# Feladatmegoldások

## I. rész. Kísérletek megtervezése

### 2. fejezet. Megfigyeléses vizsgálatok

#### „A“ feladatsor

1. Téves. A lakosság is nőtt. A halálesetek számát az összlakossághoz kell viszonyítani. 1990-ben az összlakosság 248 millió körül volt, 1960-ban 180 millió körül: 248 közül 2,1, ez kisebb arány, mint 180 közül 1,7 – a halálozási ráta tehát 1990-ben volt alacsonyabb. 1960 és 1990 között igen számottevő mértékben növekedett a várható élettartam.

2. Az alapvető tények: gazdagabb családok inkább vállalkoznak a kísérletre, gyermekeiket inkább veszélyezteti a gyermekbénulás (1. fejezet, 1. szakasz).
   (a) A táblázat 1. sorából: a két beoltott csoportban nagyjából egyformák a megbetegedési arányok. Ha (például) az NFIP-s „hozzájáruló“ csoport lett volna a gazdagabb, magasabb lett volna a megbetegedési arányuk.
   (b) A táblázat 3. sorából: a két nem hozzájáruló csoportban nagyjából egyformák a megbetegedési arányok.
   (c) A táblázat 2. sorából: az NFIP kísérlet kontrollcsoportjában elég jelentősen alacsonyabb a megbetegedési arány, mint a másik kontrollcsoportban.
   (d) A nem hozzájáruló csoport túlnyomóan kisjövedelmű, a gyermekek ellenállóbbak a gyermekbénulással szemben. Az NFIP kontrollcsoportjában mindenféle jövedelműek vannak, köztük a legsebezhetőbb gyermekek is a magasjövedelmű családokból.
   (e) A hozzájárulók különböznek a nem-hozzájárulóktól.

*Megjegyzés (c)-hez.* Az NFIP kísérletben a kontrollban mindenféle családi háttér előfordult. A sorsolt kísérletbeli kontrollban csak a kísérletben való részvételhez hozzájáruló családok. Ezek a családok gazdagabbak voltak, így gyermekeiket jobban veszélyeztette a gyermekbénulás. Az NFIP kísérleti elrendezése az oltás ellenében torzított.

3. A beoltott gyermekek esetleg kevésbé óvakodnak a kockázatos viselkedéstől – ez az oltás ellenében torzít. A placebó-hatás viszont az oltás javára torzít. (Az 1. táblázat 1. sorában szereplő számok hasonlósága arra utal, hogy ezek a torzítások nem voltak jelentősek.)

4. Nem: mert a kísérleti területeket az országnak a gyermekbénulás által leginkább veszélyeztetett részeiről választották. Lásd 1. fejezet 1. szakasz.

5. Akik nem maradtak „vakok“, azok megtudták, C-vitamint szednek-e. Akik tudták, hogy C-vitamint szednek megelőzésként, azok közül kevesebben fáztak meg. Akik C-vitamint kaptak gyógyszerként, azok hamarabb gyógyultak. Ez placebó-hatás. Fontos, hogy az alanyok „vakok“ legyenek.

6 558/1045 ≈ 53%, és 1813/2695 ≈ 67%. A nikotinsavas csoportban alacsonyabb a rendesen szedők aránya. Valami hiba volt vagy a randomizáció vagy a „vakság“ körül. (Például lehetne a nikotinsavnak valamilyen kellemetlen mellékhatása, ami miatt az alanyok nem szednék.)

7. Az (i)-es kísérletben biztosan volt valami baj a randomizációval. A 49,3% és 69,0% közötti különbség azt mutatja, hogy a kezelt csoport már kezdetben kevesebbet dohányzott, és ez minden további összehasonlítást eltorzítana. Ez a különbség nem lehet a kezelés hatása, mert az előzetes állapotfelmérés arról szól, milyenek voltak az alanyok, mielőtt kezelt, és kontrollcsoportba osztották volna őket. (Erről bővebbet a 27. fejezetben.)

8. A (ii) válasz megmagyarázza az összefüggést, az (i) válasz nem magyarázza. Válassza a (ii)-t. Lásd a 2. fejezet 5. szakaszt.

9. (a) Igen: 39 emlőrák okozta halál a kezelt csoportban, a kontrollbeli 63-mal szemben.
(b) A kezelt csoportban (szűrésre járók és szűrésre nem járók együtt) azért körülbelül ugyanakkora a halálozási ráta, mint a kontrollban, mert a szűrésnek csak kis befolyása van az emlőráktól különböző okból bekövetkező halálesetekre.
(c) A szűrésre nem járó nők halálozási aránya azért magasabb, mert szegényebbek, ennélfogva más betegségek által veszélyeztetettebbek.
(d) Hasonlítsuk a kontrollcsoportot (A) a kezelt csoportból azokhoz, akik nem jártak szűrésre (B). Az A csoportban vannak olyanok is, akik járnának szűrés-

re, és olyanok is, akik nem járnának. Az A csoport eszerint, átlagosan gazdagabb a B csoportnál. A szűrés egyik csoportra sincs hatással, és az A csoportban magasabb arányban fordulnak elő emlőrák okozta halálesetek.
(e) A szűrés nem hat az emlőráktól különböző okból bekövetkező halálesetek előfordulási arányára. Azok a nők, akik nem jártak szűrésre, szegényebbek és a legtöbb betegség által sebezhetőbbek – emiatt magasabb a halálozási rátájuk.

*Megjegyzések.* (i) Az (a) pontban az egész kezelt csoportot kell összehasonlítani az egész kontrollal. Szokták ezt az elvet úgy megfogalmazni, hogy „akit kezelni akartunk". Konzervatív abban az értelemben, hogy a valóságosnál kisebbnek mutatja a kezelés hasznát. (Ha minden nő eljárna szűrésre, a haszon nagyobb lenne.) A „szűrésre járókat" összehasonlítani a „szűrésre nem járókkal" vagy a kontrollal nem jó: a kezelés ellenében torzít – lásd a 10(a) feladatot.

(ii) A Salk-oltás kipróbálását is meg lehetett volna tervezni a HIP-vizsgálat mintájára: (1) meghatározni egy, mondjuk, 1 000 000 gyermekből álló vizsgálati alapsokaságot; (2) sorsolással egyik felüket a kezelt, másik felüket a kontrollcsoporthoz sorolni – ahol a kezelés: felkérés arra, hogy hozzák el beoltatni a gyermeket; (3) összehasonlítani a gyermekbénulásos esetek előfordulási arányát – mekkora a teljes kezelt, és mekkora a teljes kontrollcsoportban. Ebben a felállásban nem lenne jogosult csak a beoltott gyerekeket összehasonlítani a kontrollal; az egész kezelt csoportot kell az egész kontrollal összehasonlítani. Valójában a Salk-oltás kipróbálásakor használt kísérleti elrendezés ennél jobb volt a „kettős-vakság" miatt (1. fejezet 1. szakasz); de a HIP-vizsgálatban ez nem látszik jelentős problémának, viszont az általuk használt elrendezés lényegesen könnyebben kezelhető.

10. (a) Ez nem jó összehasonlítás. A szűrés ellenében torzít. A „szűrésre járók" és a „szűrésre nem járók" összehasonlítása megfigyeléses vizsgálat, bár egy kísérlet keretében: a nők maguk döntenek arról, szűrjék-e őket. Ugyanúgy, ahogy a clofibrate-kísérletnél is ők döntöttek a kezelési eljárás követéséről (2. szakasz). Összemosó változók lépnek fel – pl. jövedelem, iskolázottság – nem lehetünk nyugodtak. Ezek nagyon is számítanak – lásd pl. a 9(c) feladatot. Az összehasonlítás azért a szűrés ellenében torzít, mert a szűrésre járók gazdagabbak, ezért az emlőrák által veszélyeztetettebbek.
(b) Ez nem jó elmélet: a kezelt csoportban körülbelül ugyanakkora az emlőráktól különböző okból bekövetkező halálesetek rátája, mint a kontrollcsoportban; az emlőrák miatti halálozási ráta csökkenése a szűrés következménye.
(c) Téves. A szűrés olyan emlőrákot mutat ki, mely már ott van, s amelyet szűrés nélkül csak később mutatnának ki. Ez a szűrés értelme.

*Megjegyzések.* (i) A HIP-vizsgálatban magas az egyéb okokból bekövetkező halálesetek rátája – ennek véletlen ingadozása is viszonylag nagy lehet, így ez a 837 – 979 = = –42-es különbség nem kimondottan megbízható statisztika. Bővebbet erről a 27. fejezetben. Az 1,1 és 1,5 összehasonlítása 10(a)-ban nagyon megbízhatatlan, mert az emlőrákok esetszáma nagyon alacsony: 23 és 16. Viszont a 39 és 63 közötti eltérést 9(a)-ban nehéz lenne véletlen ingadozással magyarázni.

(ii) A 10(c) pontban, a kezelt csoportban, a szűrésre járó nők között nagyobb arányban fordul elő felismert emlőrák, mint a szűrésre nem járók között. A két fő ok: (1) a szűrés kimutatja a rákot; (2) az emlőrák – hasonlatosan a gyermekbénuláshoz, de ellentétben a betegségek többségével – jobban sújtja a gazdagokat, mint a szegényeket, a gazdagok pedig nagyobb eséllyel hajlandók szűrésre járni.

(iii) 1994-re általánosan elismerték, hogy a mammográfia hasznos az idősebb nők számára; azt illetően még van néhány kérdés, hogy ez a hasznosság 50 évnél fiatalabb nőkre is áll-e. (Hivatkozások a 2. fejezet 14-es jegyzetében.)

11. A herpeszfertőzésen átesett nők azok, akik szexuálisan aktívabbak; a bizonyíték nem meggyőző. (Lásd a 2. fejezet 3. szakaszában a 2. példát.)

    *Megjegyzés.* Az 1970-es években rákot okozónak gondolták a herpesz vírusát (HSV-2). A nyolcvanas években molekuláris biológiából származó új bizonyítékok arra mutattak, hogy a HSV nem elsődleges oksági tényező, gyanúba keverték viszont a humán-papillóma vírus egyes törzseit (HPV-16,18). Hivatkozások: lásd a 2. fejezet 4. jegyzetét.

12. Ha a nőnek volt már spontán abortusza, és ezért jelenlegi terhességének nagyobb a kockázata, akkor orvosa valószínűleg eltanácsolja a terhesség alatti testedzéstől. Itt a testedzés a jó egészségi állapot jelzője, s nem oka.

13. Téves. Összesen a 2000 férfiből 900-at vesznek föl, azaz 45%-ot; az 1100 nőből 360-at, azaz 33%-ot. Az ok az, hogy a nők inkább a B tanszékre jelentkeznek, és oda nehezebb bejutni. Lásd a 4. szakaszt.

14. (a) 39 a 398-ból, nagyjából annyi, mint 40 a 400-ból, azaz 10 a 100-ból, azaz 10%.
    (b) 25% (c) 25% (d) 50%

15. (a) 10%. Ez eloszlik egy 10.000 dolláros tartományon, így a következő három pontban a saccolást végezhetjük úgy, mint ha minden százaléknak egy körülbelül 1.000 dolláros tartomány felelne meg.
    (b) 1% (c) 1% (d) 2%

# II. rész. Leíró statisztika

## 3. fejezet. A hisztogram

### „A" feladatsor

1. (a) 2% (b) 3% (c) 4% (d) 5% (e) 15% (f) 15%

2. A 10 000 és 11 000 dollár között keresők voltak többen.

3. (a) B (b) 20% (c) 70%

4. (a) jóval 50% fölött (b) jóval 50% alatt (c) 50 % körül

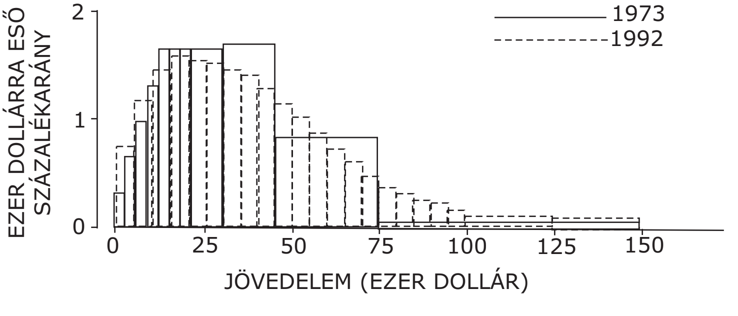
5. A (b) tanulócsoport

6. 90-100 közötti pontszámot

7. A (ii), B (i), C (iii)

8. A számok nincsenek hozzáigazítva az inflációhoz, az összehasonlítás tehát nem megfelelő.

   *Megjegyzés:* 1973-ban egy dollár körülbelül háromszor annyit ért, mint 1992-ben. Az alábbi ábra az 1992-es hisztogramot az 1973-as hisztogramnak a vásárlóerő változásának megfelelően korrigált változatával hasonlítja össze. A családi jövedelmek nominálértékben körülbelül háromszorosukra nőttek, de reálértékben számolva nem sokat változtak; az 1992-es hisztogram talán valamivel nagyobb szóródást mutat. Egy fontos különbség: 1992-ben sokkal több olyan család volt, ahol a férj és a feleség is dolgozott. (A Statistical Abstract, 1993 fogyasztói árindexre vonatkozó adatai, 756. táblázat)



**„B" feladatsor**

1. Az 1991-es hisztogram a 3. fejezet 3.szakaszában, az 5. ábrán látható, és ugyanitt tárgyaljuk a kicsúcsosodások magyarázatát.

2. Kisimul az ábra 0 és 8 között.

3. Az iskolázottsági szint magasabb lett. Például többen fejezték be a középiskolát és tanultak tovább 1991-ben, mint 1970-ben.

   *Megjegyzés:* A XX. században jelentős és folyamatos növekedés következett be a népesség iskolázottsági szintjében. 1940-ben például a 25 éven felüliek mindösszesze 25%-a végzett középiskolát. 1993-ra ez az arány 80%-ra nőtt, és továbbra is emelkedik. Ugyanebben az évben a 25 éven felüliek 7%-a rendelkezett egyetemi (masters) végzettséggel vagy magasabb fokozattal.

4. Emelkedett.

**„C" feladatsor**

1. 5%/100$

2. A válasz (ii), mivel az (i) ábrán nem szerepel beosztás, a (iii) sűrűségbeosztása pedig rossz.

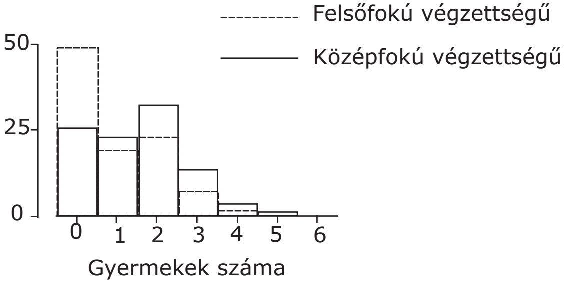
3. 1750; 2000; 1; 0,5. A sűrűség fogalma: Ha 10 százalékot egyenletesen osztunk el 1 cm = 10 mm hosszúságú intervallum mentén, 1 százalék esik minden milliméterre, azaz 1 százalék / mm.

4. (a) 1,5% / szál · 10 szál = 15%
   (b) 30% (c) 30% + 20% = 50% (d) 10% (e) 3,5%

**„D" feladatsor**

1. (a) kvalitatív
   (b) kvalitatív
   (c) kvantitatív, folytonos
   (d) kvantitatív, folytonos
   (e) kvantitatív, diszkrét

2. (a) A gyermekek száma diszkrét változó
   (b)




   (c) Az iskolázottabb nőknek kevesebb gyermekük van.

**„E” feladatsor**

1. A négygyermekes anyák vérnyomása összességében nézve magasabb. Az oksági kapcsolat nem bizonyított, mivel összemosó tényezőként jelen van az életkor. A négygyermekes anyák idősebbek. (Az életkort kontrollváltozóként bevezetve a Drug Studyban azt találták, hogy nincs összefüggés a gyermekek száma és a vérnyomás között.)

2. Bal oldali: 10 hgmm-rel emelkedett Jobb oldali: 10%-kal emelkedett

**„F” feladatsor**

1. (a) 7% (b) 5% (c) A tablettaszedők közül többnek magas a vérnyomása.

2. A tablettaszedés a vérnyomás néhány higanymilliméternyi megnövekedésével jár együtt.

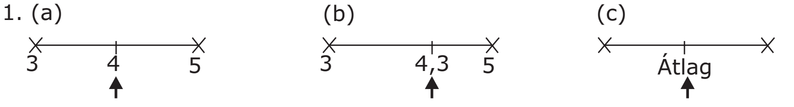
3. A fiatalabb nők vérnyomása kicsivel magasabb.

   *Megjegyzés:* Ez egyértelműen anomália. Az amerikai vizsgálatok többségében kimutatják a szisztolés vérnyomás emelkedését az életkorral. Más vizsgálatokkal összehasonlítva a Contraceptive Drug Studyban résztvevő fiatalabb nők vérnyomása magasabb, míg az idősebb nők vérnyomása alacsonyabb volt. Ez valószínűleg a szűrővizsgálatnál használt vérnyomásmérő eljárás torzításából fakad, az eljárás ugyanis hajlamos csökkenteni a 140 hgmm fölötti értékek előfordulását.

## 4. fejezet. Az átlag és a szórás

### „A” feladatsor

1. (a)




*Megjegyzés:* Két szám esetén az átlag félúton van a számok között. Ha ennél nagyobb számot veszünk fel pótlólag a listára, az átlag felfelé mozdul el. (Ha kisebbet, akkor lefelé.) Az átlag mindig valahol a legkisebb és a legnagyobb szám között lesz.

2. Ha 1 az átlag, akkor a lista csupa 1-esből áll. Ha 3, akkor csupa 3-asból. Nem lehet 4 az átlag: 1 és 3 közé kell esnie.

3. (ii) átlaga nagyobb, hiszen a meglehetősen nagy 11-es szám jött hozzá a listához.

4. (10 · 168 cm + 190 cm) / 11 = 170 cm. Vagy okoskodhatunk a következő módon: az új belépő 22 cm-rel magasabb a korábbi átlagnál, így 22 cm / 11 = 2 cm-rel növeli meg az átlagot.

5. 169 cm. Ahogy a teremben tartózkodók száma nő, egy-egy új belépő egyre kevésbé befolyásolja az átlagot.

6. 168 cm + 22 · 3 cm = 234 cm: egy zsiráfról van szó.

7. A Sziklás hegység a jobb oldalon található, Florida 0 (a tengerszint) tájékán, a Mariana árok a bal szélen.

8. A következtetés nem helytálló, ugyanis keresztmetszeti, nem pedig longitudinális adatokról van szó. A magas diasztolés vérnyomású férfiak nagyobb valószínűséggel halnak meg korán; ők már nem szerepelnek az ábrában.

9. Recesszió idején a cégek inkább a kevésbé régi dolgozóikat bocsátják el, akik egyben rosszabbul is fizetettek. Ez megemeli a kifizetési listákon szereplők béreinek átlagát. A recesszió elmúltával újra felveszik ezeket a rosszabbul fizetett dolgozókat

   *Megjegyzés:* Nem mindegy, hogy kik szerepelnek az átlagban és kik maradnak ki belőle.

**„B" feladatsor**

1. (a) 50 (b) 25 (c) 40

2. (a) medián = átlag (b) medián = átlag
   (c) a medián az átlagtól balra esik – jobbra elnyújtott megoszlásról van szó.

3. 20

4. Az átlagnak magasabbnak kell lennie a mediánnál, a legjobb tipp tehát a 25. (A pontos szám 27.)

5. Az átlag: jobb oldalon erősen elnyújtott megoszlás.

6. (a) 1 (b) 10 (c) 5 (d) 5
   (Az „abszolút érték" azt jelenti, hogy figyelmen kívül hagyjuk a negatív előjelet.)

**„C" feladatsor**

1. (a) átlag = 0, négyzetes közép = 4
   (b) átlag = 0, négyzetes közép = 10
   A (b) sorozatban nagyobbak az eltérések.

2. (a) 10 (egy tizedesjegyre kiszámolva a pontos érték 9,0)
   (b) 20 (egy tizedesjegyre kiszámolva a pontos érték 19,8)
   (c) 1 (egy tizedesjegyre kiszámolva a pontos érték 1,3)
   A számok átlaga 0; a négyzetes közép kiszámításakor eltűnik a negatív előjel.

3. Mindkét listánál 7; minden szám ugyanakkora, 7-es.

4. A négyzetes közép 3,2.

5. A négyzetes közép 3,1.

   *Megjegyzés:* A négyzetes közép az 5. feladatnál kisebb, mint a 4. feladatnál. Ennek megvan az oka. Tegyük fel, hogy a listán szereplő számokat valamely tetszőlegesen választott számmal hasonlítjuk össze. Az eltérések négyzetes közepe függ a szám megválasztásától. A négyzetes középérték hol nagyobb, hol kisebb lesz. Mikor a legkisebb? Be lehet bizonyítani, hogy az átlagra nézve a legkisebb az eltérések négyzetes középértéke.

6. A hibák jóval nagyobbak a feltételezett négyzetes középértéknél (3,6-nál). Valami baj van a számítógépes programmal.

**„D" feladatsor**

1. (a) 170 cm 24 cm-rel van az átlag fölött, a szórás 8 cm, a 24 cm tehát 3 szórás.
   (b) 2 cm = 0,25 szórás
   (c) $1{,}5 \cdot 8 = 12$ cm, a fiú $146 - 12 = 134$ cm magas.
   (d) legalább $146 - 18 = 128$ cm magas; legfeljebb $146 + 18 = 164$ cm magas.

2. (a) 150 cm – átlagos; a 4 cm csak 0,5 szórásnyi.
   130 cm – szokatlanul alacsony; a 16 cm 2 szórásnyi.
   165 cm – szokatlanul magas.
   140 cm – átlagos.
   (b) Nagyjából 68% esett 138–154 cm közé (átlag ± 1 szórás), és 95% 130–162 cm közé (átlag ± 2 szórás).

3. (iii) esetében a legnagyobb, (ii) esetében a legkisebb.

   *Megjegyzés:* Mindhárom számsor átlaga 0, és a számok egyformán 0-tól 100-ig terjednek. A (iii) listán azonban több az 50-től távol eső szám. Az (ii) listán több az 50-hez közeli szám. A „szóródás" többet jelent a számok egyszerű terjedelménél.

4. (a) 1, hiszen az átlagtól való eltérés minden számnál ± 1.
   (b) 2 (c) 2 (d) 2 (e) 10

   *Megjegyzés:* A szórás azt mutatja, milyen messze esnek a számok az átlagtól összességében véve; tehát azt kell csak megkérdeznünk magunktól, hogy vajon ezek az eltérések összességében 1-hez, 2-höz vagy 10-hez vannak-e közelebb.

5. 20 év. Az átlag 30 körül lehet, ha tehát 5 lenne a válasz, sok ember esne 4 szórásnál távolabb az átlagtól; 50 év szórást feltételezve pedig mindenki egy szóráson belül lenne.

6. (a) (i) b (ii) (c) (v)

7. Az (i) kísérletnél valami hiba történt: a kezelt csoport sokkal súlyosabb a kontrollcsoportnál. (Lásd a 2. fejezet 5. szakasz 7. feladatát.)

8. Az átlagoknak és a szórásoknak nagyjából meg kell egyezniük, de valószínűleg a nagyobb mintában fog szerepelni a legmagasabb férfi, valamint a legalacsonyabb is. Minél nagyobb a minta, annál nagyobb a két szélső érték közti különbség. A szórás és a terjedelem különböző dolgokat mérnek.

9. Az átlagra (175 cm) érdemes tippelni. Körülbelül 1/3 az esélye, hogy egy szórásnál, azaz 8 cm-nél nagyobbat tévedünk.

10. 8 cm. A szórás az átlagtól való eltérés négyzetes középértéke.

**„E” feladatsor**

1. (ii) szórása nagyobb; kiszámítva: (i) szórása 1, (ii) szórása 2.

2. Nem, a szórás különbözik az eltérések abszolút értékének átlagától, az eljárás tehát helytelen.

3. Nem, a 0 is számít, az eljárás tehát helytelen.

4. (a) Mindhárom csoportban azonos az átlag: 50.
   (b) A B csoportban legnagyobb a szórás; több diák esik jó messzire az átlagtól.
   (c) Mindhárom csoportban ugyanaz a terjedelem. A szóródás több a terjedelemnél; lásd a 4. fejezet 5. szakasz 3. feladatát.

5. (a) (i) átlag = 4; az eltérések: -3, -1, 0, 1, 3; szórás = 2.
   (ii) átlag = 9; az eltérések: -3, -1, 0, 1, 3; szórás = 2.
   (b) A (ii) listát megkaphatjuk az (i) listából, ha minden számhoz hozzáadunk 5-öt. Ez 5-tel megnöveli az átlagot, de nem befolyásolja az átlagtól vett eltéréseket. A szórás tehát nem változik. Nem változik meg a szórás, ha a listán szereplő összes számhoz hozzáadjuk ugyanazt az értéket.

