

Függelék

F.6.

Gyakran előforduló határértékek

Ez a függelék a 11.1. alfejezet 5. tételének (4)–(6) állításait bizonyítja.

4. határérték: Ha $|x| < 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy minden $n > N$ esetén $|x^n| < \varepsilon$. Mivel $\varepsilon^{1/n} \rightarrow 1$, és $|x| < 1$, van olyan N , hogy $\varepsilon^{1/N} > |x|$. Azaz

$$|x^N| = |x|^N < \varepsilon. \quad (\text{F.1})$$

Ez az az egész szám, amire szükségünk volt, hiszen

$$|x^n| < |x^N| \quad \text{minden } n > N \quad (\text{F.2})$$

Az (F.1) és (F.2) egyenlőtlenségekből $|x^n| < \varepsilon$ minden $n > N$ esetén.

5. határérték: Bármilyen x számra $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Legyen

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Ekkor

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \rightarrow x,$$

ahogy azt L'Hospital szabállyal megmutatjuk, ahol n „szerint” differenciálunk (4. Tétel)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1+x/n}\right) \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x/n} = x. \end{aligned}$$

A 4. Tétel szerint az $f(x) = e^x$ függvénnyel

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \rightarrow e^x.$$

6. határérték: Bármilyen x számra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Mivel

$$-\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!},$$

azt kell megmutatnunk, hogy $|x|^n/n! \rightarrow 0$. A sorozatokra vonatkozó „szendvics tétel” (11.1. alfejezet 2. Tétel) alkalmazzuk, hogy megmutassuk, $x^n/n! \rightarrow 0$.

Először választunk egy olyan M számot, hogy $(|x|/M) < 1$ teljesüljön. Az imént bizonyított 4. határérték-állítás szerint $(|x|/M)^n \rightarrow 0$. Ha $n > M$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{|x|^n}{n!} &= \frac{|x|^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot M \cdot \underbrace{(M+1)(M+2) \cdot \dots \cdot n}_{(n-M)\text{ tényező}}} \\ &\leq \frac{|x|^n}{M! M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M! M^n} = \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n. \end{aligned}$$

Azaz

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Mivel $M^M/M!$ egy n -től független konstans és $(|x|/M)^n$ nullához tart, ezért $|x|^n/n! \rightarrow 0$.

F.7. A vektoriális szorzás disztributívítása

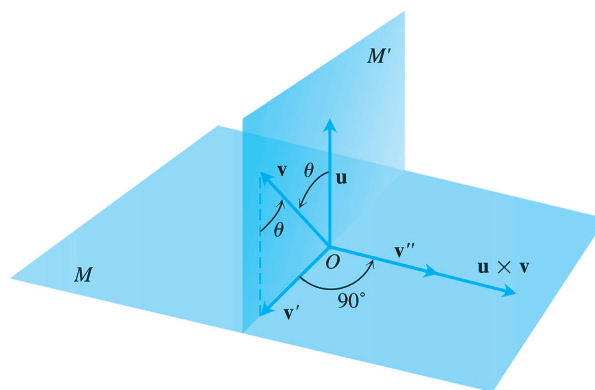
Ebben a pontban bebizonyítjuk, hogy a vektoriális szorzás disztributív a vektorok összeadására nézve, azaz

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}.$$

A vektoriális szorzatnak ezt a tulajdonságát már kimondtuk a 12.4. alfejezetben.

Bizonyítás: A disztributívítás bizonyításához felhasználjuk az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektornak egy érdekes felírását. Rajzoljuk fel \mathbf{u} -t és \mathbf{v} -t egy közös O kiindulási pontból, és nevezzük M -nek az \mathbf{u} -ra merőleges, O -n átmenő síkot (F.10. ábra). Jelöljük \mathbf{v}' -vel a \mathbf{v} vektor M -re való merőleges vetületét. Látható, hogy \mathbf{v}' hossza $|\mathbf{v}| \sin \theta$ lesz. Forgassuk el \mathbf{v}' -t \mathbf{u} körül 90° -al pozitív irányba, és szorozzuk meg az így kapott \mathbf{v}'' vektort \mathbf{u} hosszával. A keletkező $|\mathbf{u}| \mathbf{v}''$ vektor éppen $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ lesz, hiszen az iránya megegyezik $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ irányával (F.10. ábra), és a hossza

