FÜGGELÉK

Varga Tamás komplex matematikájától a NAT-ig

1963-ban Budapesten egy általános iskola két első osztályában megkezdődött a komplex matematikatanítási kísérlet Varga Tamás irányításával. Ezzel kezdetét vette egy olyan két évtizedig tartó kísérleti folyamat, amely a magyar matematikatanításban gyökeres fordulatot eredményezett, és az azóta bekövetkezett változások ellenére a matematika tanításában ma is meghatározó.

A komplex kísérlet előzménye az ötvenes években világszerte megindult matematikatanítási reformmozgalom. A matematikatanítás javítására, korszerűsítésére új irányzatok, elméletek jelentek meg. Az újítani akarók egy része a Bourbaki-csoport egységesítő matematikai szemléletét kívánta bevinni az oktatásba, mások pszichológiai elvekből – elsősorban Piaget nézeteiből – indultak ki, de sokan hirdették Pólya György heurisztikáját vagy Dienes Zoltán „játékos" matematikáját.

Varga Tamás így ír erről „A matematika tanításának várható fejlődése" című tanulmányában. („A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése" Tankönyvkiadó, Budapest 1977)

Bourbaki nem egy ember neve, hanem matematikusok egy csoportjának gyűjtőneve, akik közvetlenül a második világháború előtt kezdték ezen a néven publikálni közösen megbeszélt munkáikat. A Bourbaki-csoport időnként kooptál egy-egy matematikust (tagjai nagyrészt franciák), a 40 éven felüliek viszont kiválnak a csoportból. Ezzel elérik, hogy a csoport az idő múlásával nem öregszik meg. Bíznak abban, hogy ki sem múlik. Céljuk a mai matematika olyanféle szintézisének létrehozása, amilyen szintézist az ókorban Euklidesz művei jelentettek.

Függetlenül attól, hogy mennyire sikerül megvalósítaniuk elképzeléseiket, törekvésük jellemző a mai matematika egyik fontos tendenciájára, az egységesítésre, a szintézis keresésére. Ez indokolja, hogy nevükkel jellemezzük a matematikatanítás reformmozgalmának egyik fontos mozgatóját, azt; amely a matematika tudományának fejlődésén keresztül hat a matematika tanítására.

A *Bourbaki* névvel jellemezhető (de másokon keresztül is érvényesülő) egységesítő tendencia a matematikai kutatások szempontjából is nagy jelentőségű: segíti a különböző területeken dolgozó matematikusokat a közös nyelv megtalálásában, a matematika jobb áttekintésében. De legalább ugyanilyen fontos az iskola szempontjából, hogy a matematika tananyaga ne különálló részdiszciplínák (számtan, algebra, geometria, trigonometria, analízis) laza egybefűzése legyen, hanem egységes szempontok szerint épüljön fel.

Természetes, hogy ezt az elgondolást nagyon sokféle módon, sikeresen vagy kevésbé sikeresen lehet megvalósítani. Magát az elgondolást, a matematikának a halmaz fogalmából kiinduló, egységes egészként való felépítését, ma már kevesen vitatják. A Szovjetunióban, Lengyelországban vagy Jugoszláviában éppúgy folyamatban van az iskolai matematikának ilyen alapokra való felépítése, mint Franciaországban, Angliában, Svédországban vagy az Egyesült Államokban. Más koncepciót senki sem dolgozott ki, csak ennek változatait, a hagyományos elemek több-kevesebb fenntartásával.

Piaget francia-svájci pszichológus neve is egy irányzat szimbóluma a matematika tanításának reformja számára. Azé az irányzaté, amit népszerűen így szokás jellemezni: amikor matematikát tanítunk Jancsinak, akkor ne csak azzal törődjünk, hogy a matematikát tanítjuk, hanem azzal is, hogy Jancsit tanítjuk.

A fejlődéslélektan, amelyre Piaget nevével utalunk, olyan fontos új megállapításokat tett az utóbbi három-négy évtizedben a gyermeki gondolkodás fejlődéséről, amelyek a matematika tanulására és tanítására, vonatkozó elképzeléseinket is lényegesen módosították. Különösen a kisgyermekek tanulását érintik a pszichológia új eredményei. A tárgyakkal végzett műveleteknek, a konkrét tapasztalatszerzésnek, a cselekvésnek a gondolkodás fejlődésére való hatását sokkal fontosabbnak látjuk, mint azelőtt. De a pszichológia számos más új vagy újabban előtérbe kerülő megállapítása is (például ami a motiváció szerepével kapcsolatos) hozzájárult a matematikatanítás egészének átgondolásához, új módszertanának kialakításához.

Végül *Pólya György* neve egy olyan pedagógiai felfogás szimbóluma a matematika tanításában, amely a heurisztikus gondolkodást, a matematika felfedeztetését állítja a középpontba. Pólya György a matematika számos ágában végzett kiemelkedő kutatást, legnagyobb hatású művei mégis azok, amelyekben a matematika tanításával és tanulásával kapcsolatos nézeteit foglalja össze. Magyarul ezek közül kettő jelent meg: *A gondolkodás iskolája* és *A problémamegoldás iskolája.*

A mondott okok – a matematikatanítás gyenge hatásfokának felismerése, a társadalom részéről fellépő növekedő igények, a matematika fejlődése, a pszichológia új eredményei, a pedagógiai gondolkodás új elemei – az ötvenes években, sőt már előbb is – megindítottak egy lassú erjedési folyamatot a matematika tanításában. Hogy hazai példát mondjunk, *Gallai Tibor* és *Péter Rózsa* gimnáziumi tankönyve (50-es évek) a heurisztikus gondolkodásra nevelés, a problémákon keresztül való matematikatanulás terén úttörő jelentőségűek.

Egy világraszóló esemény, amely pedig a matematikával csak közvetett, a pedagógiával pedig még távolabbi kapcsolatban állt, adott egyszerre, különös módon, nagy lendületet a matematikatanítási reformtörekvéseknek. Ez pedig a Föld első mesterséges holdjának, az első szputnyiknak a felbocsátása volt. 1957. október 4-ét a matematikatanítás nemzetközi reformmozgalmában fordulópontnak tekinthetjük. Az a megdöbbenés ugyanis (a „szputnyik-sokk”), amit különösen az amerikai közvéleményből az amerikai űrkutatás-lemaradása, a szovjet űrkutatás által való megelőzése kiváltott, tudatosította az amerikaiakban – mikor az okokat vizsgálni kezdték – természettudományi s az ebben kulcsfontosságú matematikai képzésük, oktatásuk hiányosságait. Ezek a hiányosságok régóta fennálltak, és sokan dolgoztak is a megszüntetésükön. A „nemzeti szégyen” pillanatának kellett azonban bekövetkeznie, hogy ráirányuljon a figyelem ennek a problémának a hatalmas jelentőségére, nem is csupán az űrkutatás szempontjából. Az ennek nyomán bekövetkező fejlődés azután láncreakciót váltott ki a nyugat-európai országokban, majd átterjedt az egész világra

Ma már általános az a felismerés, hogy a matematika tanításának korszerűsítésében nem csupán a matematikát kell egységes egésznek tekinteni, egységes elvek szerint felépíteni (ami megvalósítható lenne egy bizonyos életkori szintre szorítkozva is), hanem a matematika *tanítását* is egységében kell látni. Olyan korszerűsítési koncepciókat kell kidolgozni, amelyek matematikai, pszichológiai és pedagógiai szempontból átgondolva átfogják a tanulók matematikai fejlődésének egészét az iskoláskor kezdetétől (sőt már az óvodáskortól) a végéig, sőt a felsőoktatásig. A minden életkorra kiterjeszkedő reform azonban szükségszerűen a legfiatalabb korosztályokkal kezdődő reformot jelent, vagyis a korszerűsítés legalul való kezdését.

Az UNESCO 1962-ben nemzetközi matematikatanítási szimpoziont tartott Budapesten, amelyen sok elismert matematikapedagógus vett részt. Ezek a nagy jelentőségű tanácskozások, amelyek a szimpozionon folytak, hazánkban is lendületet adtak a korszerűsítés előkészítése érdekében folyó munkának. Ezt követően indult meg az OPI irányításával a komplex matematikatanítási kísérlet.

A „komplex” jelző arra utal, hogy mind a tanítási anyag, mind a módszerek tekintetében új elgondolásokra épülő tanításról van szó. A változó igények kielégítéséhez szükség van a tanterv és a tanítási módszerek egymással párhuzamos, egybehangolt módosítására. Ha akár a tantervet, akár a tanítási módszereket úgy akarnánk változtatni, hogy közben a másik lényegében változatlan marad, akkor nemcsak időt veszítenénk, hanem az elért eredmények sikerét is kockáztatnánk.

A tanulmány bemutatja a komplex matematikatanítási kísérlet tantervét.

A komplex matematikatanítás anyaga

A tananyag öt tantervi témakörből áll, amelyek valamennyi osztályban – elsőtől nyolcadikig – megjelennek, az adott szintnek megfelelően. A részletes ismertetést gazdag feladatanyag teszi érthetőbbé.

Az öt témakör a következő:

Halmazok, logika
Számtan, algebra
Függvények, sorozatok
Geometria, mérések
Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A tanterv második része a módszertani alapelveket ismerteti. Ezek egy része a kísérleti jelleghez kapcsolódik, mások azonban világosan tükrözik azokat a nézeteket, amelyek a komplex kísérlethez kötődő reformtörekvéseket jellemezték. Ilyenek pl.: a tanulók önállósága, munkakedve, a pedagógusok önállósága, munkakedve, tekintélyelv helyett munkából eredő tekintély, a „kell” szerepének csökkentése, az aktivitás kiaknázása, nem pedig lefojtása stb.

A komplex kísérlet a 60-as, 70-es évek legjelentősebb pedagógiai – oktatási kísérletévé vált, egyre több osztályra terjedt ki, viták kereszttüzébe került, matematikapedagógusok véleménye, megjegyzései hatására változott, csiszolódott, és közben sok munkát és sok örömet szerzett az abban résztvevő tanároknak és a diákoknak.

A komplex matematikatanításról szól a mellékelt cikk: Mi a komplex módszer? (Kapcsolat, 1969. aug.) (Részlet), ebben Varga Tamás mutatja be a kísérlet lényeges alapelveit.

MI A KOMPLEX MÓDSZER?

(Kapcsolat, 1969. augusztus)

(Részlet)

Optimális fejlődési lehetőség mindenki, számára

Egy fontos vonását emelném még ki kísérletünknek (módszerünknek, irányzatunknak), hogy eloszlassak ezáltal egy gyakori félreértést.

A fontos vonás az, hogy *minden tanuló optimális* fejlődési lehetőségét akarjuk biztosítani. A félreértés pedig az, hogy mi matematikai osztályokat szervezünk, hogy az a célunk: a matematikában *tehetséges* tanulók fejlődését segítsük.

Ez is célunk, de nem ez *a* célunk. Arra törekszünk, hogy minden tanuló a *neki való* szellemi táplálékot kaphassa, azt, ami *az ő* matematikai fejlődését a legjobban előmozdítja. Hogy onnan juttassuk tovább, *ahol éppen van,* legyen az akármilyen alacsony vagy akármilyen magas szintje a matematikai gondolkodásnak, fogalmaknak, feladatmegoldó képességének.