6. (a) (i) átlag = 4; az eltérések: -3, -1, 0, 1, 3; szórás = 2.
   (ii) átlag = 12; az eltérések: -9, -3, 0, 3, 9; szórás = 6.
   (b) A (ii) listát megkaphatjuk az (i) listából, ha 3-mal megszorzunk minden számok. Ez 3-szorosára növeli az átlagot. Háromszorosukra növeli az átlagtól vett eltéréseket is, tehát a szórás is háromszoros lesz. Ha a listán szereplő minden számot megszorzunk ugyanazzal a pozitív számmal, akkor a szórás ugyanennyiszeresére nő.

7. (a) (i) átlag = 2; az eltérések: 3, -6, 1, -3, 5; szórás = 4.
   (ii) átlag = -2; az eltérések: -3, 6, -1, 3, -5; szórás = 4.
   (b) A (ii) listát megkaphatjuk az (i) listából, ha a számok előjelét ellenkezőjére változtatjuk. Ez megváltoztatja az átlag és az átlagtól vett eltérések előjelét, de nem befolyásolja a szórást.

8. (a) Ez 70 dollárral növelné az átlagjövedelmet, de a szórás nem változna.
   (b) Ez 5%-kal megnövelné az átlagot és a szórást is.

9. A négyzetes középérték 17, a szórás 0.

10. A szórás sokkal kisebb a négyzetes középnél.

11. Nem.

12. Igen, például az 1, 1, 16 számsor átlaga 6, szórása pedig 7 körül van.

## 5. FEJEZET. ADATOK NORMÁLIS KÖZELÍTÉSE

### „A" feladatsor

1. (a) A 60-as pontszám 10-zel, azaz egy szórással nagyobb az átlagnál. 60 pont tehát +1 standard egység. Hasonlóan, a 45 pont –0,5, a 75 pont +2,5 standard egység.
   (b) A 0 az átlagnak, azaz 50 pontnak felel meg. Az a pontszám, amelynek 1,5 az értéke standard egységben, 1,5 szórással, azaz 1,5 · 10 = 15 ponttal magasabb az átlagnál, azaz 65 pont. A 22 pont standard egységre átváltva: –2,8.

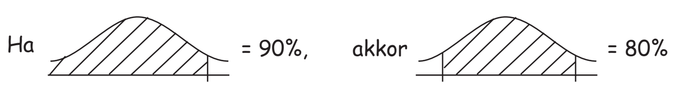
2. Az átlag 10, a szórás 2.
   (a) A lista standard egységben: +1,5, -0,5, +0,5, -1,5, 0.
   (b) A standard egységbe átkonvertált lista átlaga 0, szórása 1. (Ez általában is igaz: standard egységre átváltva bármely adatsor átlaga 0, szórása pedig 1 lesz.)

### „B" feladatsor

1. (a) 11% (b) 34% (c) 79%
   (d) 25% (e) 43% (f) 13%

2. (a) 1 (b) 1,15

3. (a) 1,65
   (b) 1,30. Ez NEM ugyanaz, mint ami az (a) pontban szerepelt!

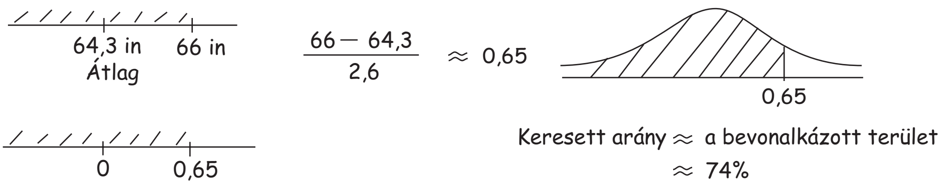


4. (a) 100% - 39% = 61%.
   (b) ennyi információ alapján nem lehet meghatározni

5. (a) 58% / 2 = 29%  (b) 50% - 29% = 21%
   (c) ennyi információ alapján nem lehet meghatározni

**„C" feladatsor**

1. (a)




   (b) 69%  (c) 0,2%.

2. (a) 77%  (b) 69%

3. A 155–167 cm magas nők aránya pontosan megegyezik a hisztogram, és közelítőleg megegyezik a normálgörbe alatti területtel a 2. ábrán.

**„D" feladatsor**

1. (a) 75%  (b) 10 200$
   (c) 75%. Következőképpen okoskodhatunk: 90% – 10% = 80% esik a 10 200 és 85 000$ közötti intervallumba; a 10 000 – 80 000$ intervallum nagyjából ugyanide esik, csak valamivel kisebb.

2. 5, 95.

3. 7.000$.

4. A 25. percentilistől balra eső terület a teljes terület 25%-a, a 25. percentilisnek tehát 25 mm-nél jóval kisebbnek kell lennie.

5. (a) Kétoldalt hosszabban elnyúló.
   (b) 15 körül van az interkvartilis terjedelem.

**„E" feladatsor**

1. 2,15 szórással volt az átlag fölött, a 98. percentilis táján.

2. Ez a pontszám 0,85 szórással az átlag fölött van, azaz $0{,}85 \cdot 100 \approx 85$ ponttal magasabb az átlagnál. Ez $535 + 85 = 620$ pont.

3. 2,75; 0,50 szórással az átlag alatt.

**„F" feladatsor**

1. (a) Az átlag: $\frac{5}{9} \cdot (98{,}6 - 32) = 37{,}0$

   A szórás: $\frac{5}{9} \cdot 0{,}3 = 0{,}17$

   (b) A standard egységbe átváltott adat nem függ az eredeti skálától, a válasz tehát 1,5.

## 7. FEJEZET. PONTOK ÉS EGYENESEK ÁBRÁZOLÁSA

**„A" feladatsor**

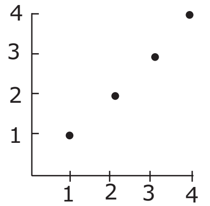
1. 1. A = (1;2)  B = (4;4)  C = (5;3)  D = (5;1)  E = (3;0)

2. $x$ mentén 3-mal nő, $y$ mentén 2-vel nő.

3. A D pont.

**„B" feladatsor**

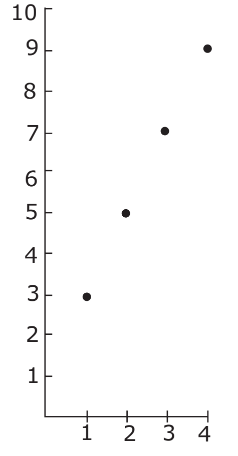
1. Mind a négy pont egy egyenesbe esik.




2. (1;2) a kakukktojás, és az egyenes fölött helyezkedik el.

3. Az összes pont egy egyenesbe esik.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 7 |
| 4 | 9 |




4. (1;2) kívül, (2;1) belül van a területen.

5. (1;2) belül, (2;1) kívül van a területen.

6. (1;2) belül, (2;1) kívül van a területen.

**„C" feladatsor**

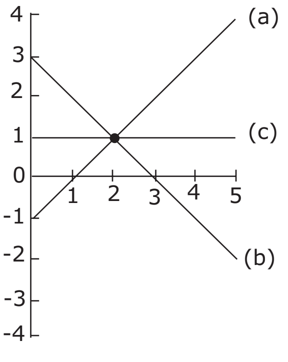
1.

| | 16. ábra | 17. ábra | 18.ábra |
|---|---|---|---|
| Meredekség | -1/4 m per kg | 5 | 1 |
| Tengelymetszet | 1 m | -10 | 0 |

*Megjegyzés:* A 18. ábrán a tengelyek a (2;2) pontban metszik egymást.

**„D" feladatsor**

1.

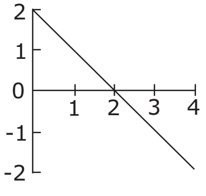


2. Az egyenesen.

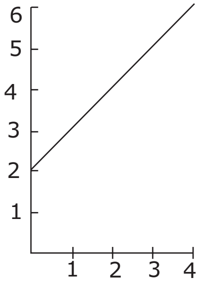
3. Az egyenesen.

4. Az egyenes fölött.

5.



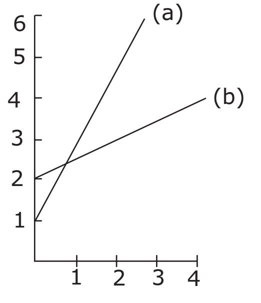
6.



**„E" feladatsor**

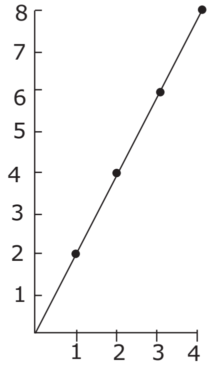
1.

| | *Meredekség* | *Tengelymetszet* | *Magasság x = 2-nél* |
|---|---|---|---|
| (a) | 2 | 1 | 5 |
| (b) | 1/2 | 2 | 3 |

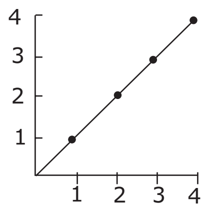



2. (a) $y = 3/4x + 1$ (b) $y = -1/4x + 4$ (c) $y = -1/2x + 2$

3. Mindegyik az $y = 2x$ egyenesen fekszik.




4. Mindegyik az $y = x$ egyenesen fekszik.




5. (a) az egyenesen (b) az egyenes fölött (c) az egyenes alatt.
6. Mindhárom állítás igaz. Ha érti az Olvasó a 4-es, 5-ös, 6-os feladatokat, akkor jó formában vághat neki a III. résznek.

# III. rész. Korreláció- és regressziószámítás

## 8. FEJEZET. A KORRELÁCIÓ

### „A” feladatsor

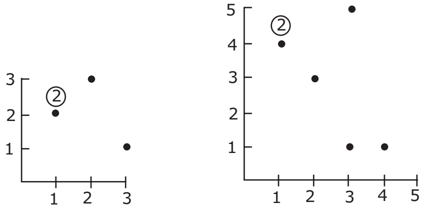
1. (a) legalacsonyabb apa 150 cm; a fia 165 cm.
   (b) legmagasabb apa 190cm; a fia 178 cm.
   (c) 193 cm, 163 cm.
   (d) kettő: 175 és 178 cm.
   (e) átlag = 173 cm.
   (f) szórás = 7,5 cm.

2.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 4 | 2 |

3. (a) $x$ átlaga = 1,5 (b) $x$ szórása = 0,5
   (c) $y$ átlaga = 2 (d) $y$ szórása = 1,5

4.




5. (a) A, B, F (b) C, G, H (c) átlag ≈ 50
   (d) szórás ≈ 25 (e) átlag ≈ 30
   (f) nem igaz (g) nem igaz, a kapcsolat negatív.

6. (a) 75 (b) 10 (c) 20
   (d) a vizsga (e) a vizsgapontszámok (f) igaz.

**„B” feladatsor**

1. (a) Negatív. Minél idősebb az autó, annál alacsonyabb az ára.
   (b) Negatív. Minél nehezebb az autó, annál kisebb a hatékonysága.

2. Bal oldali ábra: $x$ átlaga = 3,0, $x$ szórása = 1,0, $y$ átlaga = 1,5, $y$ szórása = 0,5, pozitív korreláció.
   Jobb oldali ábra: $x$ átlaga = 3,0, $x$ szórása = 1,0, $y$ átlaga = 1,5, $y$ szórása = 0,5, negatív korreláció.

3. A bal oldali diagramnál van közelebb 0-hoz a korreláció, kevésbé hasonlít egy egyenesre.

4. A korreláció 0,5 körül van.

5. A korreláció közelítőleg 0.

*Megjegyzés:* A pszichológusok ezt a kapcsolat legyengülésének („attenuation") nevezik. Ha korlátozzuk egy változó értékhatárait, azzal általában lecsökken a korreláció.

6. (a) A pontdiagram minden pontja egy felfelé tartó egyenesre esne, 1 lenne tehát a korreláció.
(b) 1-hez közeli; a helyzet hasonlít az (a) pontban leírthoz, némi ingadozással az adatokban.

*Megjegyzés:* A Rendszeres Népességfelmérés 1993 márciusi adatai szerint a férjek és feleségek életkora közötti korreláció 0,95 volt; a férjek átlagosan 2,7 évvel voltak idősebbek a feleségüknél.

7. (a) Közel van –1-hez: minél idősebb valaki, annál korábban született; de van egy kis „maszatosság" amiatt, hogy egyesek születésnapja a kérdőív kitöltésénél korábbra, másoké későbbre esett.
(b) Kisebb pozitív érték.

8. (a) Kisebb pozitív érték. A nők jövedelme ugyan kisebb a családi jövedelemnél, de a kettő között pozitív összefüggés van.
(b) Közel van –1-hez. Ha a családi jövedelem gyakorlatilag konstans, akkor minél többet visz haza ebből a feleség, annál kevesebbet kereshet a férj.

*Megjegyzés:* A Rendszeres Népességfelmérés 1993 márciusi adatai szerint 0,65 volt a feleség jövedelme és a teljes jövedelem közötti korreláció. A 45 000 és 55 000$ közötti jövedelemsávba eső családokra a férj és a feleség jövedelme közötti korreláció –0,95 volt.

9. Nem igaz: lásd a 8. fejezet 2. szakaszát.

**„C" feladatsor**

1. (a) Igaz. (b) Hamis.

2. A szaggatott.

3. Egy szórásnyival magasabb az átlagnál, így 140 + 20 = 160 font súlyúnak kell lennie.

4. (a) Igen. (b) Nem. (c) Igen.

**„D" feladatsor**

1. (a) $x$ átlaga = 4, $x$ szórása = 2
$y$ átlaga = 4, $y$ szórása = 2

| *Standard egységek* | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | *Szorzat* |
| –1,5 | 1,0 | –1,50 |
| –1,0 | 1,5 | –1,50 |
| –0,5 | 0,5 | –0,25 |
| 0,0 | 0,0 | 0,00 |
| 0,5 | –0,5 | –0,25 |
| 1,0 | –1,5 | –1,50 |
| 1,5 | –1,0 | –1,50 |

$r$ = a szorzatok átlaga ≈ -0,93

(b) A számítás szerint $r = 0{,}82$.
(c) Nincs szükség számolásra: $r = -1$. Az összes pont az $y = 8 - x$, jobbra lejtő egyenesen fekszik.

2. Körülbelül 50%.

3. Körülbelül 25%.

4. Körülbelül 5%.

## 9. FEJEZET. KICSIT BŐVEBBEN A KORRELÁCIÓRÓL

### „A" feladatsor

1. (a) Bostonban hűvösebb volt; az 1. ábrán szereplő pontok többségében a 45 fokos egyenes alá esnek.
(b) A napi maximumnak magasabbnak kell lennie a minimumnál.

2. Nem: az $x$ és $y$ közötti korreláció megegyezik az $y$ és $x$ közöttivel.

3. Nem változik az $r$.

4. Nem változik az $r$.

5. $r$ megváltozik.

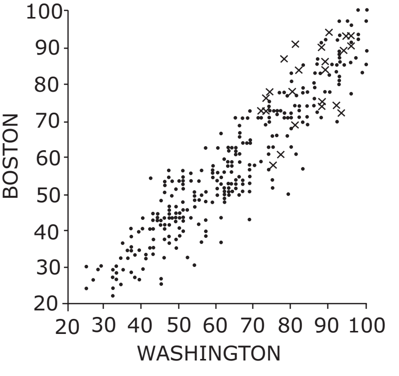
6. (a) Felfelé tart. (b) Lefelé tart. (c) Megváltozik az előjel.

7. (a) 1 (b) Csökken.
(c) $r$ 1-nél kisebb lesz a mérési hiba miatt.

8. A korreláció lecsökken (a valóságban 0,25-re).

9. A teljes évre számított korreláció nagyobb; télen például nagyon hideg, nyáron pedig nagyon meleg van mindkét városban.

   *Megjegyzés:* Ez újabb példa a kapcsolatgyengülésre (attenuációra) (8. fejezet 2 szakasz, 5. feladat). Az alábbi pontdiagramon kereszttel jelöltük a júniusi adatokat ($r = 0{,}57$); a pontok az év többi napjára vonatkozó adatokat mutatják; a korreláció a teljes évre 0,93. Ha csak a júniusi hónapra összpontosítunk, erősen leszűkítjük a hőmérséklet-tartományt, és ezzel lecsökken a korreláció.




10. Az (iii) adatsor megegyezik a (ii)-vel, csak felcseréltük $x$ és $y$ sorrendjét; $r$ tehát 0,7857. A (iv) adatsor az (i)-ből keletkezett úgy, hogy minden $x$ értékhez hozzáadtunk 1-et; $r$ tehát 0,8571. Az (v) adatsor úgy keletkezett az (i)-ből, hogy az $y$ értékeket megszoroztuk 2-vel; $r$ tehát szintén 0,8571. A (vi) adatsor úgy állt elő (ii)-ből, hogy az $x$ értékekből kivontunk 1-et, $y$ értékeit pedig megszoroztuk 3-mal, $r$ így 0,7857.

**„B" feladatsor**

1. 0,6 körüli a korreláció külön-külön az egyes pontdiagramoknál. Az összes pont együttvéve sokkal jobban hasonlít egy egyenesre, így a korreláció 0,9-hez lesz közelebb—ez a kapcsolatgyengülés (attenuáció) fordítottja.

2. Nagyobb lesz 0,67-nél. Az előző feladathoz hasonlóan: ha az összes gyereket együtt nézzük, az adatok sokkal jobban közelítenek egy egyeneshez. Lásd még a 9. fejezet „A" 9. feladatát.

3. Igen; csak a skálák különböznek.

4. Igen; ugyanolyan, mint az előző diagramok, tehát $r \approx 0{,}7$.

**„C" feladatsor**

1. Az (i) összefoglalható *r*-rel, (ii) és (iii) nem.

2. Nem igaz: lásd az 1. feladat (iii) pontdiagramját.

3. 1-hez közeli érték. Szoros az összefüggés, de a kapcsolat négyzetes, nem pedig lineáris, a korreláció így nem lehet +1.

4. Egyik sem igaz. A pontdiagramon ellenőrizhető, hogy nincsenek magányos esetek, illetve hogy a kapcsolat nemlineáris.

**„D" feladatsor**

1. (a) A pontdiagramot nem adtuk meg. (b) Igaz.
   (c) Ezt nem tudjuk eldönteni az adatok alapján (más vizsgálatok szerint azonban igaznak bizonyult).

2. Nem. Ez a korreláció jelentősen túlbecsülheti a kapcsolat erősségét mivel arányszámokon alapul.

**„E" feladatsor**

1. Az időtartamot kétmillió évekre kerekítve mérik; nem könnyű dolog pontosabban meghatározni a változó értékét.

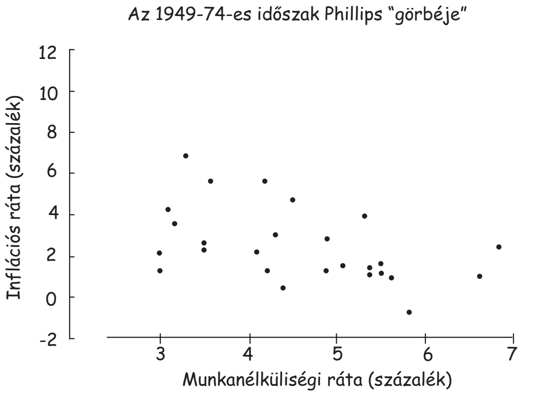
2. Igen, és ez jelentősen túlbecsülheti az összefüggés erősségét.

3. (a) Igaz. (b) Igaz. (c) Igaz. (d) Nem igaz.
   A tanulság: az összefüggés nem ugyanaz, mint az oksági kapcsolat.

4. Talán igaz, de nem következik az adatokból. Lehetséges például, hogy többet tévéznek azok, akiknek gondjuk van az olvasással – azaz ellenkező irányú az oksági kapcsolat. Az $x$ és $y$ közötti korreláció végül is megegyezik az $y$ és $x$ közötti korrelációval.

5. A legjobb magyarázatot a kávé- és a cigarettafogyasztás közötti összefüggés adja. A kávéfogyasztók nagyobb valószínűséggel dohányoznak, a dohányzás pedig szívbetegséget okoz.

6. Megfigyeléses vizsgálat, nem pedig kontrollos kísérlet. Ha az ötvenes és a hetvenes évek pontjait is berajzoljuk, szétesik az ábra, mint egy homoktorta.




FORRÁS: Economic Report of the President, 1975.

## 10. FEJEZET. REGRESSZIÓSZÁMÍTÁS

### „A" feladatsor

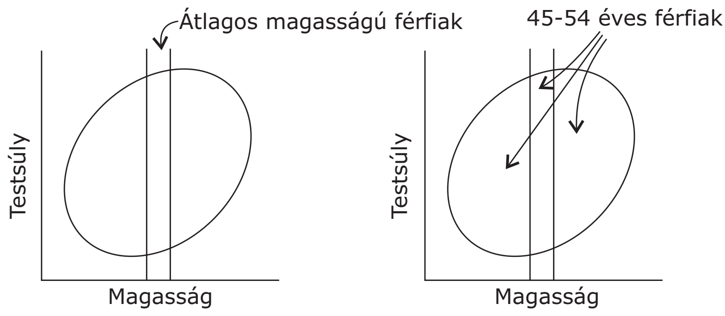
1. (a) 67,5 (b) 45 (c) 60
   Az (a) feladatrész megoldása részletesen: A 75-ös pontszám 1 szórással van az átlag fölött. Az $r$ azonban csak 0,5. Ha a ZH-n az átlagnál 1 szórásnyival jobban teljesítőket vesszük, a vizsgapontszámok átlaga csak 0,5 szórásnyival, azaz $0{,}5 \cdot 15 = 7{,}5$ ponttal lesz jobb a teljes átlagnál. A vizsgapontszámok átlagát tehát $60 + 7{,}5 = 67{,}5$ pontra becsülhetjük ebben a csoportban.

   *Megjegyzés:* A regressziós becslések mindig egy egyenesre – a regressziós egyenesre – esnek. Bővebben lásd erről a 12. fejezetet.

2. (a) 171 font (b) 159 font
   (c) –9 font (d) –105 font.

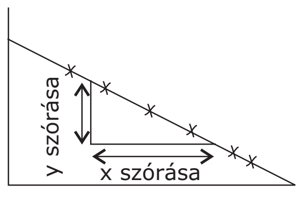
   *Megjegyzés (c)-hez:* Ez persze nevetséges. A felmérést végzők természetesen nem találkoztak egy méternél alacsonyabb kicsi emberkékkel, így a regressziós egyenes sincs felkészülve erre a lehetőségre. A pontdiagram középpontjától távolodva egyre kevésbé bízhatunk a regressziós egyenesben.

3. Nem igaz. Képzeljük el az összes férfira vonatkozó magasság – testsúly pontdiagramot! Vegyük az átlagos magasságú férfiaknak megfelelő, 69 hüvelyk fölötti keskeny sávot. A sávban lévők testsúlyátlagának az átlag körül kell lennie. A 45-54 éves férfiaknak azonban nem ez a ponthalmaz felel meg, közülük egyesek beleesnek a sávba, sokak viszont nem. A regressziós egyenes a testsúlyátlagnak a magassággal, nem pedig az életkorral való kapcsolatáról beszél. (A középkorú férfiak valójában az átlagosnál valamivel súlyosabbak – felduzzad körükben a szóródás.)




4. Ezek az emberek 8 osztályt, tehát az átlagnál 4,5 évvel kevesebbet végeztek. 4,5/4 = 1,125 szórással vannak az átlag alatt iskolázottságukat tekintve. Becslésünk az, hogy a jövedelmük is alacsonyabb az átlagosnál, de nem 1,125 szórásnyival, hanem csak $r \cdot 1{,}125 \approx 0{,}506$ szórásnyival. Dollárban számolva ez $0{,}506 \cdot 26\,700\$ \approx$ $\approx 13\,500\$$. Jövedelemátlagukat tehát így becsülhetjük:
teljes átlag – 13 500$ = 30 800$ – 13 500$ = 17 300$

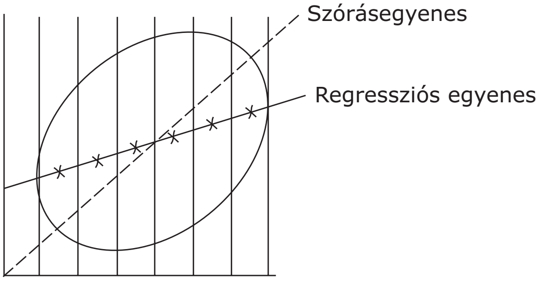
5. Az összes pontnak a szórásegyenesre kell esnie, mely most jobbra lejt; lejtése pedig $x$-szórásonként egy $y$-szórás.




