Formabontás a „két kultúra” ellen

Uram: itt az idő. Nagy volt a nyár.
A napórákra add, hogy árnyad hulljon,
és hadd zúduljon szél a rétre már.

Rendeld, hogy teljék a gyümölcs, ha késett;
még két nap érje délszakibb tüzed,
késztessed teljesedni és űzzed
nehéz borba a végső édességet.

Ki most tanyátlan, nem lesz annak háza.
Ki most magányos, hosszan az marad,
virraszt, olvas, ró hosszú sorokat
és kergetőző lomb között cikázva
nyugtalan járja a fasorokat.

A cím ígérte formabontás: verssel kezdek egy matematikai cikket. Rilke „Őszi nap”-jával, saját fordításomban. Szerkesztettem egyszer egy oldalt az Egyetemi Lapokban, amelyen a (matematikai) Analízis I. Tanszék szólalhatott meg; az az oldal Ady Endre fényképével kezdődött (igaz, hogy nagy matematikusunknak, Fejér Lipótnak dedikált fényképével). Ezek nem véletlen találkozások. A fénykép mellé egy idézet került az én „Játék a végtelennel” könyvem előszavából:

„A könyv a nem-matematikus érdeklődésű intellektuális embernek szól: az irodalom, a művészet, a humánum emberének. Sok szépet kaptam arról az oldalról, most viszonzásul átnyújtom a matematikát. Hadd lássák meg: nem vagyunk olyan messze egymástól.”

Az idézetet pedig ez követte: Sajnos, ennek megmutatására egyetlen újságoldal nagyon kevés; ennyivel mégis je-

[1] Megjelent a Magyar Tudomány 1969. 4. számában.

lezni akartuk állásfoglalásunkat a sokat emlegetett „két kultúra” kérdésében.

A „Játék a végtelennel” a maga egészében egyetlen folyamatos bizonyítása annak, hogy a kultúra egy. Mint bevezetésében elmondtam, Benedek Marcellnek írt leveleimből jött létre, aki saját területén, írás közben fájlalta a matematikai ismeretek hiányát; érezve, hogy a matematikai anyagból bőven meríthetne képeket, hasonlatokat.

Itt most a fordított irányú kapcsolatról van szó. Rilke „Őszi nap”-ját azért tudtam (Benedek Marcell kedves szavai szerint „meglepő hűséggel és rilkei gazdagsággal”) lefordítani, mert valahogyan mély hangulati közöm van az ősz képeihez. És talán ez váltott ki belőlem olyan szenvedélyes érdeklődést egy újabban megismert matematikai problémakör iránt is, hogy se éjjelem, se nappalom nem volt, amíg fel nem derítettem.

Már maga a tudományterület is, amelybe ez a problémakör tartozik, a „két kultúra” közös területe: a matematikai nyelvészet.

A gépi fordítás lehetőségeinek kutatásában vált kívánatossá olyan pontos definíciót találni a nyelvtanilag helyes mondat fogalma számára, amilyen a matematika egyes ágaiban a jól képzett formula definíciója. Ezzel a célkitűzéssel különböző matematikai grammatikák jöttek létre. Egyiküket, az ún. „CF-grammatikát”[1] (amelynek bizonyos általánosításai a számológépek céljaira készült mesterséges nyelvek grammatikájaként jól beváltak) a következő adatok határozzák meg: egy szótár (jelöljük S-sel), ennek egy részeként a nyelvtani segédfogalmak szótára (jelöljük F-fel), ebben a kitüntetett szerepű ⟨mondat⟩ fogalom (a segédfogalmakat ilyen csúcsos zárójelek közé írjuk megkülönböztetésül; a ⟨mondat⟩ fogalmat röviden M-mel is jelölhetjük), végre a nyelvtani szabályok tára (jelöljük N-nel). Rövid jelöléseinkkel tehát egy négytagú

$$S,\ F,\ M,\ N$$

sorozat határoz meg egy CF-grammatikát. A nyelvtani szabályok mindegyike arról szól, hogy hogyan jöhet létre egy se-

[1] „CF” a „context-free” („környezettől független”) grammatika rövidítése. Van ugyanis „context-sensitive” („környezetre érzékeny”) grammatika is. Eltérésük magyarázatára itt nem térek ki.