A matematika tanítása (nevezzük akár számtantanításnak) enélkül csődbe megy. Formális készségek betanításába torkollik. Csömört vált ki azokból is, akik még nem tartanak ott, azokból is, akik már túl vannak azon, amit tőlük az uniformizálás jegyében kívánni kényszerülünk. A matematika minden más tudománynál vagy tantárgynál inkább lépcsőzetes felépítésű. Hiába *akarjuk,* hiába *írjuk elő,* hogy ki melyik lépcsőn tartozik lenni – mondjuk: életkoránál fogva –, attól, hogy ezt akarjuk, attól, hogy ezt írjuk elő, még nem lesz ott. Akkor pedig a következőre sem tud fellépni. Ha pedig már számos lépcsővel följebb van, akkor csak tétovázik, munkamorálja romlik: kedvét veszti.

Ez az ellentmondás már ma is éles, és egyre inkább éleződik, mégpedig annak arányában, ahogy a matematikatanulás tengelyében egyre kevésbé az *egyes technikák elsajátítása* áll, egyre inkább a transzfer, a széles körű alkalmazásra való képességet egyedül lehetővé tevő *fejlesztés.* (Ennek egyik alkotóeleme az adott fejlődési szint által lehetővé tett és a következő szintek eléréséhez szükséges technikai készségek elsajátítása. Másik fontos eleme a fogalomrendszer továbbépítése.) Márpedig ami megtette a tudományos-technikai forradalom kezdete előtt, az tarthatatlanná, abszurddá válik a tudományos-technikai forradalom kibontakozása idején. Fékezi a kibontakozását. Pedig azért drágán kell fizetnünk.

Fejlesztésközéppontú tanításra komolyan csak akkor gondolhatunk, ha nemcsak általánosságban fogadjuk el, hogy a tanulók különbözőek, hanem számot vetünk azzal is, *milyen mértékig* különbözőek.

A fejlesztésközpontú oktatásnak számolnia kell azzal, hogy a tanulóknak csak kisebb része van abban a fejlettségi sávban, ahol életkora szerint lennie kellene, többségük ennél illetlenül fejlettebb vagy fejletlenebb.

Ez már az *első osztályban* is így van, s ahogy a magasabb osztályok felé haladunk, *egyre inkább* így van. A szóródás szükségszerűen egyre nagyobb.

Azaz hogy van mód a csökkentésére, egy drasztikus mód: ha a pedagógus nem a tanulók optimális fejlődésének előmozdítására törekszik, hanem tekintélyes energiát fordít olyan körülmények megteremtésére, amelyek *akadályozzák a tanulók jelentékeny részének fejlődését.* Szomorú dolog volna ilyesmit pedagógiai célként tűzni ki.

Mindenki számára biztosítani az optimális fejlődési lehetőséget, a kezdeti hátrányok leküzdésének lehetőségét is, s az erre rászorulóknak külön segítséget adni: ez az, amit tehetünk és tennünk kell.

De ha a *nivellálásból* célt csinálunk, akkor egyébre, mint *lefelé nivellálásra,* nem számíthatnak.

Hogyan lehetünk tekintettel a különbözőségekre? Hogyan valósíthatjuk meg a különböző tanulók számára egyszerre az optimális fejlődés lehetőségét, közelebbről éppen a matematikában?

Komplex kísérletünk ezt a problémát több oldalról közelíti meg:

a tananyag,

a feladatanyag,

az osztálymunka megszervezése és

a felszerelés oldaláról.

a) Tananyagunk olyan felépítésű, hogy a leggyengébb és a legfejlettebb tanulók is évről évre megtalálják benne a számukra saját szintjükön leglényegesebb tanulnivalót. *Igazi matematikát* adunk a gyerekeknek, s ezzel lehetőséget a jobbaknak, hogy ne toporogjanak, hamar eljussanak mély gondolatok megértéséig és alkalmazásáig, számára hozzáférhető és fejleszthető legyen.

b) Feladatanyagunkban nagy szerepük van az olyan feladatoknak, amelyek egyaránt felkeltik a magasabb és alacsonyabb szinten levő tanulók érdeklődését, amelyeket mindenki meg tud oldani a maga módján. Például írniuk kell a 20-ról: van, aki egyszerű összeadást vagy kivonást ír, van, aki szorzást, osztást, több műveletet is, zárójelekkel, negatív számokat is beleszőve, vállalva és élvezve a nehézségeket, *mindig a tudása határain belül,* akármilyen tágak vagy akármilyen szűkek ezek a határok. Így önmagával is elégedett, és a tanítója is elégedett vele.

c) A tanulókat gyakran osztjuk csoportokra. Van, aki egyénileg dolgozik (például munkalappal) vagy párban (a mellette ülővel, például geometriai modellt készítenek), esetleg négyesével foglalkoznak, a kisebbik rész pedig a tanító, tanár körül van, aki most személyesen foglalkozik velük. Korrepetálja a gyengébbeket; átsegíti őket valami mostanában felmerült nehézségen, vagy éppen néhány olyan tanulót gyűjt maga köré, akiknek többre van szükségük, és most átad nekik egy újonnan elkészült feladatsorozatot, ahhoz fűz megjegyzéseket. Ez csak néhány példa. A pedagógus dolga, hogy mérlegelje, mire van a legnagyobb szükség, és kiválassza mindig az alkalomnak legmegfelelőbb szervezési formát. (Ez a legfőbb dolga. Nem az, hogy roppant aktivitással tanítsa a tanulni *kevéssé* vágyó csemetéket, akaratuk ellenére is. Ha nem akarnak tanulni, akkor eleve baj van valahol, és ezen a bajon kell mindenekelőtt segíteni.)

d) A felszerelés – a színes rudak, Dienes-készlet, logikai készlet, szöges tábla és még néhány eszköz – ésszerű használata kísérletünknek olyan eleme, amely minden tanuló, de ***elsősorban éppen a hátrányos helyzetű tanulók szempontjából fontos.*** Az ésszerű használathoz hozzá tartozik, hogy minden gyerek csak addig használja ezeket az eszközöket, ameddig szüksége van rájuk, amíg el nem jut oda, hogy már a fejében is el tudja végezni azt, amit addig részben a kezével végzett. Ez a különböző tanulóknál különböző időben következik be. Rendszerint maga a gyerek hárítja el az eszköz használatát, ha úgy érzi, már nincs szüksége rá. „Már tudom anélkül is" – mondja. A pedagógus akkor lép közbe, ha úgy látja, hogy ez túl hamar történt vagy túl sokáig várat magára, ha a gyerek türelmetlen vagy bátortalan.

A hátrányos helyzetű tanulók segítésében különösen nagy feladatok állnak előttünk. Komplex kísérletünk vállalja, hogy ebben a tekintetben is többet teljesít, mint amit hagyományos módszerekkel a legjobb akarattal is teljesíteni lehet.

1973-ban az MTA Elnökségi Közoktatási Bizottságának Matematikai Albizottsága javasolta, hogy az új tantervet az OPI (Varga Tamás) irányításával folyó komplex kísérletre kell alapozni.

Az új tanterv bevezetése több lépésben, felmenő rendszerben történt, 1978-ban vezették be kötelezően minden magyar általános iskola első osztályában. Az új tanterv alapján tankönyvcsalád készült 1-től 8. osztályig, a szerzők valamennyien a komplex kísérlet résztvevői, támogatói közül kerültek ki. Közben a középiskolában is megindultak a komplex kísérlet szellemét tükröző oktatási kísérletek, melyek hatása megmutatkozott az 1979-ben bevezetett új középiskolai tantervben. Ezzel egyidejűleg a kísérletre támaszkodva újszerű tankönyvsorozat jelent meg a gimnáziumok számára, mely párhuzamos tankönyvként hosszú évtizedek óta először szabad választást jelentett a gimnáziumok matematika tanárai számára.

Az 1978-as tanterv néhány jellegzetessége

Az új tanterv lényeges elemei megegyeznek a komplex anyagával. A tananyag a komplexben kialakított öt témakörben jelenik meg, spirális felépítés jellemzi, ez az egészet átható fejlesztésközpontúsággal függ össze. A módszertani alapelvekben is felismerhetjük a komplex elvi és gyakorlati hatását. Az új tanterv néhány fontos módszertani elve: A manuális tapasztalatszerzés fontos szerepet játszik a kisgyerek absztrakt gondolkodásának fejlődésében. A fogalmak kialakításához hosszú érlelési időre van szükség. A matematika szeretete, az érdeklődés minden más tényezőnél jobban ösztönöz a tanulásra.

A tanítási folyamatban fontos a differenciálás, az egyéni különbségek figyelembevétele, a tévedés szabadsága, a játékok otthon és az órákon pedagógiai célból.

Az 1978-as tanterv hosszú időn át meghatározta a magyar matematikatanítást. A valóság természetesen sokban különbözött a tanterv készítőinek elképzeléseitől, objektív és szubjektív körülmények hatására a tanterv és a kapcsolódó tankönyvek sok vitát váltottak ki, sokak számára idegen volt a szemlélet, sokan tartották túlméretezettnek az anyagot, a gyengébb eredményekért a tantervet és a tankönyveket hibáztatták. Mindez vezetett a nyolcvanas években bekövetkezett korrekcióhoz.

A viták, tiltakozások és változtatások ellenére a 60-as években megindult reformmozgalom, a 78-as tanterv és mindezeken belül Varga Tamás munkássága maradandó hatást gyakorolt a magyar matematikatanításra. Ma már szinte mindenki számára természetes, hogy az iskolába lépés kezdetétől lehet a gyerekeknek „igazi" matematikát tanítani, nemcsak a régi számolást és mérést. A gyerekek aktív részvétele, felfedező tevékenysége minden életkorban, minden témakörben az oktatás fontos tényezője. A gyerekek képességeinek fejlesztése, az egyéni különbségek figyelembevétele, a matematika megszerettetése, a gondolkodás, a kreativitás fejlesztése ma már didaktikai közhelynek számít, pedig ezek az elvek és ezek következményeiként kialakult módszerek korábban késhegyig menő vitákat váltottak ki és sok továbbképző programra, tapintatos tanácsadásra volt szükség ezek elterjesztéséhez.

A komplex matematikai kísérlet és az 1978-as tanterv hatása a NAT-ra

Több éves munka után 1997-ben megszületett a magyar Nemzeti Alaptanterv, röviden a NAT. Az előző években több változatát ismerte és vitatta meg a pedagógus társadalom és mindenki, akit a téma érdekelt. A szerzők szerint az elnevezés nem pontos, hiszen ez nem alaptanterv, hanem tantervi alap, erre építve kell létrehozni a helyi tanterveket.

A NAT Matematika tartalmában, szellemében könnyen fellelhető a komplex kísérlet és az 1978-as matematika tanterv hatása.

Az „igazi" matematika a tanterv anyaga az iskolábalépéstől kezdve és a korábbi öt témakör továbbélését ismerhetjük fel a részletes követelmények tartalmi rendszerezésében.

Kitűnő lelemény a Gondolkodási módszerek témakör bevezetése. Ez olyan matematikai ismeretanyagot tartalmaz, amelyet általában nem dolgozunk fel tételesen az iskolában, hanem több témakörhöz kapcsolódva egy-egy feladat, feladatsor megoldásával sajátítanak el a tanulók. Idetartoznak halmazokra vonatkozó ismeretek, a logika, a kombinatorika alapelemei és módszerei.

A további témakörök: Számtan, algebra.
Összefüggések, függvények, sorozatok.
Geometria, mérés.
Valószínűség, statisztika.

Fontos jellegzetesség a fejlesztés-központúság és a spirális felépítés. A felsorolt öt témakör (kisebb címbeli változásokkal) mind a négy szinten megjelenik – a 4. 6. 8. és a 10. év végi követelményekben.

A tananyag felépítésében felismerhető a fogalmak kialakításának a komplexben javasolt módja: kiindulás a közvetlen tapasztalatból, az életkornak megfelelő szintű matematikai játékos, manipulatív tevékenységből, a hosszú érlelési idő biztosítása, a tanulók aktív részvétele az ismeretszerzésben, fogalomalkotásban.