**„B” feladatsor**

1. (a) Igaz: az átlagdiagram felfelé tart. A magasabb jövedelmű férjek feleségei többnyire szintén magasabb jövedelmet érnek el. Az emberek általában hasonló iskolai végzettségű és hasonló családi hátterű társat választanak, emiatt jellemzően a jövedelemszintjük is hasonló.
(b) Véletlen hiba. Az adatok mintából származnak, és ez a pont mindössze 14 párt takar.
(c) Az átlagra adott regressziós becslés kissé alacsonynak bizonyul: a 62 500$-hoz tartozó pötty a regressziós egyenes fölött van. (Más pontok viszont alatta).

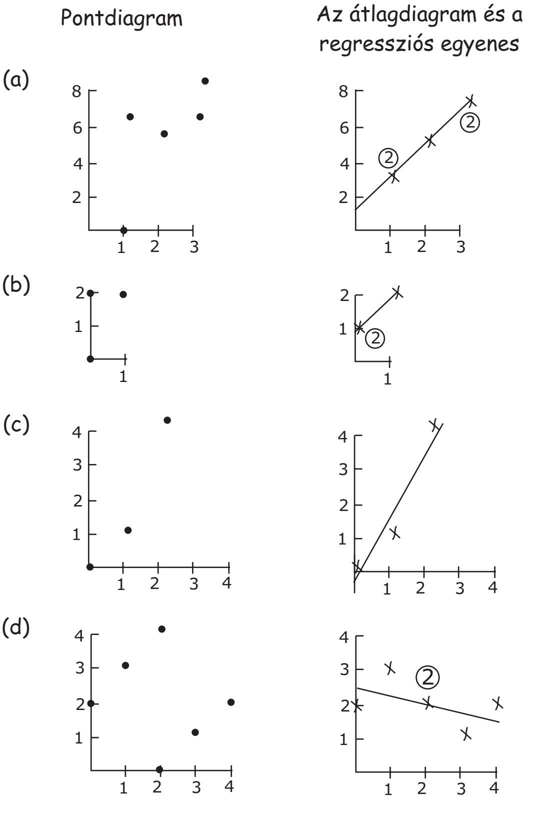
2.




A keresztek a folytonos vonallal jelölt regressziós egyenesre esnek, a szaggatott vonal a szórásegyenes.

3. A két bal oldali ábrán a szórásegyenes szerepel szaggatottan. A két jobb oldalinál a szórásegyenes a folytonos vonal, a regressziós egyenes a szaggatott. Tanulság: a regressziós egyenes kevésbé meredek.

4.

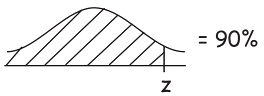


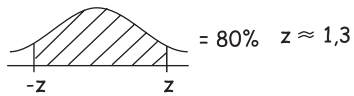
## „C” feladatsor

1. (a) 67,5 (b) 45 (c) 60 (d) 60
   Ez a feladat az egyénekre vonatkozóan jósol, a 10. fejezet 1. szakasz 1. feladatában a csoportokról volt szó. A számítás az (a) – (c) feladatoknál ugyanaz; lásd a 10. fejezet 3. szakaszát.

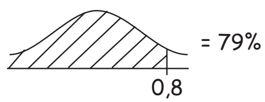
2. (a) 79% (b) 38% (c) 50% (d) 50%

   A megoldás menete az (a) pontnál:




   Standard egységben számolva 1,3 volt az illető pontszáma. Regressziós becslésünk az elsőéves eredményre $0{,}6 \cdot 1{,}3 \approx 0{,}8$ standard egység.




   Ez a 79%-os percentilisnek felel meg. A 2. feladatnál a becsült percentilis besorolás csak 69% volt, ami közelebb van az 50%-hoz. Ennek az az oka, hogy ott alacsonyabb volt a korreláció. A 2. feladatban erősebb a közeledés az átlaghoz.

3. (a) A szórásegyenes a szaggatott vonal.
   (b) A regressziós egyenes a folytonos vonal.

4. (a) Csak bizonyos életkor fölött köthető házasság.
   (b) Az életkort években szokás megadni: sok 30 éves férj szerepel az ábrában, de nincs 30,33 éves; a feleségeknél ugyanez a helyzet.

5. Nem igaz. A regressziós egyenes a magasság, és nem az életkor függvényében adja meg a testsúlyátlagot. Lásd a 10. fejezet 1. szakasz 3. feladatát.

## „D” feladatsor

1. Nem, ez regresszív hatásnak tűnik. Képzeljünk el egy kontrollos kísérletet, melyet két repülőtéren végeznek. Az első repülőtéren az instruktorok megbeszélik a pilótákkal az értékelésüket. A másik repülőtéren megtartják a véleményüket maguknak. A második repülőtéren sem sikerülnek tökéletesen egyformán a leszállások, nyilván lesznek különbségek. Fellép tehát a regresszív hatás: a legalsó csoport valamelyest javul, a legfelső romlik. Valószínűleg csupán ezt látták meg az adatokban a légierőnél.

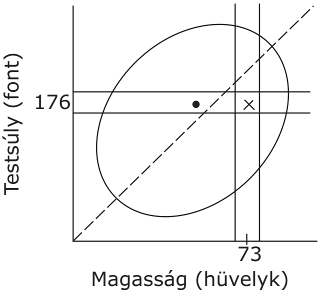
2. Nem. Úgy tűnik, hogy a külön foglalkozások hatottak – a regresszió miatt csak közelebb kerültek volna a hallgatók az átlaghoz, de ők az átlag fölé kerültek.

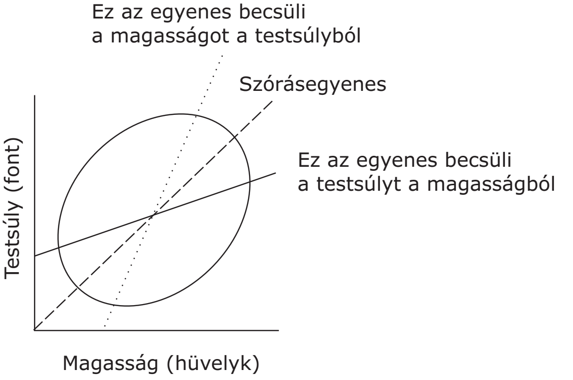
3. A 61 hüvelyk magas apák fiai átlagosan magasabbak a 62 hüvelyk magas apák fiainál. Ez csak véletlen ingadozás. Pearson a véletlen folytán túl sok olyan családról szerzett adatot, ahol az apa 61 hüvelyk magas volt, a fia viszont különösen nagyra nőtt.

   *Megjegyzés:* Csak nyolc olyan család volt, ahol az apa 61 hüvelyk magas, és 15, ahol az apa 62 hüvelyk – tág tér nyílott a véletlen hibának.

**„E" feladatsor**

1. Nem igaz. A férfiak teljesen különböző csoportjairól van szó. (Lásd az alábbi ábrát!) A 73 hüvelyk magas férfiak a függőleges sávban találhatók. Testsúlyuk átlaga 176 font, amit kereszttel jelöltünk. A 176 font súlyú férfiak a vízszintes sávba esnek, magasságátlagukat a pötty mutatja. Ez sokkal kisebb 73 hüvelyknél.
   Ne feledjük, hogy két regressziós egyenes van:
   - az egyik a testsúly magasság szerinti regressziós egyenese,
   - a másik a magasság testsúly szerinti regressziós egyenese.




2. Nem igaz. Az apák magasságátlaga 69 hüvelyk; a másik egyenest kell használni.

3. Nem igaz. Ugyanaz a helyzet, mint az előző feladatoknál. (Az elsőéves vizsgák szerint a 69-edik percentilisbe eső tipikus diák az 58-adik percentilisbe várható a felvételije szerint; a másik egyenest kell használni.)

## 11. FEJEZET. A REGRESSZIÓS EGYENES NÉGYZETES KÖZÉPHIBÁJA

### „A” feladatsor

1. A alacsony és pufók, B pedig magas és vékony.

2. (a) Igaz. (b) Nem igaz.

3. A hibák: –7, 1, 3, –1, 4; négyzetes középértékük = 3,9.

4. (a) 0,2 (b) 1 (c) 5.
5. Párezer dollár.

6. Azt érdemes használni, amelyiknél kisebb a négyzetes középhiba, hiszen ez fog összességében pontosabb előrejelzést adni.

7. (a) 8 pont; egy négyzetes középhiba. (b) 16 pont; két négyzetes középhiba.

8. (a) 12 400$. (b) A vízszintes egyenesre. Lásd a 11. fejezet 2. szakaszát.

### „B” feladatsor

1. $\sqrt{1 - 0{,}6^2} \cdot 10 = 8$ pont

2. (a) Az átlagra érdemes tippelni, ez 65.
   (b) 10. Ha a regressziós egyenest használjuk, akkor képletünkből kapjuk meg a négyzetes középhibát (1. feladat). Ha az átlagot, akkor a szórás lesz a négyzetes középhiba. (Lásd a 9-10. feladatokat a 10. fejezet 4. szakaszában.)
   (c) A regressziós egyenest használjuk; a négyzetes középhiba ekkor a képlet szerint 8 pont (lásd az 1. feladatot.)

3. Utóbbi rendszerint plusz információval szolgál. B-nél lesz kisebb a négyzetes középhiba; a szorzótényező: $\sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}8$ (Lásd a 11.fejezet 2.szakaszát.)

### „C” feladatsor

1. (a) (iii) (b) (ii) (c) (i)

2. (a) (i) (ii) (b) nem szerepel (c) (iii)

3. (a) $y$ szórása ≈ 1
   (b) a maradékok szórása ≈ 0,6
   *(c)* $y$ szórása ebben a sávban ≈ 0,6, nagyjából ugyanakkora, mint a maradékok szórása.

*Megjegyzés:* A sávban megfigyelhető függőleges szóródás nagyjából megegyezik a regressziós egyenes négyzetes középhibájával – a teljes diagramon látható függőleges szóródás viszont sokkal nagyobb a sávban megfigyelhetőnél.

**„D" feladatsor**

1. (a) Igaz.
(b) Igaz; a pontdiagram homoszcedasztikus, így minden függőleges sávban hasonló mértékű tévedésre számíthatunk.
(c) Nem igaz, mivel a pontdiagram heteroszcedasztikus; a 9 pont egyfajta átlagos tévedés, és a magasabb pontszámoknál nagyobb lesz a hiba.

2. (a) $\sqrt{1 - 0{,}5^2} \cdot 2{,}7 \approx 2{,}3$ hüvelyk
(b) 71 hüvelyk, a regressziós eljárás alapján.
(c) 2,3 hüvelyk. A pontdiagram homoszcedasztikus, így a regressziós előrejelzés hasonló mértékben téved az apa bármely testmagasságánál. Mégpedig az egyenes négyzetes középhibájával.
(d) A becslés 68 hüvelyk, és ez valószínűsíthetően 2,3 hüvelyk körüli tévedést rejt.

3. (a) $\sqrt{1-0{,}34^2} \cdot 13700\$ \approx 12900\$$ .
(b) 22 000$, a regressziós eljárás alapján.
(c) Ezt nem lehet megmondani a megadott információk alapján. A 12 900$ az egyenes egyfajta átlagos tévedése. A diagram viszont heteroszcedasztikus, tehát sávról sávra változik, hogy mekkorát téved az egyenes. Az iskolázottabbak körében erősebben szóródnak a jövedelmek, tehát 12 900$-nál nagyobb tévedés várható.
(d) A becslésünk 10 000$. A tévedés mértékét nem lehet meghatározni, de kisebb lesz 12 900$-nál.

4. a <u>férj</u> életkora <u>20 év</u> és <u>30 év</u> között van.

5. (a) 50; 15 (b) 50; 15 (c) 0,95 (d) 25; 3,5
(e) 0,65 – kapcsolatgyengülés („attenuáció"). Lásd a 9. fejezet 1. szakasz 9. feladatát és a 2. szakasz 1-2. feladatait.

6. (a) Az összes nőre vonatkozó szórás sokkal nagyobb; ez a lényeg a 4-6. feladatoknál is.
(b) A két szórás nagyjából megegyezik.

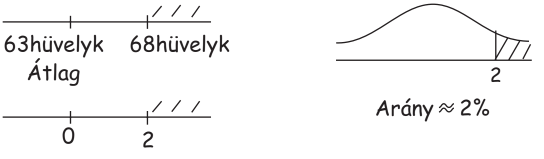
*Megjegyzés:* Ha csak azokat a családokat nézzük, ahol a férj életkora 20-30 év között van, akkor a feleségek életkora is sokkal inkább hasonló lesz, a szórás 15 évről mintegy 3,5 évre csökken. A márciusban született férjeket tekintve nem csökken a feleségek korának szóródása. Kisebb minta általában nem jelent kisebb szórást. Az *x* értékek tartományának korlátozása viszont általában csökkenti a szórást.

7. (a) 68 hüvelyk, az átlag.
(b) 3 hüvelyk, a szórás.
(c) Regressziós eljárással. Ha az ikerpár egyik tagja 6 láb 6 hüvelyk magas, akkor 6 láb 5 hüvelykre tippeljük az ikerpár másik tagjának magasságát.
(d) $\sqrt{1-0{,}95^2} \cdot 3 \approx 0{,}9$ hüvelyk.

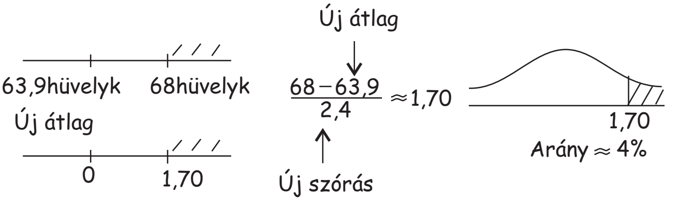
*Megjegyzés:* (i) Ha $r = 1$ lenne, akkor az ikerpár másik tagját is ugyanakkorának tippelnénk. De $r$ kisebb valamivel 1-nél. Előrejelzésünket így egy kicsivel közelebb tesszük az átlaghoz.

**„E" feladatsor**

1. (a)




(b) az új átlag ≈ 63,9 hüvelyk, az új szórás ≈ 2,4 hüvelyk




2. (a) 14% (b) 33%

3. (a) 38% (b) 60%

## 12. FEJEZET. A REGRESSZIÓS EGYENES

**„A" feladatsor**

1. (a) 1400$ · 8 + 4000$ = 15 200$
(b) 1400$ · 12 + 4000$ = 20 800$
(c) 1400$ · 16 + 4000$ = 26 400$

2. (a) 240 uncia = 15 font (b) 20 uncia
(c) 3 uncia nitrogén 18 font 12 uncia rizshozamot eredményez (1 font = 16 uncia), 4 uncia nitrogén 20 font rizst.
(d) kontrollos kísérlet.
(e) Igen. Az egyenes meglehetősen jól illeszkedik ($r = 0{,}95$), és a 3 uncia közel van az egyik alkalmazott értékhez.

(f) Nem. Ez túl messze esik a kísérletben alkalmazott értékektől.

3. (a) előrejelzés a fiú magasságára = 0,5 · apa magassága + 35 hüvelyk.
   (b) előrejelzés az apa magasságára = 0,5 · fiú magassága + 33,5 hüvelyk.

   *Megjegyzés:* Két regressziós egyenes van, az egyik az apa magasságából ad előrejelzést a fiú magasságára, a másik a fiú magasságából az apáéra (lásd a 10. fejezet 5. szakaszát).

4. A tanúvallomás túloz. Az adatokban megfigyelt együttjárás más változók hatása is lehet. Kísérlet, vagy a megfigyelt adatokkal végzett komoly munka híján nem lehetünk biztosak abban, hogy mi lesz egy beavatkozás hatása.

**„B” feladatsor**

1. 12 osztály esetén a magasságra adott előrejelzés 69,75 hüvely; 16 osztálynál 70,75 hüvelyk. A magasságra nyilvánvalóan nincs hatással a főiskola elvégzése. A megfigyeléses vizsgálatban valamely származással kapcsolatos harmadik tényezőnek betudható korrelációt találtunk a magasság és az iskolázottság között.

2. 439,16 cm, 439,26 cm. Ha nagyobb súlyt akasztunk a húrra, jobban megnyúlik. Hitelt adhatunk a 2. feladatban szereplő regressziós egyenesnek, hiszen kísérleten alapul. Az 1. feladatban megfigyeléses vizsgálatból származó adatokhoz illesztettünk egyenest.

3. (a) 520 + 110 = 630 (b) 520 (c) Nagyobb lesz

4. (a) 520 (b) 520 (c) Nagyobb lesz

   *Megjegyzés:* ha az y átlagával becsüljük *y* értékét, akkor *y* szórása lesz a négyzetes középhiba; lásd a 11. fejezet 1. szakaszát.

5. A regressziós egyenes esetén lesz a legkisebb a négyzetes középhiba (12. fejezet 2. szakasz).

# IV. rész. Valószínűség

## 13. fejezet. Mik az esélyek?

**„A“ feladatsor**

1. (a) (vi) (b) (iii) (c) (iv) (d) (i)
   (e) (ii) (f) (v) (g) (vi)

2. Körülbelül 500-ra.

3. Körülbelül 1000-szer.

4. Körülbelül 14-szer.

5. A (ii)-es doboz, mert a $\boxed{3}$ többet fizet, mint a $\boxed{2}$, a másik lap meg ugyanolyan.

**„B“ feladatsor**

1. (a) A kérdés a második lapra vonatkozik, nem az elsőre; lásd a 2. példa (a) részét; a megoldás 1/4.
(b) 1/3; 3 lap maradt, amikor kihúztuk a $\boxed{2}$ -t.

2. (a) 1/4 (b) 1/4
Visszatevéses mintavételnél a doboz változatlan marad.

3. (a) 1/2 (b) 1/2
Az 5. dobás esélyei nem függenek az első 4 dobás eredményétől.

4. (a) 1/52 (b) 1/48
A 2. példához hasonlít.

**„C“ feladatsor**

1. (a) 12/51 (b) $13/52 \cdot 12/51 = 1/17 \approx 6\%$

2. (a) 1/6 (b) $1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 = 1/216 \approx 1\%$ fele

3. (a) 4/52 (b) $4/52 \cdot 4/51 \cdot 4/50 \approx 5/10\,000$

*Megjegyzés.* Ebben a feladatban a húzások összefüggenek; a 2. feladatban a dobások függetlenek voltak.

4. A „legalább egy 1-es“ az előnyösebb választás; mintha két olyan vizsga között kellene választani, ahol az egyiknél elég, ha az ember hat kérdésből egyre jól felel, a másiknál meg mind a hatra jól kellene felelni.

5. Persze, teljesen: ez a szorzási szabály.

6. Először „írást“, aztán „fejet“ kellene dobnia, 1/4 a valószínűség.

7. (a) 1/8
(b) $1 - 1/8 = 7/8$

(c) 7/8; akkor kapunk legalább 1 írást, amikor nem 3 fejet kapunk; (b) és (c) tehát ugyanaz.
(d) 7/8; csak fel kell cserélni (c)-ben a fejeket és az írásokat.

**„D“ feladatsor**

1. (a) függetlenek: ha fehéret húzunk, 1 a 3-hoz az esély, hogy ez „1“-es, 2 a 3-hoz, hogy „2“-es; ha feketét húzunk, ugyanezek az egyes számok esélyei.
(b) függetlenek.
(c) összefüggenek: a fehéreknél csak 1 a 3-hoz az esély a „2“-esre; a feketéknél 2 a 3-hoz.

2. (a, b) függetlenek (c) összefüggenek

*Megjegyzés.* Ilyen dobozokkal a 27. fejezetben is találkozunk. Az (a) pont indoklása: tegyük fel, hogy húzunk egy lapot, amin 4-es az első szám, de nem látjuk a másodikat; ekkor 1/2 az esélye, hogy a második szám 3-as. Ugyanez a helyzet, ha az első szám 1-es. Ez a függetlenség.

3. Tíz év, az 520 hét, tehát a valószínűség
$(999\,999/1\,000\,000)^{520} \approx 0{,}9995$ .

*Megjegyzés.* New York-ban, az állami lottón körülbelül 1/12 000 000 a valószínűsége annak, hogy az ember nyerjen valamit.

4. $1/6 \cdot (5/6)^5 = 3\,125/46\,656 \approx 0{,}067$

5. Ez téves. Olyan, mint valakiről azt mondani, hogy „Nincs láza, mert elvesztettem a hőmérőt.“ Hogy független-e két dolog vagy nem, azt úgy lehet megtudni, hogy úgy teszünk, mintha tudnánk, mi lett az első kimenetele, s aztán megnézzük, változnak-e ettől a második esélyei. A hangsúly azon van, hogy „úgy teszünk“.

6. (a) 5% (b) 20%
Hogy jön ki (a): tegyük fel, hogy 80 férfi és 20 nő van a csoportban. Ezen kívül van nálunk 15 „Elsőéves“ és 85 „Másodéves“ feliratú lap. Minden diáknak egy lapot kellene adnunk úgy, hogy a nők közül a lehető legkevesebb kapjon „Másodéves“ feliratút. Stratégia: minden férfinak adjunk „Másodéves“ lapot; nálunk marad 5, ezt 5 nőnek adjuk. A 15 „Elsőéves“ feliratot a többi 15 nőnek adhatjuk.

*Megjegyzés.* Ha *nem* és *évfolyam* függetlenek volnának, a másodéves nők százalékaránya 85%-nak a 20%-a volna, kb. 17%: a két véglet között.

7. Téves. A számítás azt feltételezi, hogy minden korcsoportban azonos a nők százalékaránya, de nem az: a nők általában tovább élnek, mint a férfiak. (Valójában az USA 1992-es népességének közel 7,5%-át tették ki a 65 éves és idősebb nők.)

8. Ha a kísérleti személy a pikk ászt húzza a kisebb halomból, 13 az 52-höz lesz az esélye, hogy a teljes pakliból pikket húzva elnyerje a jutalmat. Ugyanez a helyzet, ha a kicsi halomból treff kettest húz. Vagy akármi mást. A válasz tehát 13/52 = 1/4.

## 14. FEJEZET. MÉG MINDIG A VALÓSZÍNŰSÉGRŐL

### „A“ feladatsor

1. ⚀⚃ ⚁⚂ ⚂⚁ ⚃⚀ Az esély 4/36.

2. Leggyakrabban 7; legritkábban 2 és 12. (Az egyes összegek valószínűségének megállapításához jól használható az 1. ábra – ahogy az 1. feladatban.)

3. 25-féle eredmény lehetséges; közülük 5-nél 6 az összeg. Tehát az esély 5/25. (Az ábrát itt nem mutatjuk.)

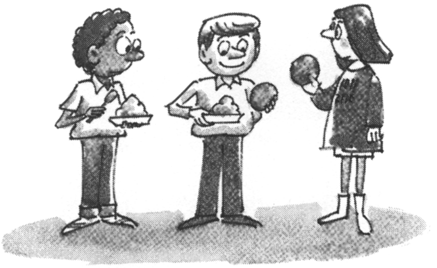
4. (a) 2/4 (b) 2/6 (c) 3/6

### „B“ feladatsor

1. Téves. A feladat azoknak a gyerekeknek a számára vonatkozik, akik ettek akár sütit, akár fagyit – azokat a torkosokat is beleértve, akik mindkettőből ettek. A szám a gyerekek választásán múlik – két lehetőséget mutatunk:

| *Csak süti* | *Csak fagyi* | *Mindkettő* | *Egyik sem* |
|---|---|---|---|
| 12 | 17 | 0 | 21 |
| 3 | 8 | 9 | 30 |

Az első zsúron 12 gyerek csak sütit evett, 17 csak fagylaltot, senki nem evett mindkettőből, és 21 gyerek egyikből sem evett. Így 12 + 17 = 29-en voltak, akik ettek fagyit vagy sütit. A második sor másik lehetőséget mutat: 9 gyerek sütit is, fagyit is evett. Itt csak 3 + 8 + 9 = 20 azoknak a száma, akik ettek sütit vagy fagyit. Ellenőrizzük gyorsan: süteményt evett 3+9=12, fagylaltot evett 8+9=17, épp, ahogy a feladatban. De azok száma, akik ettek sütit vagy fagyit, nem 12 + 17: mert így duplán számítanánk a 9 torkost. A sütit vagy fagyit evők száma a torkosok számán múlik: azon, hogy hányan ettek mindkettőből.



2. Egyformák.

3. Téves. Ha egyszerűen összeadjuk a két valószínűséget, duplán számoljuk az egyes és kettes kimenetel valószínűségét. Lásd a 14. fejezet 2. szakasz 5. példáját.

4. Téves. Bármely konkrét húzásnál 1/10 az esély arra, hogy a $\boxed{7}$ -est húzzuk, de ezek az események nem kölcsönösen kizáróak.

5. Igaz. 100% – (10% + 20%) = 70%. Használja az összeadási szabályt, a kivonáshoz pedig a 13. fejezet 1. szakaszban leírt kivonási szabályt.