gédfogalom szótárunk szavaiból.
A szabályok egyike például

$$\langle\text{mondat}\rangle : \langle\text{alany}\rangle\ \langle\text{állítmány}\rangle$$

Ezzel röviden azt akarjuk kifejezni, hogy egy mondat létrejöhet egy alany és egy állítmány egymás után illesztésével is. Vagy

$$\langle\text{mondat}\rangle : \langle\text{mondat}\rangle\ \text{és}\ \langle\text{mondat}\rangle$$

annak tömör kifejezése, hogy ha két mondatot az „és" kötőszóval kapcsolunk össze, ismét mondat jön létre. Az itt szereplő „és" már nem taglalható tovább, szótárunknak nem F-be tartozó, végleges, „terminális" fogalma. A szótár nem F-be tartozó részét „terminális szótár"-nak nevezik (rövid jele T). A szabályok állításait mindig kettősponttal jelezzük; ennek „bal oldala" az a segédfogalom, amelyről a szabály szól; „jobb oldala" pedig szótárunk szavainak (akár F-beli, akár T-beli szavainak) egy egymásutánja, „lánca" (lehet egyszavas is). Egy szabály bal oldalaként fellépő segédfogalom egy „kifejtéséhez" jutunk, ha a szabály jobb oldalát írjuk a helyébe. Az ebben szereplő segédfogalmakat egyenként tovább fejtve ki, eljuthatunk a kiindulásul vett segédfogalom, pl. a (mondat) fogalom egy „terminális kifejtéséhez", amely már csupa terminális fogalomból áll. Nagyon egyszerű példaként, ha az N-beli szabályok közt szerepelnek ezek is:

$$\langle\text{alany}\rangle : \text{a lomb}$$

és

$$\langle\text{állítmány}\rangle : \text{színes}$$

annak tömör kifejezéseként, hogy a T terminális szótár „a" és „lomb" szavainak egymás után illesztésével is létrejöhet egy mondat alanya, és a terminális szótár „színes" szava egymagában is lehet egy mondat állítmánya, akkor alkalmazhatjuk a következő „levezetést" (egy-egy kifejtő mozzanat eredményét nyíllal jelölve):

$$\langle\text{mondat}\rangle \to \langle\text{alany}\rangle\ \langle\text{állítmány}\rangle \to \text{a lomb}\ \langle\text{állítmány}\rangle \to \text{a lomb színes}$$

Tehát a $\langle$mondat$\rangle$fogalom egy terminális kifejtése egy mondat: „a lomb színes". A CF-grammatikánk „generálta" nyelv a ⟨mondat⟩ segédfogalom valamennyi terminális kifejtéséből áll.

Matematika ebből úgy lesz, hogy az S, F, M, N betűket többé nem rövidítéseknek tekintjük, hanem teljesen eltekintünk a jelentésüktől; S-et bármilyen elemek (véges) halmazának, F-et S egy tetszés szerinti részének, M-et F egy tetszés szerinti elemének tekintjük, és ennek megfelelően definiáljuk formálisan az N-beli szabályokat és az ezeken alapuló levezetéseket. Az így nyert absztrakt nyelvek már pontos matematikai vizsgálat tárgyai lehetnek.

Az idevágó alapprobléma természetesen ez: milyen nyelvekhez lehet olyan CF-grammatikát (azaz megfelelő S, F, M, N sorozatot) szerkeszteni, amelynek az előbbiekben leírt módon létrejövő mondatai megegyeznek a szóban forgó nyelv nyelvtanilag helyes mondataival?

A matematikai formulanyelvekhez lehet.

A természetes nyelvek vizsgálata nagyon bonyolult. Előkészítésül egyszerűbb mesterséges nyelveken folytatnak vizsgálatokat.

Mesterséges nyelvet pedig lehet úgy konstruálni, hogy ne legyen CF-grammatika, amely a mondatait generálná (és ez pontos matematikai módszerekkel be is bizonyítható). Ilyen az a kétszavas nyelv is, amelyet én első látásra így interpretáltam: „Anna hódolóinak nyelve”, melynek mindössze két szava van: „édes” és „Anna” (nem kétséges, hogy Kosztolányi mélyen bennem élő gyönyörű szép névalkotása szólalt meg itt). A nyelv pontos leírása ebben az interpretációban: Anna hódolói csak ilyen áradozásra képesek:

Anna Anna

vagy

édes Anna édes Anna édes

vagy

édes édes Anna édes édes Anna édes édes

vagy

édes édes édes Anna édes édes édes Anna édes édes édes

és így tovább, a végtelenségig.