A 60-as, 70-es évek matematikatanítási reformmozgalmak célkitűzései, Varga Tamás elképzelései a következő évtizedekben nem valósultak meg maradéktalanul. Például Varga Tamás nagyon fontosnak tartotta a matematika alkalmazhatóságának iskolai megmutatását, szerette volna, ha a tanulók matematika tudása a valóság problémáinak megoldásához hatékony segítséget jelentene. A matematika eredményes alkalmazásához elengedhetetlen eszköznek vélte a valószínűségszámítás és a statisztika tudását és a megfelelő szemlélet kialakítását. Ez utóbbi területeken a 78-as tanterv és a korrekciós tanterv időszaka nem hozta meg a kívánt eredményt. A matematika iskolai oktatásában a matematika alkalmazásai háttérbe szorultak a „tiszta matematika" tanítási szempontjai mögött. A valószínűségszámítás és a statisztika tanítása is a perifériára szorult, a tanárok többsége igyekezett elkerülni vagy minimálisra szorítani ezeket a részeket a tanításban.

A NAT Matematika követelményrendszerében a korábbi évekhez képest lényegesen nagyobb hangsúllyal szerepelnek a matematika alkalmazásai valamint a valószínűségszámítás és a statisztika. Ugyancsak összhangban van a NAT Varga Tamás elképzeléseivel a számológépek és számítógépek használatában. Varga Tamás már a nyolcvanas évek elején fontosnak tartotta a számológépeknek és a rohamos fejlődést mutató számítógépeknek az oktatásban történő felhasználását, maga is kereste ennek megfelelő módjait és nem értett egyet azokkal a szélsőséges nézetekkel, melyek szerint meg kell tiltani számológépek, személyi számítógépek iskolai használatát. A NAT-ban több helyen is találunk konkrét utalásokat a zsebszámológépek megfelelő használatára.

A NAT, mint minden korábbi tanterv, sok vitát váltott ki. A bírálatok ellenvetések hatására 1999-ben megindult az ún. kerettantervek kidolgozása Ezek jelentik a közbülső lépést a közvetítő eszközt a NAT és a helyi tantervek között, tehát segítséget, eligazítást nyújtanak a tanárok számára.

Irodalom

Varga Tamás: A matematika tanításának várható fejlődése. A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése. (292–338. old.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1977

Varga Tamás: Mi a komplex módszer? (Kapcsolat, 1969 augusztus) (Részlet). Szemelvénygyűjtemény a matematika tanításához. Szerkesztette: Vörös György Tankönyvkiadó, Budapest, 1976 (32–36. old.)

Varga Tamás: A matematika tanítása. Szemelvénygyűjtemény. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967

Nemzeti alaptanterv. Művelődési és Közoktatási Minisztérium. 1995.

A számfogalom fejlesztéséhez kapcsolható függvények értelmezése

A matematika tanulása kezdetén az alsótagozatos kisgyerek a pozitív egész számokkal ismerkedik először lépésenként 10-ig, 100-ig, 1000-ig, és aztán természetesen jönnek a „nagy számok” is. Eközben a gyakorlati élet problémáihoz kapcsolva megjelennek a negatív számok is, először konkrét, szemléletes példákkal: hideg–meleg, mélység–magasság, jövedelem–adósság stb. Hasonlóképpen hamar találkoznak a gyerekek a törtszámokkal is, megoldanak feladatokat a fele, harmada, negyede stb. fogalmak felhasználásával. Mindezek a lépések szükségesek ahhoz, hogy a számhalmazok bővítésével eljussanak először a racionális számokhoz, majd a középiskolában a valós számok fogalmának megértéséhez.

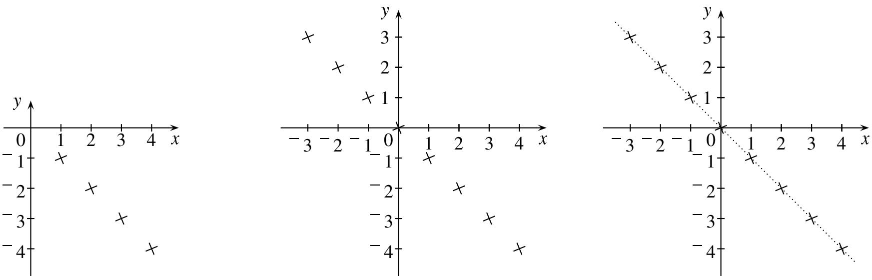
A számhalmazok bővülésével egyidejűleg bővül az értelmezési köre a folyamatban felbukkanó olyan fogalmaknak mint a számok ellentettje, abszolút értéke, reciproka, egészrésze, törtrésze. Emellett szükségképpen újra és újra kell definiálni az alapműveleteket úgy, hogy a szűkebb halmazban adott értelmezés a bővebb halmazban is speciális esetként érvényes maradjon.

Természetes gondolat, hogy ezeket a lépéseket vizsgáljuk egyes függvények megadásával és értelmezési tartományuk bővítésével, ábrázoljuk derékszögű koordináta rendszerben (É.T. az értelmezési tartományt, É.K. az értékkészletet jelöli).

Az ellentett függvény

Jelölése: $x \mapsto -x$

É.T.:	pozitív egészek	egészek	racionálisak
É.K.:	negatív egészek	egészek	racionálisak



Már az első bővítéssel megjelenik a 0 mint az egyetlen olyan szám, amelynek ellentettje is önmaga. Igen fontos felismerés az, hogy a negatív szám ellentettje pozitív szám, pl. $-(-2)=+2$, és az x és a $-x$ is lehet pozitív és negatív szám is, attól függően, hogy az értelmezési tartomány melyik elemét helyettesítjük be. Észrevehetjük azt is, hogy a grafikonon a pontok egy egyenes mentén sorakoznak, hiszen a pontoknak a két tengelytől mért távolsága egyenlő, ez az ellentett fogalmából következik.

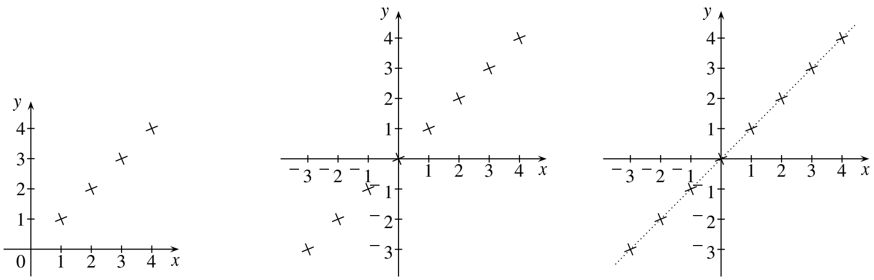
A racionális számokon értelmezve sűrűsödnek a pontok a grafikonon, és felmerülhet az összeköthetőség problémája. Ennek végleges lezárását csak a valós számok értelmezése teszi lehetővé. Igaz ugyan, hogy a gyakorlatban mindig véges tizedestörtekkel, közelítő pontosságig mérünk, amikor a grafikont rajzoljuk a kréta vagy a ceruza vastagsága meghatározza ábrázolásunk pontosságát és a rajzban hamar összekötődnek a berajzolt pontok, de fontos, hogy ne tévesszük meg a gyerekeket: a racionális számokon értelmezett függvények grafikonja mindig diszkrét pontsorozatból áll, bármennyire is sűrítjük az ábrázolásunkat.

Az általános iskolai tanulmányok végefelé már biztosan van a gyerekeknek tapasztalata irracionális számok létezéséről is, ezért lehet példákat találni arra, hogy bizonyos helyeken biztosan „lyukas” az egyenesünk ($\sqrt{2}$, π).

Az azonosság függvénye (identikus függvény).

Jelölése: $x \mapsto +x$

É.T.:	pozitív egészek	egészek	racionális
É.K.:	pozitív egészek	egészek	racionális



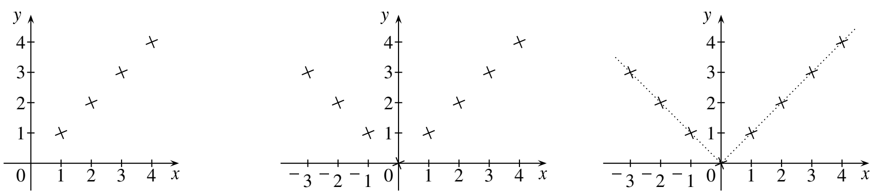
Az ellentett függvény után értelmes kérdés lehet az is, hogy „mit csinál a + jel a számokkal?” Megállapodás szerint, ha nem írjuk ki a konkrét szám előjelét, akkor 0-t vagy pozitív számot adtunk meg, tehát a + jel értelme az, hogy „nem változtat”, így például $+2=2$, $+10=10$ és $+(-2)=-2$, $+(-10)=-10$, $+x=x$, ez azonban lehet pozitív, 0 és negatív szám is, a behelyettesítéstől függően.

A grafikon ismét egyenesen sorakozó pontok halmaza, az összeköthetőségre az előzőekben mondottak érvényesek.

Az abszolútérték függvény

Jelölése: $x \mapsto |x|$

É.T.:	pozitív egészek	egészek	racionális
É.K.:	pozitív egészek	nem negatív egészek	nem negatív racionális



A számok abszolútértéke kezdetben a számegyenesen a 0-tól való távolsághoz kötődik. Az ellentett és az identikus fogalmak segítségével a távolságtól elvonatkoztatva definiálhatjuk az abszolútértéket:

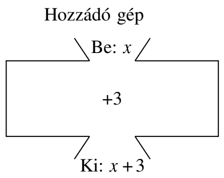
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Eszerint az abszolútérték függvény azonos az ellentett függvénnyel a negatív számokon, az identikus függvénnyel a nemnegatív számokon.

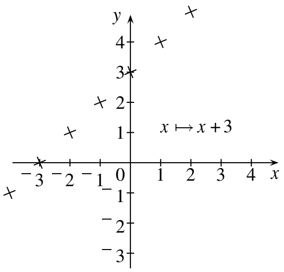
A grafikon szimmetriája szemlélteti, hogy az abszolútértékben egy szám és az ellentettje megegyeznek.

Műveletek

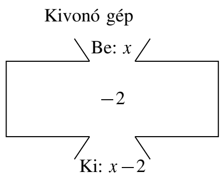
A függvények jól modellezhetők az ún. játékgépekkel, a bedobható dolgok halmaza az értelmezési tartomány, a kijövő dolgok halmaza az értékkészlet előképe, az egyértelmű hozzárendelést a gép működési szabálya adja meg. Ezek segítségével érdemes végigkísérni a bővülő halmazokon az alapműveletek értelmezésének lépcsőfokait.



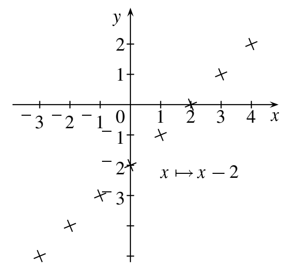
(3-mal növel)



Amíg az értelmezési tartomány a természetes számok halmaza, addig az értékkészlet elemei a 3-nál nem kisebb számok, ha bővítünk az egészekre, minden egész számot megkaphatunk. A pontok egyenesen sorakoznak az identikus függvény képével párhuzamosan.