**„C“ feladatsor**

1. (a) A játékosok 1/52-e lép előre.
   (b) A játékosok 1/52-e lép előre; 13. fejezet 2. példa.
   (c) Azok, akik elsőre a kőr ászt, másodikra pedig a kőr királyt húzták, kétszer lépnek előre. (Ami az utazás megnyerését illeti, ez pazarlás.) Azok részaránya, akik kétszer lépnek előre, 1/52 · 1/51.
   (d) Téves; (c)-ből is látszik, hogy ezek nem kölcsönösen kizáró események, így az összeadással kétszeresen számítanánk az együttes bekövetkezésük esélyét.

   Megjegyzés: A (d) esetben a valószínűség

   $$1/52 + 1/52 - 1/52 \cdot 1/51.$$

2. (a) A játékosok 1/52-e lép előre.
   (b) A játékosok 1/52-e lép előre.
   (c) Aki elsőre a kőr ászt húzza, nem húzhatja másodikra is a kőr ászt; senki sem lép kétszer előre.
   (d) Igaz; (c)-ből is látszik, hogy az események kölcsönösen kizáróak, így jogos az összeadás.

   *Megjegyzés.* A 2. feladatban a nyerés két lehetősége kölcsönösen kizárja egymást; az 1. feladatban nem ez a helyzet. A 2. feladatban jogos az összeadás; az 1.-ben nem az.

3. (a, b) Igaz; lásd a 13. fejezet 2. példáját.
   (c) Téves. „A treff bubi van legfelül“ és „a káró bubi van legalul“ nem kölcsönösen kizáróak, így valószínűségeik összeadása nem megengedett.
   (d) Igaz. „A treff bubi van legfelül“ és „a treff bubi van legalul“ kölcsönösen kizáróak.
   (e, f) Téves; ezek az események nem függetlenek, feltételes valószínűségekkel kell dolgozni.

4. (a) Téves; az igaz, hogy $1/2 \cdot 1/3 = 1/6$, de lehet, hogy A és B összefügg; B-nek A-ra vonatkozó feltételes valószínűségére van szükség.
(b) Igaz; lásd a 13. fejezet 4. szakaszát.
(c) Téves. (Ha „kölcsönösen kizáróak“, akkor összefüggenek; a kérdezett valószínűség valójában 0.)
(d) Téves; $1/2 + 1/3 = 5/6$, de a valószínűségeket nem lehet összeadni, mert nem tudjuk, hogy A és B kölcsönösen kizáróak-e.
(e) Téves; ha függetlenek, akkor van bizonyos esély arra, hogy mindketten bekövetkezzenek, tehát nem kölcsönösen kizáróak; nem adhatjuk össze a valószínűségüket.
(f) Igaz.

*Megjegyzés.* Ha a 3. vagy a 4. feladat nehéznek tűnne, nézze meg a 14. fejezet 3. szakasz 6. példáját.

5. Lásd a 13. fejezet 2. példáját.
(a) $4/52$ (b) $4/51$ (c) $4/52 \cdot 4/51$

**„D“ feladatsor**

1. (a) (i) (b) (i) (ii)
(c) (iii) (d) (ii) (iii)
(e) (i) (ii) (f) (i)

2. Az (a) és az (f) fogadások ugyanazt fogalmazzák meg, más szavakkal. Ugyanígy (b) és (e). A (d) fogadás előnyösebb (c)-nél.

3. (a) $3/4$ (b) $3/4$ (c) $9/16$ (d) $9/16$ (e) $1 - 9/16 = 7/16$

4. (a) Annak esélye, hogy ne legyen egyes $= (5/6)^3 \approx 58\%$, így annak esélye, hogy legalább egy egyes legyen $\approx 42\%$. A de Méré-példa, 4 dobás helyett 3 dobásra.
(b) 67% (c) 89%

5. $1 - (35/36)^{36} \approx 64\%$

6. Az esély arra, hogy a 17-es égtáj a 22 dobás során egyszer se jöjjön ki, $(31/32)^{22} \approx$ $\approx 49{,}7\%$. Ennélfogva az esély arra, hogy a 22 dobás során valamikor felbukkanjon, $100\% - 49{,}7\% = 50{,}3\%$. Így ez a fogadás is – ha egy az egyhez tették – a Golyóbis Mesterének kedvezett. Szegény Kalandorok.

7. Az ötven bevetés túlélésére az esély $(0{,}98)^{50} \approx 36\%$. Az események, amelyek valószínűségeit Deighton összeadja, nem kölcsönösen kizáróak.

## 15. FEJEZET. A BINOMIÁLIS FORMULA

### „A“ feladatsor

1. A sorrendek száma 4.

2. A sorrendek száma 6.

3. (a) $(5/6)^4 = 625/1296 \approx 48\%$
   (b) $4(1/6)(5/6)^3 = 500/1296 \approx 39\%$
   (c) $6(1/6)^2(5/6)^2 = 150/1296 \approx 12\%$
   (d) $4(1/6)^3(5/6) = 20/1296 \approx 1{,}5\%$
   (e) $(1/6)^4 = 1/1296 \approx$ 1%-nak a 0,08-része
   (f) Összeadási szabály: $(150 + 20 + 1)/1296 \approx 13\%$

4. Ugyanaz, mint a 3(a-c) feladat. Egyest dobni olyan, mint pirosat húzni, a többi szám (2-6) megfelel a zöldnek. Miért? – képzeljünk el két embert, A-t és B-t, amint egy-egy valószínűségi kísérletet végeznek:
   ■ A négyszer dob egy kockával, és számolja az egyeseket.
   ■ B négyszer húz véletlenszerűen, visszatevéssel a $\boxed{\text{P}}\ \boxed{\text{Z}}\ \boxed{\text{Z}}\ \boxed{\text{Z}}\ \boxed{\text{Z}}\ \boxed{\text{Z}}$ dobozból, és számolja a P-okat.

   A használt eszközök különböznek, de ha azt nézzük, hogy milyen valószínűséggel dobunk ennyi vagy annyi egyest (vagy húzunk ennyi vagy annyi pirosat), akkor ebből a szempontból a két kísérlet egyenértékű.
   - ■ Négyszer dobunk, négyszer húzunk.
   - ■ A dobások függetlenek; a húzások is.
   - ■ Mindegyik dobásnak 1/6 esélye van arra, hogy növelje a darabszámot (egyesek); ugyanígy mindegyik húzásnak (pirosok).

5. Annak az esélye, hogy pontosan 5 fejet dobjunk, $\frac{10!}{5!5!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 25\%.$

   Annak az esélye, hogy pontosan 4 fejet dobjunk, $\frac{10!}{4!6!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{210}{1024} \approx 21\%.$

   Ugyanennyi az esély arra, hogy pontosan 6 fejet dobjunk. Annak a valószínűsége, hogy a fejek száma 4 és 6 közé essék, az összeadási szabály szerint $672/1024 \approx 66\%$.

6. Azt kell tudnunk, hogy milyen valószínűséggel kapunk 7, 8, 9 vagy 10 fejet, ha egy érmével 10-szer dobunk. Alkalmazzuk a binomiális formulát és az összeadási szabályt:

$$\frac{10!}{7!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{10!}{8!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{10!}{9!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{10!}{10!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{176}{1024} \approx 17\%\,.$$

*Megjegyzés.* Inkább véletlen, mint a vitaminok hatása.

# V. rész. Véletlen ingadozás

## 16. FEJEZET. A NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYE

### „A” feladatsor

1. Abszolút számban kifejezve a hiba 50, százalékban 5%.

2. Abszolút számban kifejezve a hiba 1000, százalékban 1%-nak az 1/10-e. Vesse össze az előző feladattal: abszolút számban a véletlen hiba nőtt (50-ről 1000-re), százalékosan kifejezve csökkent (5%-ról az 1% 1/10-ére).

3. Téves. A valószínűség marad 50%.

4. (a) Tíz dobás. Ahogy nő a dobások száma, egyre valószínűbb, hogy a fejek száma közel lesz az 50%-hoz, s egyre kevésbé valószínű, hogy 60% fölött legyen. Nekünk az jó, ha nagy a százalékban kifejezett véletlen ingadozás – a kevés dobás előnyösebb a sok dobásnál.
   (b) Száz dobás. Mert most viszont nem jó nekünk, ha nagy a százalékban kifejezett véletlen ingadozás – közel akarunk maradni az 50%-hoz. Ha sokat dobunk, alacsonyabb a százalékban kifejezett véletlen ingadozás. A sok dobás előnyösebb.
   (c) Száz dobás; mint (b)-nél.
   (d) Tíz dobás. Ahogy nő a dobások száma, egyre kevesebb és kevesebb lesz az esély rá, hogy a fejek száma pontosan megegyezzék a fejek várható számával. Képzeljünk el egy extrém példát: 1 000 000-szor dobunk egy érmével. Annak valószínűsége, hogy pontosan 500 000 fejet kapjunk – tehát nem 500 001-et és nem is 500 003-at és nem is 499 997-et vagy más, 500 000-hez közeli számot –, egészen elenyésző.

5. Az (i) a jobbik. Ugyanaz a helyzet, mint a 4(a) feladatnál.

6. A (ii)-es válasz; a véletlen hiba miatt.

7. Nagyjából egyforma a helyzet, akár visszatevéssel, akár visszatevés nélkül végezzük a húzást.

8. Egyformák. Mindkettőben 50% $\boxed{-1}$ és 50% $\boxed{+1}$ van.

9. Előbb-utóbb lesz nagy negatív véletlen hiba is. Aztán lesz megint pozitív is. A kilengések, abszolút számban kifejezve, egyre vadabbak.

## „B” feladatsor

1. $47 \cdot 1 + 53 \cdot 2 = 153$.

2. (a) 100, 200 (b) 50, 50 (c) $50 \cdot 1 + 50 \cdot 2 = 150$.

3. (a) 100, 900 (b) $33 \cdot 1 + 33 \cdot 2 + 33 \cdot 9 \approx 400$.

   *Megjegyzés:* A 400 nincs 100 és 900 között középen.

4. Mindháromnál 500 a jó tipp; legjobb a (iii)-as, legrosszabb az (i)-es.

5. „1”-esre az esély 1 a 10-ből=1/10; a „3 vagy kevesebb” esélye 3/10; a „4 vagy több”-re pedig 7/10 az esély: 7 esik a 10 szám közül 4 és 10 közé (ha 4-et és 10-et is ideértjük). A 13-14. fejezetben foglalkoztunk a dobozokból végzett véletlenszerű húzásokkal.

6. Az (i)-es doboz a jobb – kevesebb benne a –1, és ebben is ott van a 2-es.

7. Az (i) és a (ii) jók. A tiszta nyereség a nyereségek és veszteségek előjeles összegeként adódik.

## „C” sorozat

1. (i) és (ii) egyformák. (iii) szerint mind a tíz húzásnak „1”-esnek kell lennie – ez rosszabb, mint (i).

2. Az (i) lehetőség nem jó; a húzások összegének semmi köze a tiszta nyereséghez. A (ii) lehetőség nem jó; azt mondja, hogy egy fordulóban 2/36 eséllyel nyerhetünk 17 dollárt – nekünk 2/38 az esélyünk. A (iii) válasz jó. Ha kételyei lennének, nézze meg újra a 16. fejezet e szakaszának 1. példáját.

3. Tiszta nyereségünk olyan, mint 10 véletlenszerű, visszatevéses húzás összege a

   $$\left| \boxed{36\$}\ 1\ \text{lap},\ \boxed{-1\$}\ 215\ \text{lap} \right|$$

   dobozból. Szörnyű játék.

## 17. FEJEZET. A VÁRHATÓ ÉRTÉK ÉS A STANDARD HIBA

### „A“ feladatsor

1. (a) $100 \cdot 2 = 200$ (b) $-25$ (c) 0 (d) $66\frac{2}{3}$

   *Megjegyzés (d)-hez:* A várható érték nem feltétlenül tartozik a lehetséges értékek közé. Valahogy úgy, mint amikor azt mondjuk, hogy egy átlagos családban 2,1 gyermek van. Van értelme, noha „az átlagos család” statisztikai fikció.

2. Ez ugyanaz, mint két húzás összege a $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$ dobozból. A megoldás tehát $2 \cdot 3{,}5 = 7$ mező.

3. A modellt megadtuk a 16. fejezet 4. szakaszban. A dobozbeli számok átlaga

$$(35\$ - 37\$)/38 = -2\$/38 \approx -0{,}05\$$$

   (Az átlag kiszámításához össze kell adni a dobozbeli lapokon lévő számokat; a $\boxed{35\$}$ 35 dollárt hozzáad az összeghez; a 37 darab $\boxed{-1\$}$ viszont elvesz 37-et; ezután osztanunk kell a dobozban lévő lapok számával, 38-cal.) A várható tiszta nyereség $100 \cdot (-0{,}05\$) = -5\$$. Körülbelül 5 dollár veszteségre számíthatunk.

4. A doboz a 16. fejezet 4. szakaszában látható. A doboz átlaga

$$(18\$ - 20\$)/38 = -2\$/38 \approx -0{,}05\$$$

   (Az átlag a dobozban lévő számok összege, 38-cal osztva; a 18 egydolláros lap 18 dollárt hozzáad az összeghez, míg a 20 mínusz egy dolláros 20 dollárt elvesz belőle.) A várható tiszta nyereség $100 \cdot (-0{,}05\$) = -5\$$.

   *Megjegyzés:* A 3. és 4. feladat szerint mindkét tétnél (az egy számnál és a pirosvagy-feketénél is) arra számíthatunk, hogy játékonként elveszítjük tétünk 1/19-ét.

5. $-50\$$. Tanulság: aki többet játszik, többet veszít.

6. A doboz átlaga $(18x - 20\$)/38$. A játék akkor igazságos, ha ez 0. Az egyenlet $18x - 20\$ = 0$. Így $x \approx 1{,}11\$$. Fizessenek 1,11 dollárt.

7. A Golyóbis Mesterének 31 fontot kellett volna fizetnie – pontosan ahogy a Kalandorok gondolták. Tanulság: lehet a Kalandoroké az izgalom, a haszon a Golyóbis Mesteréé.

## „B” feladatsor

1. (a) A doboz átlaga 4; szórása = 2. Az összeg várható értéke tehát $100 \cdot 4 = 400$; az összeg standard hibája, $SH = \sqrt{100} \cdot 2 = 20$.
   (b) 400 körül, körülbelül plusz–mínusz 20-ra.
   (c) Tippeljen 400-ra; a tévedés plusz–mínusz 20 körül lesz. A (b) és (c) pont az (a)-ban megadott számokat értelmezi.

2. A tiszta nyereség olyan, mint 100 húzás összege a $\boxed{\boxed{-1\$}\ \boxed{1\$}}$ dobozból. A doboz átlaga 0$; a szórás 1$. Száz húzás összegére a várható érték 0$; az összeg standard hibája $SH = \sqrt{100} \cdot 1\$ = 10\$$. Tehát tiszta nyereségünk 0$ körül lesz, tőle úgy plusz–mínusz 10$-ra.

3. A (ii) sorbeli számok túl közel vannak 50-hez; egyikük sincs 5-nél messzebb. A (iii)-ban túl szabályosan váltakoznak. Az (i) sor az igazi.

4. A várható érték 150, a megfigyelt érték 157, a véletlen hiba 7, a standard hiba 10.

5. Mikor a húzások számát 4-gyel szorozzuk, a várható érték 4-gyel szorzódik, a SH viszont csak $\sqrt{4} = 2$-vel. A 100 húzás összegének tehát $4 \cdot 50 = 200$ a várható értéke, a SH pedig $2 \cdot 10 = 20$.

6. (a) igaz, (b) téves: a húzások öszegének a várható értékét a

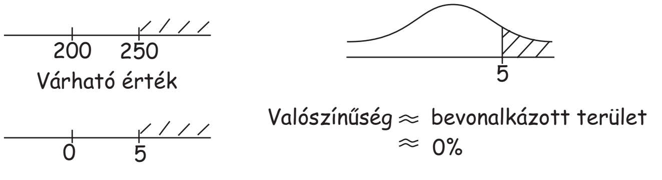
   $$(\text{húzások száma}) \cdot (\text{doboz átlaga})$$

   képlettel pontosan ki lehet számítani. (c) téves, (d) helyes: az összeg el fog térni a várható értéktől, és hogy mennyivel, azt a SH (standard hiba) mondja meg.

7. Igen, igaz. Ilyen számra az esély kicsi, de pozitív. Ha elég soká várunk, a kis valószínűségű események is bekövetkeznek.

## „C“ feladatsor

1.) (a) Legkisebb: 100; legnagyobb: 400.
   (b) A doboz átlaga 2; szórása = 1. Az összeg várható értéke $100 \cdot 2 = 200$; az összeg standard hibája $\sqrt{100} \cdot 1 = 100$. Az összeg 200 körül lesz, attól úgy plusz–mínusz 10-re.
   (c)



2. (a) Legfeljebb 900; legalább 100. (b) Esély ≈ 68%

3. (a) A várható érték 0, így az összeg 0 körül lesz – leginkább az összeg véletlen ingadozásában bízhatunk: az a jó nekünk, ha az összeg távol van a várható értékétől. A véletlen ingadozás a húzások számának emelkedésével nő – válasszuk a 100 húzást.
(b) Ugyanaz, mint (a).
(c) Az összeg véletlen ingadozása most ellenünk dolgozik: arra lenne szükségünk, hogy az összeg közel maradjon a várható értékéhez – válasszuk a 10 húzást.

4. (i) Az összeg várható értéke = 500; standard hibája = 30.
(ii) Az összeg várható értéke = 500; standard hibája = 20.
Az összeg mindkettőnél 500 körül lesz, de az (i)-es összeg messzebbre lesz tőle. A véletlen ingadozás a javunkra szolgál (a)-nál és (b)-nél – válasszuk (i)-et. Viszont (c)-nél a véletlen ingadozás ártalmunkra van – válasszuk (ii)-t.

5. 98%-hoz.

6. Vagy nyernek 25 000 dollárt (20/38 ≈ 53% valószínűséggel), vagy veszítenek 25 000 dollárt (18/38 ≈ 47% valószínűséggel). A válasz 50%.

   *Megjegyzés:* A kaszinó jobban örül a sok apró tétnek, amikor a haszna szinte biztos, mint egyetlen nagy tétnek, melyen jelentős a kockázata.

7. Az egyik számmal 35 000 dollárt nyer; a többi 37-tel viszont veszít, tehát egész biztos, hogy 2 000 dollárt fog veszíteni.

   *Megjegyzés:* A kaszinó szereti, ha a játékosok szétterítik a tétjeiket.

8. A (ii)-es válasz a jó; a SH nem nő kétszeresére, csak $\sqrt{2} \approx 1{,}4$-szeresére.

## „D“ feladatsor

1. (a) Nem: helyettesítsük az 5-ös szorzót 7– (–2) = 9-cel. (b) Igen. (c) Igen.
(d) Nem – a számsorban 3 különböző szám van, nem alkalmazható a recept.

2. A tiszta nyereség olyan, mint 100 húzás összege a

$$\boxed{2\$}\ \boxed{-1\$}\ \boxed{-1\$}\ \boxed{-1\$}$$

   dobozból. A doboz átlaga (2$ – 1$ – 1$ – 1$)/4 = –0,25$. Szórása:

$$[2\$ - (-1\$)] \cdot \sqrt{1/4 \cdot 3/4} \approx 1{,}30\,\$ \ .$$

   100 játékból a tiszta nyereség 100 · (–0,25$) = –25$ körül lesz, plusz–mínusz körülbelül $\sqrt{100} \cdot 1{,}30\$ = 13\$$.

3. (a) A cég szempontjából A főnök kedvencére tett 1 dolláros tét olyan, mint egy húzás a

$$\boxed{-6\$}\ 5\text{ lap},\quad \boxed{1\$}\ 33\text{ lap}$$

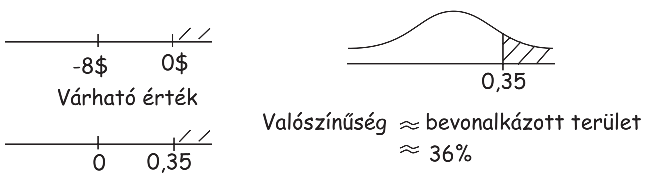
dobozból. A doboz átlaga [5 · (–6$) + 33 · 1$]/38 ≈ 0,08$. A bank tehát 8 cent nyereséget várhat megtett dolláronként. Csoda, hogy ez a főnök kedvence?
(b) A játékos tiszta nyeresége olyan, mint 100 visszatevéses, véletlenszerű húzás összege a

$$\boxed{6\$}\ 5\text{ lap},\quad \boxed{-1\$}\ 33\text{ lap}$$

dobozból. A doboz átlaga ≈ –0,08$; szórása:

$$= [6\$ - (-1\$)] \cdot \sqrt{5/38 \cdot 33/38} \approx 2{,}37\$$$

Száz játékon a játékos tiszta nyeresége 8 dollár körülre várható, attól cirka 24 dollárra.




4. A várható nyereség 100, tucatra tett egydolláros tétből –5$; SH = 14$. A várható nyereség 100, pirosra tett egydolláros tétből –5$; SH = 10$. A várható tiszta nyereség egyforma (i) és (ii) esetén. De (i) esetén nagyobb a SH, azaz nagyobb az ingadozás: (a) téves, (b) és (c) helyesek.

## „E” feladatsor

1. (a) Szavakat nem lehet összeadni – az (i)-es doboz kiesik. A (iii)-as doboznál 3-ból 2 az esély, hogy az összeg nőjön, holott csak 2-ből 1-nek kellene lennie. Az (i)-es doboz az igazi.
(b) A doboz átlaga 0,5 és a szórása is 0,5. A 16 húzás összegének 16 · 0,5 = 8 a várható értéke; a standard hibája $\sqrt{16} \cdot 0{,}5 = 2$. A fejek száma 8 körül lesz, attól körülbelül 2-re.

2. Új doboz: $\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$. Ez ±3 SH, az esély körülbelül 99,7%.

3. Új doboz: $\boxed{0}\ \boxed{1}$. Ez legalább ±1 SH, az esély körülbelül 16%.

4.

| *100-dobásos szakasz* | *Megfigyelt érték* | *Várt érték* | *Véletlen hiba* | *Standard hiba* |
|---|---|---|---|---|
| 1-100 | 44 | 50 | –6 | 5 |
| 101-200 | 54 | 50 | +4 | 5 |
| 201-300 | 48 | 50 | –2 | 5 |
| 301-400 | 53 | 50 | +3 | 5 |

5. 68-at várnánk – a 17. fejezet 5. szakasz 5. példa szerint; valójában 69-et látunk.

6. (a,b) Körülbelül 99,7%; 3 standard hibányi eltérés.

   *Megjegyzés:* Hogy a dobások száma 10 000-ről 1 000 000-ra nő, a fejek százalékaránya közelebb kerül 50%-hoz: a 99,7%-os intervallum

   $$(50\% \pm 1{,}5\%)\ \text{-ról} \qquad (50\% \pm 0{,}15\%)\ \text{-ra}$$

   zsugorodik.

7. Várható 30, megfigyelt 33, véletlen hiba 3, SH körülbelül 3,5.

8. Tegyünk a dobozba öt 0-st és öt 1-est. És mondjuk neki, hogy 1000-szer húzzon.

9. Nagyon jó. Ez nem jelenti, hogy az egyesek számának pontosan 16,67-nek kellene lennie, csak azt, hogy ekörül várjuk.

## 18. FEJEZET. ELMÉLETI HISZTOGRAMOK NORMÁLIS KÖZELÍTÉSE

### „A" feladatsor

1. 70 és 80 között (a végpontokat is beszámítva).

2. (a) 6,5 és 10,5 közötti;
   (b) 6,5 és 7,5 közötti – a 7 fölötti téglalap bal és jobb széle.

3. (a) 7
   (b) a 7: a legmagasabb oszlop a 2. rajzon.
   (c) Nem: puszta véletlen ingadozás. A 4 tényleg kevésbé valószínű az 5-nél – látszik az alsó rajzról.
   (d) (iii). A felső rajz tapasztalati hisztogram – megfigyelt százalékokat mutat, nem valószínűségeket.

4. (a) 3, 6
   (b) Az alsó rajzon – esélyeket az elméleti hisztogram mutatja. A 2 és a 3 a szorzatnak egyformán valószínű értéke.

(c) A második rajz mutatja: a 3 jött ki többször. Ez is véletlen ingadozás.
(d) A 14-es értéket a szorzat nem veheti fel; indok: a 14-et csak kétféleképpen tudjuk szorzattá alakítani: 1·14-re és 2·7-re; a dobókockákon nincs sem 7-es, sem 14-es.
(e) Az alsó rajz elméleti hisztogram, így az alatta lévő területek valószínűségeket mutatnak: 11,1% a valószínűsége, hogy két dobókockával dobva 6 lesz a szorzat.

5. Az A az (i)-sel, a B a (ii)-sel tartozik össze. A B laposabb, jobban szétterjed, s jobbra fekszik A-tól. B-nek tehát mind az átlaga, mind a szórása nagyobb.