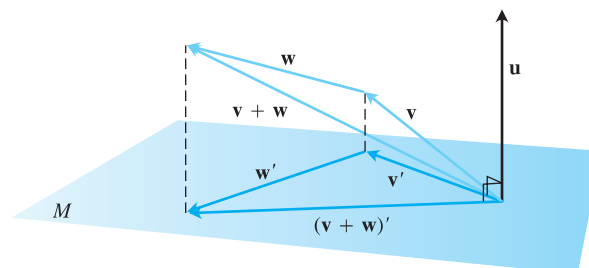
$$|\mathbf{u}| |\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$



F.10. ÁBRA: Az ábráról leolvasható, hogy $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \mathbf{v}''$.

Vizsgáljuk meg azt a három műveletet, amelyet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ előállításánál használtunk! Ez a három művelet az

1. M -re való vetítés,
2. \mathbf{u} körüli 90° -os forgatás,
3. $|\mathbf{u}|$ skalárral való szorzás.



F.11. ÁBRA: A \mathbf{v} , \mathbf{w} , $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ vektorok, és merőleges vetületük az M síkra.

Ha a műveletek bármelyikét egy olyan háromszögre alkalmazzuk, amelynek egyik oldala sem párhuzamos \mathbf{u} -val, akkor a háromszögből keletkező alakzat is egy ilyen háromszög lesz. Induljunk ki egy olyan háromszögből, amelynek oldalai \mathbf{v} , \mathbf{w} és $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, és alkalmazzuk egymás után a fenti három műveletet (F.11. ábra). Rendre a következőket kapjuk:

1. Egy háromszöget, amelynek oldalai \mathbf{v}' , \mathbf{w}' és $(\mathbf{v} + \mathbf{w})'$, és ezek kielégítik a következő vektoregyenletet:

$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'.$$

2. Egy háromszöget, amelynek oldalai \mathbf{v}'' , \mathbf{w}'' és $(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$, és ezek kielégítik a következő vektoregyenletet:

$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''.$$

(A vesszős és kétvesszős vektorok jelentése ugyanaz, amely az F.10. ábrán volt.)

3. Egy háromszöget, amelynek oldalai $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}''$ és $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$, és ezek kielégítik a következő vektoregyenletet:

$$|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' + |\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = |\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''.$$

Az utolsó egyenletben hajtsuk végre a bizonyítás elején igazolt $|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, illetve $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})'' = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ helyettesítéseket, és megkapjuk a keresett

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

összefüggést. □

F.8.

A vegyes deriváltak egyenlőségéről és a kétváltozós függvények megváltozásáról szóló tétel bizonyítása

A függeléknek ebben a pontjában bebizonyítjuk a vegyes parciális deriváltak egyenlőségéről szóló tételt (14.3. alfejezet, 2. Tétel), és a kétváltozós függvények megváltozásáról szóló tételt (14.3. alfejezet, 3. Tétel). Az előbbi tételt először Euler publikálta 1734-ben, egy hidrodinamikáról szóló cikkben.

1. TÉTEL: A vegyes parciális deriváltak egyenlősége

Ha $f(x, y)$ és az f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} parciális deriváltak léteznek egy (a, b) körüli nyílt tartományon és valamennyi folytonos az (a, b) pontban, akkor

