oldalt a balhoz „rendesen”. (A 7.12-es ábra esetében az is helyes, ha azt mondjuk, a kocka tetejét úgy kell az aljához ragasztanunk, hogy előtte kétszer tükrözzük – először a szemünk síkjára *merőleges*, majd a szemünk síkjával *párhuzamos* oldalfelező merőlegesre –, mivel e két tükrözés egymásutánja a kocka tetejének 180 fokos elforgatását eredményezi.)

7.5. A 7.3-as gyakorlatban előforduló minden sokaság irányítható; egy utazás során megeshet, hogy „elforgatódunk”, de soha nem válunk a saját tükröképünké. A 7.4-es gyakorlat minden egyes sokasága nem irányítható: mindegyiknél legalább egy oldalpárt (pl. az elsőt és a hátsót) valamilyen tengelyes tükrözéssel ragasztottunk össze.

7.6.



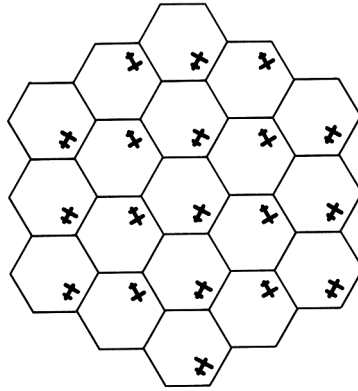
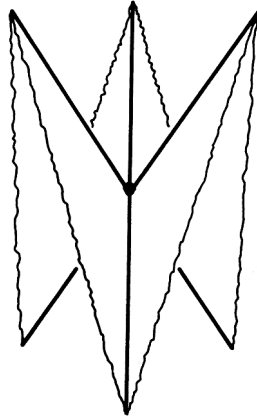
Ha egy másik kisrepülő is ott repül a hexagonális tóruszban, akkor persze az is megjelenik minden egyes hatszögű (hexagonális) cellában.

7.7. Az első felület esetében a hatszög hat sarka három, egyenként két csúcsot tartalmazó csoportra oszlik, így a felületnek három kúp-pontja van. A második esetben a csúcsok két csoportban, hármásával illeszkednek össze, így a kapott felületen nincs kúp-pont. A harmadik példában pedig mind a hat csúcs egy pontban találkozik a ragasztáskor, úgyhogy a kapott felület egy „anti-kúppontot” tartalmaz (azaz egy olyan pontot, melyet több mint 360 foknyi felület vesz körül, szemben a kúp-ponttal, melyet kevesebb mint 360 foknyi. Lásd a következő oldalon a felső ábrát!)

7.8. Egyik sem.

7.9. A kapott felület egy hexagonális Klein palack. (Lásd a következő oldalon a középső ábrát!)

7.10. A hexagonális és lapos tórusznak (mint minden felületnek) azonos a lokális topológiája. Megegyezik lokális geometriájuk is (mindkettő lapos), és még globális topológiájuk is egyforma (mindkettő úszógumivá alakítható).



Globális geometriájuk azonban különböző, mint azt a 7.6-os és 7.9-es gyakorlatokhoz tartozó ábrák mutatják.

7.11. Csak a második felület lapos; az első kúp-pontjai, a harmadik pedig anti-kúppontja miatt nem lapos.

7.12. A hexagonális és a szakásos háromtórusz lokális geometriája azonos: mindkettő lapos, vagyis lokális geometriájuk a közönséges euklideszi tér lokális geometriájával azonos. Mindkettő globális topológiája a tórusz és a körvonal szorzatának topológiájával egyezik meg – az egyik esetben a hexagonális tóruszt, míg a másik esetben a közönséges lapos tóruszt szorozzuk a körvonalal. Ezek a különbségek azonban geometriai és nem topológiai természetűek. Ugyanemiatt azonban globális geometriájuk különböző. Egy hexagonális háromtóruszban körülnézve saját magunk másolatait látnánk, hexagonális rácsból álló szintekbe rendezve.

7.13. Saját magunk másait ismét hexagonális rácsból álló szintekbe rendezve látnánk ugyanúgy, mint a hexagonális háromtörusz esetében. Az egyetlen különbség az, hogy egy adott szinten levő másolatok most egyharmaddal (egyhatoddal) elfordulnak a közvetlenül alattuk levő szintbeli kópiákhoz képest.

8. fejezet

8.1. (1) Törusz; irányítható és kétoldalú. (2) Klein palack; nem irányítható és kétoldalú. (3) Törusz; irányítható és egyoldalú. (4) Klein palack; nem irányítható és egyoldalú.