Nos, nincs az a CF-grammatika, amely ezt a nyelvet produkálná.

Egy bonyolult természetes nyelv mondatainak CF-grammatikával generálhatóságára nincs sok remény. Újabb elgondolások szerint elég volna a nyelv legegyszerűbb „magmondatait” (a nyelv magvát alkotó mondatokat) állítani elő egy CF-grammatika mondataiként; a többi mondatot azután a magmondatokból kiindulva, már képezett mondatok bizonyos összeötvözéseivel lehetne létrehozni. Ha például a

„Lázban égek mindig”

és

„A láz harminchat fokos”

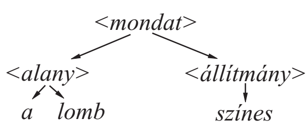
mondatok már létrejöttek, ezeket a

„Harminchat fokos lázban égek mindig”

mondattá lehetne összeötvözni. Minthogy az ilyen összeötvözés nem egyszerű egymás után illesztése a két mondatnak, helyes végrehajtásához be kell hatolni a mondatok mélyére, fel kell használni a mondatok „mélystruktúráját”.

Egy mondat „mélystruktúrája” a mondat felépítésének történetét ábrázolja grafikusan, ún. „gráf” segítségével.

A mondat felépítését ábrázolta már az is, amit „levezetésnek” neveztem – itt arra célzok, amivel a ⟨mondat⟩ segédfogalomból egy mondatot vezettünk le (ezt: „a lomb színes”). Jobb taglalást adna, ha a levezetés egyes stációihoz nem csak egy nyíl vezetne az előző stációból, hanem minden szavukhoz egy-egy nyíl, a soron levő segédfogalomból. De ha az egyes stációkat ekkor is sorra egymás után tüntetnénk fel, ezek a nyilak keresztül-kasul metszenék egymást. Célszerű nem egy vonalban előre, hanem lefelé is haladni, és így jön létre mondatunk „mélystruktúrája”:



Könnyebb lesz az ábrázolás, ha a segédfogalmak helyett csak rövidítéseiket tüntetjük fel: a ⟨mondat⟩ helyett a (már alkalmazott) M-et, az ⟨alany⟩ helyett A-t, az ⟨állítmány⟩ helyett

Á-t. Ezekkel a rövidítésekkel mondatunk mélystruktúrája mellett mindjárt egy bonyolultabbét is felvázolom. A közös pontokból induló nyilakat pedig megszámozom, hogy sorrendjüket is feltüntessem (ha csak egy nyíl indul egy pontból, azt persze 1-gyel számozva).

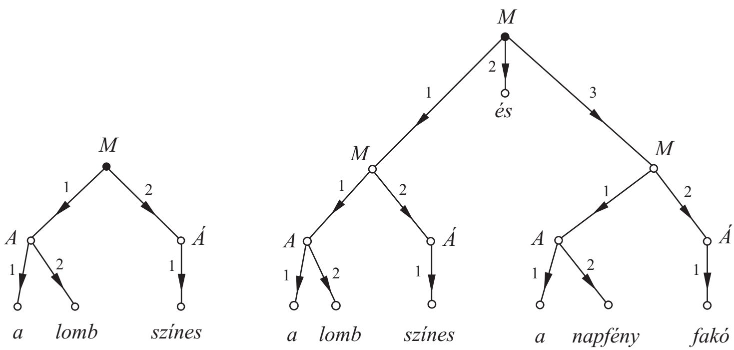
A bonyolultabb mondathoz az előzőkben felírtakon kívül, amelyek közt ez is szerepelt:

$$\langle\text{mondat}\rangle : \langle\text{mondat}\rangle \text{ és } \langle\text{mondat}\rangle$$

még két szabályra van szükség:

$$\langle\text{alany}\rangle : \text{a napfény}$$
$$\langle\text{állítmány}\rangle : \text{fakó}$$

Mindezek alapján a két mondat mélystruktúrája:



Így, egymás mellett, a két ábra egy kétmondatos szöveg mélystruktúráját adja. Olyan kicsire most ne nézzünk, hogy mondataink kisbetűvel kezdődnek, és az írásjelek is hiányoznak; ha verssorokként szerepelnének:

a lomb színes
a lomb színes és a napfény fakó

– ez nem is lenne szokatlan. (A mondatokat – balról jobbra haladva, a felül megbúvó „és"-t sem hagyva ki – a végpontokról olvastam le; ott jelentkeznek a terminális fogalmak.)