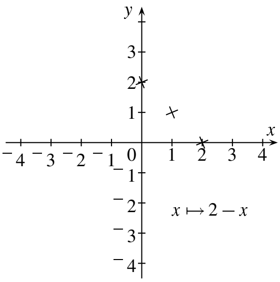


(2-vel csökkent)



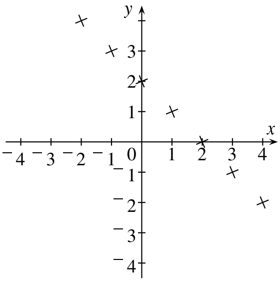
Amíg csak a természetes számokat ismerik a gyerekek, nyilvánvaló, hogy 2-nél kisebb számokat nem dobhatunk a gépbe, ennek megfelelő pontok az x tengely kettes pontjától induló félegyenes fölött helyezkednek el, ha tovább lépegetünk balra-lefelé a pontsorozat egyenese mentén egyesével, adódik, hogy $1-2=-1$, $0-2=-2$, sőt $-1-2=-3$ stb.

Fontos észrevétel lehet, hogy míg az összeg nem változik, ha az összeadás tagjait felcseréljük, egészen mást kapunk, ha az $x-2$ helyett $(2-x)$-et veszünk.

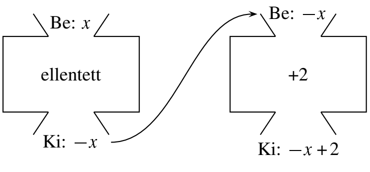


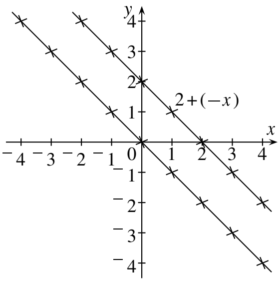
Első lépés: értelmezési tartomány: 0, 1, 2; értékkészlet: 0, 1, 2

Jobbra-balra tovább lépegetve eljuthatunk az egészeken értelmezett függvényhez.



Érdemes az eddigiekre támaszkodva vizsgálni az $x \mapsto 2+(-x)$ függvényt. Ezt értelmezhetjük két gép összekapcsolásával, az első gép a számok ellentettjét képzi, a második a 2-t hozzáadó gép.

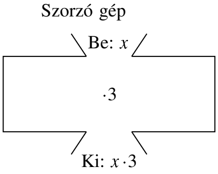


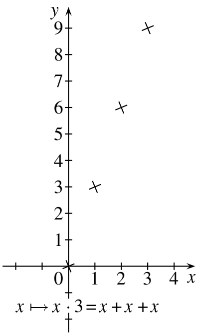


Tapasztalhatjuk, hogy ez a függvény azonos az $x \mapsto 2-x$ függvénnyel. Ez természetesen nem véletlen, hiszen az egész számok körében az összeadás és kivonás értelmezéséből következik hogy egy szám kivonása azonos ellentettjének hozzáadásával.

Szorzás

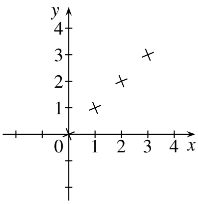
A szorzás tanulása kezdetén még nem magától értetődő a kommutativitás, különböző szerepe van a szorzandónak és a szorzónak, ezért fontos szempont a jelölés is. Itt követjük a sok tankönyvben szokásos sorrendet: szorzandó · szorzó. Tehát pl. $5 \cdot 3$ azt jelenti, hogy az 5-öt szorozzuk 3-mal, a definíció szerint $5 \cdot 3 = 5+5+5$. Későbbi felismerés az, hogy a $3+3+3+3+3 = 3 \cdot 5$ is ugyanennyi.



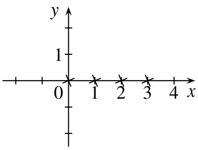


Értelmezési tartomány: természetes számok
Értékkészlet: a 3 nemnegatív többszörösei
Külön érdemes kitérni speciális szorzógépekre:

$x \mapsto x \cdot 1$, ez éppen az identikus függvény.

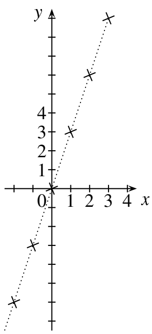


$x \mapsto x \cdot 0$, itt minden kijövő érték 0.



Bővítsük az értelmezési tartományt a negatív számokkal:

Nem szükséges új definíció, $x \cdot 3 = x + x + x$, akkor is, ha x negatív, a grafikonon a pontsorozat az egyenes mentén folytatódik a harmadik síknegyedben.



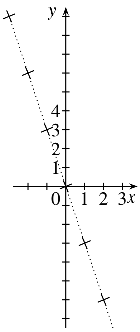
Fordítsuk meg a tényezők sorrendjét, legyen a szorzandó állandó, legyen ez a 3, és a szorzó a változó, vizsgáljuk a $x \mapsto 3 \cdot x$ függvényt.

A természetes számokon értelmezve ez nyilván azonos az $x \mapsto x \cdot 3$ függvénnyel.

Ha kiterjesztjük az értelmezési tartományt az egészekre, a negatív számmal való szorzást definiálni kell, hiszen itt már nem használható az összeadással történő értelmezés. A grafikon egyenesének meghosszabbításával, annak mentén való lépegetéssel adjuk meg a bővített függvényt. Ez is megerősítheti az egyéb modellek segítségével kialakított értelmezést, itt is azt kapjuk, $3\cdot(-1)=-3$, $3\cdot(-2)=-6$, $3\cdot(-3)=-9$ stb.

Így a bővebb halmazban is tejesül, hogy $x\cdot 3=3\cdot x$

Változtassuk a szorzandót, legyen negatív szám, pl. -3, a függvény most $x\mapsto -3\cdot x$.



Az előzőhöz hasonló módszerrel vizsgálhatjuk.

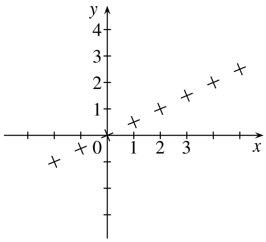
Eljuthatunk ehhez a függvényhez összetétellel is: $x\mapsto -(3\cdot x)$ Modellezhetjük gépek egymásutánjával: az első szorzógép, a második az ellentett gép, megfigyelhető az is, hogy jelen esetben a gépek sorrendje felcserélhető.

Tehát $-3\cdot x=-(3\cdot x)=3\cdot(-x)$

Szorzás törttel

$x\mapsto x\cdot\dfrac{1}{2}$. Jelentése: vegyük az x felét.

Ha az értelmezési tartomány az egész számok halmaza, az értékkészlettel már kilépünk az egészek halmazából.

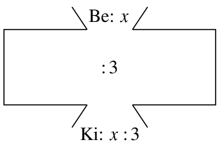


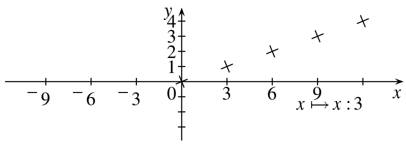
Osztás

Értelmezési tartomány: a 3 nemnegatív többszörösei

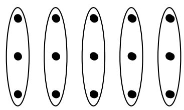
Értékkészlet: nem negatív egészek

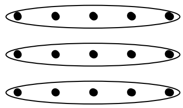
Osztás





Kezdetben az osztást kétféleképpen értelmezzük:
bennfoglalás $15:3=5$, 15-ben a 3 megvan 5-ször,
mert $3+3+3+3+3=3\cdot 5=15$





részekre osztás $15/3=5$, 15-öt 3 egyenlő részre osztjuk, egy részbe 5 kerül, mert $5+5+5=5\cdot 3=15$

Látható, hogy a kétféle osztás fordított művelete („próbája”) a kétféle szorzás.

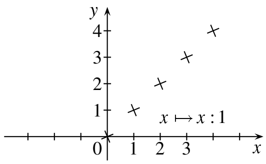
Változtassuk az osztót!

$x \mapsto x:2$. Értelmezési tartomány: páros számok. Értékkészlet: természetes számok.

$x \mapsto x:4$. Értelmezési tartomány: 4 többszörösei. Értékkészlet természetes számok.

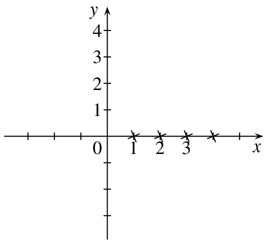
Az értelmezési tartomány ilyen vizsgálata oszthatósági kérdésekhez vezet.

Speciális esetek



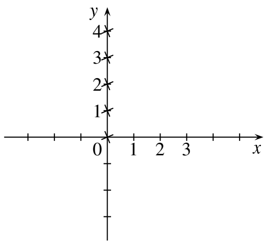
Az osztó 1: $x:1=x$, mert $x\cdot 1=x$, bármely $x\in\mathbf{N}$

Ha az osztandó 0-tól különböző szám, az osztó 0 nem lehet, mert 0-val bármely számot megszorozva újra 0-t kapunk, tehát nem kapjuk „vissza” az osztandót.



Mi a helyzet, ha a 0-t osztjuk egy számmal? $x \mapsto 0:x=0$, x pozitív egész szám

Bővítsünk!

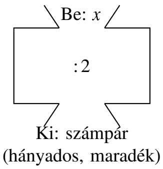


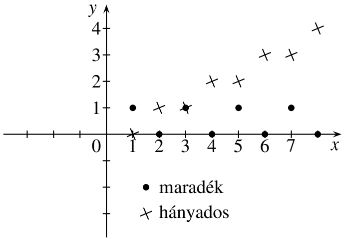
Mi történne, ha x helyére 0-t írnánk? „$y=0:0$”; lehetne $y=1$? $1\cdot 0=0$: igen; lehetne $y=2$? $2\cdot 0=0$: igen; lehetne $y=3$? $3\cdot 0=0$: igen stb, az y bármely szám lehetne, hiszen $y\cdot 0=0$, bármely y szám esetén.

Az x-hez a y-t rendelő hozzárendelés az $x=0$-ra nem egyértelmű, nem függvény.

Az y nem egyértelműen meghatározható, ezért a $0:0$ művelet nem értelmezhető.

A maradékos osztás

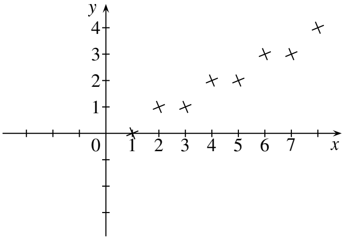




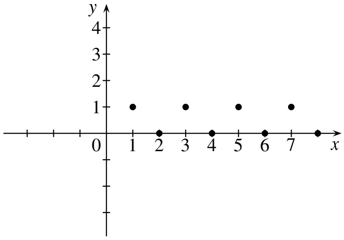
x pozitív egész szám

A páros számoknál a maradék 0, páratlanoknál 1, a hányados a szám felének az egészrésze. Ez a hozzárendelés természetesen nem függvény, de ennek alapján több függvényt is értelmezhetnénk, pl. Lehetne a függvényérték

csak a hányados,



csak a maradék,



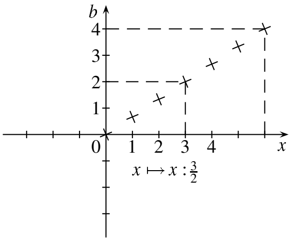
de lehetne a képhalmaz a számpárok halmaza is, $x \mapsto (b, c)$, $x = 2b + c$, ahol x és b pozitív egészek és c 0 vagy 1 (lásd a fenti ábra).

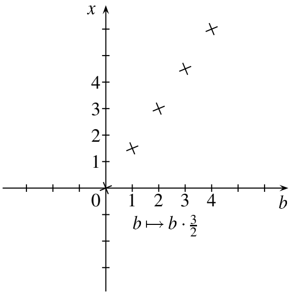
Érdemes tovább vizsgálódni, ha az osztó 3, 4 stb.

A maradékos osztás értelmezését kiterjeszthetjük az egész számok halmazára is, bár ezzel tételesen az általános iskolában nem foglalkozunk.