8.2. Az egy- vagy kétoldalúság egy felület külső jellemzője, mivel attól függ, hogy az adott felület hogyan ágyazódik be egy háromsokaságba. (Tekintsük például a 8.2. ábra első és harmadik rajzán lévő töruszokat, melyek belülről nem különböztethetők meg, s melyek közül az egyik egyoldalú, míg a másik kétoldalú.)⁶

Az irányíthatóság viszont belső tulajdonság, hiszen egy síkföldi képes eldönteni azt, hogy a felület, melyen él irányítható-e vagy sem.

A Klein palackok mind nem irányíthatók, de van köztük egyoldalú (például a 8.2. ábra utolsó rajzán látható) és van kétoldalú (amilyen például a 8.2. ábra második rajzán lévő palack).

8.3. Használjuk a 8.2-es ábra második rajzán lévő kétoldalú Klein palackot, s benne egy előlről hátrafelé futó középső sávot.

9. fejezet

9.1. Első háromszög: területe = $\pi/2$, szögösszege = $3\pi/2$. Második háromszög: területe = $\pi/6$, szögösszege = $7\pi/6$. Harmadik háromszög: területe = $2\pi/3$, szögösszege = $5\pi/3$. Negyedik háromszög: területe = π , szögösszege = 2π . Ötödik háromszög: területe = $\pi/2$, szögösszege = $3\pi/2$. Hatodik háromszög: területe = 2π , szögösszege = 3π . A későbbiekben majd összefüggést fogunk mutatni háromszögek területe és belső szögeinek összege között.

⁶ Valójában tehát az „egyoldalúság” vagy „kétoldalúság” nem a felület (jelen esetben a Klein palack) tulajdonsága, hanem a felület és az azt tartalmazó háromdimenziós sokaság által alkotott páré. Az S^2 kivételével minden zárt felülethez van olyan zárt háromsokaság, melybe a felület egyoldalúan beágyazható. Kétoldalúan pedig nyilván minden F felület beágyazható az $F \times S^1$ sokaságba – (a lektor).

9.2. Az első háromszög belső szögeinek összege $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$, ennélfogva területe $\frac{13\pi}{12} - \pi = \frac{\pi}{12}$. A második háromszög esetében a fokokat először radiánra kell váltani (azokat $\frac{\pi}{180}$ -nal szorozva); ekkor a területre $T = (1,065 + 1,082 + 1,1) - \pi = 3,247 - 3,142 = 0,105$ adódik. (Megjegyzés: ha a szögek fokban vannak megadva, érdemes a szögösszegekből először 180 fokot levonni, és csak a kapott eredményt radiánra váltani. A fenti példában tehát csak $(61^\circ + 62^\circ + 63^\circ) - 180^\circ = 6^\circ$ -ot kell átváltani; így a válasz ismét $6 \times (\frac{\pi}{180}) = \frac{\pi}{30} = 0,105$.)

9.3. Első megoldás: Változtassuk meg a $T = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ képlet fenti levezetését úgy, hogy az alkalmazható legyen a kettő, három vagy r sugarú gömbfelületre is. Kezdjük a kettős holdak területére vonatkozó formula átalakításával. A helyes végeredmény $T = r^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$.

Második (elegáns) megoldás: Rögzítsünk az egység sugarú gömbfelületen egy háromszöget, majd nagyítsuk a gömbfelületet kettő sugarúra miközben hagyjuk, hogy a háromszög is vele nőjön. Eközben a háromszög szögei nem változnak, területe viszont négyszeresére nő (hiszen mind a magassága, mind a szélessége megduplázódik). Általánosságban, ha a gömb sugara r -szeresére növekszik, a háromszög területe (hasonlóan a gömbfelület teljes területéhez) r^2 -szeresére nő. Másszóval, az r sugarú gömbfelületen lévő háromszög területe r^2 -szer akkora, mint a hozzá hasonló, egységnyi sugarú gömbfelületen lévő háromszögé. Következésképp területének képlete $T = r^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$.

9.4. A parasztember földjének területe $T = r^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi] = (1000 \text{ m})^2 [(0,76138 + 1,48567 + 0,89483) - 3,14159] = (1000000 \text{ m}^2)[0,00029] = 290 \text{ m}^2$. Mivel a szögek három tizedesjegyre vannak megadva, a kerekítésből adódó hiba miatt az eredmény csak néhány százalék pontosságú. Mi történik, ha a szögeket eredetileg csak egy tizedesjegyre adták meg?

9.5. A $T = r^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$ képletbe helyettesítve a keresett sugár $r = 10000$ méternek adódik. Ebből következően a gömb felszíne $T = 4\pi r^2 = 1,2 \times 10^9$ négyzetméter.

9.6. (1) $\pi + (2 \times 10^{-5})$ radián, (2) $\pi + (0,01)$ radián, (3) $\pi + \frac{1}{2}$ radián.