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Bizonyítás: $f_{xy}(a, b)$ és $f_{yx}(a, b)$ egyenlőségét a Lagrange-féle középértéktétel (4.2. alfejezet, 4. Tétel) négyszeri alkalmazásával fogjuk megmutatni. A feltételek szerint az (a, b) pont belső pontja egy olyan, az xy -síkban fekvő R téglalaprak, amelyen f , f_x , f_y , f_{xy} és f_{yx} mindegyike létezik. Válasszuk h -t és k -t olyan elegendően kicsiny számnak, hogy az $(a + h, b + k)$ pont is R -be essen, és legyen

$$\Delta = F(a + h) - F(a), \quad (\text{F.3})$$

ahol

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b). \quad (\text{F.4})$$

Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt F -re. F folytonos és differenciálható, hiszen f is az, az első változója szerint. A középértéktétel és (F.3) alapján

$$\Delta = hF'(c_1) \quad (\text{F.5})$$

egy alkalmas $c_1 \in (a, a + h)$ számmal. Az (F.4) egyenlőséget deriválva

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

amit felhasználva (F.5) így alakul:

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)]. \quad (\text{F.6})$$

Most alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt a $g(y) = f_x(c_1, y)$ függvényre. Azt kapjuk, hogy alkalmas $d_1 \in (b, b + k)$ -val

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1),$$

vagyis

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1).$$

Ha ezt behelyettesítjük az (F.6)-ba, azt kapjuk, hogy

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1), \quad (\text{F.7})$$

ahol a (c_1, d_1) pont egy olyan R' téglalap belső pontja, melynek négy csúcsa (a, b) , $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$ és $(a, b + k)$. (Lásd az F.12. ábrát.)

Az (F.4) egyenlőségbeli definíciót felhasználva (F.3) így írható:

$$\begin{aligned} \Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) \\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)] \\ &= \phi(b + k) - \phi(b), \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

ahol

$$\phi(y) = f(a + h, y) - f(a, y). \quad (\text{F.9})$$

A Lagrange-féle középértéktételt (F.8) egyenletre alkalmazva

$$\Delta = k\phi'(d_2) \quad (\text{F.10})$$

valamely $d_2 \in (b, b + k)$ -val. (F.9) alapján

$$\phi'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y), \quad (\text{F.11})$$

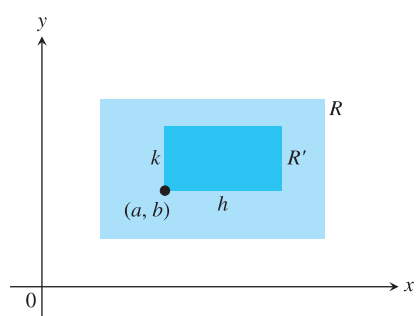
amelyet (F.10) egyenletbe beírva azt kapjuk, hogy

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)].$$

Végül alkalmazzuk a középértéktételt a szögletes zárójelben szereplő kifejezésre:

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2), \quad (\text{F.12})$$

valamely $c_2 \in (a, a + h)$ -val.



F.12. ÁBRA: Az $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ egyenlőség bizonyításának a kulcsa az, hogy bármilyen kicsi is R' , f_{xy} és f_{yx} felvesz azonos értékeket R' belsőjében (bár nem feltétlenül azonos pontokban).

Az (F.7) és (F.12) egyenletek alapján

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2), \quad (\text{F.13})$$

ahol mind (c_1, d_1) , mind (c_2, d_2) az R' téglalapban fekszik (F.12. ábra). Az (F.13)-beli egyenlet nem pontosan az, amelyre vágyunk, ugyanis csak azt állítja, hogy $f_{xy}(c_1, d_1)$ -beli és $f_{yx}(c_2, d_2)$ -beli értéke egyezik meg. Viszont az R' téglalap oldalait alkotó h és k számot választhatjuk olyan kicsinynek, amilyennek szeretnénk. Az a feltétel, hogy f_{xy} és f_{yx} folytonos (a, b) -ben azt jelenti, hogy

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) + \varepsilon_1 \quad \text{és} \quad f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \varepsilon_2,$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, ahogy h és k mindketten nullához tartanak. Így $h, k \rightarrow 0$ mellett megkapjuk, hogy $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. \square

A tétel következtetése, azaz $f_{xy}(a, b)$ és $f_{yx}(a, b)$ egyenlősége gyengébb feltételekkel is igazolható. Például elég feltenni, hogy f , f_x és f_y léteznek R -ben, és hogy f_{xy} folytonos (a, b) -ben. Ebből következik, hogy f_{yx} létezik (a, b) -ben, és hogy értéke megegyezik $f_{xy}(a, b)$ -vel.