Osztás törttel

Például $x \mapsto x : \dfrac{3}{2} = b,\ b \cdot \dfrac{3}{2} = x$

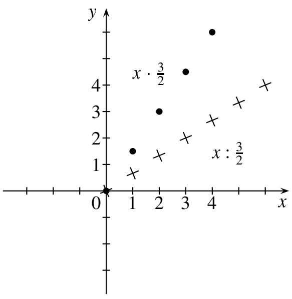




Észrevehető, hogy ez ugyanaz a függvény, mint az $x \mapsto x \cdot \dfrac{2}{3}$.

Inverz függvényekhez tudunk tapasztalatokat gyűjteni:

Ábrázoljuk mindkettőt közös koordináta-rendszerben:



Osztás állandó osztandó esetén a pozitív egész számok halmazán

$x \mapsto 3 : x \quad \{3, 1\},\ \{1, 3\}$

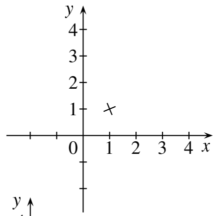
$x \mapsto 12 : x \quad \{12, 6, 4, 3, 2, 1\},\ \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Általában:

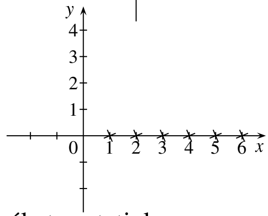
$x \mapsto a : x$, az értelmezési tartomány és az értékkészlet az a osztóinak halmaza, az összetartozó értékpárok pedig az a osztópárjai, ha az a pozitív egész szám.

Speciális esetek

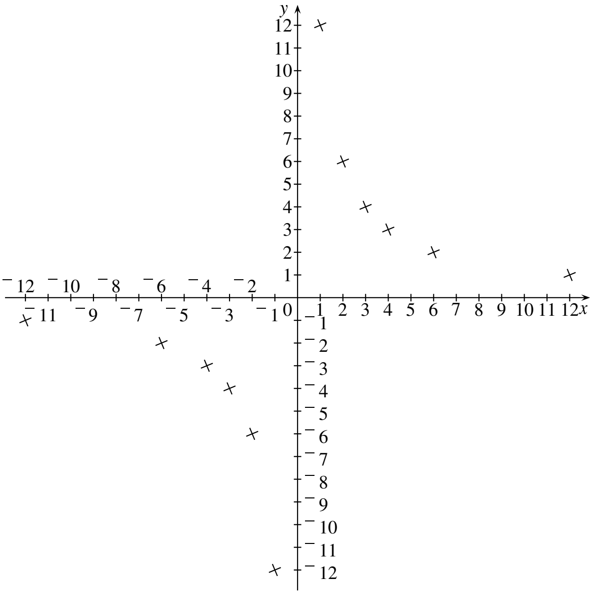
$a = 1$, mindkét halmaz egyelemű, $(1:1=1)$



$a = 0$, $x \mapsto 0 : x = 0$, az értelmezési tartomány a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete egyelemű: $\{0\}$

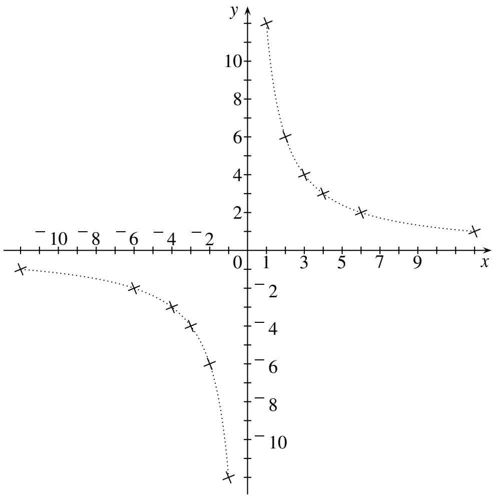


Érdemes lépésenként vizsgálni a kiterjesztést, itt csak az ábrákat mutatjuk:



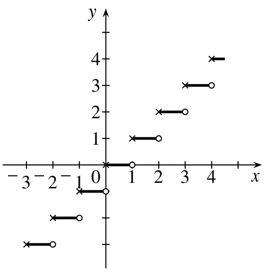
$x \mapsto a : x$, a rögzített pozitív egész szám (az ábrákon 12). x negatív egészek, x egészek, kivéve 0 . x racionálisak, kivéve 0. x valósak, kivéve 0. Értékkészlet: racionálisak, kivéve 0, valósak, kivéve 0.

A rajzon nem tudunk különbséget tenni, bár a racionálisokon értelmezett függvény képe diszkrét pontok halmaza, a valósokon értelmezett függvény képe folytonos vonal, a ceruza vastagsága, illetve a nyomtatott vonal vastagsága elegendő ahhoz, hogy a pontok az ábrán összemosódjank egy folytonos vonallá.



Érdekes függvények
Az egészrész függvény

$x \mapsto [x]$, minden x valós számhoz a nála nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat rendeli, tehát $[x] \le x < [x] + 1$.



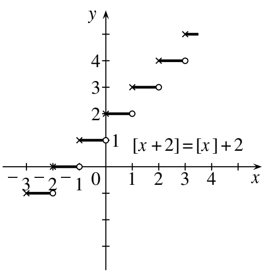
A függvény a valós számok halmazát az egész számokra képezi le.

Képlettel szakaszonként adhatjuk meg:

$[x] = n$, ha $n \le x < n + 1$, ahol n tetszőleges egész szám.

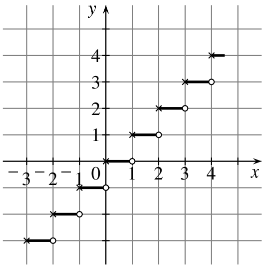
A függvény segítségével viszonylag egyszerű példáját mutathatjuk a nem mindenütt folytonos, monoton függvényeknek. A függvénynek minden egész helyen ugráshelye van, az ábrán minden egyes egységnyi szakasz bal oldali végpontja hozzá tartozik a grafikonhoz, a jobb oldali nem, tehát ott „lyukas”.

Érdemes felfigyelni arra is, hogy a definícióból könnyen kiolvasható, hogy $[x+k] = [x]+k$, ha k tetszőleges egész szám. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ugyanazt a grafikont kapjuk akár ha az x tengely mentén $-k$-val vagy az y tengely mentén k-val toljuk el.

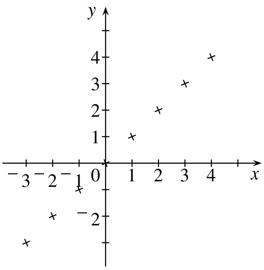


Bár a függvényt a valós számok halmazán adtuk meg, a racionális számok halmazán is érdemes foglalkozni ezzel a függvénnyel, a későbbi analízis tanulmányokhoz fontos tapasztalati anyag nyerhető belőle már ezen a szinten is.

A szakaszonkénti képletből következik az is, hogy a függvény grafikonja származtatható úgy is, hogy az $y = n$, $(n \in \mathbf{Z})$ egyenletű x tengellyel párhuzamos egyenesseregből az $x = n$, $(n \in \mathbf{Z})$ egyenletű y tengellyel párhuzamos egyenes-sereggel kivágjuk a megfelelő balról zárt, jobbról nyílt szakaszokat.



Ha a függvényt leszűkítjük az egész számok halmazára, az ehhez a halmazhoz tartozó identikus függvényt kapjuk, hiszen minden egész számnak az egészrésze önmaga. Szemléletesen: az egészekhez tartozó pontok az $y = x$ egyenletű egyenesen sorakoznak.



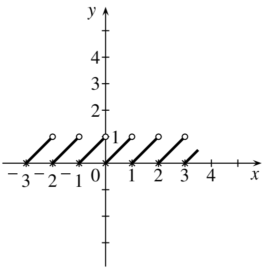
A törtrész függvény

$x \mapsto \{x\} = x - [x]$, szakaszonkénti képlettel:

$\{x\} = x - n$, ha $n \leq x < n+1$, ahol n tetszőleges egész szám.

A függvény a valós számok halmazát a $[0;1)$ balról zárt, jobbról nyílt intervallumra képezi le.

Ezzel a függvénnyel a gyerekek egyszerű példán megismerhetik a függvények periodicitását – tehát nemcsak a trigonometrikus függvények alkalmasak e tulajdonság bemutatására!



A függvény definíciójából (alapvetően az egészrész definíciójából) következik, hogy $\{x+k\} = \{x\}$ minden k egész számra, hiszen a definícó szerint

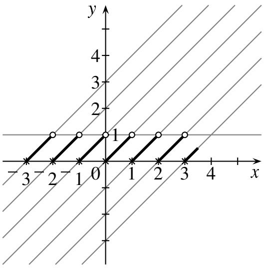
$$\{x+k\} = (x+k) - [x+k] = (x+k) - ([x]+k) = x - [x] = \{x\}$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a grafikon az x tengely mentén bármely egész számmal eltolható (önmagába megy át).

A függvény nem vesz fel 0-nál kisebb értékeket, hiszen a szám, amiből az egészrészét kivonjuk, nagyobb vagy egyenlő az egészrészénél, éppen az egész számoknál kapjuk a 0-t. A függvény korlátos felülről is, hiszen minden értéke kisebb mint 1. De bármilyen kicsivel is kisebb egy pozitív szám az egynél, a törtrész függvény értékkészletében benne van. Másként fogalmazva ez azt jelenti, hogy a függvénynek nincs maximuma, de van legkisebb felső korlátja, ez az 1. Az egészrészhez hasonlóan ennek a függvénynek is ugráshelyei vannak az egész számoknál.

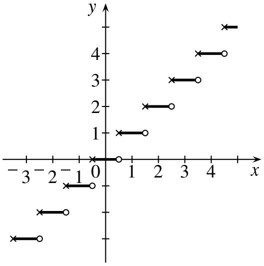
A szakaszonkénti képletből következik, hogy a függvény grafikonja származtatható úgy is, hogy az $y = x - n$, $(n \in \mathbf{Z})$ egyenletű egyenesseregből kivágjuk az x tengely és az $y = 1$ egyenletű egyenes közé eső szakasz-sorozatot, és elhagyjuk a $y = 1$ egyenesére eső pontokat.

Ha a függvényt leszűkítjük az egész számok halmazára, ezen a halmazon az azonosan 0 függvényt kapjuk.

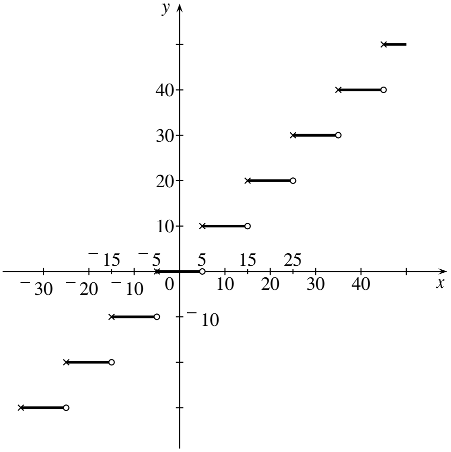


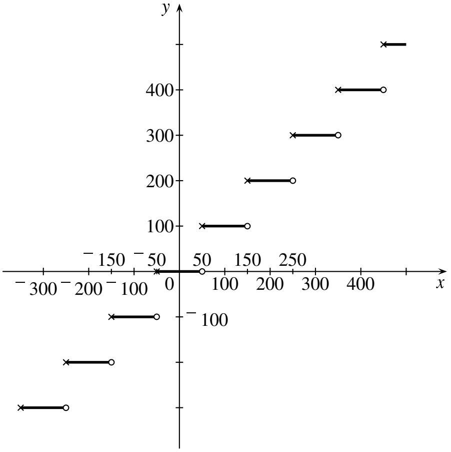
Kerekítés
Kerekítés egészekre

A következő függvény minden valós számhoz hozzárendeli a szám egészekre kerekített értékét. Ez is ugrásos függvény, minden félnél ugrik. Például,
ha $1,5 \le x < 2,5$, a függvény értéke 2,
ha $2,5 \le x < 3,5$, a függvény értéke 3,
ha $-0,5 \le x < 0,5$, a függvény értéke 0,
ha $-1,5 \le x < -0,5$, a függvény értéke -1, stb.