9.7. A projektív sík lokális geometriája megegyezik a gömbfelületével, így a gömbi háromszögekre talált területképlet is működik rajta. Egy projektív síkon élő síkföldi lokális adatok alapján nem tudja megállapítani, hogy gömbfelületen vagy projektív síkon él-e. Globális adatok birtokában azonban könnyen kiderítheti, hiszen a projektív sík nem irányítható, így a benne utazókkal megeshet, hogy saját tükörképükként térnek vissza.

10. fejezet

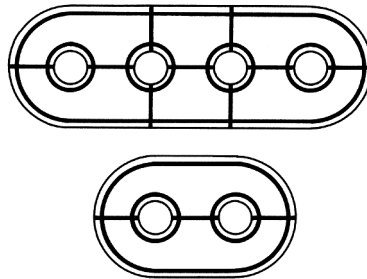
10.2. Ikozaédert kapunk. (Az ikozaéder 20 darab háromszöglappal rendelkező szabályos poliéder.) Az ikozaéder pontosan annyira közelíti meg a gömbfelület geometriáját, mint ahogy a hiperbolikus papír a hiperbolikus síkét.

10.3. $T = \pi - (\pi/2 + \pi/3 + \pi/6) = \pi - 3\pi/4 = \pi/4.$

11. fejezet

11.1. A kúp-pontok megszüntetéséhez helyezzük a négyzetet egy gömbfelületre és nagyítsuk addig, míg sarkai éppen egy körlappá illenek össze a ragasztáskor (ez pontosan akkor következik be, amikor a négyzet egy teljes félgömböt fed le, és ekkor minden szöge pontosan 180 fok). A felületen ezzel egy homogén, elliptikus geometriát találtunk. Vegyük észre, hogy a projektív síkról van szó (topologikusan mindvégig a projektív síkkal dolgoztunk, de csak most találtuk meg a helyes geometriát). A 11.1-es ábra első felülete is egy projektív sík.

11.2. *Első felület:* mind a hat sarok egy csúcs körül illeszkedik és így egy anti-kúppontot kapunk, melyet egy hiperbolikus geometria tüntet el. *Második felület:* a csúcsok két darab hármas csoportra oszlanak, nincs sem kúp, sem anti-kúppont, úgyhogy a felület geometriája euklideszi (lapos). *Harmadik felület:* mind a nyolc sarok egy csúcs körül illeszkedik és így egy anti-kúppontot kapunk, melyet egy hiperbolikus geometria tüntet el. *Negyedik felület:* mind a nyolc sarok egy csúcs körül illeszkedik és így egy anti-kúppontot kapunk, melyet egy hiperbolikus geometria tüntet el.



11.3. Egy n -személyes úszógumit hatszögekre vágva olymódon, hogy a hatszögek sarkai négyesével találkozzanak, mindig pontosan $4n - 4$ hatszöget

kapunk. (Habár nagyon sokféleképpen vághatjuk fel az úszógumit ilyen hatszögekre, a számuk mindig $4n - 4$ lesz!)

11.4. P^2 elliptikus geometriájú. $P^2 \# P^2$ -n euklideszi geometria található, hiszen a lapos négyzet 90° -os szögei szépen összeillenek négyes csoportokban. ($P^2 \# P^2$ persze ugyanaz, mint K^2 , úgyhogy kezdettől fogva tudtuk, van rajta euklideszi geometria.) Minden további esetben a sokszögek szögeit csökkentenünk kell ahhoz, hogy a négyes csoportok pontosan illeszkedjenek egy-egy csúcs körül (azaz 2π -t adjanak ki összegben), ezért a többi összefüggő összegben hiperbolikus geometria található.

11.5.

	irányítható	nem irányítható
elliptikus	S^2	P^2
euklideszi	T^2	$P^2 \# P^2 (= K^2)$
hiperbolikus	$T^2 \# T^2$	$P^2 \# P^2 \# P^2$
	$T^2 \# T^2 \# T^2$ stb.	$P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$ stb.

12. fejezet

12.1. A cellafelbontásban kilenc csúcs, tizenöt él és hét lap szerepel.

12.2. Egy n -szög $(n - 2)$ darab háromszögre vágható fel. Az n -szög belső szögeinek összege éppen a háromszögek belső szögösszegének összege lesz; egy háromszögre ez a szögösszeg éppen π .

12.3. Egy n -szög területe éppen $(n - 2)$ részháromszöge területének összegével egyenlő. Másrészt egy háromszög területe nem más, mint belső szögeinek összege mínusz π . Ily módon egy n -szög területe egyenlő belső szögeinek összege mínusz $(n - 2)\pi$.

12.4. A módszer ugyanaz, mintha a sokszög egy gömbfelületen lenne, csak most a háromszög területét a $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ képlet adja meg, nem pedig $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$. A végső képlet: $T = (n - 2)\pi -$ (belső szögek összege).