2. TÉTEL: Kétváltozós függvények megváltozása

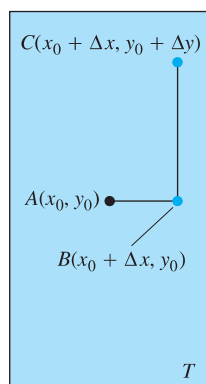
Tegyük fel, hogy a $z = f(x, y)$ függvény parciális deriváltjai léteznek egy nyílt R tartományon, és hogy f_x és f_y folytonosak az $(x_0, y_0) \in R$ pontban. Ekkor az f függvény (x_0, y_0) és $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ közötti

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

megváltozása felírható

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

alakban, ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, ahogy Δx és Δy mindketten nullához tartanak.



F.13. ÁBRA: A növekedési tételben szereplő T téglalap. Az ábrán Δx és Δy pozitívnak van rajzolva, de bármelyik lehet nulla vagy negatív is.

Bizonyítás: Vegyünk fel egy olyan R -ben fekvő T téglalapot, amelynek középpontja $A(x_0, y_0)$, és legyen $\Delta x, \Delta y$ olyan kicsi, hogy az A -t $B(x_0 + \Delta x, y_0)$ -lal, és a B -t $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ -nal összekötő szakasz T belsejében fekdjön (F.13. ábra).

Bontsuk fel Δz -t $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ alakba, ahol

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

az f függvény A és B közötti megváltozása, míg

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

a B és C közötti megváltozás (F.14. ábra).

Az $[x_0, x_0 + \Delta x]$ zárt intervallumon az $F(x) = f(x, y_0)$ függvény x differenciálható (így folytonos) függvénye, amelynek deriváltja

$$F'(x) = f_x(x, y_0).$$

A Lagrange-féle középértéktétel szerint (4.2. alfejezet, 4. Tétel) létezik egy $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ szám, amelyre

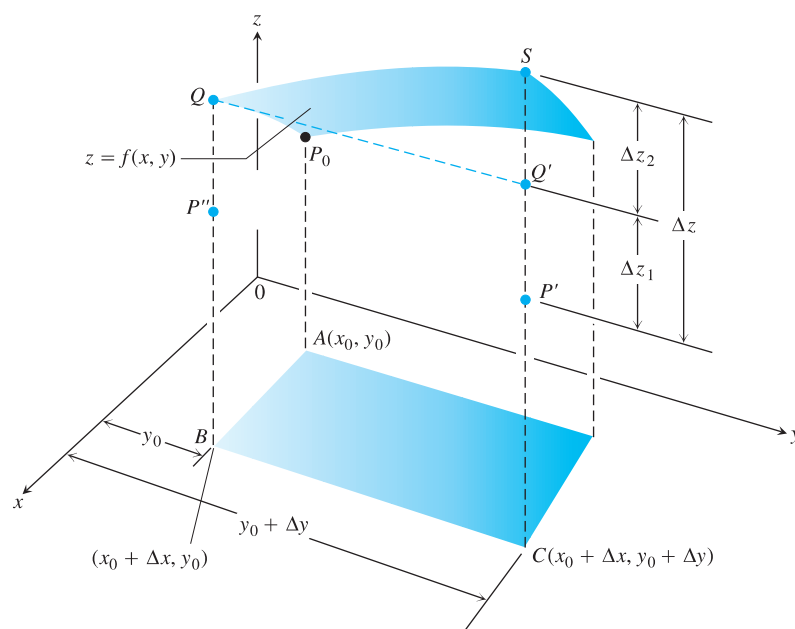
$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c)\Delta x,$$

vagy másképp

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\Delta x,$$

azaz

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0)\Delta x. \quad (\text{F.14})$$