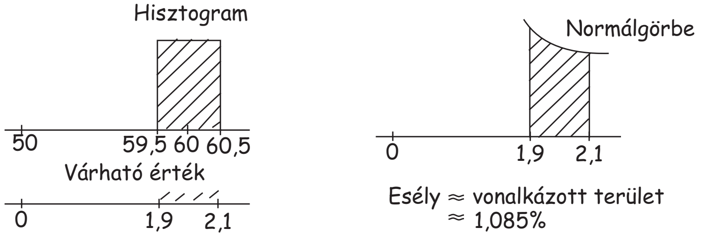
6. Téves. Az összegre vonatkozó elméleti hisztogram az összegre vonatkozó valószínűségekről szól. Arról nem szól, hogyan zajlanak az egyes húzások. A vonalkázott terület azt mutatja, hogy az összeg milyen valószínűséggel esne 5 és 10 közé (végpontokat hozzászámítva). (85 lap volt 0-s, kettő 1-es és tizenhárom 2-es a dobozban.)

**„B" feladatsor**

1. (i) Pontosan 6 fej.
(ii) 3 és 7 között (a végpontokat nem számítva hozzá)
(iii) 3 és 7 között (a végpontokat hozzászámítva)

2. A hisztogram alatti, 51,5 és 52,5 közötti terület adja a pontos valószínűséget. A normálgörbe csupán közelítés (de nagyon jó közelítés).

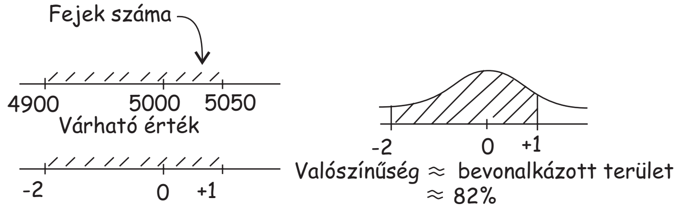
3. A fejek számának várható értéke 50; SH=5. A 3. ábráról a 60 fölötti téglalap területére volna szükségünk.




*Megjegyzés:* A pontos valószínűség 1,084%.

4. A 3. feladatból: minden száz szakaszból körülbelül 1-ben illenék pontosan 60 fejnek lennie. És valóban pontosan 1 ilyen szakasz van a száz között (a 6901–7000-es százas).

5. A fejek számának várható értéke 5000; SH=50.
(a)



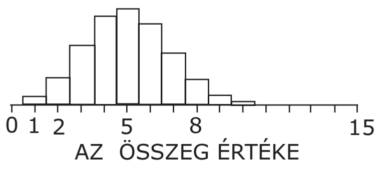

(b) az esély ≈ 2%  (c) az esély ≈ 16%

6. (a) Igen. Nagyok az oszlopok.  (b) Nem. Kicsik az oszlopok.

*Megjegyzés az (a) ponthoz:* A szélső mezőket figyelembe vevő pontosabb móddszerrel 50%-ról 54%-ra módosul a becslés.

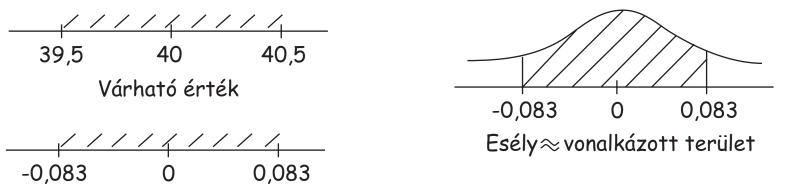
### „C" feladatsor

1. (a)




(b) a 3 valószínűbb a 8-nál: magasabb a 3 fölötti oszlop.

2. A fejek száma 400 dobásból ezzel a cinkelt érmével olyan, mint 400 húzás összege a | 9 db $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ | dobozból. A fejek várható száma 40; SH = 6. A 6. ábra alsó rajzáról a 40 fölötti téglalap területe az, amire szükségünk van.




A táblázat szerint ez a terület 4% és 8% közé esik. (Igazából a terület, és így a valószínűség is 6,6%.)

3. 1 körül a normálgörbe alacsonyabb a hisztogramnál, így a becslés alacsony lenne.

4. Igen. Nagyok az oszlopok.

5. A (ii), B (i), C (iii). Mennél féloldalasabb a doboz, annál ferdébb a hisztogram.

   *Megjegyzés:* Ha a $\boxed{24\ \boxed{0}\text{ -s }\boxed{1}}$ dobozból húzunk 25-ször, nem sok $\boxed{1}$ -est várhatunk. Az elméleti hisztogram bal szélső téglalapja annak a valószínűségét mutatja, hogy az összeg nulla – hogy az összes húzás $\boxed{0}$ . Ez a valószínűség 36%. A következő téglalap annak a valószínűségét mutatja, hogy az összeg 1: hogy a húzások között egy $\boxed{1}$ és 24 $\boxed{0}$ lesz. Ez a valószínűség 38%. És így tovább. (A valószínűségeket a binomiális formulával – 15.fejezet – lehet kiszámítani.)

6. (i) 100 (ii) 400 (iii) 900
   Ahogy a húzások száma nő, a hisztogramok egyre közelebb lesznek a normálgörbéhez.

7. Válassza az (i)-et.

   *Megjegyzés:* A valószínűségeket az elméleti hisztogramok alatti területek mutatják. Sokszor jó közelítést adnak a normálgörbe alatti megfelelő területek – itt nem. A görbe sokkal feljebb megy, mint a hisztogram, így a görbe alatti terület sokkal nagyobb, mint a hisztogram alatti terület.

8. Legnagyobb eséllyel 105; legkisebb eséllyel 101; várható érték 100.

   *Megjegyzés:* A hisztogram a várható érték közelében behorpad. (100 húzásnál a horpadás kisimul.)

9. (a) Jóval 50% alatti. A 276 000-es érték 0,276 millió, körülbelül félúton fekszik 0,2 és 0,4 között a vízszintes tengelyen. Az ettől a ponttól jobbra eső terület 50%-nál sokkal kisebb. (A hisztogram jobbra nagyon hosszan elnyúlik – a várható érték sokkal nagyobb a mediánnál.)
   (b) 1 000 000/100 = 10 000.
   (c) Sokkal valószínűbb, viszonylagosan, a 400 000–410 000 tartomány. A 400 000-rel jobbról szomszédos oszlop, viszonylagosan, sokkal magasabb, mint a 400 000-rel balról szomszédos oszlop. A szorzatok elméleti hisztogramjai általában igen szabálytalanok.

# VI. rész. Mintavétel

## 19. FEJEZET. NAGY MINTÁN VÉGZETT FELMÉRÉSEK

### „A" feladatsor

1. A populáció: az adott félévre beiratkozott összes hallgató a posztgraduális képzésre járók kivételével. A paraméter azon hallgatók aránya, akik a szüleiknél laknak.

2. (a) Valószínűségi eljárásról van szó: tökéletesen meghatározott eljárás, a véletlen eltervezett módon lép fel (amennyiben véletlen kezdőpontot választunk 1 és 100 között), és senki sem befolyásolhatja, hogy ki kerül be a mintába.
(b) Eltér az eljárás az egyszerű véletlen mintavételtől. Például az ábécérendben szomszédos személyek nem kerülhetnek mindketten a mintába. (A 4. szakaszban definiáltuk az egyszerű véletlen mintavételt.)
(c) Torzításmentes a minta: minden személynek egyforma esélye van a mintába kerülésre.

3. (ii) a helyes válasz. Lásd a 2., 3., és 5. szakaszokat.

4. A minta és a populáció egybeesik, nevezetesen az összes olyan férfi Hollandiában, aki 1968-ban 18 éves volt. Mintavételi hibának itt nincs helye.

5. A telefonon keresztül végzett felmérés torzítást okozhat, mivel a telefonelőfizetők nagy valószínűséggel különböznek a telefonnal nem rendelkezőktől. Utóbbiak azonban olyan kevesen vannak, hogy ezt a torzítást általában figyelmen kívül hagyhatjuk. (Számíthat viszont ez a torzítás akkor, ha kicsi százalékokról készítünk becslést, vagy ha emberek olyasfajta csoportját vizsgáljuk, akiknek körében gyakoribb a telefon hiánya.) Komoly torzítást jelenthet viszont, ha telefonkönyvekből dolgozunk, hiszen sok a titkos szám. Lásd a 7. szakaszt.

   *Megjegyzés:* 1993 márciusi adatok szerint a háztartások kb. 95%-ában volt telefon.

6. Nem. Várakozásunk szerint a fekete kérdezők által megkérdezett emberek sokkal kritikusabbak. (Így is volt.)

7. Nem, a település erősen különbözhet más déli területektől. (Így is volt: itt cukrot állítottak elő, amihez sokkal több szakképzett munkás szükségeltetik, mint a gyapot termesztéséhez és feldolgozásához.)

8. Nem. Először is torzíthat a „reprezentáns" iskolák kiválasztása. Másodszor pedig az iskolák vehetnek rossz módszerekkel mintát a saját diákjaik közül.

   *Megjegyzés:* Az USA-ban körülbelül 3600 különféle típusú felsőoktatási intézmény működik. Közülük kb. 1000 nagyon kicsi, mindösszesen a hallgatók 10%-

a jár ilyenekbe. Másfelől mintegy 100 intézmény van, melyek hallgatói létszáma meghaladja a 20 000-et –ezek adják a hallgatók populációjának egyharmadát.

9. Kissé eltért. A nem válaszolók általában különböznek a válaszolóktól – a korábban válaszolók valószínűleg különböznek a később válaszolóktól. (Ebben a vizsgálatban valamivel nagyobb volt a TBC-sek aránya az utolsó 200 jelentkező között; talán jobban tartottak attól, hogy betegségük bizonyossá válik.)

10. Meggyőzőbb lett volna a minta leírása, mint ez a felelősséget kizáró fordulattal befejezett reklámszöveg.

11. Ha 20 000 kérdőívből 200 érkezik vissza, akkor a nem válaszolók miatti torzítás megsemmisítő csapást jelent. 400 kérdőívből 200 válasz esetén megfelelő a válaszolási arány ahhoz, hogy kiderüljön valami fontos: a középiskolai tanárok egy tekintélyes része teremtéselméleti nézeteket vall.

12, Nem igaz. A nem válaszolók miatti torzítás jelent komoly problémát. A tervezett mintanagyság elérése érdekében a mintába bevont további emberek nagy valószínűséggel különböznek a nem válaszolóktól, és nem oldják meg a nem válaszolók miatti torzítás problémáját.

## 20. fejezet. Véletlen hibák mintavételnél

### „A" feladatsor

1.

| | |
|---|---|
| Populáció | a doboz tartalma |
| Populációbeli arány | 40% |
| Minta | a húzások |
| Mintanagyság | 1000 |
| Mintabeli darabszám | a kihúzott 1-esek száma |
| Mintabeli arány | a kihúzott 1-esek aránya |
| A nevező a mintabeli arány kiszámításánál | 1000 |

2. A dobozmodell: 400-szor húzunk egy olyan dobozból, melyben 10 000 db 1-es és 15 000 db 0-s van. A doboz átlaga 0,40, a szórás 0,5 körül van. Az összeg várható értéke tehát $400 \cdot 0{,}4 = 160$, az összeg standard hibája $\sqrt{400} \cdot 0{,}5 \approx 10$.

(a) a darabszám várható értéke = 160, SH = 10.
(b) a százalékarány várható értéke $= (160/400) \cdot 100\% = 40\%$, $\text{SH} = (10/400) \cdot 100\% = 2{,}5\%$.
(c) 40%; 2,5%.
*Megjegyzés:* (i) A (b) és a (c) feladatrész ugyanazokra a számokra kérdez rá, a (c) részben az eredmény interpretálása a feladat. (ii) A mintabeli százalékarány várható értéke a populációbeli arány (lásd a 2. szakaszt).

3. A fejek számának standard hibája: $\sqrt{10\,000} \cdot 0{,}5 = 50$. A százalékarány standard hibája: $(50/10\,000) \cdot 100\% = 0{,}5\%$.

4. (a) és (b) is igaz.

   *Megjegyzés:* Amikor véletlenszerűen húzunk egy 0–1 dobozból, akkor a kihúzott 1-esek százalékarányának várható értéke egyenlő lesz az 1-esek dobozbeli arányával. Ez visszatevéses és visszatevés nélküli húzásoknál is igaz. Az összefüggés pontos.

5. Nem igaz. Elfelejtették átalakítani a dobozt a megfelelő modellhez! Az 1-esek száma úgy alakul, mint a

$$\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{0}$$

   dobozból végrehajtott 400 húzás összege.

6. $10\% + 1\%$. A piros golyók száma egy mintában $90 \pm 9$; ha ez a szám túl nagy, mégpedig egy standard hibányival nagyobb, akkor az $90 + 9$. Most számítsuk át ezt százalékarányra! Egy százalékarány standard hibája hozzáadódik a várható értékhez vagy kivonódik abból. Szó sincs szorzásról.

7. A teljes megtett távolság az összes dobás összege. Ez olyan, mint 200 (véletlenszerű, visszatevéses) húzás összege a következő dobozból:

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$$

   A doboz átlaga 3,5, a szórás 1,7. Tehát azt várhatjuk, hogy $200 \cdot 3{,}5 = 700$-at léphet előre, nagyjából $\sqrt{200} \cdot 1{,}7 \approx 24$ eltéréssel pozitív vagy negatív irányban.

8. Sherlock Holmes megfeledkezik a véletlen hibáról.

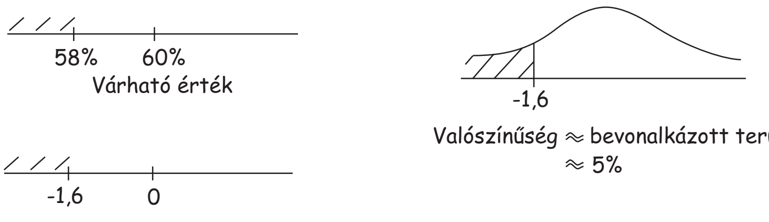
**„B" feladatsor**

1. (a) A piros golyók mintabeli százalékarányának várható értéke megegyezik a piros golyók alapsokaságbeli százalékarányával.
   (b) Ha több golyót húzunk, akkor a piros golyók számának standard hibája a mintában megnő, a piros golyók százalékarányának standard hibája viszont lecsökken.

2. Először fel kell állítanunk a dobozmodellt. 30 000 cédula kerül a dobozba, regisztrált szavazónként egy. Ebből 12 000-et 1-essel jelölünk (demokraták), 18 000-et 0-val (republikánusok). A demokraták mintabeli aránya olyan, mint a dobozból kihúzott 1000 szám összege. Az 1-esek aránya a dobozban 0,4. Az összeg várható értéke $1000 \cdot 0{,}4 = 400$. A doboz szórása $\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6} \approx 0{,}49$. Az összeg standard hibája $\sqrt{1000} \cdot 0{,}49 \approx 15$.

(a) A várható érték 400 az 1000-ből, azaz 40%. A százalékarány standard hibája 15 az 1000-ből, azaz 1,5%. (Nem meglepetés a várható érték: a regisztrált szavazók 40%-a demokrata.)
(b) A demokraták aránya a mintában valószínűsíthetően 40% körül lesz, olyan 1,5% eltéréssel pluszban vagy mínuszban. Az (a) és a (b) részt egyformán kell kiszámítani; (b)-ben indokolni kell az eredményt.
(c) Ez ±0,67 SH, 48% körül van a valószínűsége.

3. (a) A dobozba 100 000 cédula kerül, személyenként egy. Ebből 60 000-et 1-essel jelölünk (házas), 40 000-et 0-val. A házasok aránya a mintában olyan, mint a dobozból kihúzott 1600 szám összege. Az összeg várható értéke $1600 \cdot 0{,}6 = 960$. A doboz szórása $\sqrt{0{,}6 \cdot 0{,}4} \approx 0{,}5$. Az összeg standard hibája $\sqrt{1600} \cdot 0{,}5 = 20$. A házasok száma a mintában 960 lesz, körülbelül plusz–mínusz 20 eltéréssel. A 960 az 1600-nak 60%-a, és a 20 az 1600-nak 1,25%-a. Tehát a minta 60%-a lesz házas, plusz–mínusz olyan 1,25% eltéréssel.




(b) A dobozba 100 000 cédula kerül, közülük 10 000 1-essel jelölve (75 000$ fölötti jövedelem), a többi 90 000 pedig 0-val jelölve. A húzások száma 1600. A valószínűség 9% körül van.
(c) A dobozban 100 000 cédula van, melyek közül 20 000 1-essel van megjelölve (felsőfokú végzettségű), a többi 80 000 cédula pedig 0-val. A húzások száma 1600. A valószínűség 68% körül van.

4. A bevonalkázott terület annak a valószínűségét jelenti, hogy olyan mintát kapunk, amelyben 22% vagy még több az évi 50 000$ fölött keresők aránya.

5. (a) annak esélyét, hogy 88 magas jövedelmű lesz a mintában.
(b) annak esélyét, hogy 22% magas jövedelmű lesz a mintában.
(c) A 88 a 400-nak 22%-a, tehát ugyanazt az esélyt írtuk le kétféle módon. Cseppet sem véletlen az egybeesés.

## „C” feladatsor

1. (iii) a helyes. Erről szólt ez a szakasz.

2.

| *Húzások száma* | *A kihúzott 1-esek arányának SH-ja* |
|---|---|
| 2500 | 1% |
| 25 000 | 0,27% |
| 100 000 | 0% |

*Megjegyzés:* 100 000 húzás után nem marad cédula a dobozban, így a kihúzott 1-esek arányában semmiféle bizonytalanság sincs.

3. 2500 fős minta szükséges.

4. Mindhárom doboznál ugyanakkora a standard hiba, minthogy ugyanakkora az 1-esek aránya, így a szórás is.

5. SH visszatevéssel = 20%; SH visszatevés nélkül $\sqrt{\dfrac{10-4}{10-1}} \cdot 20\% \approx 16\%$.

   *Megjegyzés:* A példa meglehetősen mesterkélt. A dobozban lévő cédulák nagy részét kihúzzuk, így a korrekciós tényező valóban nagyon fontos.

## 21. FEJEZET. A SZÁZALÉKARÁNYOK PONTOSSÁGA

### „A" feladatsor

1. (a) megfigyelt (b,c) az adatok alapján becsülhető

   *Megjegyzés:* Nagy különbség van a 20. és a 21. fejezet között. A 20. fejezetben ismertük a doboz összetételét, és pontosan ki tudtuk számolni a várható értéket és a standard hibát. Itt az adatokból kell becsülnünk a doboz összetételét. A 20. fejezetben előrefelé okoskodtunk, a doboz alapján a húzásokról. Most visszafelé okoskodunk: a húzásokból a dobozra következtetünk.

2. Az első lépés a modell felállítása. (Szükségünk van rá, hogy kiszámíthassuk a húzások összegének standard hibáját.) 100 000 cédula van a dobozban, egyeseken 1-es (jelenleg főiskolára jár), a többin 0 (nem jár főiskolára) áll. Azután 500-at húzunk a dobozból, hogy megkapjuk a mintát. A főiskolára járók száma a mintában olyan, mint a húzások összege. Az 1-esek aránya a dobozban ismeretlen, de becsülhetjük az 1-esek mintában megfigyelt arányával, ami $194/500 \approx 0{,}388$. A doboz szórását így $\sqrt{0{,}388 \cdot 0{,}612} \approx 0{,}49$-nek becsülhetjük. Az összeg standard hibája $\sqrt{500} \cdot 0{,}49 \approx 11$. Valószínűen ekkora véletlen hibát tartalmaz a 194. A százalékarány standard hibája: $(11/500) \cdot 100\% = 2{,}2\%$. A város 18-24 éves lakosai közül a főiskolára járók arányát 38,8%-ra becsüljük. Ez a becslés valószínűsíthetően olyan 2,2%-ot téved. A becslésünk 38,8%, a plusz–mínusz érték 2,2%.

3. A becslés 48%, plusz-mínusz kb. 5%.

4. A becslés 4%, plusz-mínusz kb. 1%.

5. A becslés 54%, plusz-mínusz kb. 2,5%.

6. Nem. Néhány nagy létszámú cégnél dolgozik az emberek többsége.

7. SH = 2%.

8. (a) 18,0% ± 1,9% (b) 21,0% ± 2,0% (c) 24,5% ± 2,2%.

   *Megjegyzés:* A harmadik személy néhány SH-t téved az 1-esek dobozbeli arányának becslésénél, de a standard hiba becslésében így is csak 0,2%-ot téved. Jó a „bootstrap módszer" a standard hiba becslésére.

9.

| | *Tudjuk, hogy...* | *Becslésünk szerint* |
|---|---|---|
| Megfigyelt érték | 30,8% | NÉ |
| Várható érték | NÉ | 30,8% |
| Standard hiba | NÉ | 1,5% |
| Doboz szórása | NÉ | 0,46 |
| Húzások száma | 1 000 | NÉ |

**„B" feladatsor**

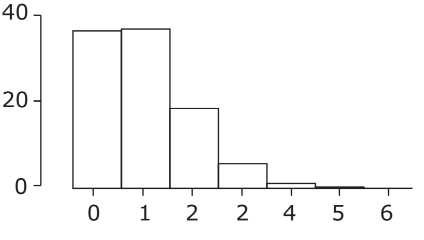
1. (a) megfigyelt (b,c) az adatokból becsült
   Lásd az 1.szakasz 1. feladatát.

2. (a) 38,8% ± 4,4% (b) 38,8% ± 6,6% (c) 38,8% ± 3,3%

   *Megjegyzés:* A megbízhatósági szint növekedésével a konfidenciaintervallum is nő. A mintanagyság növelésével viszont kisebb lesz a konfidenciaintervallum hossza.

3. (a) 1 piros golyót várunk, olyan 1 golyónyi eltéréssel pluszban vagy mínuszban.
   (b) Lehetetlenség 0-nál kevesebb piros golyót húzni, ennek valószínűsége tehát 0.
   (c) Körülbelül 16%. (Még rosszabb a helyzet, ha folytonossági korrekciót alkalmazunk: 31%, lásd 18. fejezet 4. szakasz.
   (d) Nem. Amennyiben a valószínűségi hisztogram hasonlít a normálgörbéhez, a görbéről leolvasható a 0-nál kevesebb piros golyó kihúzásának valószínűsége. Minthogy 16% ≠ 0% (lásd (b) és (c) pont), a hisztogram nem hasonlít a normálgörbére.

   *Megjegyzés:* A hisztogram itt látható:



4. Nem igaz. Itt nem alkalmazhatjuk a normális közelítést. A mintából adható legjobb becslésünk, hogy a dobozban lévő golyók 1%-a piros, 99%-a kék. Ez a 3. feladatban szereplő doboz. Az ebből kihúzott 100 golyó közül pirosnak bizonyulók százalékarányának elméleti hisztogramja cseppet sem hasonlít a normálgörbére. (Ha 10 000 golyóból 100-at húzunk, nincs nagy különbség visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel között.) Ha a minta nagyobb lenne, vagy a doboz kevésbé féloldalas, kiválóan megfelelne a normálgörbe.

**„C" feladatsor**

1. Valószínűségekről beszélünk akkor, amikor a <u>doboz alapján</u> következtetünk a <u>húzásokra</u>; megbízhatósági szintről beszélünk akkor, amikor a <u>húzások alapján</u> következtetünk a <u>dobozra</u>.
2. (a) A megfigyelt érték tartalmaz véletlen hibát.
   (b) A konfidenciaintervallum az alapsokaságbeli százalékarányra vonatkozik.

3. (a) 18,0% ± 3,8%, beleesik.
   (b) 21,0% ± 4,0%, beleesik.
   (c) 24,5% ± 4,4%, nem esik bele.

4. (a) Nem igaz. A standard hiba pontos érték; a véletlen hiba a pirosak mintabeli százalékarányára vonatkozik, nem annak várható értékére.
   (b) Igaz.
   (c) Nem igaz. A konfidenciaintervallum a paraméterre vonatkozik, nem a mintában kapott adatokra. Lásd a 3. szakaszt.
   (d) Igaz.

   Megjegyzés (a)-hoz: A standard hiba a piros húzások arányának valószínűsíthető nagyságát mondja meg. Az 50% viszont a doboz tulajdonsága, ami nem függ a húzások kimenetelétől: nem tartalmaz véletlen hibát. Ha például 100 húzásból 53 pirosat kapunk, a mintabeli arány 53%, a véletlen hiba - az 53%-é - pedig +3%. Ha 42 pirosat kapunk, akkor 42% a pirosak aránya a húzások közt, és a 42% véletlen hibája -8%. A várható érték viszont ugyanaz, bárhogy alakuljon is a húzások kimenetele. Lásd még a 17. fejezet B feladatsorának 6. feladatát.

5. (a) Igaz. (b) Igaz. (c) Igaz.
   (d) Nem igaz; a mintabeli százalékarány 53%; ehhez nem szükséges konfidenciaintervallum.