Hát itt vannak – szövegek vagy összeötvözendő mondatsorozatok mélystruktúráiként – azok a gráfok, amelyek anynyira megragadták a képzeletemet.

Itt elég lesz a modern matematika absztrakt gráf fogalma helyett az „egyszerű", véges gráf szemléletes fogalmát ismertetnem. Eszerint egy gráf bizonyos számú pontból (a gráf „csomópontjaiból") és egyes közéjük tartozó pontpárokat összekötő vonaldarabokból (a gráf „éleiből") áll. Nem számít, hogy az élek milyen vonalak, egyenesek-e, görbék-e, akár gumiból is lehetnének, tetszés szerint nyújthatóan, a sík fölé is kihúzhatóan – csak az számít, hogy két csomópontot összeköt-e él, vagy nem köt össze. Ha az éleken azt is feltüntetik (mint a mi ábránk nyilai), hogy melyik pontból melyik pontba irányulnak, akkor „irányított gráf"-ról van szó. A gráf összefüggő, vagy több összefüggő „komponensből" áll (a mi ábránk kettőből). Ha egy összefüggő gráfban nincs zárt vonal (kör, sokszög), hanem olyan ágas-bogas, mint a mi ábránk bármelyik komponense, akkor „fának" nevezik. A mi fáink minden csomópontjába pontosan egy él fut be, egy kivétellel: a befeketített csomópontba (a többit üres karikával jelöltem) nem fut be él. A kivételes pontot „gyökérpontnak" nevezik, és az olyan fát, amelynek van kivételes gyökérpontja, „állófának" (arra célozva, hogy nem kivágott fa – bár a mi ábránk fáit meg kellene fordítani, hogy „állófának" tűnjenek).

A mi gráfunk minden csomópontjához hozzárendeltük szótárunk egy-egy szavát, illetőleg, segédfogalmak esetén, egy-egy betűt. Azt nem mondhatnám, hogy a csomópontokat ezekkel „jelöltem meg", mert különböző pontokat nem jelölhetünk ugyanúgy, és ábránk második komponensében M-et 3 pontban is, A-t és Á-t 2-2 pontban is látunk. De az csak megállapodás dolga, hogy egy fogalmat hogyan jelölünk; betűk helyett színeket is használhatnánk megjelölésükre; a ⟨mondat⟩ fogalmat például M helyett mélykék színnel is jelölhetnénk. Ezért az ilyen hozzárendelést úgy is szokták kifejezni, hogy gráfunk csomópontjait szótárunk szavaival „színeztük".

Az is elképzelhető, hogy színskálát készítünk, és ebben számokkal jelöljük meg az egyes színárnyalatokat. Ilyen értelemben mondhatjuk, hogy gráfunk egy-egy élét az 1, 2, 3 színárnyalatok egyikével színeztük.

Egy szöveg persze több mondatból is állhat, ezek – és a mélystruktúráikat ábrázoló állófák – meghatározott sorrendben követik egymást. Ezért a szöveg mélystruktúráját „fasor"-nak neveztem el, de hozzátéve, hogy a pontos neve ez volna:

„Őszi fasor tükörképe a folyóban."

„Őszi", hiszen csupa szín: pontjai is, élei is színezettek. „Tükörkép", hiszen állófáinak gyökérpontját mindig legfelső pontként ábrázoljuk.[2] És „folyóban" – ez minden gráfra jellemző: ugyanazt ábrázolja, bárhogyan is zilálja ágainak képét a folyó sodra.

A problémakörrel ismerkedés első örömét ez a kép adta. De nem kisebb öröm a matematikai feladat megoldása sem: az ősz, a fasor, a tükörkép lehántása, hogy csak az egyértelmű, tiszta forma maradjon meg, ami pontos matematikai vizsgálódás tárgya lehet.