F.14. ÁBRA: A $z = f(x, y)$ függvény képe a $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pont körül. A P_0 , P' és P'' pontok azonos $z_0 = f(x_0, y_0)$ magasságra vannak az xy -sík fölött. A függvény, azaz z megváltozása $\Delta z = P'S$. A

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

megváltozás, amelyet x -nek rögzített $y = y_0$ melletti x_0 és $x_0 + \Delta x$ közötti megváltozása okoz, $P''Q = P'Q'$ -ként van feltüntetve. Végül rögzített $x = x_0 + \Delta x$ mellett a függvény

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

változása, amelyet y -nak az y_0 és $y_0 + \Delta y$ közötti megváltozása okoz, $Q'S$ -ként szerepel az ábrán. A függvény teljes változása Δz_1 és Δz_2 összege.

Hasonlóan, $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ deriválható (így folytonos) az $[y_0, y_0 + \Delta y]$ intervallumon, és

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y).$$

A középértéktétel szerint létezik egy $d \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ szám, amelyre

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\Delta y,$$

vagy másképp

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y,$$

azaz

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y. \quad (\text{F.15})$$

Tudjuk, hogy ha Δx és Δy nullához tartanak, akkor $c \rightarrow x_0$ és $d \rightarrow y_0$. Mivel f_x és f_y folytonos (x_0, y_0) -ban, az

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \varepsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

mennyiségek is nullához tartanak, ahogy $\Delta x \rightarrow 0$ és $\Delta y \rightarrow 0$.

Végül, ahogy bizonyítani akartuk,

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{(F.14) és (F.15)} \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\Delta y && \text{(F.16) miatt} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,\end{aligned}$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, ahogy Δx és Δy nullához tartanak. \square

A kétváltozós függvény megváltozásáról szóló tétel tetszőleges, véges sok változós függvényre általánosítható. Például, ha a $w = f(x, y, z)$ háromváltozós függvény parciálisan differenciálható egy (x_0, y_0, z_0) körüli nyílt tartományon, és az f_x, f_y, f_z parciális deriváltak folytonosak (x_0, y_0, z_0) -ban, akkor

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,\end{aligned} \quad \text{(F.17)}$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$, ahogy $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$. (Az (F.17) egyenletben szereplő parciális deriváltakat az (x_0, y_0, z_0) pontban kell venni.)

Az (F.17) egyenlőség bizonyításához Δw -t három megváltozás összegére bontjuk:

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \quad \text{(F.18)}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \quad \text{(F.19)}$$

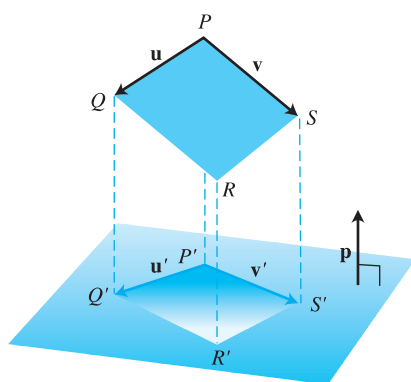
$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0), \quad \text{(F.20)}$$

és mindegyikre alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt. A $\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3$ részmegváltozások mindegyikében két koordináta rögzített, és a harmadik változik. Például (F.19) egyenletben csak y változik, x értéke $x_0 + \Delta x$ -re van rögzítve, z értéke pedig z_0 . Mivel $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ folytonos és differenciálható függvénye y -nak, alkalmazható rá a Lagrange-féle középértéktétel, azaz létezik olyan $y_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$, amellyel

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0)\Delta y.$$

F.9.

Paralelogramma síkra eső vetületének területe



F.15. ÁBRA: Az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok által kifeszített paralelogramma és a vetülete. Az egyenesek, amelyek mentén a vetítés történik, merőlegesek a síkra, azaz párhuzamosak a sík \mathbf{p} normált normálvektorával.