6. (a) Igaz.
   (b) Nem igaz. A mintabeli arányszámot ismerjük, az beleesik az intervallumba.
   (c) Nem igaz. A populációbeli arányszám vagy beleesik az intervallumba, vagy nem – valószínűségről itt nincs szó. Lásd a 3. szakaszt.

7. Nem igaz. A százalékarány standard hibája azt méri, hogy egy mintabeli arányszám valószínűsíthetően mennyire tér el a populációbeli arányszámtól; nem pedig két mintabeli arányszám egymástól való eltérését.

   *Megjegyzés:* Két mintabeli arányszám egymástól való eltérésének várható értéke ennél nagyobb, hiszen mindkét minta véletlen hibának van kitéve. A populációbeli arányszám ezzel szemben nem változik. Két mintabeli arányszám közötti eltérésről a 27. fejezetben tudhatunk meg majd többet.

8. Igaz. Valószínűségekről van szó, amikor „előrefelé”, a dobozból következtetünk a húzásokra; megbízhatósági szintekről akkor beszélünk, amikor „visszafelé” okoskodunk: a húzásokból a dobozra. Lásd a 3. szakaszt.

**„D” feladatsor**

1. A statisztikai elmélet azt mondja, hogy vigyázzunk ezzel az emberrel. Miféle alapsokaságról beszél? Saját hallgatói miért is hasonlítanának egy, az alapsokaságból vett egyszerű véletlen mintára? Amíg ezeket a kérdéseket nem tudja megválaszolni, nem érdemes figyelmet fordítanunk az általa kiszámolt standard hibára.

2. Ez nem egyszerű véletlen minta: garantálták, hogy minden évfolyamról 25 hallgató kerül be, egy egyszerű véletlen minta nem biztosítaná ezt. A számítás itt nem alkalmazható.

**„E” feladatsor**

1. Itt nem egyszerű véletlen mintáról van szó, a képletek nem alkalmazhatók.

2. Ez helyes.

3. (a) A választók lelkesedésének megváltozásával.
   (b) A véletlen hiba – a Gallup közvéleménykutatás véletlen mintán alapul.
   (c) Mint azt a 2. táblázat is mutatja, néhány százalékpontos véletlen hiba nagyon is lehetséges. A szeptember végi előrejelzés talán nem is annyira jó kalauz a november eleji választáshoz. (Viszont Bush tényleg győzött.)

## 22. fejezet. A foglalkoztatottság és a munkanélküliség mérése

**„A” feladatsor**

1. (a) Igaz
   (b) Nem igaz. A mintát felosztják bőrszín/etnikum, életkor stb. szerint, majd az egyes csoportokra külön-külön állapítják meg a súlyokat. (Lásd a 4. szakaszt.)

2. 131,4 millió ± 0,1 millió (Lásd az 5. szakaszt.)

3. Itt a háztartások egyszerű véletlen mintájáról van szó, melyből a háztartásokra vonnak le statisztikai következtetést. A doboz szórását $\sqrt{0{,}80 \cdot 0{,}20} = 0{,}40$-nek becsüljük. Az összeg standard hibája $\sqrt{100} \cdot 0{,}40 = 4$. A százalékarány standard hibája 4%.

4. Ez a háztartások egyszerű véletlen mintája, az embereket tekintve viszont csoportos mintavétel. (A háztartás a csoport.) Az emberekről vonnak le statisztikai következtetést. Így a standard hiba becsléséhez további információra van szükség – az egyszerű véletlen mintára vonatkozó képletek itt nem alkalmazhatók (5. szakasz).

   *Megjegyzés a 3. és 4. feladathoz:* A 3. feladatban a háztartások egyszerű véletlen mintája állt a rendelkezésünkre, és a háztartásokra fogalmaztunk meg statisztikai következtetést (hány százalékukban lett beoltva az összes ott élő személy). A 4. feladatban az emberek csoportos mintájából végzünk statisztikai következtetést az emberekre.

5. A standard hiba mindössze 0,2%, tehát szinte kizárt, hogy a 61% - 55% = 6% eltérést a véletlen okozta volna. Az emberek szívesebben mondják, hogy szavaztak, még ha nem is így történt.

6. A fehér férfiakra – sokkal nagyobb az esetszám.

## 23. fejezet. Az átlagok pontossága

### „A” feladatsor

1. (a) 7611 / 100 = 76,11 (b) 73,94 · 100 = 7394

2. Az átlag standard hibája 1. Az (a) feladatrész megoldása: majdnem 100%. A (b) megoldása: 68%. Ne keverjük össze a húzások átlagának standard hibáját a doboz szórásával!

3. (a) Nem igaz. (b) Igaz.
   Ismét csak ne keverjük össze a húzások átlagának standard hibáját a doboz szórásával!

4. (a) A húzások átlagának várható értéke megegyezik a doboz átlagával.
   (b) A húzások számának növekedésével a húzások összegének standard hibája nő, a húzások átlagának standard hibája viszont csökken.

5. A húzások összegének standard hibája $\sqrt{100} \cdot 20 = 200$. Az átlag standard hibája $200/100 = 2$. A húzások átlaga 50 körül lesz, úgy plusz–mínusz 2 eltéréssel. Ez akkor is igaz, ha visszatevés nélkül húzunk, mivel a céduláknak csak kis töredékét húztuk ki a dobozból. Ha viszont egy 100 cédulát tartalmazó dobozból húzunk visszatevés nélkül 100-at, a standard hiba 0 lesz.

6. Annak valószínűségét, hogy a húzások átlaga 2,25 és 2,75 között lesz.

7. Azt, hogy 50 húzás közül hány százaléknál jött ki a 4-es.

8. (a) Annak az esélyét, hogy 90 lesz az összeg.
(b) Annak az esélyét, hogy 3,6 lesz az átlag.
(c) 3,6 = 90/25, tehát ugyanazt az esélyt kaptuk meg két különböző úton. Cseppet sem véletlen az egybeesés. Lásd a 20. fejezet 3. szakasz „B” 5. feladatát.

9. Az (a), (c), (e) igaz; (b), (d), (f) nem igaz. A doboz tartalmát ismerjük; az átlag várható értékét ki tudjuk számolni hiba nélkül; a kihúzott számok átlaga viszont véletlen hibát tartalmaz. Lásd a 21. fejezet 3. szakasz 6. feladatát és a 21. fejezet „C” 4.-6. feladatait.

10. A kihúzott számok átlaga egyszerűen az összegük 25-tel (a húzások számával) elosztva. Tehát a 25-ből 1, az 50-ből 2, az 55-ből pedig 55/25 = 2,2 lesz.

**„B” feladatsor**

1.

| | | |
|---|---|---|
| | populáció | doboz |
| | populáció átlaga | doboz átlaga |
| | minta | húzások |
| | mintaátlag | húzások átlaga |
| | mintanagyság | húzások száma |

2. (a) A „doboz szórása” értelmes, a „doboz standard hibája” nem.
(b) A „húzások átlagának standard hibája” értelmes, a „doboz átlagának standard hibája” nem.
A „szórás” szakkifejezés listán szereplő számokra vonatkozik, a „standard hiba” egy véletlen eljárásra. A dobozban szereplő számok (és átlaguk) rögzített, a húzások viszont véletlenszerűek.

3. (a,b) „a mintából becsült”. A minta szórása 19 000$, ezt használjuk a doboz szórásának becslésére. A becsült szóráson alapul a standard hiba, így ez is becslés. Ha nem ismerjük a doboz tartalmát, akkor az adatokból kell becsülnünk a szórást és a standard hibát.
(c) megfigyelt.

4. 50-nek a 95%-a ≈ 48.

5. (a) Minden közvéleménykutató a saját mintaátlagát veszi fel a konfidenciaintervallum középpontjául. A mintaátlagok a véletlen ingadozás miatt eltérnek egymástól.
(b) A minták szórásai eltérőek (véletlen ingadozás), így a becsült standard hibák is eltérőek. Ezért lesz különböző az intervallumok hossza.
(c) 49.

6. A dobozban 30 000 cédula van, hallgatónként egy, melyen az illető életkora szerepel. Adataink 900 húzásnak felelnek meg, a mintaátlag a kihúzott számok átlagának. A doboz szórását 4,5 évre becsüljük, így a húzások összegének standard hibája $\sqrt{900} \cdot 4{,}5 = 135$ év, az átlag standard hibája $135/900 = 0{,}15$ év.

   (a) Becslésünk 22,3 év, úgy plusz–mínusz 0,15 év eltéréssel.
   (b) $22{,}3 \pm 0{,}3$ év a konfidenciaintervallum.

7. (a) 468$ ± 18$ a konfidenciaintervallum. A húzások átlagának elméleti hisztogramja a normálgörbét követi még akkor is, ha az adatok nem.
(b) Nem igaz: 18$ a húzások átlagának standard hibája, és nem a doboz szórása.

8. Nem igaz. Az átlag standard hibája a mintaátlag és a populáció átlaga közötti eltérés valószínűsíthető nagyságát adja meg – nem pedig két mintaátlag valószínűsíthető eltérését. Tehát itt nem a 18$ a helyes hibahatár. Lásd a 21. fejezet 3. szakasz 7. feladatát.

9. A elméleti hisztogram a különböző mintaátlagok esélyeit mutatja, és nem az adatokról szól. Itt most az elméleti hisztogram van megadva. A feladat (a) része a +1 standard egység átváltására kérdez rá. Ehhez szükségünk van a hisztogram középpontjára és szóródására. A középpont a mintaátlag várható értéke, ami megegyezik a doboz átlagával. Ezt ismerjük: 31 700$. A hisztogram szóródása a mintaátlag standard hibája. Ezt pontosan ki tudjuk számolni, hiszen ismerjük a doboz szórását: 20 000$. Így a húzások összegének standard hibája $\sqrt{400} \cdot 20\,000\$ = 400\,000\$$. A húzások átlagának standard hibája 400 000$/400 = 1000$. A +1 standard egység tehát 31 700$ + 1000$ = 32 700$. Ez a válasz az (a) kérdésre.
A (b) feladatrész azt kérdezi, hová esik a 30 700$ a hisztogram tengelyén. A várható értéktől balra lesz: 30 700$ kisebb a 31 700$-nál. Tehát a tengely negatív felére esik. A várható értéknél 1000$-ral kisebb. És 1000$, az 1 standard hiba. A 30 700$ tehát standard egységben –1. Ez a válasz a (b) kérdésre.

   *Megjegyzések:* (i) Egy tipikus mintaátlag körülbelül 1 standard hibányira esik a populáció átlagától. A feladatban szereplő mintaátlag 1 standard hibával alacsonyabb a populációs átlagnál—túl kevés gazdag ember került bele.
   (ii) Pillantsunk rá a 23. fejezet 1. szakasz 1. ábrájára. A hisztogram a véletlensze-

rű húzás és átlagolás eljárásáról szól, nem egy konkrét húzássorozatról. A hisztogram nem változik meg attól, hogy ha 25 húzás átlaga történetesen 3,2-nek bizonyul. Feladatunk ugyanezt illusztrálja, kicsit bonyolultabb „körítéssel”.
(iii) A 20 000$ szórást akkor használnánk a standard egységbe való átváltáshoz, ha a város összes családjának jövedelmét mutató adathisztogramhoz viszonyítanánk. A 19 200$-os szórás egy másik adathisztogramhoz viszonyított átszámításnál működik – ez a 400 mintába került család jövedelmét ábrázolná.
(iv) A feladat kulcsa az volt, hogy ismertük a doboz átlagát és szórását.

## „C” feladatsor

1.

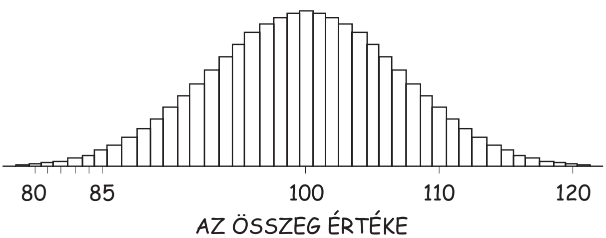
| *Húzások száma* | *A húzások összegének várható értéke* | *A húzások összegének standard hibája* | *A húzások átlagának várható értéke* | *A húzások átlagának standard hibája* |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 75 | 10 | 3,0 | 0,4 |
| 100 | 300 | 20 | 3,0 | 0,2 |
| 400 | 1200 | 40 | 3,0 | 0,1 |

2. (a) Igaz. A húzások átlagának várható értéke megegyezik a doboz átlagával.
(b) Nem lehet megmondani; szükségünk van a doboz szórására.

3. (a) Várható értékét 3,1-nek becsülhetjük az adatokból; a várható érték egzakt értékének kiszámításához ismernünk kellene a doboz átlagát.
(b) A standard hiba pontos értékének kiszámításához ismernünk kellene a doboz szórását; de a becsléshez is szükségünk van a húzások szórására.

*Megjegyzés:* A várható érték a véletlenszerű húzás eljárására vonatkozik, nem pedig egy konkrét kihúzott számsorozatra. Tegyük fel például, hogy 25-öt húzunk véletlenszerűen, visszatevéssel a $\boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$ dobozból. A húzások átlagának várható értéke 3. A konkrétan kihúzott számok átlaga lehet 3,1, amely 0,1-del magasabb a várható értéknél; vagy 2,6, ami 0,4-del alacsonyabb. Sok más lehetőség van még. A várható érték azonban csak a doboz tartalmától függ, a húzások konkrét kimenetelétől függetlenül mindig ugyanaz.

4. (a) A húzások összegének standard hibája 7,1, a <u>húzások átlagának</u> standard hibája pedig 0,18.
(b) A 100-as várható érték van középen, a következő bejelölt hely 10 „lépcsőfokkal” van arrébb, tehát ide a 110 kerül, és így tovább.



5. A doboz szórását nem tudjuk becsülni, így hibahatárokat sem tudunk számolni.

6. A 100 húzás összegének várható értéke mindhárom doboznál 200. A húzások átlagának standard hibája

   az A doboznál 1 az B doboznál 1,4 az C doboznál 2 .

   (a) Nagyon valószínűtlen, hogy 203,6 az A doboz esetén adódjon; ez 3,6 szórásnyira lenne az A dobozból való 100 húzás átlagának várható értékétől. Az is elég valószínűtlen, hogy a B dobozból származna, hiszen az $3{,}6/1{,}4 \approx 2{,}6$ standard hibányi, szintén túl sok volna. Tehát a C dobozhoz tartozik. Hasonlóan a 198,1 a B dobozhoz tartozik, tehát a 200,4 marad az A doboznak.
   (b) Előfordulhatna másképp is, de egy ilyen eset nagyon „erőltetett” lenne.

**„D” feladatsor**

1. A 95%-os konfidenciaintervallum: $1{,}86 \pm 0{,}06$.

2. Itt kvalitatív adatokról van szó, a 21. fejezetben megismert módon kell eljárnunk: az intervallum $46{,}8\% \pm 5{,}5\%$.

3. A normálgörbe itt nem használható. Tegyük fel, hogy a minta pontosan tükrözi az alapsokaságot. Ekkor olyan dobozból húznak a közvéleménykutatók, melyben 99,87% az 1-esek aránya, és 0,13% a 0-ké. A doboz annyira féloldalas, hogy az összeg elméleti hisztogramja cseppet sem hasonlít a normálgörbéhez. Lásd a 21. fejezet 2. szakasz „B” 3. és 4. feladatát.

4. Ez nem egyszerű véletlen minta az emberek közül: egy háztartásból vagy mindenki bekerül, vagy senki sem. A standard hibát tehát nem becsülhetjük a fejezetben tanult módszerrel. Lásd a 22. fejezet 5. szakasz „A” 3. és 4. feladatát.

   *Megjegyzések:* (i) Ez csoportos mintavétel az emberek közül—a háztartás a csoport. A mintafelezéses módszert használni lehetne a standard hiba meghatározására, de ehhez további információra lenne szükség.
   (ii) Egy háztartás tagjainak jellemzően hasonlóak a tévénézési szokásai, tehát egy ilyen minta az ugyanekkora egyszerű véletlen mintához képest kevésbé informatív. A csoportos minták kevésbé pontosak, de sokkal olcsóbbak.
   (iii) Csoportos mintavétel esetén a véletlen hiba jelent problémát, nem pedig a torzítás; a feladatban szereplő mintavételi eljárás torzításmentes.

5. (a) Ez nem csoportos minta; nem is valószínűségi minta: a „kézreesők” kiválasztása történt itt.
   (b) Ugyanaz a helyzet, mint (a)-nál.

6. A doboz átlagát a minta átlagával becsüljük: 297/100 ≈ 3,0; a standard hibához viszont a szórásra is szükségünk lenne.

7. A két eljárás ugyanaz: az egyszerű véletlen mintavétel visszatevés nélküli véletlenszerű húzásokat jelent.

# VII. rész. Valószínűségi modellek

## 24. fejezet. Modell a mérési hibára

### „A" feladatsor

1. Az összegre vonatkozó SH-t (standard hibát) kell használni; kiszámítottuk, 60 mikrogramm.

2. A becslés a mért adatok átlaga, 82 670 font. Hibája valószínűleg az átlagra vonatkozó SH körül, tehát 100 font körül lehet.

3. (a) 800 mikron. (b) 80 mikron. (c) 91,4402 cm ± 160 mikron

4. (a) Téves. Ez a szakasz az átlagtól nem plusz-mínusz 2 SH-nyira, hanem plusz-mínusz 2 szórásnyira terjed.
   (b) Téves, ugyanazért, amiért az (a).
   (c) Igaz. Lásd a 21.fejezet 3. szakaszban a konfidenciaintervallumokról szóló rajzot.
   (d) Téves. Ugyanaz a helyzet, mint a 23. fejezet 2. szakasz 8. feladatnál.

5. Ötödére csökkenne.

### „B" feladatsor

1. Sokszor fel kellene dobnunk a rajzszeget, hogy lássuk, az olyan alkalmak részaránya, amikor heggyel felfele áll meg, 50%-hoz van-e közelebb, vagy 67%-hoz. (Függ attól, hogy milyen felületre érkezik: volt egy kísérlet, amikor, ha linóleumra dobtuk, 66%-ban volt felfelé a hegye, míg ha szőnyegre, akkor csak 50%-ban.)

2. Nem jó. Az esős napok az esős évszakban tömörülnek. Ha egy nap esik az eső, megnő az esély, hogy másnap esni fog.

3. Utolsó számjegyek: igen. Első számjegyek: nem. A San Francisco-i telefonkönyvben például az első jegy nem lehet 0. Aztán sokkal több telefonszám kezdődik 9-essel, mint 2-essel.

4. Nem: a kezdőbetűk ábácérendben jönnek. Erre egy doboz nem képes.

5. Villámsebesen. 50-50% eséllyel nyerünk 5 dollárt vagy veszítünk 4-et.

## „C" feladatsor

1. Mindkét esetben 504 mikrogramm volt a mérési eredmény 10 gramm fölött.

2. Nem – mint az előző feladatból látszik.

3. A 6. fejezet 2. szakasz 1. táblázatbeli 100 mérésnek 6 mikrogramm volt a szórása. Ez alapján becsültük meg a hibadoboz szórását. Tehát „úgy becsüljük az adatokból".

4. (a) Véletlen ingadozás – a kutatók különböző átlagokat kapnak.
(b) Ez is véletlen ingadozás – a kutatók különböző mintaszórásokat kapnak.
(c) Az 50 intervallum körülbelül 95%-ának illene tartalmaznia a pontos értéket, tehát körülbelül 48 intervallumnak.
(d) 48. (Az egyik intervallum elég szépen elhibázza – a véletlen ingadozás műve ez is.)

5. A hibadoboz szórásának becsült értéke 50 mikrogramm.
(a) 5 mikrogramm – az átlag standard hibája.
(b) 50 mikrogramm – a hibadoboz becsült szórása.
(c) 95% – két standard hibán belül.

6. A válasz: 1,2 mikrogrammal. Lásd a 24.fejezet 3.szakasz, 5. példáját.

7. (a) 300 007-nek (ennyi az átlag); 2 (az átlag standard hibája).
(b) Téves: az átlag pontosan 300 007.
(c) Igaz: egy számsoron lévő számok a számsor átlagától mind nagyjából 1 szórásnyira vannak.
(d) Igaz; az intervallum: „átlag ± 2 SH".
(e) Téves: a 25 mérés átlaga pontosan 300 007.
(f) Téves: a standard hiba volt 2, nem a szórás.

8. A megoldás: 2 centi. Lássuk az indoklást. Mind a négy mérés a megfelelő pontos értéknek és egy-egy hibadobozbeli számnak az összegeként áll elő. Az AE távolságra a 4 mérés összege ad becslést; a becslés eltérése AE pontos értékétől megegyezik a 4 hibadobozból húzott szám összegével. A hibadoboznak 0 az átlaga. Tehát a hibadobozból húzott 4 szám összege 0 körül lesz, tőle nagyjából standard hibányira. Ez azt jelenti, hogy az összegre vonatkozó standard hibát tudjuk plusz–mínusz értékként használni. A doboz szórása 1 centi, az összeg standard hibája így $\sqrt{4} \cdot 1$ cm = 2 cm.

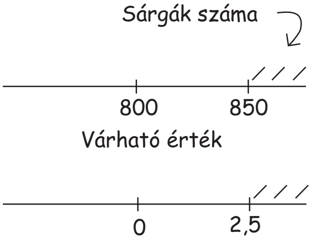
   Megjegyzés: Az AE távolság megállapításához az egyes méréseket összegezni kellett, nem átlagolni.

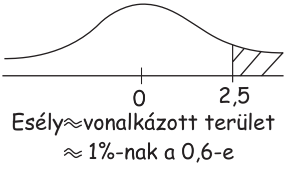
9. Mindenkinél más és más lehet a véletlen hibák szórása. Aztán lehet, hogy ha egy emberrel többször felvesznek egy tesztet, a hibái nem függetlenek. Nem tűnik jónak a Gauss-modell.

## 25. FEJEZET. VALÓSZÍNŰSÉGI MODELLEK A GENETIKÁBAN

### „A” feladatsor

1. Az *s/z* szülőtől mindegyik borsószem 50% eséllyel kap *z*-t, 50% eséllyel *s*-et. A *s/s* szülőtől biztosan *s*-et kap. Tehát a borsószemnek 50% az esélye, hogy *s/z* legyen, s így sárga színű; és 50% az esélye, hogy *z/z* legyen, és így zöld színű. Körülbelül a borsószemek 50%-a lesz sárga.
   Az 1600 borsószemből a sárgák száma olyan, mint 1600 húzás összege a $\boxed{0}\ \boxed{1}$ dobozból. A sárgák számának várható értéke $1600 \cdot 1/2 = 800$, standard hibája $\text{SH} = \sqrt{1600} \cdot 1/2 = 20$. Használatjuk a normális közelítést:



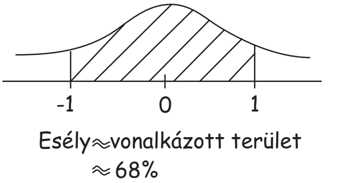




2. (a) fehér × vörös ⟶ 100% rózsaszín
   fehér × rózsaszín ⟶ 50% fehér, 50% rózsaszín
   rózsaszín × rózsaszín ⟶ 25% vörös, 50% rózsaszín, 25% fehér.

   *Indoklás a rózsaszín × rózsaszínhez:* minden szülő *v/f*, az utód virágszíne tehát úgy határozódik meg, mintha az alábbi táblázatból véletlenszerűen kiválasztanánk egy sort és egy oszlopot.

| | *v* | *f* |
|---|---|---|
| *v* | vörös | rózsaszín |
| *f* | rózsaszín | fehér |

   (b) 400 növényből a rózsaszínek várható száma 200, SH = 10. Normális közelítéssel:

3. (a) A levél szélességét egyetlen génpár szabja meg, variánsai *sz* (széles) és *k* (keskeny). Szabályok: *sz*/*sz*-ből széles, *sz*/*k*-ból és *k*/*sz*-ből közepes, *k*/*k*-ból pedig keskeny levelű növény lesz.
   (b) keskeny × keskeny = $k/k \times k/k \to$ 100% $k/k$ = keskeny
   keskeny × közepes = $k/k \times k/sz \to$ 50% $k/k$ = keskeny és 50% $k/sz$ = közepes.

4. $B$ = barna, $k$ = kék. A férj $B/k$, a feleség $k/k$. Mindegyik gyermeknek 2-ből 1 az esélye, hogy barna legyen a szeme. A három gyermek független, tehát arra, hogy mindhárman barna szeműek legyenek, $(1/2)^3 = 1/8$ az esély.

# VIII. rész. Szignifikanciapróbák

## 26. FEJEZET. SZIGNIFIKANCIAPRÓBÁK

### „A" feladatsor

1. (a) 100 000 lap a dobozban, 100 húzás
   (b) Az adatok alapján úgy becsülték
   (c) megfigyelt

2. (a) 3292$ – 3117$ = 175$. (Rosszabbul jár az új szabályok szerint: több adót fizet.)
   (b) Az új szabályozás előnyösebb neki: kevesebb adót fizet.