12.7. Mindössze a 2. lépésben szükséges módosítanunk: a $T =$ (belső szögek összege) $-(n - 2)\pi$ képlet helyett a $T = (n - 2)\pi -$ (belső szögek összege) képletet kell alkalmaznunk. Mivel ez éppen mínusz egyszerese az előző formulának, végeredményként $T = -2\pi\chi$ adódik.

12.8. A 12.1. (b) ábrán látható cellafelbontást alkalmazva $\chi(T^2 \# T^2) = 8 - 16 + 6 = -2$ adódik. A 11.3-es ábrán látható cellafelbontás alapján is ezt az eredményt kapjuk: $\chi(T^2 \# T^2) = 6 - 12 + 4 = -2$.

12.9. $T = -2\pi\chi = -2\pi(-2) = 4\pi$.

12.10. A 11.3 ábra cellafelbontását használva $\chi = 12 - 24 + 8 = -4$ adódik. (Más cellafelbontásban más a csúcsok, élek és lapok száma, de az Euler számra mindig ugyanazt az eredményt kapjuk.) A felszín $T = -2\pi\chi = -2\pi(-4) = 8\pi$.

12.11. $\chi(T^2) = v - e + f = 1 - 2 + 1 = 0$. A Klein palack Euler száma is nulla, a választott cellafelbontástól függetlenül.

12.12. Az Euler szám minden lépésben kettővel csökken, következésképp $\chi(T^2\#T^2\#T^2\#T^2) = -6$.

12.13. Hasonlóan okoskodhatunk, mint tóruszok összefüggő összege Euler számának kiszámításánál. Projektív síkok összefüggő összegének ezen cellafelbontásánál $v = (2n \cdot 2)/4 = n$, $e = (2 \cdot 2n)/2 = 2n$ és persze $f = 2$. Következésképp $\chi = v - e + f = n - 2n + 2 = 2 - n$.

12.14. *11.1-es ábra:* Az első felületre $\chi = 3 - 3 + 1 = 1$, s mivel a felület nem irányítható, ez P^2 . A második felület Euler száma $\chi = 2 - 3 + 1 = 0$, ez sem irányítható, következésképp ez $P^2\#P^2$ (vagyis topologaiailag a Klein palack). A harmadik felületre $\chi = 1 - 3 + 1 = -1$, nem irányítható, így ez $P^2\#P^2\#P^2$.
11.2-es ábra: Az első felületre $\chi = 1 - 3 + 1 = -1$, a felület nem irányítható, így ez $P^2\#P^2\#P^2$. A második felület Euler száma $\chi = 2 - 3 + 1 = 0$, ez sem irányítható, következésképp ez $P^2\#P^2$ (vagyis topologaiailag a Klein palack). A harmadik felületre $\chi = 1 - 4 + 1 = -2$, irányítható, így ez $T^2\#T^2$. A negyedik felületre $\chi = 1 - 4 + 1 = -2$, nem irányítható, így ez $P^2\#P^2\#P^2\#P^2$.

12.15. A görbület képlete $k = \frac{1}{r^2}$, tehát a görbületet $\frac{1}{m^2}$ -ben mérjük. A felület felszínét m^2 -ben mérjük, így kT dimenzió nélküli mennyiség, hasonlóan $2\pi\chi$ -hez.

12.16. A projektív sík és az azonos sugarú gömbfelület görbülete azonos; esetünkben ez $k = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(2m)^2} = \frac{1}{4}m^{-2}$. A projektív sík felszíne fele az azonos sugarú gömb felszínének; esetünkben tehát $T = 2\pi r^2 = 2\pi(2m)^2 = 8\pi m^2$. Egy projektív sík Euler száma (a sugártól függetlenül) 1, így a Gauss–Bonnet képlet a következő alakot ölti: $(\frac{1}{4}m^{-2})(8\pi m^2) = 2\pi \cdot (1)$.

12.17. Helyettesítsük a $kT = 2\pi\chi$ képletbe a $k = -0,00001 \text{ m}^{-2}$ és $\chi = -4$ értékeket, így a felszín $T = 2500000 \text{ m}^2 = 2,5 \text{ km}^2$ -nek adódik.

12.18. Helyettesítsünk $k = -3,1658 \times 10^{-6} \text{ m}^{-2}$ és $T = 1984707 \text{ m}^2$ értékeket a $kT = 2\pi\chi$ képletbe, majd oldjuk meg χ -re. A kapott $\chi = -1$ érték alapján a 12.3 ábra táblázata azt mutatja, hogy a szóbanforgó felület $P^2\#P^2\#P^2$. (Fantasztikus, hogy milyen sok minden kikövetkeztethető egy-két egyszerű adatból!)