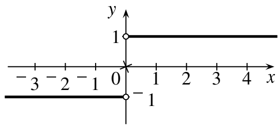
A kerekítéssel már az alsó tagozatban a „kis” pozitív egészek világában is találkoznak a gyerekek, megtanulják ezeknek az egészekre, tízesekre, százasokra, ezresekre kerekítését. Érdemes ezeken a halmazokon is vizsgálni a megfelelő függvényeket. Az alábbiakban a tízesekre, ill. százasokra kerekítéses függvény grafikonját mutatjuk.





Az előjel vagy szignum függvény

$$x \mapsto \operatorname{sg} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



A függvényérték mintegy „kódolja” a szám előjelét, azáltal, hogy a pozitív számhoz 1-t, a negatív számhoz -1-et, a 0-hoz a 0-t rendeli, tehát a valós számokat a $\{-1, 0, 1\}$ halmazra képezi le.

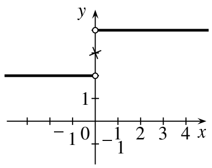
A negatív számokon és a pozitív számokon egy-egy konstans függvénnyel azonos, 0-ban ugráshelye van.

Páratlan függvény, mert $\operatorname{sg}(-x) = -\operatorname{sg} x$, ezért a grafikonja az origóra szimmetrikus.

Érdemes már a racionális számok halmazán is értelmezni. Jó példának használhatjuk a függvénytranszformációk és a függvényösszetételek tanításakor, könnyű rajzolni, ezzel egyszerűen szemléltethető a különböző függvénytranszformációk és összetételek geometriai megjelenési formája.

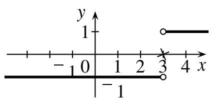
Példák:

$x \mapsto \operatorname{sg} x + 3$



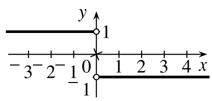
eltolás y tengely mentén

$x \mapsto \operatorname{sg}(x-3)$



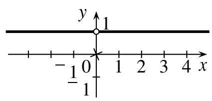
eltolás x tengely mentén

$x \mapsto -\operatorname{sg} x$



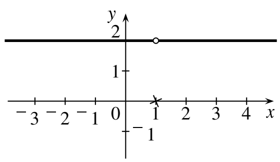
tükrözés az x tengelyre

$x \mapsto (\operatorname{sg} x)^2$

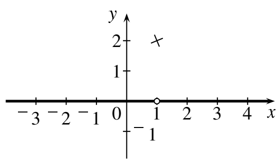


Több lépéses transzformáció:

$x \mapsto 2 \cdot \left(\operatorname{sg}(x-1)\right)^2$



$x \mapsto \Big(1 - \left(\operatorname{sg}(x-1)\right)^2\Big) \cdot 2$



A függvények tanításában gyakran felmerülő probléma, hogy nem tisztázódik, hogy véges számú helyen megadott értékekhez végtelen sok szabály adható meg úgy, hogy az adott helyeken a megadott értékeket szolgáltatja. Ezt egy Péter Rózsától* származó példán mutatjuk meg. Vegyünk három adott értéket: a_1, a_2, a_3, ezeken a helyeken a hozzárendelt értékek legyenek: b_1, b_2, b_3, Az előzőekben megismert signum függvény és transzformációi segítségével megadjuk a következő szabályt:

$$\left(1-(\mathrm{sg}(x-a_1))^2\right)\cdot b_1+\left(1-(\mathrm{sg}(x-a_2))^2\right)\cdot b_2+\left(1-(\mathrm{sg}(x-a_3))^2\right)\cdot b_3$$

Ez a függvény az a_1, a_2, a_3, helyeken b_1, b_2, b_3, értékeket veszi fel, minden más helyen pedig 0-t.

Ebből már könnyen következik állításunk igazsága.

Legyen f tetszőleges függvény. Ennek segítségével a következőképpen adhatunk meg végtelen sok olyan függvényt, amely az a_1, a_2, a_3, helyeken b_1, b_2, b_3, értékeket veszi fel.

$$\left(1-(\mathrm{sg}(x-a_1))^2\right)\cdot b_1+\left(1-(\mathrm{sg}(x-a_2))^2\right)\cdot b_2+\left(1-(\mathrm{sg}(x-a_3))^2\right)\cdot b_3+$$
$$+(\mathrm{sg}(x-a_1))^2\cdot(\mathrm{sg}(x-a_2))^2\cdot(\mathrm{sg}(x-a_3))^2\cdot f(x)$$

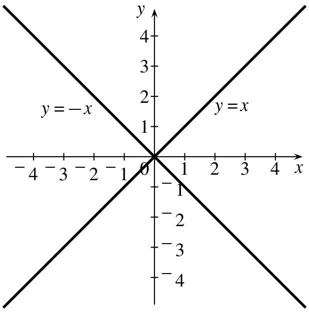
Ez a függvény az a_1, a_2, a_3, helyeken a b_1, b_2, b_3, értékeket veszi fel, minden más helyen pedig értéke az $f(x)$-szel egyenlő.

A függvényekkel kapcsolatos ismeretek jól használhatók az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldáshalmazának ábrázolásában.

Példák

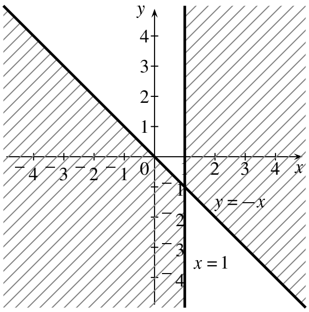
Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-síkon a következő egyenletek, egyenlőtlenségek megoldáshalmazát!

$(x+y)(x-y)=0$



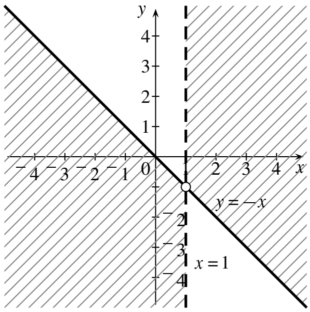
A két egyenes minden pontja

$(x-1)(x+y)\geq 0$



A két egyenes hozzá tartozik

$\dfrac{x+y}{x-1}\geq 0$



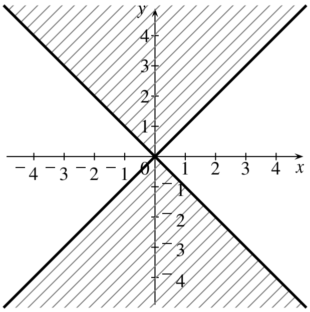
Az $x=1$ egyenes nem tartozik hozzá

* Péter Rózsa (1905–1977)

Ebben a témában érdemes több egyszerű feladat után néhány nehezebbet is feladni. A következő példákban jól hasznosíthatjuk az előzőekben vizsgált függvényekről tanultakat. A megoldások talán meglepőek, a kapott különleges, tetszetős ábrák az érdeklődés felkeltésére is alkalmasak lehetnek.

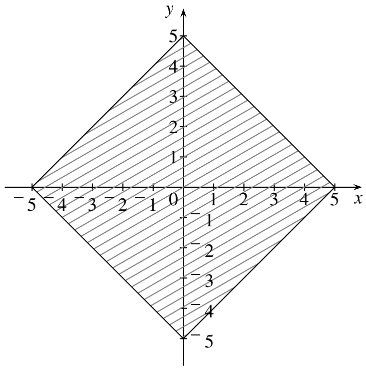
Példák

$|x| \leq |y|$



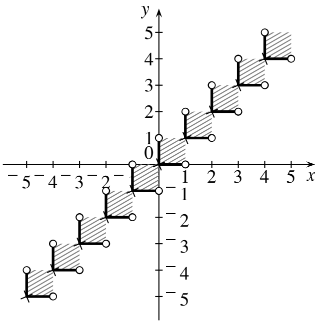
Az egyenesek hozzá tartoznak

$|x| + |y| \leq 5$

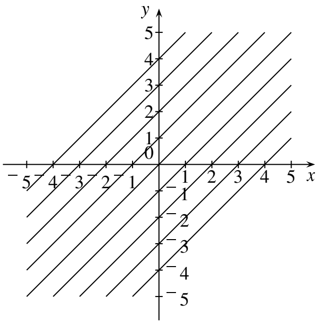


A szakaszok hozzá tartoznak

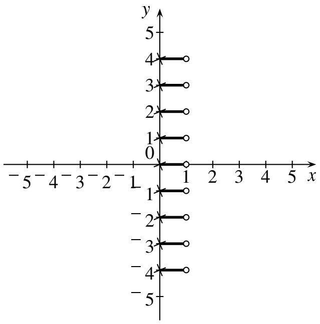
$[x] = [y]$



$\{x\} = \{y\}$



$[x] = \{y\}$



Feladatmegoldás számkártyákkal

Az általános iskolai matematika tanításában gyakran használjuk a számkártyákat pl. kombinatorikai vagy számelméleti feladatok megoldásához a problémák szemléltetésére, a lehetséges esetek összeszámolásának megkönnyítésére, általában a feladatokban szereplő számok megjelenítésére.

Az alábbiakban a számkártyák alkalmazására mutatok talán nem mindenki által ismert példát.

Rakjuk számkártyáinkat 1-től 100-ig növekvő sorrendben egy csomagba. Tegyük magunk elé az első csomagot, amely az 1-től a 20-ig tartalmazza a lapokat, majd az osztályban 3–4–5 fős csoportoknak osszuk ki a következő csomagokat: 21-től 36-ig, 37-től 50-ig, 51-től 72-ig, 73-tól 80-ig és végül 81-től 100-ig. Célszerű a táblán is rögzíteni ezt a leosztást.

1.	1–20
2.	21–36
3.	37–50
4.	51–62
5.	63–80
6.	81–100

Az első 20-as csomaggal szemléltetjük a tennivalókat!

Keverjük össze a kézhez kapott kártyacsomagot, vegyük szét két egyenlő részre, és a két félcsomag lapjait rakjuk le egymás alá két sorban magunk elé, úgy, hogy az egyik sorban növekvő, a másik sorban csökkenő sorrendben kövessék egymást a számok. Például egy keverés után a következő két sort kaptuk a 20 -asban:

18	16	15	11	10	7	5	4	2	1
3	6	8	9	12	13	14	17	19	20

Ezután páronként az egymás alatt levő számok közül a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbiket, és a kapott különbségeket adjuk össze.

Példánkban ezt kapjuk:

$$15 + 10 + 7 + 2 + 2 + 6 + 9 + 13 + 17 + 19 = 100$$

Ezt az eljárást többször is ismételjük meg, és gyűjtsük össze, hogy az egyes csoportok milyen eredményekre jutottak.

Biztosan meglepőnek találják a gyerekek azt, hogy bárhogy is keverik a kézhez kapott kártyacsomagot, azzal mindig ugyanazt az eredményt kapják. A következő táblázat mutatja az összegeket.