Ehhez az ad vezérfonalat, hogy egy állófánk bármely csomópontjába pontosan egy út vezet a gyökérpontból; hiszen két ilyen út együtt zárt vonalat alkotna, és fában nem lehet zárt vonal. Például ábránk „napfény"-nyel színezett pontjába azokon az éleken haladva jutunk el, amelyeket sorra a 3, 1, 2 jelű színárnyalatok színeznek. Ezt röviden úgy fejezhetjük ki, hogy a vizsgált ponthoz a

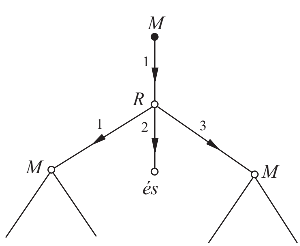
$$3,\ 1,\ 2$$

„színsorozat" tartozik.

[2] Ha valaki hiányolja ábránkból a fatörzseket, vegye fel például a következő szabályokat:

⟨mondat⟩: mellérendelés
⟨mellérendelés⟩ : ⟨mondat⟩ és ⟨mondat⟩

akkor – R-rel jelölve a mellérendelés fogalmat – így kezdődne ábránk második komponenese:



ezen pedig a gyökérpontból eredő fatörzs tükörképe is látható.

Így fasorunk minden csomópontját 3 adat jellemzi: (1) egy sorszám, annak jelzésére, hogy fasorunk hányadik állófájának csomópontjáról van szó; (2) egy véges számsorozat, mint odavezető színsorozat; (3) szótárunk egy szava, mint a csomópont színe. Azt mondjuk, hogy egy fasor minden csomópontját egy ilyen tagok alkotta 3 tagú sorozat, röviden „hármas" jellemzi.

Egy csomópontot jellemző hármas persze nem lehet akármilyen. Ha például egy fasor valamelyik csomópontját jellemző hármas első tagja 3, akkor feltétlenül előfordul a fasor csomópontjait jellemző hármasok között olyan is, amelynek 1, olyan is, amelynek 2 az első tagja; hiszen a fasor harmadik állófájáról csak akkor beszélhetünk, ha van első és második állófája is. Pontosan meg lehet határozni mindazokat a kapcsolatokat, amelyek szükségképpen fennállnak az egyazon fasor pontjait jellemző hármasok között. Ezek után a tiszta matematikai definíció: „Szótárként" felvehetünk egy tetszés szerinti véges S halmazt, „hármasnak" nevezünk egy tetszés szerinti 3 tagú sorozatot, amelynek első tagja természetes szám, második tagja egy természetes számokból álló véges sorozat, harmadik tagja S egy eleme; végre „fasor"-nak nevezzük hármasoknak egy véges halmazát, amelynek elemei közt az előbbiekben jelezett kapcsolatok állnak fenn.

Erre az anyagra már alkalmazhatók a matematika módszerei.

Hasonló vizsgálatokat már régebben is végeztem ún. „formula-gráfokkal". Ezek algebrai, logikai vagy absztrakt formulák szerkezetét szemléltető állófák, és többek közt arra is felhasználhatók, hogy a formulák különféle, zárójelek nélkül is egyértelmű alakjai olvashatók le róluk. A zárójelek megtakarítása nem jelentéktelen előny a számológépek gyakorlatában. Gráfot persze nem lehet bevinni a számológépbe; ezért javasoltam, hogy egy ilyen állófát 2 tagú sorozatok, „kettesek" halmazaként adjunk meg, az előbbiekhez hasonló módon (itt nem fasor, csak egyetlen állófa szerepel, ezért érhetjük be kettesekkel hármasok helyett). A ketteseket (dominókövekként) sokféle sorrendben rakhatjuk ki; más kirakásuk a formula más alakját állítja elő; így gyerekjáték egy formula különböző alakjait lefordítani egymásra. Ez hasznos, de benne van a játék öröme is; csakúgy, mint a játékos formai elemek átültetésében, ha valaki verset fordít.

Verssel kezdtem, matematikával folytattam, a számológépek gyakorlatával végeztem. Mindez összefonódik. A kultúra egy.

A formabontás bevallása talán menthetővé teszi, hogy tulajdonképpen lírai megnyilatkozással jelentkeztem egy tudományos folyóiratban. Szenvedélyemről, a matematikai kutatásról vallottam, és arról, ami ezt szítja: a bennem élő, életemet szépítő, matematikai vizsgálódásaimat is színező képekről, hangokról, játékos örömökről.