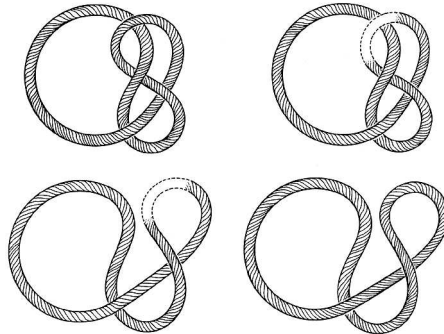
12.19. A $T^2 \# T^2$ összefüggő összeg a görbültebb⁷. Akár ki is számolhatjuk a két felület görbületét, de elegánsabb úgy okoskodni, hogy $T^2 \# T^2$ Euler száma kétszer akkora mint $P^2 \# P^2 \# P^2$ -é, de felszíne kevesebb, mint kétszer akkora, így görbülete (abszolút értékben) szükségképpen nagyobb.

12.20. Helyettesítsük az adatokat a $kT_\Delta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ egyenletbe, majd oldjuk meg $k = -1,02 \times 10^{-4} \text{ km}^{-2}$ -re. Ezután használjuk a $kT = 2\pi\chi$ képletet χ kiszámítására. Eredményül $\chi = -4,05$ adódik, feltehetően tehát $\chi = -4$, s így a szóbanforgó felület (a 12.3. ábra táblázata és a felület irányíthatóságának tudatában) $T^2 \# T^2 \# T^2$. A χ kiszámított értékében fellépő hiba valószínűleg abból adódik, hogy a teljes felszínt csak megközelítőleg tudjuk.

12.21. A púp tetején a görbület pozitív (hiszen a púp konvex), de a peremén negatív (mert itt a felület lokálisan egy nyereghez hasonlít).

13. fejezet

13.1. Egy szellem könnyen „átemelheti” a kötél egy darabját a másikon, pusztán a negyedik dimenzióba mozgatva azt. Lásd a mellékelt ábrát. Az eredmény ugyanaz, mintha a szóbanforgó darab áthatolna a kötél másik részén. Így a csomó kibogozható.



13.2. Nyomjuk a Klein palack „nyakát” a negyedik dimenzióba.

14. fejezet

14.3. Egy idő után a lufi belsejében találjuk magunkat, hiszen elkezdti kitölteni a rendelkezésre álló teret. Mit tegyünk ahhoz, hogy megmeneküljünk

⁷ Úgy értve, hogy mindkét felület görbülete negatív, és a $T^2 \# T^2$ felület görbülete nagyobb abszolút értékű – (a lektor).

ebből a szorult helyzetből? (Tegyük fel, hogy a fúvókán nem férünk át, és tönkretenni sem akarjuk a lufit.)

14.4. Először is 10 szögperc $= \frac{1}{6}$ fok $= 0,003$ radián. Tehát a Gauss által mért szögösszeg legalább $0,003$ radiánnal kell, hogy meghaladja π -t ahhoz, hogy az általa használt berendezésekkel ki tudja mérni a különbséget. A mért háromszög területe kb. 4000 km^2 volt, így a $kT_\Delta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ képlet alapján a k görbületnek legalább $[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]/T_\Delta = 0,003/4000$ $\text{km}^2 = 0,000001$ km^2 -nek kell lennie ahhoz, hogy az Gauss számára észrevehető legyen. Ez a görbület egy legfeljebb 1000 km sugarú Világegyetemnek felel meg (a $k = \frac{1}{r^2}$ összefüggést alkalmazva). A mi Világegyetemünk nyilván nem ilyen kicsi!

14.5. A henger végeit egy 180 fokos csavarással (és nem tükrözéssel) ragasztjuk össze, így (topológiailag) egy tóruszt kapunk. Ez a tórusz irányítható, mivel egy síkföldi soha nem válik a saját tükröképévé benne, és kétoldalú, mert egy háromdimenziós hangya nem tudna a felület egyik oldaláról a másikra átmászni.

14.6. P^3 konstruálásakor, a gömb középpontján áthaladó bármelyik körlap projektív síkká válik a kapott projektív térben. Ezek a projektív síkok mind nem irányíthatóak és egyoldalúak. (Egy irányítható háromsokaságban — mint amilyen P^3 is — minden irányítható felület kétoldalú, és minden nem irányítható felület egyoldalú.)

15. fejezet

15.1. Elképzelhető, hogy Világegyetemünk lokálisan olyan, mint H^3 , de görbülete olyan kicsi, hogy eddig nem tudtuk megmérni. (Ehhez kapcsolódó kérdés: mi az a legkisebb görbület, amit Gauss ki tudott volna már mérni? Lásd még a 14.4-es gyakorlatot.)