Az összegek

		Az összegek
1.	1–20	100
2.	21–36	64
3.	37–50	49
4.	51–62	36
5.	63–80	81
6.	81–100	100

Talán azt is hamar észreveszik, hogy a kapott összeg minden esetben négyzetszám, és éppen annak a számnak a négyzete, ahány számpárt képeztünk a csomagban. Érdemes még több különböző leosztással is kísérletezni, a tapasztalatok alapján megszülethet a következő sejtés.

Páros sok egymást követő pozitív egész számot osszunk szét tetszőlegesen két egyenlő csoportba. A két csoportból alkossunk egy növekedő és egy csökkenő számsorozatot, páronként az azonos sorszámú elemek közül a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbiket, az így kapott különbségeket adjuk össze. Sejtésünk szerint a kapott összeg a számpárok darabszámának a négyzete lesz.

A sejtésünk tulajdonképpen két meglepő állítást tartalmaz:

1. Akárhogy kevertük a kártya csomagot a különbségek összege állandó.
2. Ez az állandó éppen az egy sorban álló számok számának a négyzete.

A néhány eset kipróbálása természetesen még nem jelenti azt, hogy ez a szabályszerűség általánosan igaz. Szeretnénk állításunkat bizonyítani, szeretnénk magyarázatot találni a törvényszerűségre.

A bizonyításhoz nézzük meg újra részletesen a példánkat!

(A számok 1-től 20-ig.)

$$\begin{array}{cccccccccc}
18 & 16 & 15 & 11 & 10 & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 \\
3 & 6 & 8 & 9 & 12 & 13 & 14 & 17 & 19 & 20 \\
\hline
15\,+ & 10\,+ & 7\,+ & 2\,+ & 2\,+ & 6\,+ & 9\,+ & 13\,+ & 17\,+ & 19 = 100
\end{array}$$

Felmerülhet az az ötlet, hogy cseréljük meg a párokat úgy, hogy mindig a felső sorban legyen a nagyobbik szám, amelyből vonjuk ki az alatta levőt, a különbségeket ez nem változtatja meg. A példánkban ez a következőképpen látszik:

(A számok 1-től 20-ig.)

$$\begin{array}{cccccccccc}
18 & 16 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 17 & 19 & 20 \\
3 & 6 & 8 & 9 & 10 & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 \\
\hline
15\,+ & 10\,+ & 7\,+ & 2\,+ & 2\,+ & 6\,+ & 9\,+ & 13\,+ & 17\,+ & 19 = 100
\end{array}$$

Ezután általában hamar feltűnik, hogy a felső sorban találjuk az összes 10-nél nagyobb számot, az alsó sorban pedig – nem feltétlenül növekedő sorrendben – a számokat 1-től 10-ig.

Vajon szabad-e a sorokon belül cserélni a kártyákat?

Ennek eldöntésére írjuk ki részletesen miket is adtunk össze:

$$(18-3)+(16-6)+(15-8)+(11-9)+(12-10)+$$
$$+(13-7)+(14-5)+(17-4)+(19-2)+(20-1)$$

Észrevehetjük, hogy a zárójeleket elhagyhatjuk, és összegünkben a tagokat másképpen is átrendezhetjük. Például így:

$$20+19+18+17+16+15+14+13+12+11-(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10),$$

vagy így:

$$20-10+19-9+18-8+17-7+16-6+15-5+14-4+13-3+12-2+11-1$$

A kártyákkal:

(A számok 1-től 20-ig.)

$$\begin{array}{cccccccccc} 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \end{array}$$
$$19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 100$$

vagy:

$$\begin{array}{cccccccccc} 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$
$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 100$$

Tehát a kérdéses összeget megkaphatjuk úgy is, hogy a pozitív egészek körében 11-től 20-ig összeadjuk az egymást követő számokat, és ebből levonjuk a számok összegét 1-től 10-ig.

Ezt a műveletet sokféleképpen végezhetjük el, talán a legkevesebb számolással jár a következő módszer:

$$20 - 10 + 19 - 9 + 18 - 8 + 17 - 7 + 16 - 6 + 15 - 5 + 14 - 4 + 13 - 3 + 12 - 2 + 11 - 1$$

Mindegyik különbség éppen 10, tehát 10 darab 10-et kell összeadnunk, így az összeg valóban 100.

Hasonló átrendezésekkel a többi kártya-, illetve számcsomagból is megkaphatjuk sorra a korábban nyert négyzetszámokat:

1.	1–20	100
2.	21–36	64
3.	37–50	49
4.	51–62	36
5.	63–80	81
6.	81–100	100

Részletezve az egyes csoportok számításait:

2. $36-28+35-27+34-26+33-25+32-24+31-23+30-22+29-21=8\cdot 8=64$
3. $50-43+49-42+48-41+47-40+46-39+45-38+44-37=7\cdot 7=49$
4. $62-56+61-55+60-54+59-53+58-52+57-51=6\cdot 6=36$
5. $80-71+79-70+78-69+77-68+76-67+75-66+74-65+73-64+72-63=9\cdot 9=81$
6. $100-90+99-89+98-88+97-87+96-86+95-85+94-84+93-83+92-82+$ $+91-81=10\cdot 10=100$

A 6. esetben észrevehetjük, hogy eredményünk megegyezik az elsőével.

Könnyen rájöhetünk ennek az okára is. A 6. összeadásban minden különbség mindkét tagjából vonjunk ki 80-at, így az összeg értéke természetesen nem változik és éppen az 1. esetben szereplő számokat kapjuk. Tehát a 20 egymást követő pozitív szám esetében mindegy, hogy a kezdőszám 1 vagy 80-nal – esetleg mással – több, az eljárásban szereplő összeg mindig annyi, amennyit akkor kapunk, ha 1-gyel kezdjük a számsorozatot. Hasonló meggondolással beláthatjuk, hogy a 2. esetben 1-től 16-ig, a 3. esetben 1-től 14-ig, a 4-ben 1-től 12-ig, az 5-ben 1-től 18-ig is választhattuk volna a kártyáinkat, ugyanarra az eredményre jutottunk volna. Úgy is képzelhetjük ezt el, hogy a választott számsorozatot a számegyenesen szabadon eltolhatjuk, természetesen úgy, hogy a sorozat tagjai valamennyien pozitív egészek legyenek. A bizonyításban ezért elegendő a számsorozatunkat az 1-gyel kezdeni, és valamelyik páros számmal befejezni. A feladat, tehát általános esetben a következőképpen fogalmazható: Tekintsük az 1, 2, 3, …, $2n$ egymást követő pozitív egész számok sorozatát. Véletlenszerűen alkossunk a $2n$ darab számból két n tagú sorozatot, az egyiket rendezzük növekvő, a másikat csökkenő sorrendbe, az azonos sorszámú tagokat írjuk egymás alá:

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n \\ b_1, & b_2, & b_3, & \dots, & b_n \end{matrix}$$

Adjuk össze az azonos sorszámú számpárok különbségének abszolút értékét 1-től n-ig, és bizonyítsuk, be hogy ez az összeg nem függ attól, hogyan választottuk ki a két n-tagú sorozatot, az összeg mindig n^2.

Azaz $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=n^2$.

Ahol mindegyik a_i és b_j az 1, 2, …, n, $n+1$, …, $2n$ számok valamelyike.

A példák alapján a sejtésünk az, hogy ez az összeg mindig átrendezhető úgy, hogy

$$(*)\quad \begin{aligned} &2n+\big(2n-1\big)+\ldots+\big(n+1\big)-\big(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1\big)= \\ &=\big(2n-n\big)+\big(2n-1-(n-1)\big)+\big(2n-2-(n-2)\big)+\ldots+\big(n+1-1\big)=n\cdot n=n^2 \end{aligned}$$

Ez azonban nem magától értetődő, hiszen mindegyik félcsomagba véletlenszerűen kerültek a lapok. Vajon nem fordulhat-e elő olyan eset, hogy pl. a 20-as csomagban egymás fölé kerül a 6 és a 8, vagy a 11 és a 17?

A sejtésünk az, hogy bármelyik számpárban a kisebb szám nem lehet n-nél nagyobb, illetve a nagyobb szám nem lehet $(n+1)$-nél kisebb, ekkor az n darab összeadandó különbség valóban átrendezhető a $(*)$ formában.

Nézzük át ebből a szempontból újra a példánkat:

18	16	15	11	10	7	5	4	2	1
3	6	8	9	12	13	14	17	19	20

A 10-nél nagyobb számok mind kisebbítendők lesznek, a 11-nél kisebbek párja pedig mindig nagyobb a számnál akár alul, akár felül van.

Gondoljuk meg, hogy ez nem is lehet másként!

Vizsgáljuk az i-edik helyen álló számpárt.

$$\begin{matrix} * & * & * & a_i & * & * & * & * & * & * & \quad n \text{ darab szám} \\ * & * & * & b_i & * & * & * & * & * & * & \quad n \text{ darab szám} \end{matrix}$$

Tegyük fel, hogy $a_i > b_i$. A felső számsorozat szigorúan monoton csökkenő, tehát az a_i-t követő $n-i$ darab szám biztosan kisebb az a_i-nél, a második sorban a számok szigorúan monoton növők, ezért a b_i-vel együtt az első i darab szám kisebb mint az a_i. Az $(n-i)+i=n$, tehát, ha egy szám a számpár nagyobbik tagja, akkor annál legalább n darab kisebb van. Vagyis a legkisebb olyan szám, amely egy számpár nagyobbik tagja csakis az $n+1$ lehet. Ehhez hasonlóan beláthatjuk, hogy ha egy számpár kisebbik elemét választjuk ki (akármelyik sorban lehet!), akkor annál legalább n darab nagyobb szám van, tehát a legnagyobb olyan szám, amelyik valamelyik számpár kisebbik tagja csak az n lehet. Mivel mindkét csoportban pontosan n darab szám van ezért a különbségek kisebbítendői a számok $(n+1)$-től $2n$-ig és a kivonandók pedig a számok 1-től n-ig. Tehát a különbségek mindig átrendezhetők a $(*)$ szerint, azaz a sejtésünket bebizonyítottuk.

Megjegyzések:

1. A feladat kapcsán szóba jöhet a első n pozitív egész szám összegének meghatározása, több más probléma mellett ez a feladat is lehet ennek a témának az elindítója.

2. Természetesen az is lehetséges, hogy ezt a feladatot akkor adjuk föl, amikor már tudják a gyerekek az első n pozitív egész szám összegének a képletét, és ezt fel akarják használni a megoldásban. A következő számítással is eljuthatunk az eredményhez:

$$2n+(2n-1)+\ldots+(n+1)-\big(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1\big)=$$
$$2n+(2n-1)+\ldots+(n+1)+n+(n-1)+\ldots+1-2\cdot\big(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1\big)=$$
$$=\frac{2n(2n+1)}{2}-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n\big(2n+1-(n+1)\big)=n^2$$

Ezt a számítást is ki kell egészíteni a fenti bizonyítással.

3. Megfigyeltem, hogy mindig van valaki, aki úgy osztja két egyenlő részre a $2n$ darab számot (véletlenül vagy szándékosan), hogy az egyik csoport a számokat 1-től n-ig, a másik csoport az $(n+1)$-től $2n$-ig tartalmazza, ekkor a két monoton sorozat a következő:

	$2n$	$(2n-1)$	$(2n-2)$	$\ldots$	$\big(2n-(n-2)\big)$	$\big(2n-(n-1)\big)$	$= n+1$
	1	2	3	$\ldots$	$n-1$	n	
A különbségek:	$2n-1$	$2n-3$	$2n-5$	$\ldots$	3	1	

Ez éppen az első n páratlan szám. Ha tudják már, hogy ezek összege n^2-tel egyenlő, akkor már csak azt kell bizonyítani, hogy a különbségek összege állandó.