A függeléknek ebben a fejezetében bebizonyítjuk azt a 16.5. alfejezetben használt állítást, hogy az \mathbf{u} és \mathbf{v} oldalvektorok által kifeszített térbeli paralelogramma \mathbf{p} normálvektorú síkra vett merőleges vetületének a területe $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$. (Lásd az F.15. ábrát.)

3. TÉTEL:

Az \mathbf{u} és \mathbf{v} oldalvektorok által kifeszített paralelogramma \mathbf{p} normált (azaz egységnyi hosszúságú) normálvektorú síkra vett merőleges vetületének a területe

$$A = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|.$$

Bizonyítás: Az F.15. ábrán egy általános helyzetű, \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok által kifeszített paralelogrammát, és a \mathbf{p} egységnyi normálvektorú síkra való vetületét láthatjuk. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \overrightarrow{PP'} + \mathbf{u}' + \overrightarrow{Q'Q} \\ &= \mathbf{u}' + \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'} && \overrightarrow{Q'Q} = -\overrightarrow{QQ'} \\ &= \mathbf{u}' + s\mathbf{p}. && \text{valamely } s \text{ skalárral, mivel} \\ & && \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'} \text{ párhuzamos } \mathbf{p}\text{-vel}\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + t\mathbf{p}$$

valamely t skalárral. Így

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{u}' + s\mathbf{p}) \times (\mathbf{v}' + t\mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') + s(\mathbf{p} \times \mathbf{v}') + t(\mathbf{u}' \times \mathbf{p}) + \underbrace{st(\mathbf{p} \times \mathbf{p})}_0. \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

Az egyenlőségben szereplő $\mathbf{p} \times \mathbf{v}'$ és $\mathbf{u}' \times \mathbf{p}$ vektor merőleges \mathbf{p} -re, így amikor az egyenlet mindkét oldalát skalárisan szorozzuk \mathbf{p} -vel, a jobb oldalon az egyetlen nullától különböző tag $(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}$ lesz. Ezek szerint

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p},$$

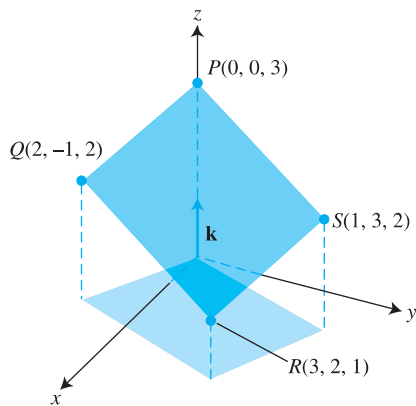
vagyis

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}|. \quad (\text{F.22})$$

Az egyenlőség jobb oldalán szereplő érték az \mathbf{u}' , \mathbf{v}' és \mathbf{p} által kifeszített paralelogramma alapú egyenes hasáb térfogata. A hasáb magassága $|\mathbf{p}| = 1$, azaz a térfogat numerikusan megegyezik az alaplap területének, a $P'Q'R'S'$ paralelogrammának mérőszámával. Tehát (F.22) alapján:

$$\text{A } P'Q'R'S' \text{ paralelogramma területe} = |(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|,$$

azaz az eredeti, \mathbf{u} és \mathbf{v} által kifeszített paralelogramma \mathbf{p} normált normálvektorú síkra való merőleges vetületének a területe $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$. \square



F.16. ÁBRA: Az 1. példában a $PQRS$ paralelogramma xy -síkra vetített képének a területét számoljuk ki.

1. PÉLDA: Síkra vetített paralelogramma területének kiszámolása

Merőlegesen levetítjük a $P(0, 0, 3)$, $Q(2, -1, 2)$, $R(3, 2, 1)$ és $S(1, 3, 2)$ csúcsokkal rendelkező paralelogrammát az xy -síkra. Mekkora a keletkező vetület területe (F.16. ábra)?

Megoldás: Ebben az esetben

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{PS} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{és} \quad \mathbf{p} = \mathbf{k},$$

így

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

A keresett terület $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |7| = 7$. \square