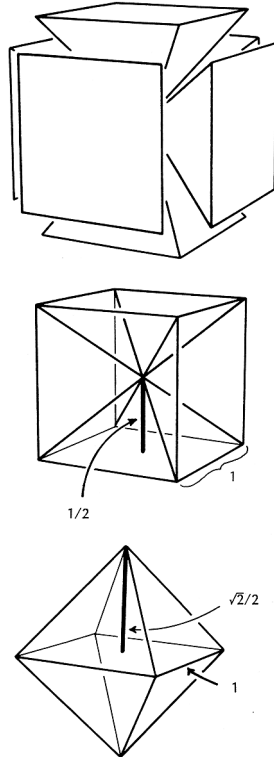
15.2. A benne élőknek végtelennek tűnne. Tapasztalatból pontosan tudnának távolságot becsülni aszerint, hogy mennyire kell bandzsítaniuk. Vajon ők milyennek látnák a mi Világegyetemünket?

16. fejezet

16.1. A négy sarok csúcsai egybeesnek a ragasztáskor. (Ezt onnan látni, hogy a ragasztás után minden sarok szomszédos a többi hárommal.) A sarkok azonban túl hegyesek ahhoz, hogy pontosan illeszkedjenek a közös csúcs körül, így a tetraédert egy hipergömbön először fel kell nagyítanunk. Evvel a sokaságon elliptikus geometriát találtunk.

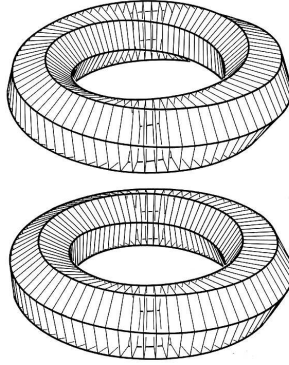
16.2. A kocka sarkai két, egyenként négyes csoportra oszlanak. (Egy csoporton belül minden csúc szomszédos a többi hárommal, de semelyik csúc sem szomszédos másik csoportba tartozókkal.) A sarkok megint túl hegyesek, így a sokaságon (az előző esethez hasonló okfejtéssel) ismét elliptikus geometriát találunk.

16.3. Az oktaéder hat csúcsa egy ponttá válik a ragasztáskor. Ennek módját a mellékelt ábra mutatja. Minden csúc pontosan négygel szomszédos (a többi öt közül), és ez a négy a kimaradó ötödikkel szomszédos. A kérdés most már csak az, hogy a sarkok túl vékonyak, túl vastagok, vagy pontosan összeillenek-e. Akkor illenének pontosan össze, ha minden sarok éppen annyira lenne hegyes, mint a rajz közepén lévő kockába rajzolt piramisok. Egy lehetséges (nyilván nem az egyetlen) módja a kérdés eldöntésének a Pitagorasz-tétel alkalmazása lenne: ez azt mutatja, hogy az oktaéder felső piramisának magassága kb. 0,7-szerese az alap szélességének, míg a középső rajz piramisaira ugyanez az arány kb. 0,5. Következésképp az oktaéder sarkai túl hegyesek, így az előző két gyakorlatban tapasztaltakhoz hasonlóan a talált geometria elliptikus lesz.

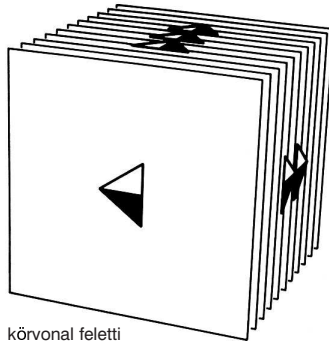


17. fejezet

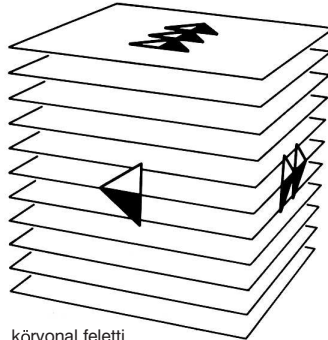
17.1.



17.2.



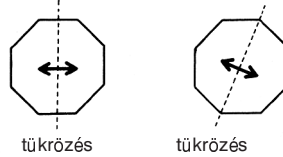
körvonal feletti
tórusz-nyaláb



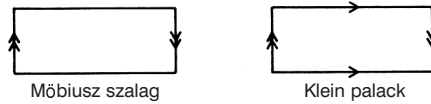
körvonal feletti
Klein palack-nyaláb

17.3. Az alaplapot $\frac{1}{8}$ -os, $\frac{1}{4}$ -es, $\frac{3}{8}$ -os vagy $\frac{1}{2}$ -es fordulattal ragaszthatjuk hozzá a fedőlaphoz. Alkalmazhatjuk az alábbi ábra tükrözéseit is, bár ezekhez nem

tudunk a 17.4-eshez hasonló szép rajzot készíteni a szokásos háromdimenziós térben. (Érdekes tény: a két tükrözés különböző topológiájú sokaságot ad.)