4. Lehetséges a fordított eset is. Belátjuk, hogy a különbségek összege állandó, megállapítjuk, hogy ez az összeg mindig n^2. Ekkor „melléktermékként” azt is megkapjuk, hogy az első n páratlan szám összege n^2, hiszen a 3-ban leírt szabályos kiválasztással a számpárok különbségei éppen a páratlan számok 1-től $(2n-1)$-ig.

Régi feladat – új gondolatok

Differenciált feladatsorok tervezése konkrét feladathoz kapcsolva

Főiskolai hallgatókkal foglalkoztunk a differenciálással mint az eredményes matematikatanítás egyik fontos módszertani alapelvével.

A hallgatók feladatul kapták, hogy készítsenek 3 különböző szintre tervezett számelméleti feladatsort. A feladatsornak kapcsolódnia kell az ún. „szultános” feladathoz – lásd Szendrei Julianna–Varga Tamás: Tantervi útmutató 7. oszt. 35. oldal – könyvünkben a 23. oldal.

Lehet például a szultános feladat előkészítését megtervezni, lehet abból kiindulni, vagy akárhogyan felhasználni.

Egy ilyen feladatsort mutatunk be, amelyet egy IV. éves matematika–számítástechnika szakos hallgató készített 1998-ban.*

Alapfeladat: A szultán felébred egyik reggel, és mivel nagyon jó napja van, amnesztiát hirdet. De azért nem akarja az összes foglyot elengedni, mert akkor üres lenne a börtön, ezért a következő furfangos megoldást találja ki: Az őr az első nap minden cellát kinyit, a másodikon minden másodikat, a harmadikon minden harmadikat, és így tovább. De ha a zár nyitva van, ő bezárja, ha csukva van, akkor kinyitja. A börtönben 100 cella van, melyiknek az ajtaja lesz nyitva a századik nap után?

A feladat megoldása alapvetően két részből áll:

a) Le kell fordítani a matematika nyelvére,

b) A kapott problémát meg kell oldani.

Az alapfeladatnál ez a két rész:

a) Azoknak a celláknak az ajtaja lesz nyitva a századik nap után, amelyeknek páratlan sok osztójuk van, mert így páratlanszor fordította el az őr a zárat és végül nyitva maradt.

b) Ezek a számok a négyzetszámok. Tehát az 1., 4., 9., 16., 25., 36., 49., 64., 81., 100. cellák lakói szabadulnak ki.

1. csoport (az *a)* rész is gondot okozhat)

1. feladat: Az első őr minden cellán végigmegy, a második a második cellától kezdve mindegyiken, a harmadik a harmadik cellától kezdve mindegyiken. A 100 cellából 100 nap után kik szabadulnak ki?

Megoldás:

a) A cellákban annyiszor fordítják el a kulcsot, ahányadik cella. Ahhoz, hogy kiszabaduljon a rab, az kell, hogy páratlanszor fordítsák el a zárat. Tehát a páratlan cellákból szabadulnak ki a rabok.

* Somogyi Tímea

b) Ezzel meg is oldottuk a feladatot. Az 1., 3., 5., 7., … cellák lakói mehetnek haza.

2. feladat: A cellákon annyi zár van, ahányadik cella, tehát a 100. cellán 100 zár van. Az első őr kinyitja az első napon a legelső zárat az összes cellán. A második őr a második napon minden második cellán kinyitja a második zárat, és így tovább. A századik nap után kik szabadulnak ki?

Megoldás:

a) Segíti a megoldást minden esetben, ha rajzot készítünk. Egy cella akkor lesz nyitva, ha rajta az összes zár nyitva lesz. A második zár melyik cellákon lesz nyitva? Amelyek oszthatóak 2-vel. A harmadik zár azokon lesz nyitva, amelyek oszthatóak 3-mal. Tehát akkor lesz egy cellán az összes zár nyitva, ha az összes „előző” szám osztója.

b) Kettő ilyen szám van: az 1 és a 2, vagyis az első két cella marad nyitva a századik nap után.

3. feladat: Ugyanaz, mint az alapfeladat, csak 10 cella van.

Megoldás:

A 10 cellát le is tudjuk rajzolni, így a megoldást már csak indokolni kell. Ezt igazából nem tekintem önálló feladatnak, inkább csak segítség, hogyha nem megy az alapfeladat, próbáljanak néhány cellát lerajzolni – mondjuk tízet – és ezen gondolkozzanak.

4. feladat: az alapfeladat.

2. csoport (jók)

1. feladat: az alapfeladat.

2. feladat: Az őrnek az lenne a feladata, mint az előző példában, csakhogy ez az őr nagyon nem szereti a páros számokat, így csak páratlan napokon hajlandó előjönni. Így első nap az összes cellában elfordítja a zárat, a harmadik napon minden harmadik cellában, és így tovább. 100 cella van, minden cellán egy zár. A századik nap után melyik cella lesz nyitva?

Megoldás:

a) Mivel az első nap minden cellát kinyit és utána már csak azokat a cellákat nyitja vagy zárja, amelyeknek van még páratlan osztója, azok a cellák biztosan nyitva maradnak, amelyeknek az 1-en kívül nincs más páratlan osztójuk.

Másrészt a többi maradék cellák közül azok lesznek nyitva, amelyeknek páratlan sok osztója van, ugyanúgy, ahogy az alapfeladatban is.

b) Az olyan számok, amelyeknek nincsen az 1-en kívül páratlan osztójuk, a kettőhatványok: 1, 2, 4, 8, … A másik féle megoldás a négyzetszámok. Tehát egy cella ajtaja akkor lesz nyitva, ha a sorszáma kettőhatvány vagy négyzetszám.

3. feladat: Ez az őr az előző őrnek a testvére, csak pont ellentétei egymásnak: a bátyja a páros napokat nem szerette, ő viszont ki nem állhatja a páratlanokat. Ezért csak páros napokon teljesíti a kötelességét. Második nap minden második cellában fordítja el a zárat, negyedik nap minden negyedik cellában, és így tovább. Kik fognak kiszabadulni 100 nap múlva?

Megoldás:

a) A páratlan sorszámú cellákat az őr nem is érinti, mivel páratlan számnak nincsen páros osztója. Azok fognak kiszabadulni, amelyek olyan cellában vannak, aminek páratlan sok páros osztója van.

b) Ilyenek például a 2, 8, 18, 32, … Kis odafigyeléssel le lehet gyártani őket, itt most nem írom le az összeset.

4. feladat: Most minden cellán 2 db zár van, és két őr van, az egyiknek az egyik zárhoz, a másiknak a másik zárhoz van kulcsa. Csakhogy ezek az őrök nagyon lusták, így egyik nap csak az egyikük megy ki, a másik nap a másikuk. Tehát az első nap az első őr kinyitja az egyik zárat minden ajtón, második nap a másik őr elfordítja a második zárat minden második ajtón, és így tovább. A századik nap végén melyik cellák lesznek nyitva?

Megoldás:

a) Ahhoz, hogy egy cella nyitva legyen, az kell, hogy az ajtaján lévő mindkét zár nyitva legyen. Az első őr pedig pontosan azt csinálja, amit az az őr, aki nem szerette a páros számokat, így az első zár pontosan akkor lesz nyitva, amikor a páros számokat nem szerető őr cellái; a másik őr pedig megfelel a páratlan számokat nem szerető őrnek. Így ennek a két megoldáshalmaznak a metszetét kell venni, hiszen mindkét zárnak nyitva kell lennie.

b) Azok a cellák lesznek nyitva, amelyeknek sorszáma (kettőhatvány VAGY négyzetszám) ÉS (páratlan sok páros osztója van). Ha már megvannak az előző feladatok megoldásai, mint számhalmazok, akkor csak a metszetüket kell vennünk.

3. csoport (szakkör)

Ezekhez a feladatokhoz kell plusz ismeret is: az, hogy hogyan lehet meghatározni egy pozitív egész szám osztóinak számát. (Ha $x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, ahol p_i prímszám, akkor x osztóinak száma $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)$, p_i-k különbözőek.)

1. feladat: az alapfeladat bevezetésképpen.

2. feladat: A cellák ajtaján nem szokványos zárak vannak, hanem háromállású zárak. Állásai: zárva, zárva, nyitva. Most az összes zár az első zárva állásban van. Az őr az első nap minden záron fordít egyet, a második nap minden második cellán lévő záron fordít egyet, és így tovább. Kik szabadulnak ki 100 nap után a 100 cellából?

Megoldás:

a) Azok a cellák maradnak nyitva, amelyek sorszáma osztóinak száma 3-mal osztva 2 maradékot ad, így például ha 2, 5, 8, … osztója van.

a) Azok a számok, amelyeknek 2 osztójuk van, a prímszámok. Ahhoz, hogy megállapítsuk, mely számoknak van 5 db osztója, szükséges az osztók számára vonatkozó képlet. Az 5 szorzat alakba csak $1 \cdot 5$-ként írható, így az jön ki, hogy a szám p^4 alakban írható, ahol p prím. Ilyen szám például a 16 (2^4). Ezeket a számokat is elő lehet állítani 100-ig.

Olyan szám, amelynek 8 db osztója van lehet p^7 alakú – ilyen nincs 100 alatt –, és lehet $p_1^1 \cdot p_2^3$ alakú, ilyen például a 24 ($3^1 \cdot 2^3$). Ezzel a módszerrel meg lehet találni azokat a cellákat, amelyek nyitva maradnak a századik nap után.

3. feladat: Az ajtókon most már négyállású zárak vannak, amelyeknek állásai: zárva, zárva, zárva, nyitva; mindegyik zár az első zárva állásban van. Az őr ugyanúgy dolgozik, mint az előző feladatban.

Megoldás:

a) Most azok lesznek a szerencsések, akik cellájának sorszámának annyi darab osztója van, hogy 4-gyel osztva 3 maradékot ad. Tehát az osztók száma 3, 7, 11, 15, … lehet.

b) Az előző feladathoz teljesen hasonlóan tudjuk meghatározni ezeket a cellákat. Most könnyebb dolgunk van, mert a 3, 7, 11 számok prímek, csak egyféleképp állíthatók elő szorzat alakban. Így p^2, p^6, p^{10} alakú megoldások lehetnek. A p^{10}-ről látszik, hogy a 100-ba nem fér bele – a legkisebb ilyen szám a $2^{10} = 1024$. Olyan szám sincs 100 alatt, aminek 15 osztója van, mert az vagy p^{14} vagy $p_1^2 \cdot p_2^4$ alakú.

4. feladat: Minden cellán 2 db zár van, mindegyik a „normális”, kétállású zár. Most mindegyik cella zárva van. Az őr az első nap minden cellán elfordítja az egyik zárat, a második napon minden második cellán megy végig, de úgy fordítja el a zárakat, hogy pont a másikon fordít egyet, mint legutóbb. Ha tehát többször megy egy cellához, akkor először az egyik, utána a másik, aztán megint az egyik, aztán megint a másik zárat fordítja, és így tovább. A századik nap után melyik cellák lesznek nyitva?

Megoldás:

a) Mindkét zárnak nyitva kell lennie. Ez akkor teljesül, ha a cella sorszámának annyi osztója van, hogy 4-gyel osztva 2 maradékot ad. Hiszen a két zár együttes állásai: nyitva–zárva, nyitva–nyitva, zárva–nyitva, zárva–zárva, és ez megint ismétlődik. Tehát egy cella nyitva lesz, ha 2, 6, 10, 14, … osztója van.

b) Ezeket a számokat az előbbiekhez hasonlóan határozhatjuk meg. 2 db osztója van a prímszámoknak, 6 db osztója van a p^5, illetve a $p_1^1 \cdot p_2^2$ alakú számoknak, és így tovább.