3. A kétfajta szabályozás szerint számított adóösszegek átlagai között a különbség 5182$ – 5217$ = –35$. Ha az új szabályozás semleges a bevétel szempontjából, akkor e különbség várható értéke 0 $, a 35 $ pedig körülbelül fél standard hibányira esik e várható értéktől:

$$\frac{-35\,\$ - 0\,\$}{72\,\$} \approx -0{,}5$$

   A szenátor szaktanácsadója győz: az eltérés véletlen ingadozásnak tűnik.

4. Ha a kocka szabályos, a dobott pontszámok összege olyan, mint 100 húzás összege az $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$ dobozból. A doboz átlaga 3,5; szórása 1,7. Tehát az összeg várható értéke 350, a standard hiba 17. A pontszámok összege 1 standard hibányinál kicsit többel van a várható érték fölött – ez véletlen ingadozásnak tűnik.

5. A feladat ugyanúgy oldható meg, mint a 4. feladat, de a pontszámok összege most több, mint 3 standard hibányival van a várható érték fölött. Ez nem látszik véletlen ingadozásnak.

   *Megjegyzések:* (i) Fontos a mintanagyság; vesse össze a 4. és az 5. feladatot.
   (ii) A kocka szabályosságára vonatkozó teljesebb próba található a 28. fejezetben.

**„B" feladatsor**

1. (iii)

2. A nullhipotézis azt mondja, hogy a mintában mutatkozó eltérés puszta véletlen; az ellenhipotézis mondja, hogy a mintában mutatkozó eltérés valóságos eltérésre utal.

3. Válassza a (ii)-est. Az adatokat a pénzügyes tisztviselő és a szenátor szaktanácsadója is ismerte, viszont nem tudták, hogy mi van a dobozban. A nullhipotézis állít valamit a dobozmodellről, a próbából derül ki, tartható-e az állítás.

4. doboz. A nullhipotézis a dobozról mond valamit.

5. A doboz szórását becsülhetjük 10-nek; így a 100 húzás átlagára vonatkozó standard hiba becsült értéke 1. Ha a doboz átlaga 100, az azt jelenti, hogy a húzások átlaga 2,7 standard hibányira van ennek az átlagnak a várható értéke fölött. Ez nem hihető. Ha a húzások átlaga 101,1 volna, ez a véletlen ingadozás tartományán belül lenne – mindössze 1,1 standard hibányira a várhatótól.

**„C" feladatsor**

1. (a) a nullhipotézis szempontjából a $P = 32\%$ a legkedvezőbb.
   (b) az ellenhipotézis szempontjából a $P = 1\%$-nak az 0,1-e a legkedvezőbb.
   A nullhipotézis szempontjából a nagy $P$ jó; a kicsi $P$ nem jó a nullhipotézis szempontjából.

2. (a) Igaz. (b) Téves. Lásd a 26. fejezet 3. szakaszban.

3. (a) Igaz; lásd a 26. fejezet 3. szakaszban.
   (b) Téves; lásd a feladatsor előtti utolsó bekeretezett állítást.

4. Az átlag standard hibája ≈ 1,25, tehát $z \approx (52{,}7 - 50)/1{,}25 \approx 2{,}16$; $P$ pedig, közelítőleg, a 2,16-tól jobbra lévő terület a normálgörbe alatt. Ez a táblázat szerint körülbelül 1,6%. Nehéz az eltérést véletlen ingadozással magyarázni. Az ellenhipotézis tűnik helyesnek.

5. doboz. A nullhipotézis a dobozra vonatkozik.

6. Ne. Az adatok jobb felé messzire elnyúlnak. 10 húzásnál a mintaátlagra vonatkozó hisztogram feltehetőleg nemigen fog normálgörbére hasonlítani.

7. A minta olyan, mint 100 véletlenszerű húzás egy olyan dobozból, amelyben minden alkalmazottat egy-egy lap képvisel, s minden lapra rá van írva, hogy az ille-

tő hány napot hiányzott. Nullhipotézis: a doboz átlaga 6,3 nap. Ellenhipotézis: a doboz átlaga kisebb 6,3 napnál. A doboz szórását 2,9 napnak becsüljük, így az átlag standard hibája 0,29 nap, tehát $z \approx (5{,}5 - 6{,}3)/0{,}29 \approx -2{,}8$, és $P \approx 1\%$-nak a 0,3-e. Ez erős bizonyíték a nullhipotézis ellen; a hiányzásokban mutatkozó csökkenésre a nullhipotézis nem ad magyarázatot.

8. Most $z \approx (5{,}9 - 6{,}3)/0{,}29 \approx -1{,}4$, így $P \approx 8\%$. A nullhipotézis tarthatónak tűnik.

**„D” feladatsor**

1. (a) Hamis. Még amikor a nullhipotézis igaz, olyankor is a kísérletek 1%-ában „erősen szignifikáns” eredményt kapunk.
   (b) Hamis; l. a 26. fejezet 3. szakasz végét.
   (c) Hamis; l. a 26. fejezet 3. szakasz végét.

2. (a) Igaz. A nagy $P$ jó a nullhipotézis szempontjából.
   (b) Igaz. A kis $P$ rossz a nullhipotézis szempontjából.

3. (a) Igaz; l. a 26. fejezet 4. szakaszt.
   (b) Hamis; 1% alatti $P$ kellene.
   (c) Igaz; l. a 26. fejezet 4. szakaszt.
   (d) Igaz; l. a 26. fejezet 3. szakaszt.
   (e) Igaz; $z$ = (megfigyelt – várható)/standard hiba; „várható”-t a nullhipotézis alapján számolva.

4. Körülbelül 2%.

5. (a) Igaz; $z$ = (megfigyelt – várható)/standard hiba; „megfigyelt” = a húzások átlaga; „várható” = a doboz átlaga, most ismerjük: 50.
   (b) Körülbelül 50-nek.
   (c) Körülbelül 2-nek; ténylegesen 3-an kaptak.
   (d) Körülbelül 2%. Lásd a 4. feladatot.

**„E” feladatsor**

1. Az (i) a helyes: „olyanok” itt azt jelenti, „ami az esélyeket illeti”. Minden tipp 1/4 eséllyel talál, minden húzás 1/4 eséllyel lesz 1-es. A helyes tippek száma így olyan, mint a húzások összege – alkalmazható a négyzetgyökszabály.
   A (ii)-es válasz rossz: ha nincs extraszenzoros észlelés, akkor 1/4 és nem 1/3 a helyes tipp esélye. A (iii)-as még rosszabb: 2006/7500 – ez az egyesek mintabeli aránya, nem a dobozbeli. A (iv)-es is hibás: azt, hogy a mintában hány 1-es volt, tudjuk – erről nincs vita. Az (v)-ös válasz meg nagyon messze jár: a nullhipotézis annak az elgondolásnak felel meg, hogy nincs extraszenzoros percepció.

2. (a) a Berkeley-re abban a félévben beiratkozott hallgatónak. Indok: a doboz a populációnak felel meg.
   (b) 1 = férfi, 0 = nő. Indok: a férfiakat számoljuk.
   (c) A dobozban összesen 25 000 kártya van, a húzások száma 100. Indok: a minta olyan, mint a húzások.
   (d) 100, húzás
   (e) 67%. Indok: tudjuk, hogy a populációban ekkora a férfiak százalékaránya.

3. (a) 53 (b) 67 (c) összege

   (d) $\sqrt{100} \cdot \sqrt{0,67 \cdot 0,33} \approx 4,7$

   (e) $z \approx (53 - 67)/4,7 \approx -3$ és $P \approx 1/1000$.

4. Nem. Túl sok a 47 nő. $P$ nagyon kicsi, ez azt jelenti, hogy az eltérést nem magyarázza a véletlen. Találomra választani emberek közül nem ugyanaz, mint egyszerű véletlen mintát venni (19. fejezet).

5. (a) A nullhipotézis alapján számítottuk: $100 \cdot 0,67$. A várható értéket mindig a nullhipotézis alapján számítjuk.
   (b) A nullhipotézis alapján számítottuk: a nullhipotézisből tudtuk, mi van a dobozban; egyébként az adatokból kellett volna a doboz szórását megbecsülnünk (l. 26. fejezet 5. szakasz).

6. (a) Nullhipotézis: a helyes tippek száma olyan, mint 1000 húzás összege egy olyan dobozból, melyben kilenc 0-s és egy 1-es lap van.
   (b) $\sqrt{0,1 \cdot 0,9}$. A nullhipotézisből ismerjük a doboz összeállítását – használjuk ezt.
   (c) $z \approx (173 - 100)/9,5 \approx 7,7$ és $P$ elenyészően kicsi.
   (d) Akármi volt is, biztosan nem véletlen ingadozás.

7. (a) Az érmedobálás olyan, mint 10 000 húzás (véletlenszerűen, visszatevéssel) egy 0–1 dobozból, ahol 0 = írás, 1 = fej. Nem tudjuk, mekkora a dobozban az 1-esek részaránya. Nullhipotézis: ez a részarány pontosan 1/2. Ellenhipotézis: a részarány nagyobb 1/2-nél. A fejek száma olyan, mint a húzások összege.
   (b) $z = 3,34$; $P \approx 4/10\,000$.
   (c) Túl nagy a fejek száma ahhoz, hogy véletlen ingadozással lehessen magyarázni.

8. (a) Ugyanaz, mint 7(a)-nál. (b) $z = 1,34$; $P \approx 9\%$.
   (c) Szabályosnak tűnik az érme.

9. (a) doboz. A nullhipotézis a dobozra vonatkozik.
   (b) Téves; lásd a 26. fejezet 3. szakaszát.

10. Adataink: a 25 testsúly. A nullhipotézis azt állítja, hogy az adatok olyanok, mintha 25 véletlenszerű húzást végeztünk volna egy dobozból. A dobozban a tenyészet mindegyik egyedének egy-egy lap felel meg, ráírva az egyed testsúlya. Tehát a doboz átlaga 30 gramm. Szórása pedig 5 gramm, így tehát a 25 húzásból számított átlag standard hibája 1 gramm. Eszerint $z = (33 - 30)/1 = 3$ és $P \approx 1/1000$.

    *Megjegyzések.* (i) Ebben az esetben a nullhipotézis a doboz szórását is megadja, azt így nem kell az adatokból becsülni: a megoldásban nem volt szükség az adatok szórására.
    (ii) Találomra választani nem ugyanaz, mint egyszerű véletlen mintát venni (19. fejezet). Amikor benyúlunk értük a ketrecbe, akkor valószínűleg a szelídebbek jönnek oda, ők pedig valamivel nehezebbek.

11. A nullhipotézis azt mondja, hogy az árengedmény nincs hatással a forgalomra. Tehát hogy az árengedményt nem adó boltnak minden boltpárban épp akkora esélye van rá, hogy ő adjon el többet, mint árengedményes társának. Dobozmodellre lefordítva, a nullhipotézis azt mondja, hogy az adatok olyanok, mint 25 húzás a $\boxed{\boxed{0}\ \boxed{1}}$ dobozból, ahol 1 azt jelzi, hogy az árengedményes bolt adott el kevesebbet, 0 azt, hogy többet. Az 1-esek számának várható értéke 12,5, standard hibája 2,5, így $z = (18 - 12{,}5)/2{,}5 = 2{,}2$, és $P \approx 1{,}4\%$. Elég erős bizonyíték a nullhipotézis ellen.

    *Megjegyzés:* A most látott eljárást nevezik „előjelpróbának”. Lásd a 15. fejezet az „A” feladatsorának 6. feladatát (kenguruk), és a 11. feladatát (dohányosok). Normális közelítéssel, a folytonossági korrekciót is végrehajtva, $P \approx 2{,}28\%$-ot kapnánk a binomiális formulából származó 2,16% helyett.

### „F” feladatsor

1. (a) 5%  (b) 5%  (c) 90%  (d) 95%

2. A táblázat szerint a 2,92-től jobbra lévő terület 5%, a 6,96-tól jobbra lévő terület 1%. Mivel 4,02 a 2,92 és 6,96 között van, 5% és 1% közötti nagyságú terület van tőle jobbra.

3. Nem, hanem a 3 szabadságfokút.

4. (a) szabadságfok = 2, átlag ≈ 72,7, korrigált szórás ≈ 5,7, standard hiba ≈ 3,3, $t \approx (72{,}7 - 70)/3{,}3 \approx 0{,}8$
    $P$ körülbelül 25%. Következtetés: nagyszerű a beállítás.
    (b) $P$ körülbelül 2,5% – be kell állítani.
    (c) Egyetlen mérés sohasem elég.
    (d) $P$ körülbelül 25%.

*Megjegyzés (d)-hez:* Két mérés jobb egy mérésnél, de még jobb volna, ha még több lenne.

5. Az (a)-ban a 93 magányos érték, amiből úgy tűnik, hogy a hibák nem a normálgörbét követik. (c)-ben a számok ide-oda ugrálnak 69 és 71 között. Ez ellene szól a Gauss-modellnek.

6. A Gauss-modell szerint a 10 új mérés mindegyike a pontos súly, a torzítás, és a hibadobozból húzott szám összegeként áll elő. A nullhipotézis szerint nulla a torzítás; az ellenhipotézis szerint van valamekkora torzítás. A hibadoboz szórását meg tudjuk becsülni: $\sqrt{10/9} \cdot 9 \approx 9{,}5$. (A hibák az átszerelt mérlegéi, ezért itt a régi 7 mikrogrammos szórásnak nem vesszük hasznát.) Az átlag standard hibája ≈ 3 mikrogramm, $t \approx -2{,}67$. A $-2{,}67$-től balra eső terület a 9 szabadságfokú Student-görbe alatt körülbelül 1% – ez erős bizonyíték a nullhipotézissel szemben.

7. (a) A Gauss-modell szerint a 100 mérés mindegyike a pontos súly, és a hibadobozból húzott szám összegeként áll elő. A hibadobozbeli számkártyáknak 0 az átlaga. A pontos súly az ismeretlen paraméter. A nullhipotézis azt mondja, hogy ez továbbra is 512 mikrogrammal van 1 kilogramm fölött. Az ellenhipotézis azt mondja, hogy ennél kevesebb a pontos súly.
   (b) A hibadoboz szórását becsülhetjük a korábbról származó 50 mikrogrammal – a hibadoboz a mérőműszerhez tartozik. (Az 52 grammos új szórás lényegtelen.)
   (c) 100 mérésnél használjunk $z$-t, ne $t$-t. A 100 mérés átlagára vonatkozó standard hiba 5 mikrogramm, így $z = (508–512)/5 = -0{,}8$ és $P \approx 21\%$.
   (d) Inkább véletlen ingadozásnak tűnik a súlycsökkenés.

## 27. FEJEZET. TOVÁBBI PRÓBÁK AZ ÁTLAGRA

### „A” feladatsor

1. Igaz, a számok itt függetlenek, alkalmazható a négyzetgyökszabály.

2. A várható érték 100 – 50 = 50, a standard hiba $\sqrt{2^2 + 2^3} \approx 3{,}6$. Alkalmazható a négyzetgyökszabály, az összes húzás független.

3. Mindkét százalékaránynak 50% a várható értéke; standard hibáik 2,5 illetve 5 százalékpontosak. Az eltérés várható értéke 0, standard hibája $\sqrt{2{,}5^2 + 5^2} \approx 5{,}6$ százalékpont. Alkalmazható a négyzetgyökszabály: független a két százalékarány.

4. (a, b) Igaz.
   (c) Téves. A két százalékarány nem független: amikor fejet dobunk, nem dobhatunk írást. Nem alkalmazható a négyzetgyökszabály.

*Megjegyzés:* A „fejek száma – írások száma” különbség olyan, mint 500 húzás összege a $\boxed{-1}\ \boxed{1}$ dobozból, így a két szám különbségének standard hibája körülbelül 22, a százalékarányok eltérésének standard hibája pedig

$$(22/500) \cdot 100\% = 4{,}4\%.$$

5. Igaz. Ha visszatevéssel végeznénk a húzásokat, független lenne a két átlag, s pontosan $\sqrt{3^2 + 3^2}$ lenne az eltérés standard hibája. A doboz olyan nagy, hogy a visszatevéses és a visszatevés nélküli húzás között gyakorlatilag nincs különbség.

6. Az F doboz szórását becsülhetjük 3-ra, így az F dobozból végzett 100 húzás átlagának standard hibája 0,3; hasonlóképpen, a G dobozból végzett 400 húzás átlagának standard hibáját 0,4-re becsülhetjük; a két átlag független, így az eltérés standard hibája $\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2}$. Ha a két doboz átlaga egyforma volna, az azt jelentené, hogy a megfigyelt eltérés (51 – 48 = 3), 6 standard hibányira van a várható értéktől, azaz 0-tól. Ami nem nagyon valószínű.

**„B” feladatsor**

1. A kétmintás *z*-próbát.

2. Két minta van, kétmintás *z*-próbára lesz szükség. Az adatok: 1600 1-es, illetve nullás vonatkozik a fiúkra (1 = írástudatlan), másik 1600 1-es és nullás a lányokra. A modellben két doboz van, egy F és egy L doboz. Az F dobozban az ország minden megfelelő korú fiú lakosára van egy lap; a lapokon 1 jelzi az írástudatlanokat, 0 az írástudókat. Ugyanígy az L doboz, a lányokra. A fiúkra vonatkozó adatok olyanok, mint 1600 húzás az F dobozból; ugyanígy a lányokra. Nullhipotézis: a két dobozban egyforma az 1-esek részaránya. Ellenhipotézis: az F dobozban magasabb az 1-esek részaránya. Az 1-esek százalékarányának standard hibája a fiúmintában 1%-nak 0,6-ére becsülhető; a lányok mintájában ez a standard hiba 1%-nak 0,4-e. Tehát az eltérés standard hibája $\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}4^2}$ = 1%-nak a 0,7-e. Innen $z \approx (7–3)/0{,}7 \approx 5{,}7$ és $P$ majdnem 0. Szinte kizárt, hogy a véletlen ekkora eltérést okozzon.

3. Megbecsüljük a két átlag közötti különbség standard hibáját: ez $\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2}$ . Így $z = (26–25)/0{,}7 \approx 1{,}4$, és $P \approx 8\%$. Okozhatta véletlen az eltérést.

4. $z = 1/0{,}45 \approx 2{,}2$; $P \approx 1{,}4\%$.

   *Megjegyzés:* A megfigyelt szignifikanciaszint függ a mintanagyságtól. Nagy mintáknál egészen kis eltérések is statisztikailag erősen szignifikánsak lesznek. Erről bővebben a 29. fejezetben.

5. A kezelt és a kontroll átlaga nem független: egy alomból származó patkánypárokkal dolgoztak – ez azt jelenti, hogy ha az egyiknek nagy volt az agykéregsúlya,

akkor valószínűleg a másiké is nagy volt. Ezt a párosítást a standard hiba számítása nem vette figyelembe.

*Megjegyzés:* Jobb elemzést ad a 26. fejezet 12-es összefoglaló feladata.

6. (a) A mintaátlagok standard hibái: 1,6% és 1,2%; a két százalékarány közötti eltérés standard hibája 2,0%. A két mintaátlag közötti tényleges eltérés 10,9%, így $z \approx 5{,}4$; tehát $P \approx 0\%$. Tényleges az eltérés.
(b) Az eltérés standard hibája ≈ 2,5%. A két mintaátlag között 5,0% a különbség, így $z \approx 2$, és $P \approx 2\%$. Ez a nullhipotézis ellen szól.

7. A két mintaátlag között 3 óra az eltérés, a standard hiba 0,5 óra. Így $z \approx 6$, és $P \approx 0$. Nagyon nehéz az eltérést véletlennel magyarázni. A magánegyetemek diákjai tehetősebb családból származnak, nagyobb támogatást kapnak otthonról.

8. Az eltérés nagy, és erősen szignifikáns (azaz jelentős) – gyakorlatilag és statisztikailag egyaránt.

9. A számláló százalékban van, a nevező tizedestörtben. Valójában $z = (53 - 48)/5{,}3$; vagy $z = (0{,}53 - 0{,}48)/0{,}053$.

*Megjegyzés:* Típushiba, hogy a nevezőt nem számítják át százalékra. Számolhatunk végig tizedestörtben, vagy végig százalékban – de nem ugorhatunk át menetközben egyikről a másikra.

**„C" feladatsor**

1. (a) Két szám. Nem figyelték meg a B-számot; ez mondta meg, mennyi lett volna az eredménye, ha a kontrollcsoportba került volna.
(b) Volt. Az A-szám azt mutatta, mi lett volna Júlia eredménye, ha a korrepetált csoportba kerül. Megfigyelni nem tudták, mert ő a kontroll csoportba került. A kutatók nem ismerték Júlia A-számát.
(c) Kövessük a konzervatív utat: a korrepetáltak átlagának standard hibája 9,8 pont; a kontroll átlagáé 10,3 pont; az eltérésüké $\sqrt{9{,}8^2 + 10{,}3^2}$ pont. 9 pont volt az eltérés az átlagok között, így $z \approx 9\,/14{,}2 \approx 0{,}65$, és $P \approx 26\%$. Nyugodtan lehet véletlen ingadozás.

*Megjegyzés.* Az 1. feladat más, mint amikor az 1982-es és az 1973-as NAEP teszteredményeket hasonlítottuk össze (2. szakasz) – itt nincs két független mintánk. Hasonlít viszont a C-vitaminos kísérletre (4. példa). A 200 diák mindegyikének 2 lehetséges válasza van – egy akkorra, ha korrepetálnák, és egy másik, korrepetálás nélküli. E kettőből a kutatók csak az egyiket láthatják, a választás véletlenszerűen történik. Ezért jogos így számítani a standard hibát.

2. (a) A különbség 66 – 59 = 7 pont, standard hibája 1,8 pont. Így $z \approx 3{,}9$ és $P \approx 0$. A különbség nehezen magyarázható véletlen ingadozással. Használ a Wheaties.
(b) A diákok felismerik, hogy melyik típusú gabonapelyhet eszik, ezt nehezen lehetne előlük eltitkolni. A félévi vizsga értékelését viszont lehetne „vakosítva" csinálni. A vizsgálathoz való hozzájárulást jobb a randomizáció előtt kérni, nem utána, hogy a szelektív kimaradások számát csökkenteni lehessen.

3. (a) Az eltérés 1 pont, standard hibája 1,75 pont. Véletlen ingadozásnak látszik. Összehasonlítható a két csoport – jó volt a randomizálás.
(b) Itt 9 pont a különbség, ugyanazzal az 1,75-ös standard hibával. Így $z \approx 5$, és $P \approx 0$. Valami baj volt a randomizálással.

*Megjegyzés:* A (b)-beli eltérést nem magyarázhatja a Wheaties-reggeli, mert a pelyheket csak a félév közbeni dolgozat után kezdték enni. Lásd a 2. fejezet 5. szakasz „A" 7. feladatát. Gabonapelyhekkel kapcsolatos valódi vizsgálat található N. Vaisman et al.: „Effect of breakfast timing on the cognitive functions of elementary school students", *Archives of Pediatric and Adolescent Medicine* vol.150 (1996), 1089–1092.old.; a reggeli jót tesz a teszteredményeknek.

4. (a) A két mintaátlag között az eltérés 0,1, a standard hiba 0,13. Így $z \approx 0{,}8$, és $P \approx 21\%$. Véletlen ingadozásnak tűnik.
(b) Mások a véletlen számok; továbbá más tényezők is hathatnak – más lehet az időjárás, változhatnak a náthavírusok stb. Végül is a két vizsgálatban nem ugyanazok az emberek vesznek részt, és nem is ugyanakkor.

5. (a, b) Igaz.
(c) Téves. Látjuk mindkét mintaátlagot, nem függetlenek, nem érvényes rájuk a négyzetgyökszabály (1. szakasz).

## „D" feladatsor

1. (a) $\boxed{0}\;\boxed{1}$
(b) Az A változatra: a műtét pártján; a B-re: a sugárkezelés pártján.
(c) Csak a (ii).
(d) Az A változatot olvasó diákok 84 + 112 = 196-an voltak; közülük $112/196 \cdot 100\% \approx 57\%$ volt a műtét pártján. A B változatot olvasó diákoknak körülbelül 83%-a volt a műtét pártján. Az eltérés közöttük 26%, az eltérés standard hibája körülbelül 5,2%. Így $z \approx 5$ és $P \approx 0$. Az eltérést nehezen magyarázhatja véletlen ingadozás.

2. „Százalék" annyit tesz, hogy hány darab, százanként. Ebben a feladatban olyan kicsinyek az arányszámok, hogy kényelmesebb őket százezrelékben kifejezni. A beoltott csoportban 57/200 000 volt a megbetegedettek aránya, ez 28,5 százezrelék. Az esetek számának standard hibája

$$\sqrt{200000}\cdot\sqrt{\frac{57}{200000}\times\left(1-\frac{57}{200000}\right)}\approx 8$$

(A számítási recept tárgyában lásd a 17. fejezet 4. szakaszát.) Így az arányban mutatkozó standard hiba 8/200 000, ami 4 százezrelék. A placebo csoportban 71 százezrelék volt a betegek aránya, s 6 százezrelék az arányban mutatkozó standard hiba. Az arányok közötti eltérés standard hibája így

$$\sqrt{4^2 + 6^2} \text{ százezrelék.}$$

Az arányok között az eltérés 28,5 – 71 = –42,5 százezrelék. Ennek az eltérésnek a nullhipotézis alapján 0 a várható értéke. Így $z \approx -42{,}5/7 \approx -6$. Az arányok közötti eltérést nem magyarázhatja a sorshúzásnak a randomizációkor fellépő szeszélye. Működik az oltás.