17.4. A tórusz és a Klein palack. (Emlékeztető: ha egy Möbiusz szalagban az éleket a rajzon látható módon összeragasztjuk, Klein palackot kapunk.)



17.5. Vegyünk egy tömör hengert, majd képzeletben ragasszuk össze a két végét egy tükrözéssel. Eredményül ugyan körlapok körét kapjuk, de mégsem lesz szorzat. (Ezt a ragasztást nem tudjuk végrehajtani a háromdimenziós térben, ugyanúgy, ahogy egy síkföldi sem képes a saját síkjában Möbiusz szalagot készíteni.)

17.6. Képzeljük el $S^2 \times I$ -t egy megvastagított gömbhéjként. A belső gömbfelületet kézenfekvő módon ragasztva a külsőhöz $S^2 \times S^1$ -et kapjuk, ha azonban a két gömbfelületet úgy ragasztjuk össze, hogy a belsőt először tükrözzük egy középpontján átmenő síkra, akkor egy nem irányítható kör feletti gömbfelület-nyalábot kapunk (K^3 -at). Minden más ragasztás – például az, amikor a belső gömbfelület pontjait a külső gömbfelület átellenes pontjaihoz ragasztjuk – a fenti két példa valamelyikével topologikusan azonos sokaságot eredményez. (A helyzet ahhoz hasonlít, mint amikor egy henger két végét esetenként más-más szögű forgatással ragasztjuk össze. Az így kapott felületek – bár geometriailag különbözőek – topologikailag mind megegyeznek azzal a tórussszal, melyet a henger két végének bármilyen elforgatás nélküli ragasztásával kapunk. Ahhoz, hogy topologikailag is más felületet kapjunk, valami drasztikusabb változtatásra van szükség, például egy tükrözésre.)

Egy „hipertömör” $S^2 \times S^1$ -et (pontosabban a tömör tórusz négydimenziós megfelelőjét) pedig úgy készíthetjük el, hogy vesszük a tömör gömb és a szakasz szorzatát, majd a két szélső gömbtest pontjait kézenfekvő módon

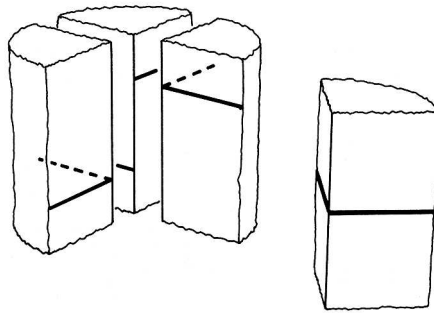
azonosítjuk. „Hipertömör” K^3 készítéséhez az utóbbi ragasztást úgy kell végrehajtani, hogy a belső gömbtestet először tükrözzük egy középpontján átmenő síkra. E négydimenziós sokaságok jobb megértése érdekében képzeljük el, milyen módon próbálhatta Négyzet a tömör tóruszt és a tömör Klein palackot felfogni.

17.7. A 7.4. gyakorlatban szereplő sokaságok, valamint $K^2 \times S^1$.

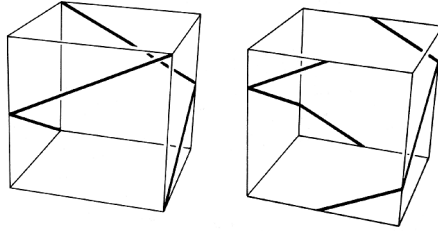
17.8. A hasáb aljának tetejéhez való ragasztásával körök egy nyolcszögét kapjuk, s e nyolcszög szembenfekvő oldalait páronként azonosítva pedig kétszemélyes úszóguminyi kört. (Ha egy nyolcszög szembenfekvő oldalait páronként azonosítjuk, topológiailag $T^2 \# T^2$ -t kapunk.)

17.9. Képzeletben töltsük fel a 8.2. ábra kockáit függőleges spagettiszálakkal. A kockák aljának tetejükhöz való ragasztása során a spagettik körökké válnak, így minden egyes példa valamilyen környalábot eredményez. Az első egy tórusz feletti irányítható, a második egy Klein palack feletti nem irányítható, a harmadik egy tórusz feletti nem irányítható, végül a negyedik egy Klein palack feletti irányítható körvonalnyalábra ad példát.

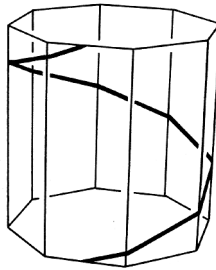
17.10. Bármely három függőleges él összeragasztható oly módon, hogy a vízszintes egyenesek illeszkedjenek, a negyedik élt viszont sehogy sem tudjuk helyesen odaragasztani, mert egyszerre két különböző „magasságban” kellene lennie. A feladat előtt bemutatott csavart tórusz esetében ez a probléma nem lép fel.



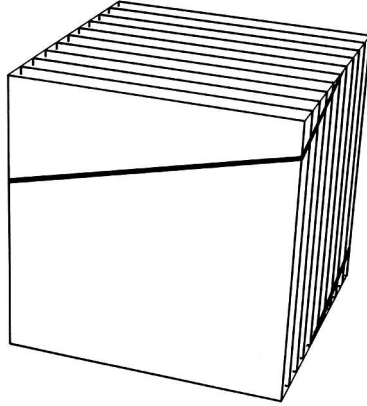
17.11.



17.12.



17.13. Meglepő módon a csavart tórusz úgy is előállítható, mint egy körvonal feletti tórusznyaláb: szeleteljük fel a csavart tóruszt a rajzon látható módon és vegyük észre, hogy a szeletek az azonosítás után tóruszokká válnak a nyírás ellenére. A csavart tórusz azonban mégsem szorzat, hiszen annak, ahogy tóruszok köreként előáll, semmi köze nincs ahhoz, ahogy körök tóruszaként előállítható.



18. fejezet

18.1. K^3 (lásd a 17.6-os gyakorlatot).

18.2. Tetszőleges felület és körvonal szorzata ilyen, amennyiben a felület nem S^2, P^2, T^2 vagy K^2 valamelyike. Több körvonal feletti felületnyaláb is ellátható $H^2 \times E$ geometriával; ilyenek találhatók például a 17.3. gyakorlatban.

18.3. K^3 és $P^2 \times S^1$ nem irányíthatóak, míg $S^2 \times S^1$ és az előbb megismert új sokaság irányítható. Az új sokaság néhány szempontból a projektív térre hasonlít: az $S^2 \times I$ vastag gömbhéj akár külső, akár belső gömbfelületén valahol „átlépve” ugyanazon felület átellenes pontjában találjuk magunkat – elforgatva! Azonban nem válunk saját tükörképünké.

18.4. Nem. Egy csavart euklideszi geometriájú sokaságban könnyen eldönthetjük, hogy az óramutató járásával megegyező vagy ellentétes irányba kell-e elindulnunk ahhoz, hogy kiinduló pozíciónk alá érkezzünk vissza. Tegyük fel, hogy egy ilyen sokaságban élve azt tapasztaljuk, az óramutató járásával megegyező irányban vízszintes kis körök mentén körbejárva kiinduló pozíciónk alá érünk vissza. Egy barátunk hosszabb felfedező útra indul a sokaságban, melynek során távoli tájakra látogat, és útja során továbbra is ugyanezt tapasztalja, sőt még azután is, hogy útjáról visszaérkezik. Ebből az következik, hogy nem vált saját tükörképévé: ha azzá vált volna, akkor megérkezve azt látná, hogy az óramutató járásával *ellentétes* irányba kell mennie ahhoz, hogy kiinduló pozíciója alá kerüljön. A fentiek azt bizonyítják, hogy egy utazó soha nem válik saját tükörképévé, következésképp a sokaság irányítható.

18.5. A 17.12. gyakorlatban szereplő sokaság éppen jó lesz.

19. fejezet

19.1. A gyakorlatban megadott képlet szerint, ha a Hubble konstans $15 \text{ (km/sec)}/(\text{millió fényév})$, akkor a Hubble idő $\frac{1}{15}(\text{millió fényév})(\text{sec})/\text{km}$. Ezt a választ nem könnyű emberi léptékkal felfogható mértékegységre, mondjuk évekre váltani. Ahhoz, hogy ezt megtegyük, emlékeznünk kell arra, hogy $1 \text{ év} = 365,25 \text{ nap} = 8766 \text{ óra} = 525960 \text{ perc} = 31557600 \text{ másodperc}$. Ha a fény másodpercenként 300000 km -t tesz meg, akkor egy év alatt $300000 \times 31557600 = 9,47 \times 10^{12} \text{ km}$ -t halad, következésképp egymillió fényév valójában $9,47 \times 10^{18} \text{ km}$ -t jelent. Így a Hubble idő másodpercekben megadva $\frac{1}{15}(9,47 \times 10^{18} \text{ km})(\text{sec})/\text{km} = 6,31 \times 10^{17} \text{ sec}$. Ezt az eredményt 31557600 -zal elosztva azt kapjuk, hogy a Hubble idő $(6,32 \times 10^{17} \text{ sec})/(31557600 \text{ sec/év}) = 2 \times 10^{10} \text{ évnek}$ adódik. Ez 20 milliárd évet jelent! A Hubble konstans $30 \text{ (km/sec)}/(\text{millió fényév})$ -nek véve a Hubble idő feleződik, így ekkor 10 milliárd évet kapunk eredményül.