3. (a) $z \approx -2{,}4$, $P \approx 1\%$, szignifikáns; a szűrés megelőzi az emlőrák miatti haláleseteket, az eltérés nehezen magyarázható véletlen ingadozással.
(b) $z \approx -1$, $P \approx 16\%$, nem szignifikáns; az emlőrák ritka – a szűrés hatása a teljes halálozási arányszámon nem kimutatható.

4. (a) A két mintaátlag közötti eltérés 900 órányi, az eltérés standard hibája körülbelül 300 óra. Így $z \approx 3$, $P$ körülbelül 1 ezrelék. Nehezen magyarázhatja az eltérést véletlen ingadozás. Következtetés: a negatív jövedelemadó hatására kevesebbet dolgoztak az emberek, de nem sokkal: 3 év alatt 900 ± 300 órányival. (3 év alatt 900 óra, ez nagyjából heti 6 óra.)
(b) A mintabeli százalékarányok eltérése 6%, és ennek az eltérésnek körülbelül 3% a standard hibája. Nehezen magyarázható véletlen ingadozással.

*Megjegyzések:* (i) A negatív jövedelemadó lehetővé tette, hogy az emberek egy kicsit kevesebbet dolgozzanak; legjelentősebbnek ez a hatás a dolgozó feleségeknél tűnt. (ii) A számítások hátterében ott húzódik egy hallgatólagos feltevés: hogy a családoknak a negatív jövedelemadóra adott válasza független a többi család adóügyi helyzetétől. Ha ez a feltevés komolyan hibás, akkor nemigen lehet a negatív jövedelemadó hatását mintavételes módon vizsgálni.

5. Erre a kérdésre a megadott információ alapján nem lehet válaszolni. Ha a kutatóknak két független mintája volna úgy, hogy egyik a Nagy-Britanniára, másik a Franciaországra vonatkozó kérdést kapta volna, akkor alkalmazhatnánk a 3. példa módszerét – de nem ez a helyzet, nincs két független minta. A kutatóknak egyetlen mintájuk van, s a mintába került mindegyik diáktól két válaszuk:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | Nagy-Britanniát és Franciaországot is megtalálta a térképen; |
| 1 | 0 | megtalálta Nagy-Britanniát; nem találta Franciaországot; |
| 0 | 1 | nem találta Nagy-Britanniát; megtalálta Franciaországot; |
| 0 | 0 | egyik országot sem sikerült megtalálnia. |

A kutatók a teszt pontozásakor mindkét választ megfigyelik; emiatt más a helyzet, mint a 4. szakaszban látott kísérletben, ahol a két válasz közül csak az egyiket lehetett megfigyelni.


*Megjegyzés:* Ha ismerjük, hogy az előbb felsorolt négy kategória közül melyikbe hány százalék esik, akkor, haladottabb statisztikai módszerekkel, lehet a kérdésre válaszolni.

6. (a) Becsületes kétmintás $z$-próba, olyan, mint a 2. szakaszban, mert két független egyszerű véletlen mintánk van. Az 1979-es százalékarány standard hibája 1,6%-ra becsülhető; ugyanekkora becslés adódik az 1987-es százalékarány standard hibájára. Az eltérés standard hibája a négyzetgyökszabály alapján (1. szakasz) számítható, $\sqrt{1{,}6^2 + 1{,}6^2} \approx 2{,}2\%$. A megfigyelt eltérés 52 – 60 = –8%. A különbséget a nullhipotézis alapján 0-nak várnánk. Így lesz $z$ = (megfigyelt–várható)/standard hiba = –8/2,2 ≈ ≈ –3,6, és $P \approx 1/10\,000$. Valósnak tűnik az eltérés.
(b) Nem lehet megállapítani. A 2.szakaszban látott módszer itt nem alkalmas, mert nincs két független mintánk. A 3–4. szakaszbeli módszer sem jó, mert minden alanynál két választ figyelünk meg. Lásd a 4. feladatot is.

7. (a) A két mintából származó százalékarány között 0,6% az eltérés, viszont 3,6% az eltérés standard hibája. Ez véletlen ingadozásnak tűnik. Az üvegből táplálás megnehezítésének a későbbi szoptatásra semmilyen hatása nincsen.
(b) Az eltérés 20,9 ml/nap, standard hibája 3,1 ml/nap. Ezt gyakorlatilag lehetetlen véletlen ingadozással magyarázni. Úgy tűnik, az etetési szokásokra valóban hat a két szülészet eltérő kezelésmódja.
(c) Az eltérés 0,9%, standard hibája 0,14%. Tehát $z \approx 6{,}4$. A táplálék kiegészítésének megnehezítése növeli a súlyveszteséget: ez kedvezőtlen mellékhatás.
(d) A két mintaátlag közötti különbség 27 gramm, a különbség standard hibája körülbelül 31 gramm. Ez véletlen ingadozásnak látszik – jól sikerült a randomizáció.

*Megjegyzések:* (i) Van (c)-ben egy ravasz buktató. A súlyveszteséget minden csecsemőnél a születéskori súly százalékában mérjük. Ezek a százalékok kvantitatív adatok – átlagot és szórást számolunk belőlük.
(ii) A kísérlet azt mutatja, hogy a táplálék pótlásának megnehezítése nem segíti elő a szoptatást, viszont van egy rossz mellékhatása: a súlyveszteség. Ezt a megfigyeléses vizsgálatok nem vették észre. Az ok: egy fontos egybemosó-változó. A gon-

doskodó anyák inkább szoptatnak a kórházban, az ő babáik kevesebb tápszert kapnak. Ugyanők később is inkább fogják szoptatni a gyermeket, így a kórházbeli cumisüveg-használat és a későbbi szoptatás között negatív kapcsolat jön létre. Ez a kapcsolatot azonban egy harmadik tényező hozza létre – az anya személyisége.

## 28. FEJEZET. A $\chi^2$-PRÓBA

### „A” feladatsor

1. (a) 90% (b) 10% (c) 1%

2. Körülbelül 10%.

   *Megjegyzés:* Hasonlítsa ezt össze 1(c)-vel. A szabadságfok növekedtével a görbe jobbra tolódik és széjjelebb terül, így 10 szabadságfokú görbe alatt nagyobb a 15,09-től jobbra eső terület, mint 5 szabadságfokú görbe alatt.

3. $\chi^2 = 13{,}2$, $d = 5$; $1\% < P < 5\%$; valójában $P \approx 2{,}2\%$.

   *Megjegyzés:* $d$ = szabadságfok. Az adatok nem igazán illeszkednek a modellhez.

4. $\chi^2 = 1{,}0$, $d = 5$; $95\% < P < 99\%$.

5. $\chi^2 = 10{,}0$, $d = 5$; $5\% < P < 10\%$; valójában $P \approx 7.5\%$.

   *Megjegyzés:* Hasonlítsa össze a 4-es és az 5-ös feladatot. Pusztán 10-szeresére növeltünk minden megfigyelt gyakoriságot. A százalékok ettől egyáltalán nem változtak. De a $\chi^2$-próba eredménye függ attól, hogy mekkora a minta. Amikor nagy a minta, olyankor a $\chi^2$-próba nagyon jó modelleket is megcáfol. Többet erről a következő feladatokban és a 29. fejezetben.

6. $\chi^2 \approx 18{,}6$, $d = 5$; $P < 1\%$ – noha a legtöbb célra a kocka annyira szabályos, amennyire csak kívánni lehet; többet erről a 29. fejezetben.

7. (a) Téves; jobb a $\chi^2$-próba; lásd a 28. fejezet 1. szakaszt.
   (b) $\chi^2$
   (c) Igaz.
   (d) Várható; például az 1. sorban a várható gyakoriság $0{,}42 \cdot 66 \approx 27{,}7$; lásd a 28. fejezet 1. szakaszt.
   (e) Lássuk a $\chi^2$-próbával kapcsolatos lépéseket:

| *Életkor* | *Megfigyelt* | *Várható* |
|---|---|---|
| 21–40 | 5 | 27,7 |
| 41–50 | 9 | 15,2 |
| 51–60 | 19 | 10,6 |
| 61– | 33 | 12,5 |

$\chi^2 \approx 61$, $d = 3$, $P \approx 0$. Egyszerű véletlen mintavételnél gyakorlatilag lehetetlen, hogy az esküdtek összetétele ennyire különbözzék a megye életkor-megoszlásától. Következtetés: a nagyesküdtszékeket nem véletlenszerűen állítják össze.

*Megjegyzések:* (i) A várható gyakoriság törtszám is lehet.
(ii) A nagyesküdtszékekbe bírák jelölnek, és ők az idősebb esküdteket előnyben részesítik.

8. Ez nem jó módszer.A $\chi^2$-képletben gyakoriságok szerepelnek – darabszámok, nem százalékok. (Lásd a fenti 4. és 5. feladatot.)

9. (a) 12-szer.
(b) $\chi^2$-próbával dolgozunk. A $\chi^2$-statisztikák: A) 15,2, B) 26,7, C) 7,5, D) 16,5. A 9-es szabadságfoknál 14,68 a 10%-os szint, 16,92 az 5%-os szint, és 21,67 az 1%-os szint. Ezek szerint A épphogy megfelel, B elfogadhatatlan, C teljesen rendben van, D épphogy megfelel.
(c) Az ismételt vizsgálaton az A szettre vonatkozó $\chi^2$ értéke 14,5 volt, a D-é 18,8. D használhatatlan, s talán A is az.

10. (a) A $\chi^2$-próba alkalmas a feladatra.
(b) Ezt nem lehet megcsinálni: a két dobozban megegyezik az 1-esek, s ugyanígy a 2-esek, a 3-asok stb. aránya is; nem tudunk köztük a próbával különbséget tenni.

### „B" feladatsor

1. Összevont $\chi^2 = 13{,}2 + 10 = 23{,}2$; $d = 5 + 5 = 10$; $P \approx 1\%$.

2. Nem: nem függetlenek a kísérletek.

3. $\chi^2 \approx 0{,}5$; $d = 3$; $P \approx 8\%$. Nem perdöntő, mindazonáltal kozmetikázásra utal.

### „C" feladatsor

1. Nagyszerű! A szövegben adott eljárás szerint $(28/2237) \cdot 1170$-et kell kiszámítani. A feladatbeli szerint $(1170/2237) \cdot 28$-at. Ugyanazt az eredményt adják: $28 \cdot 1170 =$ $= 1170 \cdot 28$.

2.

*Megfigyelt*

| | | |
|---|---|---|
| 2792 | 3591 | 6383 |
| 1486 | 2131 | 3617 |
| 4278 | 5722 | 10 000 |

*Várható*

| | |
|---|---|
| 2730,6 | 3652,4 |
| 1547,4 | 2069,6 |

*Eltérés*

| | |
|---|---|
| 61,4 | -61,4 |
| -61,4 | 61,4 |

$$\chi^2 \approx 6{,}7,\ d = 1,\ P \approx 1\%.$$

A várható gyakoriságok kiszámítása a 28. fejezet 4. szakaszában bemutatott módon történik: például azon férfiak számának várható értéke, akik szavaztak, $(4278/10\,000) \cdot 6383 \approx 2730{,}6$.

*Megjegyzések:* (i) A férfiaknak 65%-a, míg a nőknek 63%-a vett részt a választáson. Az eltérés kicsi, becslése viszont pontos, mivel a minta nagy. $P$-ből nem derül ki más, csak az, hogy magyarázható-e az eltérés véletlen ingadozással. Bővebbet erről a 29. fejezetben.
(ii) $2 \times 2$-es táblázatnál $z$-próbával is, $\chi^2$-próbával dolgozhatunk: 27. fejezet 3. jegyzet.

3. Válassza a (iv)-est; $z$-próbával a kettőnél több kategória miatt nem dolgozhatunk; a nullhipotézisből pedig nem derül ki, hogy mi van a dobozban.

*Megfigyelt*

| | | |
|---|---|---|
| 21 | 9 | 30 |
| 20 | 39 | 59 |
| 7 | 7 | 14 |
| 48 | 55 | 103 |

*Várható*

| | |
|---|---|
| 14,0 | 16,0 |
| 27,5 | 31,5 |
| 6,5 | 7,5 |

*Eltérés*

| | |
|---|---|
| 7,0 | −7,0 |
| −7,5 | 7,5 |
| 0,5 | −0,5 |

$$\chi^2 \approx 10,\ d = 2,\ P < 1\%.$$

A várható gyakoriságokat úgy számítottuk ki, mint a 28. fejezet 4. szakaszában: például a nőtlen férfiak várható száma $(48/103) \cdot 30 \approx 14{,}0$. A nők általában a férfiaknál korábban házasodnak; így a 25–29 éves korcsoportban a várhatónál több a nő a házasok között. („Várható” – úgy értve, mit várnánk annak a nullhipotézisnek az alapján, hogy a férfiak és a nők között ugyanolyan a családi állapot szerinti megoszlás.) A hiányzó férjeket a magasabb korcsoportokban – pl. 30–34 évesek – találjuk.

4. A *Rendszeres Népességfelmérés* mintája nem egyszerű véletlen minta; a képletek erre nem érvényesek; nem hagyhatjuk figyelmen kívül a mintavételkor alkalmazott csoportosítást.

5. Átlagokat vizsgálunk, tehát $z$-próbát kell használni, nem $\chi^2$-próbát. Két mintánk van, nem csak egy, tehát a (ii)-es válasz a helyes: $z \approx (36\,400\$ - 28\,100\$)/1700\$ \approx 5$, $P \approx 0$. Az eltérés valósnak tűnik: végezz egyetemet, többet fogsz keresni.

6. Mintabeli százalékarányt hasonlítunk külső etalonhoz, így az (i)-es válasz helyes: $z \approx (568 - 550)/15{,}7 \approx 1{,}15$; $P$(kétoldali) $\approx$ 25%. Semmi baj a demográfusok elméletével.

   A feladat a (iii)-as módszerrel is megoldható: a dobozban 55 darab 1-es és 45 darab 0-s van; 1000 húzást végzünk, véletlenszerűen, visszatevéssel; végezzünk $\chi^2$-próbát.

   *Megjegyzés:* Amikor csak kétféle lap van a dobozban, akkor a $z$-próbát is, a $\chi^2$-próbát is használhatjuk. A $\chi^2$-próba ilyenkor pontosan azt az eredményt adja, mint a kétoldali $z$-próba, mivel $\chi^2 = z^2$.

7. Válassza a (iii)-as válaszlehetőséget. Az, hogy az adatok $2 \times 2$-es táblázatban vannak, még nem jelenti, hogy függetlenségvizsgálatról van szó. Elvégeztük a $\chi^2$-próbát (lásd alább) – csak gyenge bizonyítékot látunk a nullhipotézis ellenében.

| | *Dobások* | *Valószínűség* | *Várható* | *Megfigyelt* |
|---|---|---|---|---|
| Páros, nagy | 4;6 | 2/6 | 200 | 183 |
| Páros, kicsi | 2 | 1/6 | 100 | 113 |
| Páratlan, nagy | 5 | 1/6 | 100 | 88 |
| Páratlan, kicsi | 1;3 | 2/6 | 200 | 216 |

$$\chi^2 \approx 6,\ d = 3,\ P \approx 10\%.$$

## 29. FEJEZET. SZIGNIFIKANCIAPRÓBÁK, KÖZELEBBRŐL

### „A” feladatsor

1. (a) Igaz. (b) Igaz. Lásd a 26. fejezet 4. szakaszt.

2. (a) Téves. (b) Téves. Lásd a 26. fejezet 3. szakaszt.

### „B” feladatsor

1. (a) körülbelül 5-nek. (b) 4-en. (c) körülbelül 1-nek.

   *Megjegyzés:* Ha 100 érmével dobunk, körülbelül 50 fejet várhatunk. Amikor fennáll a nullhipotézis, 5% valószínűséggel kapunk „szignifikáns” eredményt; tehát 100 esetből 5-nél számíthatunk erre.

2. (a) 25 (b) $\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$
   (c) A rangszámok összege olyan, mint 25 – véletlenszerű, visszatevéses – húzás összege az $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}$ dobozból.

3. (a) Körülbelül hárman. A nullhipotézis szerint a találatok száma olyan, mint 25 húzás összege a $\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$ dobozból, így körülbelül 3% annak a valószínű-

sége, hogy „szignifikáns” eredményt kapjunk. (A valószínűséget közvetlenül a 3. feladat előtt megadtuk.)
(b) körülbelül 5-en.
(c) körülbelül 5-en.

4. Ötnél némileg több. Már az első próba körülbelül 3% valószínűséggel „szignifikáns” eredményt produkál; a második és a harmadik külön-külön 5-5% valószínűséggel. Így annak a valószínűsége, hogy legalább az egyikük talál valamit, valamennyivel több lesz 5%-nál.

   *Megjegyzés:* A szignifikanciavadászattal az a baj, hogy szinte teljesen értelmetlenné teszi a szignifikanciaszinteket. Aki elég sokáig keres, az biztosan talál előbb vagy utóbb valamit – de amit talál, esetleg nem jelent majd semmit.

5. Szignifikanciavadászat ez is. Huszonöt különböző hipotézis ellenőrzésekor valószínűleg felbukkan egy-két szignifikáns eredmény.

6. Kétoldali.

7. Egyoldali.

8. (a) Igen; $P \approx 4\%$.
   (b) Nem; $P \approx 96\%$.
   (c) Nem; $P \approx 8\%$.

9. A vizsgálatot végző orvosok nagyobb valószínűséggel írnak cikket arról, ha szokatlanul magas halálozási arányszámmal találkoznak – és erre kis mintáknál nagyobb az esély: ilyenkor könnyebben adódik nagy ingadozás. Chalmers megfogalmazása: „Az orvosok hajlamosabbak a szokatlanról beszámolni.”

**„C” feladatsor**

1. (a) Téves. (b) Téves. Lásd a 29. fejezet 3. szakaszát.

2. A kérdés értelmes, mivel egyszerű véletlen mintákkal van dolgunk, és kétmintás $z$-próbával lehet rá válaszolni:

   a férfiak átlagának standard hibája $\approx 1$, a nők átlagának standard hibája $\approx 1$
   a különbség standard hibája $\approx \sqrt{1^2 + 1^2} \approx 1{,}4$, $z \approx 1{,}4$, $P(\text{egyoldali}) \approx 8\%$.

   Ez lehet véletlen ingadozás.

3. Mindkét átlagnak 0,5 a standard hibája, így a különbségé 0,7 lesz, $z \approx 2{,}8$, és $P$ lecsökken negyed százalékra.

*Megjegyzés:* A megfigyelt szignifikanciaszint függ a mintanagyságtól. A kisebb mintánál az eltérést 2 ± 1,4 pontnak becsülhettük; a nagyobbikban 2 ± 0,7 pontnak.

4. Tulajdonképpen nincs vele semmi baj. Mégis, előfordul, hogy a nullhipotézist egy jelentéktelen eltérés miatt vetjük el, ha a minta nagy. Kis mintáknál pedig egészen nagy eltérés is lehet statisztikailag „nem szignifikáns".

5. $P$ = 27%. A nullhipotézisnek a nagy $P$ jó, a kis $P$ rossz.

6. (a) Használható a kétmintás $z$-próba. (Az eset a sugárkezelést illetve a műtétet pártoló orvosokról szóló példával analóg; 27. fejezet 4-es szakasz.)
(b) Ha $P$(egyoldali) ≈ 2%, akkor $z \approx 2$. Az eltérés 71,5 – 25 = 46,5 százalékpont, azaz a standard hiba úgy 23 százalékpont körül lehetett.
(c) A 25% és a 71,5% között rettentő nagy a különbség.
(d) Hogy lássuk, mivel járul hozzá a vitához a $P$-érték, képzeljük el, hogy a folyóirat szerkesztői azt mondják,

> Nézze. Van néhány recenzensünk, aki kritikusabb a többinél. A sorshúzás szeszélyéből most túl sok ilyen került azok közé, akiknek a negatív változatot kellett megbírálniuk.

A $P$-érték annyit mond, hogy a szerkesztők, ha nem akarják magukat kinevettetni, nem védekezhetnek a „pusztán balszerencse" érvvel. A 71,5% és a 25% összehasonlításában a $P$-érték semmit sem segít.
(e) A kutatásban bebizonyosodott, hogy a bírálati eljárás nem elfogulatlan. A recenzensek nagyobb valószínűséggel fedeznek fel hibát egy olyan közleményben, amellyel nem értenek egyet – ami teljesen érthető.

*Megjegyzés:* A megfigyelt eltérés 46 százalékpont volt. E becslésen ±23 pontnyi a standard hiba. Az eltérés nagy, becslése viszont nagyon pontatlan. (Pontosabb becsléshez nagyobb mintára lett volna szükség, amit nem lett volna könnyű elérni: nem volt több recenzens.) A $P$-érték annyit mond, hogy az eltérés nehezen magyarázható véletlen ingadozással.

7. A $P$-érték az eltérés nagyságát nem méri, tehát pusztán a $P$-értékből semmiképpen sem lehet megmondani, erős vagy gyenge-e a hatás.

8. 99%-os konfidenciaintervallum: –6 ± 2,6 standard hiba, azaz –6 ± 6,5. Ez a becslés nem igazán pontos. A $P$-érték arra mutat, hogy az árrugalmasság feltehetőleg nem pontosan 0; de nem is mondta senki, hogy annyi lenne. A próbák használata itt nem megnyugtató; a modell sem.

**„D" feladatsor**

1. A kétmintás $z$-próba nem jó, mivel nincsenek véletlen mintáink. Mindenesetre a diákok a tanársegédekhez képest igen jól szerepeltek.

2. Statisztikai szignifikanciának itt nemigen van értelme. A két belső bolygó nem a belső bolygók populációjából vett kételemű véletlen minta. *Ők* a belső bolygók. Ugyanez a helyzet a külsőkkel.

3. Nem jó ide a szignifikanciapróba. Ez nem valószínűségi minta.

4. Értelmes a kérdés, mivel valószínűségi mintáról van szó. A megadottak alapján azonban nem lehet rá válaszolni. Csoportos mintavételről van szó, az egyszerű véletlen mintára vonatkozó képletek tehát nem alkalmazhatók; lásd 21. fejezet 4. szakasz, és 22. fejezet 5. szakasz.

   *Megjegyzés:* Más vizsgálatokhoz hasonlóan itt is a magasabb jövedelmű családokban jobb a gyermekek intelligenciatesztekben nyújtott teljesítménye.

5. Ilyen nagy mintánál valószínűleg egy egészen kis különbség is erősen szignifikáns lesz.

   *Megjegyzés:* Vitathatóak lehetnek a vizsgálatban alkalmazott statisztikai módszerek is.

6. Olyan adatokon végeznénk szignifikanciapróbát, melyek egy teljes populációra – „az elitekre" – vonatkoznak. Így itt nincs értelme dobozmodellnek.

**„E" feladatsor**

1. A vizsgálatban a korábbi évek adataihoz hasonlították a mulasztott napok számát. De az idei év talán más, mint a tavalyi (kevésbé szigorú az időjárás, érdekesebb a munka stb.). Jobb lenne kortárs kontrollal vetni egybe a rugalmas munkaidőben dolgozók mulasztásait. Továbbá, hogy akiknek nincs lehetőségük rugalmas munkaidőben dolgozni, ne érezzék ezt sérelmesnek, érdemes lehetne teljes munkahelyi egységeket a kezelt, illetve a kontrollcsoportba sorolni.

2. Ezt a vizsgálatot nagyon jól megtervezték. Jogos arra következtetni, hogy az oltás védte meg a gyerekeket a gyermekbénulástól. A kísérleti terv minden más szóbajöhető magyarázatot (például a placebo-hatást) kizárt.

3. Nem. A $P$-érték annyit mond, hogy nem okozhatja a növekedést az a véletlenszerűség, ami az állatok két csoportba sorolásakor lépett fel. Hogy a patkányoknak

adott nagy dózisokról az embereknek adott kis dózisokra lehessen általánosítani, abban a *P*-érték nem segít.

4. Hol a modell? Miért bizonyítana diszkriminációt az alacsonyabb jövedelem? (Meg kellene nézni a képzettséget, a produktivitást, a tapasztaltságot stb.) S ha ez a szakértő feltétlenül ragaszkodik egy szignifikanciapróbához – ezek a párok egyáltalán nem függetlenek. Pl. ha lenne egyetlen kiemelkedő fizetésű férfi, ő egymaga 16 párban szerepelne.